Bases y marcos de fusión de espacios invariantes por traslaciones enteras

Kovac, Federico D.

2015-06-02

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Bases y marcos de fusión de espacios invariantes por traslaciones enteras

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Federico D. Kovac

Director de tesis: Carlos Cabrelli
Consejero de estudios: Carlos Cabrelli

Lugar de trabajo: Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa

Buenos Aires, Marzo de 2015

Fecha de Defensa: 2 de Junio de 2015

Bases y marcos de fusión de espacios invariantes por traslaciones enteras

En el presente trabajo aparecen principalmente dos conceptos: en primer lugar, el concepto de *marco de fusión* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (introducido en [CK04]), y estructuras relacionadas que pueden formar una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$, tales como sucesión de Bessel de subespacios, descomposiciones de Riesz, y familias biortogonales de subespacios. En segundo lugar, se trabaja con el concepto de espacio invariante por traslaciones enteras en $L^2(\mathbb{R}^n)$. El objetivo principal del mismo es la caracterización de estas estructuras que puede tener una familia de subespacios, para el caso particular de los espacios invariantes por traslaciones enteras.

En [CK04] y en otros trabajos posteriores ([Sun06], [CKS08], [Asg09]) se dan algunas caracterizaciones de estas estructuras de familias de subespacios, similares a sus homónimas vectoriales. Completamos dicha caracterización, sobre todo en lo referente a la existencia de familias biortogonales de subespacios y a las condiciones bajo las cuales una familia de subespacios forma una descomposición de Riesz. Presentamos además una técnica para refinar marcos de fusión.

En cuanto a lo referente a espacios invariantes por traslaciones enteras, se presentan los resultados generales, poniendo particular énfasis en las "técnicas de fibración", procedimiento que aparece como adecuado en esta teoría para caracterizar las cuestiones referentes a estos espacios. Un comportamiento típico de los espacios invariantes por traslaciones enteras es que, en general, las preguntas puestas sobre ellos se puede contestar mediante una pregunta análoga sobre los espacios fibra con cierta condición de uniformidad: familias que son base de Riesz, sucesión de Bessel, marco, operadores invariantes por traslaciones, son ejemplos de objetos que pueden caracterizarse, en un espacios invariantes por traslaciones enteras, mediante un análogo en los espacios fibra con cierta condición de uniformidad. La caracterización obtenida en este trabajo para familias de espacios vectoriales $\{W_i\}_{i\in I}$ en el caso de espacios invariantes por traslaciones enteras se puede sintetizar de la siguiente manera: se tiene cierta estructura en la familia de espacios original (existencia y unicidad de familias biortogonales, sucesión de Bessel de subespacios, base de Riesz de subespacios, marco de fusión) si y solo si la misma estructura esta presente en los espacios de fibras, con alguna condición de uniformidad.

Palabras clave: Espacios invariantes por traslaciones enteras; técnicas de fibración; marcos de fusión; bases de subespacios; descomposiciones de Riesz; refinamiento en marco de fusión.

Fusion Basis and Frames of Shift Invariant Spaces.

In the present work we first considered the notion of *Fusion Frames* in a Hilbert space (introduced in [CK04]), and related structures that a family of closed subspaces $\{W_i\} \subset \mathcal{H}$, can have, such as Bessel sequences of subspaces, Riesz decompositions and biorthogonal families of subspaces. In a second part we studied these concepts for the particular case of shift invariant spaces in $L^2(\mathbb{R}^n)$ and obtain special characterizations.

In [CK04]), and also in later works ([Sun06], [CKS08]) [Asg09]), characterizations of these structures of subspaces are provided, similar to the ones for the vector space case. We extend these characterizations for the case of the existence of biorthogonal families of subspaces and Riesz decompositions. We also introduce a technique to refine fusion frames.

For the case of shift invariant spaces, we introduce first, the known results about its structure putting special enphasis in the fiberization techniques, that are the right tool to study these subspaces.

We obtained characterizations of all the structures mentioned above, as frames, Riesz basis, etc, of subspaces, for the case of shift invariant spaces, in terms of the same structures of fiber spaces associated to them, with some uniformity condition.

Keywords: Shift Invariant Spaces; Fiberization techniques; Fusion Frames; Basis of Subspaces; Riesz decompositions; Refinement of Fusion Frames.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo aparecen principalmente dos conceptos: en primer lugar, el concepto de *marco de fusión* en un espacio de Hilbert, y estructuras de familias de subespacios relacionadas, como *sucesión de Bessel de subespacios*, *descomposición de Riesz de subespacios*, y *familias biortogonales de subespacios*. En segundo lugar, el de espacio invariante por traslaciones enteras en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Tenemos como objetivo principal la caracterización de estas estructuras, que puede tener una familia de subespacios, para el caso particular de los *espacios invariantes por traslaciones enteras*.

Para entender la génesis del concepto de marco de fusión, es necesario tener presente el concepto de marco en un espacio de Hilbert: una sucesión $\{f_i\}_{i\in I}$ es un marco con constantes α y β en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ si para cada elemento $f \in \mathcal{H}$ se cumple que

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2$$

Nos referiremos a este tipo de marco como un *marco vectorial*. Resulta redundante a esta altura de la historia, resaltar la importancia de los marcos en los espacios de Hilbert: desde su introducción en 1952 por R. J. Duffin y A. C. Schaeffer en [DS52], y su posterior redescubrimiento en 1986 por I. Daubechies, A. Grossman y Y. Meyer en [DGM86], ha habido una explosión en cuanto a su desarrollo, tanto por sus numerosas aplicaciones en cuestiones tecnológicas (procesamiento de señales digitales) como por la elegancia de los resultados matemáticos en sí. Los marcos proveen una versión más flexible de lo que representa una base ortonormal, o meramente una base en un espacio de Hilbert, permitiendo expresar cada elemento del espacio como combinación lineal (probablemente infinita), pero admitiendo redundancia y, por lo tanto, facilitando la detección y/o eliminación estadística de errores, por ejemplo en el proceso de reconstrucción de una señal transmitida (o guardada) con errores. Junto con el concepto de marco de un espacio de Hilbert, avanzan en el desarrollo estructuras afines como base de Riesz, familias biortogonales de vectores, marcos duales y sucesiones de Bessel. Entre los resultados desarrollados, se dan condiciones bajo las cuales un marco (o una sucesión cualquiera) resulta una base de Riesz. Estas caracterizaciones, típicas a esta altura de la historia, están incluidas en la mayoría de los libros de referencia actuales (ver por ejemplo [Chr03] ó también [Hei11]).

En este proceso de estudio y evolución de los marcos, aparecen diferentes generalizaciones de los mismos. En el año 2004, Casazza y Kutyniok introducen en [CK04] los marcos de subespacios, renombrados en un trabajo posterior (ver [CKS08]) como marcos de fusión, en búsqueda de condiciones bajo las cuales fuera posible juntar marcos (vectoriales) de diferentes subespacios para obtener un marco de todo el espacio. Esta idea ya había sido explorada por otros autores, por ejemplo en [ACM04].

Los marcos de fusión se presentan en [CK04] como el marco adecuado para modelar los denominados *procesos distribuidos.* En estos, una señal se estudia primero localmente (en un subespacio), utilizando marcos vectoriales, y luego de manera global, utilizando la información (preferentemente redundante) de los subespacios para reconstruirla.

Formalmente, una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es un marco de fusión con constantes α y β si para cada elemento f de $\mathcal{H}$ se tiene que

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2 ,$$

donde P_{W_i} denota la proyección ortogonal sobre el subespacio W_i. En [CK04] se introducen también las nociones de *sucesión de Bessel de subespacios*, *familias biortogonales de subespacios*, y de *descomposición de Riesz,* esta última como un caso particular de los marcos de fusión donde no hay redundancia, destacando siempre su analogía (o no) con sus homónimos vectoriales. En este trabajo y en otros posteriores ([Sun06], [CKS08], [Asg09]) se dan algunas caracterizaciones de estas estructuras de familias de subespacios, similares a las vectoriales, quedando otras pendientes. En este punto en particular se centra la primer parte de esta tesis: explorar caracterizaciones que puedan admitir las estructuras de familias de subespacios, similares a las caracterizaciones usuales de sus pares vectoriales. En particular, en este trabajo tomamos como base o guía el "relato vectorial" de [Hei11], y llevamos dicho relato a familias de subespacios. Cabe destacar que en el trabajo original [CK04], los autores definen los marcos de fusión utilizando "pesos", pero en este trabajo decidimos, tanto para simplificar la notación como para resaltar las analogías con el caso vectorial, usar la versión sin pesos. De cualquier manera, los resultados enunciados se generalizan fácilmente al caso con pesos.

En [CK04] se introduce la noción de familias biortogonales de subespacios, y se dan condiciones para la existencia de una familia biortogonal, pero en dicho trabajo, en lugar de explorar las condiciones bajo las cuales esta familia biortogonal es única, se hace referencia a que "hay una única familia maximal". Establecemos condiciones que equivalen a existencia de una única familia biortogonal, y estas condiciones nos llevan a proponer una definición de familia de subespacios *exacta*, que nos parece más adecuada que la copia literal del caso vectorial (minimal total, ver [Hei11]), pero que extiende a esta (sin embargo, hay que tener cuidado: no se debe confundir una *familia* exacta con un *marco* exacto: dentro del contexto de los marcos (vectoriales) o los marcos de fusión, la palabra exacta es utilizada con otro sentido). En este punto, se corrige además un error de [CK04], donde se afirma que hay equivalencia entre familia minimal y que la unión de bases ortonormales de dicha familia sea una familia minimal de vectores. Se establece el resultado correcto (la noción de familia de subespacios minimal es algo más débil que su par vectorial), y se provee un ejemplo que muestra que esta situación no es mejorable. Finalmente, caracterizamos la existencia y unicidad de familias biortogonales en términos de proyecciones ortogonales.

En cuanto a las descomposiciones de Riesz, estructuras que nosotros llamamos base de Riesz de subespacios, fueron introducidas en [CK04] como un caso particular de marco de fusión donde no hay redundancia, y se prueba en dicho trabajo que esto es equivalente a que la familia de subespacios sea imagen por isomorfismo topológico de una descomposición ortogonal (esto sería el equivalente para familias de subespacios de lo que en [Hei11] y en muchos trabajos más se toma como definición de base de Riesz vectorial). Posteriormente, en [Sun06] y en un contexto más general, se prueba otra condición equivalente, referida a la equivalencia entre el cuadrado de la norma de la suma y la suma del cuadrado de las normas, Concretamente, se muestra que una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es una descomposición de Riesz si es total y satisface una desigualdad del tipo

$$\alpha \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I} f_i \right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \qquad \forall \; \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$$

(desigualdad en extremo familiar dentro del contexto de las bases de Riesz vectoriales).

Nosotros partimos de la que nos parece la "copia natural" de la definición vectorial de base de Riesz: la imagen por un isomorfismo topológico entre espacios de Hilbert de una descomposición ortogonal de subespacios (es decir, en principio no como un caso particular de los marco de fusión), y completamos una caracterización de familias de subespacios que son base de Riesz de subespacios, similar a la existente para sucesiones de vectores. Debido a que algunas caracterizaciones de sucesiones que resultan bases de Riesz (vectoriales) recaen en el concepto llano de base, o base de Schauder en un espacio de Hilbert, vimos necesario definir la noción de base de subespacios para un espacio de Hilbert, y estudiamos las propiedades elementales. Esta definición no es nueva: dichas bases de subespacios resultan ser un caso particular de las conocidas como "descomposiciones de Schauder" para un espacio de Banach, en un contexto más general. Pero tal nivel de generalidad es en extremo excesivo para la presente tesis. Enunciamos las propiedades básicas de bases de subespacios que necesitamos para el desarrollo de la presente tesis, y, si bien la mayoría se puede deducir del caso más general de Descomposiciones de Schauder, incluimos demostraciones sucintas de ellas, por ser en general más simples e intuitivas en un espacio de Hilbert. Es decir, hemos hecho muchas demostraciones en el contexto de espacios de Hilbert porque resulta más sencillo entenderlo de esta manera que "traducir" la versión para espacios de Banach. Un compendio de resultados sobre descomposiciones de Schauder se puede encontrar en [Si81].

La caracterización presentada (de familias de subespacios que resultan base de Riesz de subespacios) es en términos de bases de subespacios incondicionales, en términos de producto interno, en términos de los "coeficientes" utilizables, y por último en término de sucesiones de Bessel exactas y familias biortogonales. Además, mostramos que toda base incondicional de subespacios es sucesión de Bessel de subespacios, al igual que en el caso vectorial.

Una diferencia importante en la teoría de marcos de fusión con respecto a su análogo vectorial, es la "utilidad" del dual canónico, el cual es de suma importancia (tanto teórica como práctica) en el caso vectorial, pero poco utilizado en el caso de marcos de fusión: de hecho, en el trabajo original [CK04] sólo se lo define y se da una demostración fallida de que es un marco de fusión. Dicho error es corregido en un trabajo posterior (ver [Gav06]), donde también se explora la noción de dual alternativo. Nosotros ofrecemos una demostración alternativa, y en extremo breve, pero incluimos la que aparece en [Gav06] porque utiliza herramientas que nos resultan útiles para la caracterización de las bases de Riesz de subespacios. Una de las dificultades inherentes es que, a diferencia del caso vectorial, en los marcos de fusión el espacio de análisis cambia con el marco, y por lo tanto el marco de fusión dual tiene diferente espacio de análisis que el marco de fusión original. En este trabajo presentamos, además, una caracterización de marco de fusión que es base de Riesz de subespacios por medio del marco de fusión dual, análoga a la siguiente condición vectorial: un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ con operador de marco S es base de Riesz si y solo si

$$\left|\left\langle f_i, S^{-1}f_i\right\rangle\right| = 1 \quad \forall\, i \in I.$$

Otro concepto explorado y que tiene relación con el marco de fusión dual es el de refinamiento. En el articulo original [CK04] se consigna de manera errónea que, si quitamos un subespacio de un marco de fusión, queda un marco de fusión o una familia no total. Este error fue notado en algunas publicaciones posteriores. Presentamos un ejemplo que muestra que, a diferenciad de su análogo vectorial, si quitamos un subespacio de un marco de fusión podemos obtener una familia total que no es marco de fusión. Aparece entonces el concepto de "refinar" un marco de fusión, quitando subespacios de la familia original (esto sería el análogo al concepto de refinamiento de un marco vectorial), ver por ejemplo [Asg09] y [XZD14], y mayormente en dimensión finita [CK08], o agregando la posibilidad de quitar un subespacio de alguno de los subespacios originales de la familia, como en [RS08] (esto no tiene análogo vectorial). En este trabajo exponemos un criterio que incluye ambos, y que permitiría, utilizando cierto operador, partir los subespacios originales del marco de fusión, detectando la parte "indispensable" (que resulta suma directa con la clausura del espacio generado por el resto), como aquella que, bajo ciertas condiciones, se puede desechar. Proveemos además de dos ejemplos que muestran que el procedimiento funciona de manera no trivial tanto para eliminar subespacios completos de un marco de fusión, como para detectar una parte indispensable y otra que se puede eliminar.

El segundo concepto fundamental sobre el cual se trabaja en esta tesis es el de espacio invariante por traslaciones enteras. Un subespacio V de $L^2(\mathbb{R}^n)$ se dice invariante por traslaciones enteras si satisface

$$f \in V \iff f(\cdot - k) \in V \ \forall\ k \in \mathbb{Z}^n.$$

La teoría de espacios invariantes por traslaciones enteras ha sido estudiada por diversos autores y en variados contextos, teniendo una notable expansión en los últimos 20 años. Los mismos juegan un rol fundamental en áreas como teoría de muestreo, wavelets y análisis de multiresolución, bases y marcos de Gabor, Splines, y teoría de aproximación, y aparecen frecuentemente (y no por mera casualidad) ligados a la teoría de bases y marcos en espacios de Hilbert (o en contextos más generales), particularmente en lo que concierne a bases y marcos formados por traslaciones de una o más funciones. Han tenido un fuerte desarrollo, motivado tanto por la belleza de los resultados obtenidos, como por la innumerable cantidad de aplicaciones tecnológicas: procesamiento de imágenes, compresión y transmisión de datos, etc.

Utilizando la transformada de Fourier, se puede ver a estos espacios "en el dominio de la frecuencia", resultando íntimamente relacionados con los espacios invariantes bajo multiplicación de exponencial (*doubly invariant*, en inglés). En la caracterización de estos últimos, Helson (ver [Hel64]) introduce la *función rango*, la cual se convierte en una herramienta fundamental para el estudio de los espacios invariantes por traslaciones enteras, por medio de un proceso conocido como *fibración* (o técnicas de fibración, en general), el cual permite estudiar y caracterizar diferentes estructuras relacionadas con los espacios invariantes por traslaciones enteras por medio de estructuras similares en espacios conocidos como *espacios fibra*, subespacios cerrados de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. De manera concisa, esta técnica consiste en usar el isomorfismo isométrico $\tau : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$ definida (para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$) por

$$\tau f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$$

como "traductor", para convertir espacios invariantes por traslaciones enteras en espacios invariantes bajo multiplicación de exponencial.

Justamente, utilizando estas técnicas de fibración es que aparecen las primeras caracterizaciones de la estructura de un espacio invariante por traslaciones enteras (ver [BDVR94] y también [RS95]). Finalmente en [Bow00] se da una caracterización más general, tanto de la estructura de los espacios como de marcos y bases de Riesz de traslaciones, y de operadores que preservan traslaciones enteras, por técnicas de fibración. Estas mismas técnicas son las que nos permitieron desarrollar las caracterizaciones presentadas en esta tesis. Por otro lado, en [NH07] se da una caracterización de base (base de Schauder) de traslaciones enteras de una única función, en términos de lo que en Análisis Armónico clásico se conoce como la clase de pesos $\mathcal{A}_2$.

Un comportamiento típico de los espacios invariantes por traslaciones enteras es que, en general, las preguntas puestas sobre ellos se puede contestar mediante una pregunta análoga sobre los espacios fibra con cierta condición de uniformidad: familias que son base de Riesz, sucesión de Bessel, marco, operadores invariantes por traslaciones, son ejemplos de objetos que pueden caracterizarse, en un espacios invariantes por traslaciones enteras, mediante un análogo en los espacios fibra con cierta condición de uniformidad.

Teniendo en cuenta esto, planteamos la caracterización de las estructuras de familias de subespacios estudiadas previamente, en el marco de los espacios invariantes por traslaciones. Explícitamente, el objetivo era caracterizar bajo que condiciones una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de subespacios invariantes por traslaciones enteras formaba un marco de fusión, una base de Riesz de subespacios, o una sucesión de Bessel de subespacios, bajo que condiciones existe una familia biortogonal, y en que condiciones dicha familia es única. La caracterización obtenida para el caso de espacios invariantes por traslaciones enteras no escapa a la regla general, y se puede sintetizar de la siguiente manera: se tiene cierta estructura en la familia de espacios original (existencia y unicidad de familias biortogonales, sucesión de Bessel de subespacios, base de Riesz de subespacios, marco de fusión) si y solo si la misma estructura esta presente en los espacios de fibras, con alguna condición de uniformidad.

Uno de los aspectos a considerar cuando se trabaja en espacios invariantes por traslaciones, son los operadores definidos en ellos y que preservan las traslaciones enteras, es decir, operadores que conmutan con los operadores traslación. Los mismos son particularmente importantes en este trabajo, porque los resultados obtenidas depende estrechamente de su caracterización mediante operadores definidos en los espacios fibra. En [Bow00] aparece esta caracterización como Teorema 4.5; dada la importancia que tiene el tema en este trabajo, incluimos una demostración diferente, que es conceptualmente más natural y que utiliza la caracterización de los marcos en los espacios invariantes por traslaciones enteras por medio de marcos en los espacios fibra con constantes uniformes. Más aún, creemos que el esquema de demostración propuesto es aplicable en otros contextos: la teoría de espacios invariantes por traslaciones ha sido generalizada al contexto de los grupos abelianos localmente compactos (ver [CP10]), y también han sido estudiados los operadores que preservan traslaciones en este contexto. Por ejemplo en [KT11] se estudian dichos operadores, y se obtienen caracterizaciones del mismo tipo, imitando la demostración que aparece en [Bow00].

Para la caracterización de las familias biortogonales en espacios invariantes por traslaciones, resultó clave la expresión de la misma en términos de proyecciones ortogonales, ya que estos resultan operadores que preservan traslaciones enteras, y por lo tanto inducen operadores en los espacios fibra. De manera análoga, el estudio de las bases de subespacios en espacios invariantes por traslaciones depende fuertemente de poder expresar las funciones coordenadas (que resultan operadores que preservan traslaciones enteras) en términos de proyecciones restringidas y sus inversas, para poder resolver cuestiones de medibilidad inherentes a los operadores que inducen en los espacios fibra. En el caso de las bases de Riesz de subespacios y marcos de fusión (y el caso particular de sucesiones de Bessel de subespacios), se trabajan con técnicas similares a las utilizadas en [Bow00], determinando la estructura en un subconjunto denso adecuado.

En el presente trabajo construimos, además, un ejemplo de una familia que forma un marco de fusión. Es sabido que partición disjunta del espectro lleva a descomposiciones ortogonales (ver por ejemplo [Bow00] *Remark ii* pp 16, o [BDVR94] Teorema 3.2). Mediante la partición no disjunta de su espectro construimos un marco de fusión con constantes enteras predeterminadas.

Incluimos a continuación, a modo de referencia rápida, un compendio de los resultados originales en la presente tesis. A tal fin, utilizaremos las notaciones y nociones tal como aparecen en los resultados citados para explicar cada aporte:

- Dada una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, en [CK04] (Proposition 4.3) se define la noción de familia biortogonal de subespacios y se dan condiciones para su existencia. Nosotros damos (en Teorema 2.7) condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una única familia biortogonal de subespacios. Esto nos lleva a proponer una definición de familia exacta de subespacios (Definición 2.8), resultando esta una generalización de la definición de familia exacta de vectores dada en [Hei11]. Finalmente, caracterizamos la existencia de una única familia biortogonal de subespacios en términos de proyecciones (Observación 2.9). Esta caracterización, si bien elemental, resulta clave para la caraterización de familias biortogonales de subespacios en espacios invariantes por traslaciones enteras (Teorema 3.16 y Teorema 3.17).

- Mostramos que si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia minimal de subespacios y $\{e_{il}\}_{l\in J_i}$ es base ortonormal para W_i, entonces la familia $\{e_{il}\}_{i\in I,l\in J_i}$ es $\ell^2 - li$ (Lema 2.10), y proveemos un ejemplo que muestra que el resultado no es mejorable (Ejemplo 2.11). Esto corrige un enunciado erróneo en [CK04] (Lema 4.2) donde se afirma que la familia $\{e_{il}\}_{i\in I,l\in J_i}$ resulta minimal.

- En el Teorema 2.37 damos una serie formulaciones equivalentes a la noción de base de Riesz de subespacios. La equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 2) en dicho teorema era conocida de trabajos previos ([CK04], [Sun06]). Aportamos otras cuatro formulaciones equivalentes, completando así una caracterización para familias de subespacios que resulta base de Riesz de subespacios, similar a las típicas existentes para familias de vectores (que resultan bases de Riesz), por ejemplo la dada en [Hei11], Teorema 7.13.

- Damos una caracterización de marco de fusión que es base de Riesz de subespacios por medio del marco de fusión dual (Corolario 2.67), análoga a la siguiente condición vectorial: un marco $\{f_i\}_{i\in I}$ con operador de marco S es base de Riesz si y solo si
$$\left|\left\langle f_i, S^{-1}f_i\right\rangle\right| = 1 \quad \forall\ i \in I.$$
En el Teorema 2.59 se incluyen otras 10 caracterizaciones, todas ellas elementales o conocidas de trabajos previos ([CK04], [Sun06]), salvo la del apartado 10 de dicho teorema.

- Siguiendo la definición de refinamiento de un marco de fusión $\{W_i\}_{i\in I}$ dada en [RS08] (Definición 6.1), damos un método (Teorema 2.69) que, utilizando ciertos operadores $G_i : W_i \to W_i$ definidos en cada subespacio del marco de fusión, permite partir los subespacios originales del marco de fusión, detectando la parte "indispensable" (que resulta suma directa con la clausura del espacio generado por el resto), como aquella que, bajo ciertas condiciones, se puede desechar. Proveemos además de dos ejemplos que muestran que el procedimiento funciona de manera no trivial, tanto para eliminar subespacios completos de un marco de fusión (Ejemplo 2.71), como para detectar una parte indispensable y otra que se puede eliminar (Ejemplo 2.72). Los métodos de refinamiento de marcos de fusión conocidos hasta el momento se centraban en la eliminación de un subespacio ([Asg09], [CK08]) o varios ([XZD14]), o se realizaban mediante la evaluación del "exeso", cuando este es finito ([RS08]).

- Damos una caracterización de todas las estructuras de familias de subespacios estudiadas en el Capítulo 2 de la presente tesis, para el caso particular de los espacios invariantes por traslaciones enteras. Esto constituye el punto central de la presente tesis. Específicamente, se caracterizan las familias biortogonales de subespacios (Teorema 3.16 y Teorema 3.17), base de subespacios (Teorema 3.20), base de Riesz de subespacios (Teorema 3.21 apartado (1)), marco de fusión (Teorema 3.21 apartado (2)), y como caso particular de este último, sucesión de Bessel de subespacios (Corolario 3.22). Las mencionadas caracterizaciones se dan en término de estructuras similares en los espacios fibra con cierta condición de uniformidad: una familia de subespacios invariantes por traslaciones enteras $\{W_i\}_{i\in I}$ tiene cierta estructura (marco de fusión, base de subespacios, etc) si y solo si la familia de espacios fibra $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ tiene la misma estructura con cierta condición de uniformidad *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$. Dicha condición de uniformidad está dada sobre la norma de operadores apropiados (condición (3.9) y condición (3.10)) para el caso de las familias biortogonales de subespacios y las bases de subespacios, y sobre las constantes de la estructura (condición (3.13) y condición (3.15)) para el caso de las bases de Riesz de subespacios y los marcos de fusión. Hasta el momento no existía ninguna caracterización de este tipo.

- El Teorema 4.5 [Bow00] caracteriza los operadores que preservan traslaciones enteras en términos de operadores definidos en los espacios fibra. Damos una demostración nueva de dicho teorema (ver demostración del Teorema 3.13), que es conceptualmente más natural y que utiliza la caracterización de los marcos en los espacios invariantes por traslaciones enteras por medio de marcos en los espacios fibra con constantes uniformes.

- Presentamos un método (Teorema 3.25) para construir un marco de fusión (con constantes enteras predeterminadas) para un espacio invariante por traslaciones enteras mediante la partición no disjunta de su espectro (es conocido que partición disjunta del espectro lleva a descomposiciones ortogonales, ver por ejemplo [Bow00] *Remark ii* pp 16, o [BDVR94] Teorema 3.2).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se incluirán los contenidos preliminares necesarios para el desarrollo de la presente tesis, divididos en dos grupos: los propios de Análisis Funcional, y los más específicos de marcos y bases vectoriales. Será utilizado, además, para dejar sentada la notación general.

1.1. Preliminares de análisis funcional

En esta sección incluimos las definiciones y resultados propios de Análisis Funcional que serán utilizados en el desarrollo de la presente tesis. La mayoría de ellos son de uso estándar y frecuente, por lo cual no citaremos detalladamente cada uno. Como referencia general consideramos los libros [Rud91] y [Con90]. Los resultados se incluyen, además, para tener presente las herramientas que se utilizan a lo largo del trabajo, donde serán aplicados sin hacer referencia permanentemente a los mismos.

Espacios de Hilbert:

A lo largo de este trabajo, $\mathcal{H}$ denota un espacio de Hilbert separable complejo. Los elementos de $\mathcal{H}$ serán f, g, h, y en general un subíndice indicará pertenencia a cierto subespacio con el mismo subíndice. El producto interno en $\mathcal{H}$ se denota por $\langle .,. \rangle$, y la norma inducida por $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$. Si V y W son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, entonces el subespacio suma es

$$V + W = \{f + g : f \in V,\ g \in W\}.$$

Pondremos $V \oplus W$ y se llama suma directa si y solo si $V \cap W = \{0\}$ (lo cual no implica que $V \oplus W$ sea cerrado).

Con $V^{\perp}$ indicaremos el complemento ortogonal de V en $\mathcal{H}$, es decir,

$$V^{\perp} = \{f \in \mathcal{H} : \langle f, g\rangle = 0 \ \forall \ g \in V\},$$

y diremos que V y W son ortogonales si

$$\langle f, g\rangle = 0 \ \forall \ f \in V, \ g \in W.$$

La suma directa de subespacios ortogonales se indica por $\overset{\perp}{\oplus}$, y en este caso si es cierto que $V \overset{\perp}{\oplus} W$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$.

Ejemplos en particular de espacios de Hilbert que usaremos frecuentemente en este trabajo son

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ \text{ tal que } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx < \infty \right\}$$

y

$$\ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right) = \left\{ a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \ \ (a_k \in \mathbb{C}) \text{ tal que } \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|^2 < \infty \right\},$$

así como el espacio de Hilbert separable

$$L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n)),$$

formado por las funciones medibles a valores vectoriales $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ tales que

$$\|F\| := \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|F(\omega)\|_{\ell^2}^2 \, d\omega \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

donde el producto interno está definido por

$$\langle F, G\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \langle F(\omega), G(\omega)\rangle_{\ell^2} \ d\omega.$$

En numerosas ocasiones utilizaremos la desigualdad de Schwartz:

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \, \|g\| \qquad \forall \ f, g \in \mathcal{H},$$

que en el caso particular del espacio $\ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right)$ queda

$$\left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k \overline{b_k} \right|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |a_k|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |b_k|^2 \qquad \forall \ (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}, (b_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^n\right)$$

Concerniente a operadores

Un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ entre espacios de Hilbert es acotado si lo es con la norma usual de operadores, es decir si

$$\|T\| = \sup\left\{\|T(f)\| : \|f\| = 1\right\} < \infty,$$

lo cual es equivalente a que sea continuo. Tal operador es isomorfismo topológico si es biyección lineal acotada, es decir, si es sobre e inyectivo. En tal caso, tenemos definido el operador inverso T^{-1}, que resulta lineal y acotado (por el *Teorema de la Aplicación Inversa*, ver [Con90] 12.5).

Si V es un subespacio de $\mathcal{H}$, entonces $T|_V$ denotará el operador T restringido a V.

El operador adjunto de cualquier $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ lineal acotado se denota por T^*, y es el único que satisface

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle \ \forall \ f, g \in \mathcal{H},$$

y se tiene que $T^{**} = T$, y $\|T\| = \|T^*\| = \|TT^*\|^{1/2}$. Si S es otro operador, entonces $(ST)^* = T^*S^*$; esto permite ver que T es isomorfismo topológico si y solo si T^* lo es, y en tal caso $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

El núcleo de un operador T es

$$\ker(T) = \{f \in \mathcal{H} : T(f) = 0\}$$

y el rango es

$$Rang(T) = \{T(f) : f \in \mathcal{H}\},$$

y se puede ver que

$$\ker(T) = Rang(T^*)^\perp.$$

Un operador lineal $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ se dice autoadjunto cuando $T = T^*$.

Utilizando el producto interno se puede definir la noción de orden (parcial) entre operadores: un operador T es positivo si

$$\langle Tf, f\rangle \geq 0 \ \forall \ f \in \mathcal{H},$$

y definido positivo si la igualdad se da solo cuando $f = 0$. Si S y T son dos operadores, entonces pondremos $S \succeq T$ si $S - T$ es positivo. Tal relación es un orden parcial, y si $T \succeq O$ (el operador nulo) se ve que existe la raíz cuadrada de T, es decir, un operador (lineal acotado) $T^{1/2}$ tal que $T^{1/2}T^{1/2} = T$.

Caso particular de operadores definidos positivos (autoadjuntos e idempotentes) son las proyecciones ortogonales: si V es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces P_V denota la proyección ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre V. Vale el siguiente:

Proposición 1.1. *Si V y W son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$, entonces:*

1. $P_V|_W : W \to V$ *es inyectivo si y solo si* $W \cap V^\perp = \{0\}$.
2. $P_V|_W : W \to V$ *es isomorfismo topológicos si y solo si* $\mathcal{H} = W \oplus V^\perp$.

Un operador T se dice acotado por abajo si existe una constante c tal que

$$\|T(f)\| \geq c\,\|f\| \ \forall \ f \in \mathcal{H}.$$

Eso implica que T tiene rango cerrado. El siguiente resultado es de particular importancia:

Proposición 1.2. *Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ es un operador lineal y acotado, entonces T es sobre si y solo si T^* es acotado por abajo. Como consecuencia, se tiene que:*

1. *T es isomorfismo topológico si y solo si T^* lo es.*
2. *T tiene rango cerrado si y solo si T^* tiene rango cerrado.*

También utilizaremos con frecuencia el siguiente resultado clásico, también conocido como *Teorema de Banach-Steinhaus*:

Teorema 1.3 (Principio de Acotación Uniforme)**.** *Si $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de operadores lineales acotados, $T_i : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, y tales que para toda $f \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$\sup\{\|T_i(f)\| : i \in I\} < \infty,$$

entonces

$$\sup\{\|T_i\| : i \in I\} < \infty.$$

1.2. Bases y marcos de vectores

En esta sección incluimos los resultados básicos sobre bases y marcos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. La literatura moderna sobre el tema es en extremo abundante; citamos como referencias principales tanto a [Chr03] como a [Hei11]. En particular, en el segundo capítulo de esta tesis hemos tomado, aunque de manera algo vaga, el "relato" que este último hace para familias de vectores $\{f_i\}_{i\in I}$ (tanto en la concatenación de los contenidos como en la forma de enunciar los diferentes resultados) , como modelo para presentar nuestra exposición sobre familias de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$. También en [Hei11] encontramos un compendio adecuado de resultados de Análisis Funcional, y todo lo referente a la convergencia de series en espacios de Hilbert que pudiéramos necesitar par el presente trabajo.

Si $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ entonces $span\left(\{f_i\}_{i\in I}\right)$ es el espacio generado, es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas. Con $\overline{\text{span}}\left(\{f_i\}_{i\in I}\right)$ denotaremos la clausura del espacio generado. A lo largo de todo el presente trabajo, el conjunto I será el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ o, en caso de ser finito, el conjunto de los primeros enteros positivos $\{1, 2, ..., N\}$ (esto no es una limitación, se podría pensar en cualquier conjunto numerable pero tal generalidad no aporta demasiado).

Si $0 \neq f \in \mathcal{H}$, entonces $< f >= span(f)$ es un subespacio cerrado (como todo subespacio de dimensión finita), y

$$P_{<f>}(g) = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\|^2} f$$

En esta sección usaremos la notación

$$\ell^2(I) = \left\{ \{c_i\}_{i\in I} \ (c_i \in \mathbb{C}) \text{ tq: } \sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty \right\}.$$

Las siguientes definiciones son clásicas para familias de vectores:

Definición 1.4. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es ortonormal si $\langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la "delta de Dirac" que vale 0 si $i \neq j$ y 1 si $i = j$. Las familias $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ son biortogonales si $\langle f_i, g_j\rangle = \delta_{ij}$.*

Con respecto a la "capacidad para generar" tenemos las siguientes

Definición 1.5. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es:*

1. *Total o completa si $\overline{span}\left(\{f_i\}_{i\in I}\right) = \mathcal{H}$.*
2. *Base si para cada $f \in \mathcal{H}$ existen únicos escalares $\{c_i\}_{i\in I}$ ($c_i \in \mathbf{C}$) tal que $f = \sum_i c_i f_i$ (aquí la convergencia no se pide incondicional y por lo tanto el orden del conjunto I importa). La base es incondicional si la serie converge incondicionalmente, y acotada si existen constantes $0 < r \leq R$ tales que*

$$r \leq \|f_i\| \leq R \quad \forall\, i \in I.$$

3. *Base ortonormal si es base y familia ortonormal.*
4. *Base de Riesz si existe un isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $f_i = T(e_i)$ $\forall\, i$, donde $\{e_i\}_{i\in I}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.*
5. *Marco con constantes α y β si para cada $f \in \mathcal{H}$ se tiene que*

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle f, f_i\rangle|^2 \leq \beta \|f\|^2,$$

y sucesión de Bessel con constante β si vale la cota superior en la desigualdad anterior.

Con respecto a nociones de independencia lineal, tenemos las siguientes:

Definición 1.6. *Una familia $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es:*

1. *Minimal si $\forall\, j$, $f_j \notin \overline{span}(f_i : i \neq j)$, exacta si es minimal y total.*
2. *$\omega - li$ si $\sum_i c_i f_i = 0 \Rightarrow c_i = 0\ \forall\, i$.*
3. *$\ell^2 - li$ si $\{c_i\} \in \ell^2(I)$ y $\sum_{i\in I} c_i f_i = 0 \Rightarrow c_i = 0\ \forall\, i$.*

Observación 1.7. *Se tiene que*

$$minimal \Rightarrow \omega - li \Rightarrow \ell^2 - li,$$

pero las recíprocas son falsas.

El siguiente resultado nos da la relación entre familias minimales y exactas con respecto a la existencia de familias biortogonales:

Teorema 1.8. *Si* $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ *entonces:*

1. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es minimal si y solo si existe una familia biortogonal* $\{g_i\}_{i\in I}$.
2. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es exacta si y solo si existe una única familia biortogonal* $\{g_i\}_{i\in I}$.

En principio, las bases ortonormales representarían una opción ideal en el proceso de análisis y síntesis de un vector f, dado que si $\{f_i\}_{i\in I}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}$, el operador

$$T : \ell^2(I) \to \mathcal{H}, \qquad T(\{c_i\}) = \sum_{i\in I} c_i f_i$$

es isomorfismo isométrico, resultando las bases de Riesz una "segunda opción", donde tenemos isomorfismo (no isometría), con la norma controlada por las constantes del punto (2) del siguiente teorema. Con los marcos, aparece la opción de realizar el proceso de análisis y síntesis con "redundancia".

El siguiente teorema caracteriza las sucesiones que son bases de Riesz

Teorema 1.9. *Sea* $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ *una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base de Riesz.*
2. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es total y existen constantes* α *y* β *tales que para todo conjunto finito* $I_0 \subseteq I$ *vale*
$$\alpha \sum_{i\in I_0} |c_i|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I_0} c_i f_i \right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} |c_i|^2 .$$
3. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base y*
$$\sum_{i\in I} c_i f_i \text{ converge si y solo si } \sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty.$$
4. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base incondicional acotada.*
5. *Existe un producto interno* $(\cdot \mid \cdot)$ *en* $\mathcal{H}$ *equivalente (al producto original) y tal que* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base ortonormal de* $\mathcal{H}$ *en dicho producto interno.*
6. $\{f_i\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel y existe una única familia biortogonal* $\{g_i\}_{i\in I}$ *que también es sucesión de Bessel.*

Las constantes α y β que aparecen en el punto (2) se conocen como constantes de la base de Riesz $\{f_i\}_{i\in I}$.

Para estudiar y establecer las propiedades básicas de los marcos, es conveniente la definición de tres operadores. Si $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$, se definen (en principio, formalmente) los operadores análisis, síntesis y operador de marco por

$$\begin{aligned} C &: \mathcal{H} \to \ell^2(I), & C(f) &= \{\langle f, f_i\rangle\}_{i\in I} \\ R &: \ell^2(I) \to \mathcal{H}, & R(\{c_i\}) &= \sum_{i\in I} c_i f_i \\ S &: \mathcal{H} \to \mathcal{H}, & S(f) &= \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle f_i = RC(f) \end{aligned}$$

Teorema 1.10. *Sea $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es sucesión de Bessel*
2. *El operador análisis C está bien definido y es acotado.*
3. *El operador síntesis R está bien definido y es acotado.*

En cualquier caso se tiene que $R^* = C$, y (si vale cualquiera de las anteriores) resultan equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. *$\{f_i\}_{i\in I}$ es marco para $\mathcal{H}$ (con constantes que denotamos α y β).*
2. *C está acotado por abajo.*
3. *R es sobre.*

En tal caso, el operador de marco S resulta isomorfismo topológico positivo, con

$$\alpha\langle f, f\rangle \leq \langle S(f), f\rangle \leq \beta\langle f, f\rangle \qquad \forall\ f \in \mathcal{H},$$

y

$$f = \sum_{i\in I} \langle f, S^{-1}f_i\rangle f_i = \sum_{i\in I} \langle f, f_i\rangle S^{-1}f_i \qquad \forall\ f \in \mathcal{H},$$

con convergencia incondicional.

La sucesión $\{S^{-1}f_i\}_{i\in I}$ también resulta un marco, que se llama el marco dual canónico de $\{f_i\}_{i\in I}$, y tiene la propiedad de que su dual canónico es el marco original $\{f_i\}_{i\in I}$. La sucesión de escalares $\{\langle f, S^{-1}f_i\rangle\}_{i\in I}$ utilizada para reconstruir f en términos del marco $\{f_i\}_{i\in I}$ tiene la siguiente propiedad de minimalidad:

Teorema 1.11. *Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es un marco con operador de marco* S, $f \in \mathcal{H}$, *y para cierto* $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ *vale que*

$$f = \sum_{i\in I} c_i f_i,$$

entonces $\{c_i - \langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I} \perp \{\langle f, S^{-1} f_i\rangle\}_{i\in I}$ *en* $\ell^2(I)$, *en particular*

$$\|\{c_i\}_i\|^2 = \left\|\left\{\left(c_i - S^{-1} f_i\right)\right\}_{i\in I}\right\|^2 + \left\|\left\{S^{-1} f_i\right\}_{i\in I}\right\|^2,$$

y por lo tanto $\{S^{-1} f_i\}_{i\in I}$ *tiene la norma mínima entre los* $\{c_i\}_{i\in I} \in \ell^2(I)$ *tales que* $f = \sum_i c_i f_i$.

La diferencia entre un marco y una base de Riesz es, esencialmente, la redundancia. Tal es el contenido del siguiente teorema:

Teorema 1.12. *Si* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es un marco con operador de marco* S, *las siguientes son equivalentes:*

1. *La familia* $\{S^{-1}(f_i)\}_{i\in I}$ *es biortogonal a* $\{f_i\}_{i\in I}$.
2. *Existe una familia biortogonal para* $\{f_i\}_{i\in I}$.
3. *La familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es minimal.*
4. *La familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es* $\omega - li$.
5. *La familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es* $\ell^2 - li$.
6. *Para cada* $f \in \mathcal{H}$ *hay una única sucesión* $\{c_i\} \in \ell^2(I)$ *tal que* $f = \sum_{i\in I} c_i f_i$.
7. *El operador síntesis* R *es inyectivo (y entonces isomorfismo topológico).*
8. *El operador análisis* C *es sobre (y entonces isomorfismo topológico).*
9. *La familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base de Riesz.*
10. *La familia* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es base.*
11. $|\langle f_i, S^{-1} f_i\rangle| = 1 \ \forall i \in I$.

Para el estudio de los operadores definidos en espacios invariantes por traslaciones enteras, necesitaremos el siguiente resultado:

Proposición 1.13. *Sea* $\{e_i\}_{i\in I}$ *es base ortonormal de un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *y* $\{f_i\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel con constante* β *en otro espacio de Hilbert* $\mathcal{K}$. *Entonces, la ecuación*

$$L\left(\sum_{i\in I} c_i e_i\right) = \sum_{i\in I} c_i f_i \ ,$$

o lo que es lo mismo,

$$L(f) = \sum_{i \in I} \langle f, e_i \rangle f_i \ ,$$

define bien un operador lineal acotado $L : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, *con* $\|L\| \leq \beta$.

Si, de manera más general, $\{e_i\}_{i \in I} - \{0\}$ *es base ortonormal de* $\mathcal{H}$ *(es decir, al conjunto se le quitan todos los ceros y queda una base ortonormal) y* $\{f_i\}_{i \in I}$ *es sucesión de Bessel con constante* β *en* $\mathcal{K}$ *tal que* $e_i = 0 \Rightarrow f_i = 0$, *entonces sigue valiendo lo mismo.*

Demostración . Puesto que $\{f_i\}_{i \in I}$ es sucesión de Bessel con constante β, el Teorema 1.10 nos dice que el operador síntesis

$$R : \ell^2(I) \to \mathcal{H}, \qquad\qquad R(\{c_i\}) = \sum_{i \in I} c_i f_i$$

está bien definido y satisface $\|R\| \leq \beta$. Puesto que la aplicación $f \to \{\langle f, e_i \rangle\}_{i \in I}$ es isomorfismo isométrico de $\mathcal{H}$ sobre $\ell^2(I)$, se concluye la demostración. ■

También necesitaremos el siguiente resultado elemental:

Proposición 1.14. *Sea* $\{f_i\}_{i \in I}$ *un marco para* $\mathcal{H}$ *con constantes* α *y* β, *y* $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *un operador lineal acotado (entre espacios de Hilbert). Entonces* $\{T(f_i)\}_{i \in I}$ *es sucesión de Bessel en* $\mathcal{K}$ *con constante* $\beta \|T\|^2$ *(se puede ver que si* T *es sobre, entonces es marco con constantes* $\alpha / \left\|T^\dagger\right\|^2$ *y* $\beta \|T\|^2$, *donde* $T^\dagger$ *es la inversa de* $T|_{\ker(T)^\perp}$*).*

Capítulo 2

Bases y marcos de subespacios

Este capítulo está centrado en el estudio de diferentes estructuras que puede tener una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$: marco de fusión (o marco de subespacios), sucesión de Bessel de subespacios, descomposición de Riesz, base de subespacios, y en la existencia de familias biortogonales. Tales estructuras son, precisamente, las que se caracterizan en el Capítulo 3 para el caso particular de los espacios invariante por traslaciones enteras.

Los marcos de subespacios fueron introducidos en [CK04], en búsqueda de condiciones bajo la cual se pudiera juntar marcos (vectoriales) de diferentes subespacios y obtener un marco de todo el espacio. Esta idea ya había sido explorada por otros autores, por ejemplo en [ACM04]. Posteriormente en [CKS08] se cambió su nombre a *marcos de fusión*. Cabe destacar que en el trabajo original, se formula la definición utilizando "pesos", los cuales hemos omitido, solamente a fines de obtener una notación más clara. Los resultados incluidos se pueden generalizar con facilidad al caso con pesos. En [CK04] se introducen también las nociones de *sucesión de Bessel de subespacios*, *familias biortogonales de subespacios*, y de *descomposición de Riesz,* esta última como un caso particular de los marcos de fusión donde no hay redundancia, destacando siempre sus analogías (o no) con sus homónimos vectoriales. En dicho trabajo y en otros posteriores ([Sun06], [CKS08], [Asg09]) se dan algunas caracterizaciones de estas estructuras de familias de subespacios, similares a las vectoriales, quedando otras pendientes. A lo largo del capítulo se resaltarán analogías con el caso vectorial demostradas en trabajos anteriores, y se completarán algunas caracterizaciones que previamente existían de forma parcial.

En lo que respecta a marcos de fusión, incluiremos las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de la tesis, como algunas correcciones a demostraciones o enunciados erróneos del trabajo original. Presentamos además una caracterización de marco de fusión que es base de Riesz de subespacios por medio del marco de fusión dual, análoga a la condición vectorial que aparece en el apartado (11) del Teorema 1.12. Se explora también la “minimalidad de los coeficientes”, logrando una mejora del resultado que aparece en [CKS08]. Otro concepto estudiado es el de *refinamiento*, el cual hemos encarado con el mismo criterio que en [RS08], donde se entiende por refinamiento a la eliminación de espacios de la familia original y/o la eliminación de parte de algunos subespacios. Exponemos un criterio que permite detectar la parte “indispensable” de cada subespacio (que resulta suma directa con la clausura del espacio generado por el resto), como aquella que, bajo ciertas condiciones, se puede desechar. Proveemos además de dos ejemplos que muestran que el procedimiento funciona de manera no trivial tanto para eliminar subespacios completos de un marco de fusión, como para detectar una parte indispensable y otra que se puede eliminar.

En [CK04] se introduce la noción de *familias biortogonales de subespacios*, y se dan condiciones para la existencia de una familia biortogonal, pero en dicho trabajo, en lugar de explorar las condiciones bajo las cuales esta familia biortogonal es única, se hace referencia a que “hay una única familia maximal”. Establecemos condiciones que equivalen a existencia de una única familia biortogonal, y estas condiciones nos llevan a proponer una definición de familia de subespacios *exacta*, que nos parece más adecuada que la copia literal del caso vectorial (minimal total, ver [Hei11]), pero que extiende a esta

En cuanto a las *descomposiciones de Riesz*, estructuras que nosotros llamamos *bases de Riesz de subespacios*, fueron introducidas en [CK04] como un caso particular de marco de fusión donde no hay redundancia, y se prueba en dicho trabajo que esto es equivalente a que la familia de subespacios sea imagen por isomorfismo topológico de una descomposición ortogonal (esto sería el equivalente para familias de subespacios de lo que muchos autores toman como definición de base de Riesz por ejemplo [Hei11]). Posteriormente, en [Sun06] y en un contexto más general, se prueba otra condición equivalente, referida a la equivalencia entre el cuadrado de la norma de la suma y la suma del cuadrado de las normas. Nosotros partimos de la que nos parece la “copia natural” de la definición vectorial de base de Riesz: la imagen por un isomorfismo topológico entre espacios de Hilbert de una descomposición ortogonal de subespacios (es decir, en principio no como un caso particular de los marco de fusión), y completamos una caracterización de familias de subespacios que son base de Riesz de subespacios, similar a la existente para sucesiones de vectores (ver Teorema 1.9). Debido a que algunas caracterizaciones de sucesiones que resultan bases de Riesz (vectoriales) recaen en el concepto llano de base, o base de Schauder en un espacio de Hilbert, vimos necesario definir la noción de *base de subespacios* para un espacio de Hilbert, y estudiamos las propiedades elementales. Esta definición no es nueva y las bases de subespacios resultan ser un caso particular de las “descomposiciones de Schauder” para un espacio de Banach, en un contexto más general, que resulta excesivo para la presente tesis. Por ello, enunciamos las propiedades básicas de bases de subespacios que necesitamos para el desarrollo de la presente tesis, y, si bien la mayoría se puede deducir del caso más general de Descomposiciones de Schauder, incluimos demostraciones sucintas de ellas, por ser en general más simples e intuitivas en un espacio de Hilbert. Un compendio de resultados sobre descomposiciones de Schauder se puede encontrar en [Si81].

Establecemos a continuación las notaciones y definiciones básicas:

Notación 2.1. *Con* $\{W_i\}_{i\in I}$ *vamos a denotar siempre una familia de subespacios cerrados de un espacio de Hilbert separable* $\mathcal{H}$, *y* $\prod_{i\in I} W_i = \big\{\{f_i\}_{i\in I} : f_i \in W_i\big\}$.

Denotaremos la suma directa hilbertiana de $\{W_i\}_{i\in I}$ *por*

$$\sum \bigoplus_{i\in I} W_i = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i : \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 < \infty \right\}.$$

Esta resulta un espacio de Hilbert con las operaciones algebraicas definidas coordenada a coordenada, y el producto interno

$$\big\langle \{f_i\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I} \big\rangle = \sum_{i\in I} \langle f_i, g_i \rangle$$

Definición 2.2. *Diremos que la familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es:*

1. *Total si el espacio vectorial cerrado que generan es todo, es decir, si*

$$\overline{span}\,(\cup_{i\in I} W_i) = \mathcal{H}.$$

2. *Minimal si* $W_i \cap \overline{span}\,(\cup_{j\neq i} W_i) = \{0\}$.

3. $\omega - li$ *si para cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$ *se tiene que* $\sum_i f_i = 0 \Rightarrow f_i = 0 \ \forall\ i$ *(cada ves que la serie converge a cero, no importa que tipo de convergencia).*

4. $\ell^2 - li$ *si para cada* $\{f_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$ *se tiene que* $\sum_{i\in I} f_i = 0 \Rightarrow f_i = 0 \ \forall i$.

Observación 2.3. *Al igual que para familias de vectores, para familias de subespacios* $\{W_i\}_{i\in I}$ *se tiene que*

$$minimal \Rightarrow \omega - li \Rightarrow \ell^2 - li,$$

pero las recíprocas son falsas. Es inmediata la construcción de un ejemplo a través de familias vectoriales con dicha propiedad. Si $\{e_i\}_{i\in I}$ *es una base ortonormal para un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *definimos*

$$f_1 = e_1, \qquad f_i = \frac{1}{\sqrt{i}} e_i - \frac{1}{\sqrt{i-1}} e_{i-1} \ \ para\ i \geq 2, \qquad y \quad W_i = span\,(f_i)\,,$$

y

$$g_1 = e_1, \qquad g_i = e_1 + \frac{1}{i} e_i \ \ para\ i \geq 2, \qquad y \quad X_i = span\,(g_i)\,,$$

entonces la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ *es* $\ell^2 - li$ *pero no es* $\omega - li$, *tanto la familia* $\{X_i\}_{i\in I}$ *es* $\omega - li$ *pero no es minimal.*

En muchas ocasiones usaremos el siguiente resultado elemental:

Proposición 2.4. *Si* $W_i = \overline{span}\left(\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J_i\right)$ *entonces*

$$\overline{span}\left(\cup_{i\in I} W_i\right) = \overline{span}\left(\{f_{ij}\}_{i\in I} : j \in J_i\right).$$

En particular, $\{W_i\}_{i\in I}$ *es total si y solo si* $\{f_{i,}\}_{i\in I, j\in J_i}$ *es completo.*

2.1. Familias biortogonales de subespacios

En esta sección abordamos el problema de existencia y unicidad de familias biortogonales. El objetivo final es dar condiciones bajo las cuales una familia de espacios vectoriales tiene única familia biortogonal, y caracterizar los resultados por medio de proyecciones ortogonales. La caracterización obtenida nos permite dar una definición adecuada de familia exacta de subespacios, que extiende la noción de familia exacta de vectores (ver [Hei11] Definición 5.3). Comenzamos con la definición de familia biortogonal de subespacios, que fuera introducida en [CK04]:

Definición 2.5. *Si* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es una familia de subespacios (cerrados), entonces* $\{V_i\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal de* $\{W_i\}_{i\in I}$ *si* $V_i \perp W_j\ \forall\ i \neq j$, *y si* $0 \neq f \in W_i$ *entonces* $f \not\perp V_i$, *es decir,*

$$\forall\ 0 \neq f \in W_i\ \exists\ g \in V_i \quad \textit{tal que} \quad \langle f, g\rangle \neq 0 \tag{2.1}$$

Es importante observar que la definición no es simétrica en el sentido en que no se pueden intercambiar los papeles de las familias $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ (y por eso, a diferencia del caso vectorial, no dice "las familias $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ son biortogonales si..."). Pedir que $\forall\ 0 \neq f \in W_i\ \exists\ g \in V_i$ tal que $\langle f, g\rangle \neq 0$ no implica que $\forall\ 0 \neq g \in V_i\ \exists\ f \in W_i$ tal que $\langle f, g\rangle \neq 0$ (V_i podría ser "muy grande"). Podemos verlo con un ejemplo elemental: basta con tomar en $\mathbf{R}^3$ la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, $W_1 = span\,(e_1)$, $W_2 = span\,(e_1 + e_2)$. Entonces una familia biortogonal es $V_1 = span\,(e_1 - e_2, e_3)$, $V_2 = span\,(e_2)$, y no es cierto que $\forall\ f \in V_1\ \exists\ g \in W_1$ con $\langle f, g\rangle \neq 0$, por ejemplo tomar $f = e_3$. La cuestión es diferente si miramos en $\mathbf{R}^2$: si $W_1 = span\,(e_1)$, $W_2 = span\,(e_1 + e_2)$, entonces $V_1 = span\,(e_1 - e_2)$, $V_2 = span\,(e_2)$ es la única familia biortogonal de $\{W_1, W_2\}$, y en tal caso $\{W_1, W_2\}$ es la única familia biortogonal de $\{V_1, V_2\}$).

Observación 2.6. *La definición de familia biortogonal se puede expresar en términos de proyecciones ortogonales de la siguiente manera:* $\{V_i\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal de* $\{W_i\}_{i\in I}$ *si*

$$P_{V_i}|_{W_j} \equiv 0 \quad \forall\ i \neq j, \qquad y \qquad P_{V_i}|_{W_i}\ \textit{es inyectivo}\ \ \forall\ i \in I.$$

Esto resulta de que si para cada $0 \neq f \in W_i$ *existe* $g \in V_i$ *tal que*

$$0 \neq \langle f, g\rangle = \langle f, P_{V_i} g\rangle = \langle P_{V_i} f, g\rangle,$$

entonces $P_{V_i} f \neq 0$. *Recordar que* $P_{V_i}|_{W_j}$ *es la restricción de* P_{V_i} *al subespacio* W_j.

Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios cerrados y definimos

$$V_i = \overline{\operatorname{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j)^{\perp} = \bigcap_{j\neq i} W_j^{\perp}, \tag{2.2}$$

entonces $V_i \perp W_j \ \forall\ i \neq j$, por lo que resulta el candidato "natural" para familia biortogonal de $\{W_i\}_{i\in I}$ (faltaría que se cumpla la condición (2.1). Pero además si $\{W_i\}_{i\in I}$ tiene familia biortogonal $\{E_i\}_{i\in I}$, entonces debe satisfacer

$$E_i \subseteq V_i \ \text{ para todo } i \in I,$$

y, en tal caso, automáticamente $\{V_i\}_{i\in I}$ resulta familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto, las afirmaciones "$\{W_i\}_{i\in I}$ tiene familia biortogonal" y "$\{V_i\}_{i\in I}$ es familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$" son equivalentes.

El siguiente teorema, análogo al resultado vectorial, nos da la relación entre familias minimales y biortogonales. La primera afirmación esta en [CK04], pero en dicho trabajo, en lugar de explorar la unicidad, se hace referencia a que "hay una única familia maximal", de la forma expresada en el párrafo anterior. En el siguiente teorema se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una única familia biortogonal:

Teorema 2.7. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios (cerrados) de $\mathcal{H}$ y definamos V_i como en (2.2). Entonces:*

1. *La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal si y solo si $\{V_i\}_{i\in I}$ es familia biortogonal.*
2. *Para todo $i \in I$ se tiene que $\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{\operatorname{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j)$ si y solo si $\{V_i\}_{i\in I}$ es la única familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$.*

Demostración .

1. Puesto que por definición $W_i \perp V_j \ \forall\ i \neq j$, sólo resta verificar la condición (2.1). En términos de proyecciones ortogonales, esto es verificar que

$$W_i \cap \overline{\operatorname{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j) = \{0\} \ \ \forall i \in I \iff P_{V_i}|_{W_i} \ \text{ es inyectivo } \forall\ i,$$

   lo cual es inmediato de (2.2), ya que $\ker(P_{V_i}) = V_i^{\perp}$.

2. ($\Rightarrow$) Notar que la condición $\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{\operatorname{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j)\ \forall\ j \in I$ dice implícitamente que la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal (y total), y entonces el punto anterior (y los comentarios previos al enunciado del teorema) implica que la familia $\{V_i\}_{i\in I}$ definida en (2.2) es biortogonal. Resta probar la unicidad. Notar además que, en estas hipótesis, $V_j = P_{V_j}(W_j)\ \forall\ j \in I$ (pues $P_{V_j}(W_i) = \{0\}\ \forall\ i \neq j$).

   Supongamos que tenemos otra familia biortogonal $\{E_i\}_{i\in I}$; necesariamente $E_i \subseteq V_i\ \forall\ i$, y como es otra, deber existir $j \in I$ tal que la inclusión es estricta, es decir, tal que $E_j \subsetneq V_j$. Haciendo la descomposición ortogonal

$$V_j = E_j \overset{\perp}{\oplus} E_j^{\perp_V},$$

(donde $\perp_V$ se usa para indicar el complemento ortogonal en V_j) resulta

$$\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq j} W_i\right) \overset{\perp}{\oplus} V_j = \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) \overset{\perp}{\oplus} E_j \overset{\perp}{\oplus} E_j^{\perp_V}.$$

Si $f_j \in W_j$ y $P_{V_j}(f_j) \in E_j^{\perp_V}$ entonces $0 = P_{E_j} P_{V_j}(f_j) = P_{E_j}(f_j)$, y eso implica que $f_j = 0$ (pues $P_{E_j}\big|_{W_j}$ es inyectivo por ser $\{E_i\}_{i\in I}$ familia biortogonal). Es decir, $\nexists\, 0 \neq f_j \in W_j$ tal que $P_{V_j}(f_j) \in E_j^{\perp_V}$, y entonces $P_{V_j}(W_j) \cap E_j^{\perp_V} = \{0\}$, de donde resulta

$$E_j^{\perp_V} = V_j \cap E_j^{\perp_V} = P_{V_j}(W_j) \cap E_j^{\perp_V} = \{0\}.$$

($\Leftarrow$) Sabemos por el punto anterior que la familia $\{V_i\}_{i\in I}$ definida en (2.2) es la única familia biortogonal, en particular $P_{V_i}|_{W_i}$ es inyectivo para todo $i \in I$. Supongamos que para algún $j \in I$ se tenga

$$W_j \oplus \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq j} W_i\right) \subsetneq \mathcal{H} \tag{2.3}$$

(notar que sabemos que la suma es directa pues el punto anterior nos asegura que la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal). Usaremos este hecho para construir otra familia biortogonal. La condición (2.3) implica que

$$V_j \not\subseteq W_j \oplus \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq j} W_i\right)$$

(recordar que $\overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq j} W_i\right) = V_j^{\perp}$), es decir,

$$\text{existe } g_j \in V_j \text{ tal que } g_j \notin W_j \oplus \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq j} W_i\right) = W_j \oplus V_j^{\perp}. \tag{2.4}$$

Entonces $g_j \neq 0$, y eso implica que $W_j \neq \{0\}$ (pues si $W_j = \{0\}$ la unicidad me dice que $V_j = \{0\}$).

Descompongamos

$$V_j = span\left(g_j\right) \overset{\perp}{\oplus} E_j. \tag{2.5}$$

Si para algún $0 \neq f_j \in W_j$ se tiene $P_{V_j}(f_j) = cg_j$, con $c \in \mathbb{C}$, la inyectividad de $P_{V_j}\big|_{W_j}$ implicaría que $c \neq 0$, y entonces

$$g_j = \frac{1}{c} f_j + \frac{1}{c}\left(cg_j - f_j\right) \in W_j \oplus V_j^{\perp},$$

contradiciendo (2.4). Entonces, la descomposición (2.5) nos dice que necesariamente $E_j \neq \{0\}$ y que

$$f_j \in W_j \text{ y } P_{E_j}(f_j) = 0 \Rightarrow f_j = 0,$$

es decir, $P_{E_j}\big|_{W_j}$ es inyectiva lo cual a su ves implica que la familia

$$\{V_i : i \in I - \{j\}\} \cup \{E_j\}$$

es otra familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$, una contradicción. ∎

Básicamente, el teorema anterior expresa el hecho de que una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal si y solo si tiene biortogonal, y es minimal con $\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{\text{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j)\ \ \forall\ i \in I$ (un poco más que total) si y solo si tiene única familia biortogonal. La versión vectorial del teorema anterior (ver Teorema 1.8) dice que una familia $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es minimal si y solo si existe una familia biortogonal (lo cual es análogo a la primer afirmación del teorema anterior), y que es minimal total si y solo si existe una única familia biortogonal. Esta última afirmación también es absolutamente análoga a la segunda afirmación del teorema anterior, ya que cuando se trata de vectores, la definición de minimal es equivalente a que

$$span\,\{f_i\} \cap \overline{\text{span}}\,\{f_j : j \neq i\} = \{0\} \quad \forall\ i \in I,$$

con lo cual la familia $\{f_i\}_{i\in I}$ es total si y solo si $span\,\{f_i\} \oplus \overline{\text{span}}\,\{f_j : j \neq i\}$ es denso en $\mathcal{H}$ ($\forall\ i \in I$), lo cual ocurre si y solo si $span\,\{f_i\} \oplus \overline{\text{span}}\,\{f_j : j \neq i\} = \mathcal{H}$ ($\forall$ $i \in I$), ya que como el espacio $span\,\{f_i\}$ tiene dimensión 1 (finita) entonces la suma directa anterior es siempre cerrada (ver [Ma95], Corolario 7-4.9). Para familias de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$, ser minimal total dice que $W_i \oplus \overline{\text{span}}\,(\cup_{j\neq i} W_j)$ es denso en $\mathcal{H}$ ($\forall\ i \in I$), pero podría no ser todo $\mathcal{H}$.

Debido a esto, proponemos la siguiente definición, que extiende la definición vectorial al caso de familias de subespacios (ver [Hei11] Definición 5.3):

Definición 2.8. *Una familia de subespacios cerrados $\{W_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{H}$ se dice exacta si*

$$\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{span}\,(\cup_{j\neq i} W_j)\ \ \forall\ i \in I. \tag{2.6}$$

Sin embargo, se debe tener cuidado con la definición anterior, tal como se hace notar también en [Hei11] para el caso vectorial: no se debe confundir una *familia* exacta con un *marco* exacto: dentro del contexto de los marcos (vectoriales) o los marcos de fusión, la palabra exacta es utilizada con otro sentido.

Observación 2.9. *Si definimos V_i como en (2.2), la condición (2.6) es equivalente a pedir que $P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$ sea isomorfismo topológico $\forall\ i \in I$. Esto en particular implica que los respectivos biortogonales deben tener la misma dimensión.*

A continuación daremos una caracterización parcial de familias biortogonales en términos de bases ortogonales.

Lema 2.10. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios, y para cada $i \in I$, sea $\{e_{il}\}_{l\in J_i}$ una base ortonormal para W_i. Entonces:*

1. *Si $\{e_{il}\}_{i\in I, l\in J_i}$ es minimal, entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal.*
2. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal, entonces $\{e_{il}\}_{i\in I, l\in J_i}$ es $\ell^2 - li$.*

Demostración .

1. Tomemos $f \in W_i \cap \overline{\text{span}}\left(\cup_{j\neq i} W_j\right)$, entonces $f = \sum_l \langle f, e_{il}\rangle e_{il}$ y para todo $k \in I$ tenemos
$$\langle f, e_{ik}\rangle e_{ik} = f - \sum_{l\neq k} \langle f, e_{il}\rangle e_{il},$$
y este último claramente pertenece al espacio $\overline{\text{span}}\left(e_{sl} : (s,l) \neq (i,k)\right)$ (notar que $\overline{\text{span}}\left(\cup_{j\neq i} W_j\right) = \overline{\text{span}}\left(e_{sl} : s \neq i\right)$). Puesto que estamos asumiendo que $\{e_{il}\}_{i\in I, l\in J_i}$ es minimal, esto implica que $\langle f, e_{ik}\rangle = 0$ para todo k, y entonces $f = 0$.

2. Sea $\{V_i\}_{i\in I}$ la familia definida en (2.2), entonces el Teorema 2.7 nos dice que es familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$. Tomemos una sucesión $\{c_{il}\}_{i,l}$ tal que
$$\sum_{i,l} |c_{il}|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{i,l} c_{il} e_{il} = 0$$
(sumando en algún orden). Para todo $k \in I$ tenemos que
$$0 = P_{V_k}\left(\sum_{i,l} c_{il} e_{il}\right) = \sum_{i,l} c_{il} P_{V_k}\left(e_{il}\right) = \sum_{l} c_{il} P_{V_k}(e_{kl}) = P_{V_k}\left(\sum_{l} c_{il} e_{kl}\right).$$
Puesto que $P_{V_k}|_{W_k}$ es inyectivo, concluimos que $\sum_l c_{il} e_{kl} = 0$, y entonces $c_{kl} = 0$ para todo $l \in J_k$. Como esto vale para todo $k \in I$, resulta $c_{il} = 0 \ \forall\ i, l$. ■

El lema anterior aparece en [CK04] como una equivalencia en la primera afirmación, pero la demostración contiene un error, y el punto (2) del Lema 2.10 no es mejorable, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.11. *Tomemos $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}, \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos familias ortonormales en $\mathcal{H}$ tales que $\langle u_i, e_j\rangle = 0 \ \forall\ i, j$, y escalares $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que*
$$\beta_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^2 = 1, \quad y \quad \alpha_i = \sqrt{1-\beta_i^2},$$
y definamos con ellos los vectores
$$v_i = \alpha_i u_i + \beta_i e_i, \ i \in \mathbb{N} \quad y \quad u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i.$$
Se verifica fácilmente que las familias $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ son ambas ortonormales. Pongamos $\mathbb{N} = \bigcup_{k\in I} N_k$ unión disjunta y tal que cada N_k tiene infinitos elementos, y definamos
$$W_0 = \overline{span}\left(\{u_i\}_{i=0}^{\infty}\right), \qquad W_k = \overline{span}\left(\{v_i\}_{i\in N_k}\right) \qquad k \in I.$$
Veremos (en tres pasos) que la familia $\{W_i\}_{i\in I\cup\{0\}}$ es minimal, pero la familia formada por sus bases ortonormales $\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ no es minimal.

1. *Veamos primero que*

$$W_0 \cap \overline{span}\left(\cup_{k\in I} W_k\right) = \{0\}\,,$$

o lo que es lo mismo,

$$\overline{span}\left(\{u_i\}_{i=0}^{\infty}\right) \cap \overline{span}\left(\{v_i\}_{i=1}^{\infty}\right) = \{0\}\,.$$

Supongamos existen sucesiones $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ *y* $\{d_i\}_{i=1}^{\infty}$ *de cuadrado sumable y tales que*

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} d_i v_i$$

entonces (teniendo en cuenta que las convergencias son incondicionales) tendríamos que

$$c_0 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(d_i \alpha_i u_i + d_i \beta_i e_i\right),$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \left(c_0 - d_i\right) e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \left(d_i \alpha_i - c_i\right) u_i\ .$$

Pero teniendo en cuenta que $\langle u_i, e_j\rangle = 0\ \forall\ i,j$*, esto es equivalente a*

$$\beta_i \left(c_0 - d_i\right) = \left(d_i \alpha_i - c_i\right) = 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}.$$

Finalmente,

$$\left(c_0 - d_i\right) = 0\ \forall\ i \Rightarrow d_i = c_0 = 0\ \forall\ i \Rightarrow c_i = 0\ \forall\ i.$$

2. *Veamos ahora que también*

$$W_k \cap \overline{span}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) = \{0\}$$

para $k \neq 0$*, es decir, que*

$$\overline{span}\left(\{v_i\}_{i\in N_k}\right) \cap \overline{span}\left(\{v_i\}_{i\in N_k^c} \cup \{u_i\}_{i=0}^{\infty}\right) = \{0\}\,,$$

donde $N_k^c = \mathbb{N} - N_k$*. Si* f *pertenece a dicha intersección, entonces*

$$f = \sum_{i\in N_k} d_i v_i, \quad con \quad \sum_{i\in N_k} |d_i|^2 < \infty$$

(notar que $\{v_i\}_{i\in I_k}$ *es base ortonormal de* W_k*), y existe una sucesión* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subseteq span\left(\{v_i\}_{N_k^c} \cup \{u_i\}_{i=0}^{\infty}\right)$ *tal que* $f_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f$*. Por definición,*

$$f_j = c_0^j u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^j u_i + \sum_{i\in N_k^c} a_i^j v_i,$$

donde para cada j las sucesiones $\{c_i^j\}_{i=0}^{\infty}$ y $\{a_i^j\}_{i\in N_k^c}$ tienen ambas finitos términos no nulos. Entonces

$$f - f_j = \sum_{i\in N_k} d_i v_i - \left(c_0^j u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^j u_i + \sum_{i\in N_k^c} a_i^j v_i \right) =$$

$$= \sum_{i\in N_k} d_i \left(\alpha_i u_i + \beta_i e_i\right) - \left(c_0^j \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^j u_i + \sum_{i\in N_k^c} a_i^j \left(\alpha_i u_i + \beta_i e_i\right) \right) =$$

$$= \sum_{i\in N_k} \left(d_i \alpha_i - c_i^j\right) u_i - \sum_{i\in N_k^c}^{\infty} \left(c_i^j + a_i^j \alpha_i\right) u_i + \sum_{i\in N_k} \left(d_i - c_0^j\right) \beta_i e_i - \sum_{i\in N_k^c} \left(a_i^j + c_0^j\right) \beta_i e_i$$

(cada suma infinita que aparece converge incondicionalmente, por lo cual la manipulación de series es correcto). Eso implica que

$$\|f - f_j\|^2 \geq \sum_{i\in N_k} \left|d_i - c_0^j\right|^2 \beta_i^2 \geq \left|d_i - c_0^j\right|^2 \beta_i^2 \quad \forall\ i \in N_k$$

y entonces $c_0^j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} d_i\ \forall\ i \in N_k$. Eso implica que existe c tal que $d_i = c\ \forall\ i \in N_k$, y entonces debe ser $d_i = 0\ \forall\ i \in N_k$, por ser N_k infinito y la condición $\sum_{i\in N_k} |d_i|^2 < \infty$.

3. *Por último, $u_0 \in \overline{span}\left(\{u_i\}_{i=1}^{\infty}, \{v_i\}_{i=1}^{\infty}\right)$ pues este último es cerrado y contiene a $e_i = \frac{1}{\beta_i}\left(v_i - \alpha_i u_i\right)\ \forall\ i$, es decir, la familia $\{u_i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ no es minimal.*

2.2. Bases de subespacios

En esta sección se expondrán los contenidos que necesitamos para el desarrollo de esta tesis sobre bases de subespacios en un espacio de Hilbert. Estas estructuras, vistas en un contexto más general donde se toma como base un espacio de Banach, se conocen como descomposiciones de Schauder. La mayoría de los resultados incluidos son clásicos y se pueden encontrar, por ejemplo en [Si81]. Nosotros vemos esta teoría en el contexto de los espacios de Hilbert, donde de los resultados tienen, en nuestra opinión, enunciados y demostraciones más sencillas e intuitivas que en el contexto de los espacios de Banach. Por esta razón, hemos incluido muchas demostraciones, ya que rehacerlas en este contexto resulta más natural (y muchas veces menos dificultoso) que tomarlas como un corolario del caso general, en espacios de Banach. Aparecen en esta sección esencialmente tres conceptos: el de base de subespacios, el de base dual, y el de base incondicional de subespacios.

Definición 2.12. *Una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ se llama base de subespacios de $\mathcal{H}$ si toda $f \in \mathcal{H}$ se puede poner de forma única como $f = \sum_i f_i$, con $f_i \in W_i\ \forall\ i$ (No se asume convergencia incondicional). Es decir, para toda $f \in \mathcal{H}$ existe una única familia $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$ tal que $f = \sum_i f_i$.*

Observación 2.13. *Esa definición implica la existencia de operadores* $\gamma_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *tal que* $f_i = \gamma_i(f)$, *es decir, las* γ_i *son las "coordenadas", Rang* $(\gamma_i) = W_i$, *y por unicidad se tiene que* $\gamma_i|_{W_i} = Id$, *y* $\gamma_i|_{W_j} = 0$ *si* $i \neq j$. *En particular* $\gamma_i^2 = \gamma_i$, *es decir, si fueran operadores continuos serían proyecciones oblicuas (notar que si* $f \in W_j$, *entonces le corresponde la sucesión* $\{\delta_{ij} f\}_{i\in I}$*). En algunas ocasiones denotaremos* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *una base de subespacios, para indicar los subespacios y las funciones coordenadas.*

El siguiente teorema establece que las funciones coordenadas son siempre continuas. El resultado es análogo al caso vectorial. Lo enunciamos en el contexto de los espacios de Hilbert, pero puede ser demostrado en un contexto mucho más general.

Teorema 2.14. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una base de subespacios de* $\mathcal{H}$ *y*

$$X = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i : \sum_{i\in I} f_i \text{ es convergente} \right\},$$

y denotemos

$$\left\| \{f_i\}_{i\in I} \right\|_X = \sup_l \left\| \sum_{i=1}^{l} f_i \right\|.$$

Entonces $(X, \|.\|_X)$ *es un espacio de Banach, y la aplicación*

$$\mathcal{T} : X \to \mathcal{H}, \qquad \mathcal{T}\left(\{f_i\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} f_i$$

es biyección lineal acotada (y por lo tanto tiene inversa continua).

Demostración . Primero, notar que como W_i es subespacio, entonces X es espacio vectorial. Además como $\sum_{i\in I} f_i$ converge, la sucesión numérica $\left\{ \left\| \sum_{i=1}^{l} f_i \right\| \right\}_i$ es acotada, y entonces $\|.\|_X$ está bien definida. Es elemental verificar que $\|.\|_X$ es norma: claramente $\left\|\{f_i\}_{i\in I} + \{g_i\}_{i\in I}\right\|_X \leq \left\|\{f_i\}_{i\in I}\right\|_X + \left\|\{g_i\}_{i\in I}\right\|_X$ y $\left\|c\{f_i\}_{i\in I}\right\|_X = |c| \left\|\{f_i\}_{i\in I}\right\|_X$. Por último, si $\left\|\{f_i\}_{i\in I}\right\|_X = 0$ entonces $f_1 = 0$, y eso implica que $f_2 = 0$, etc., concluyendo $f_i = 0 \ \forall \ i$.

Veamos que $(X, \|.\|_X)$ es completo: si $\varphi_N = \left\{f_i^N\right\}_{i\in I}$ $(N \in \mathbb{N})$ y $\{\varphi_N\}_{N\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|.\|_X)$, entonces para i_0 fijo se tiene

$$\left\|f_{i_0}^M - f_{i_0}^N\right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{i_0} \left(f_i^M - f_i^N\right) \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{i_0-1} \left(f_i^M - f_i^N\right) \right\| \leq 2\left\|\varphi_M - \varphi_N\right\|_X \underset{N,M\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir, $\left\{f_{i_0}^N\right\}_{N\in\mathbf{N}}$ es sucesión de Cauchy en W_{i_0}, que es subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, y entonces $\exists \ f_{i_0} \in W_{i_0}$ tal que $f_{i_0}^N \to f_{i_0}$ cuando $N \to \infty$. Denotemos por $\varphi = \{f_i\}_{i\in I}$, vamos a probar que $\varphi \in X$ y que $\varphi_N \to \varphi$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $N, M \geq N_0$ entonces

$$\left\|\varphi_M - \varphi_N\right\|_X = \sup_l \left\| \sum_{i=1}^{l} \left(f_i^M - f_i^N\right) \right\| < \varepsilon.$$

Si $N \geq N_0$, para cada $l > 0$ se tiene que $\sum_{i=1}^{l}\left(f_i^M - f_i^N\right) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{i=1}^{l}\left(f_i - f_i^N\right)$, y entonces $\left\|\sum_{i=1}^{l}\left(f_i - f_i^N\right)\right\| \leq \varepsilon$, y como vale para todo l, resulta

$$\sup_l \left\|\sum_{i=1}^{l}\left(f_i - f_i^N\right)\right\| \leq \varepsilon \qquad \forall\ N \geq N_0. \tag{2.7}$$

Además, $\left\{f_i^{N_0}\right\}_{i\in I} \in X \Rightarrow \sum_i f_i^{N_0}$ converge, y entonces $\exists\ m_0$ tal que

$$\left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i^{N_0}\right\| \leq \varepsilon\ \ \forall\ n > m \geq m_0.$$

Entonces, si $n > m \geq m_0$,

$$\left\|\sum_{i=m+1}^{n} f_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}\left(f_i - f_i^{N_0}\right) - \sum_{i=1}^{m}\left(f_i - f_i^{N_0}\right) + \sum_{i=m+1}^{n} f_i^{N_0}\right\| \leq 3\varepsilon,$$

y entonces $\varphi \in X$. Que $\varphi_N \to \varphi$ resulta de (2.7).

Para la siguiente afirmación del teorema, notar que la aplicación $\mathcal{T} : X \to \mathcal{H}$, $\mathcal{T}\left(\{f_i\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} f_i$ es lineal y acotado pues

$$\left\|\mathcal{T}\left(\{f_i\}_{i\in I}\right)\right\| = \left\|\sum_{i\in I} f_i\right\| \leq \sup_l \left\|\sum_{i=1}^{l} f_i\right\| = \left\|\{f_i\}_{i\in I}\right\|_X.$$

Como $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios resulta $\mathcal{T}$ biyección, y entonces tiene inversa continua (por el *Teorema de la Aplicación Inversa*, ver [Con90] 12.5). ■

Corolario 2.15. *Si $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios, entonces existe C tal que $1 \leq \|\gamma_i\| \leq C$, es decir, son operadores uniformemente acotados. Además, si $S_N(f) = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i(f)$ (operador suma parcial) entonces $\|S_N\| \leq \|\mathcal{T}^{-1}\|\ \forall\ N$, donde $\mathcal{T}$ es el operador del teorema anterior, es decir, los operadores suma parcial también están uniformemente acotados.*

Demostración . Primero veamos la segunda afirmación: Si $f = \sum_i \gamma_i(f)$, entonces

$$\begin{aligned} \|S_N(f)\| &= \left\|\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(f)\right\| \leq \sup_l \left\|\sum_{i=1}^{l}\gamma_i(f)\right\| = \\ &= \left\|\{\gamma_i(f)\}_{i\in I}\right\|_X = \left\|\mathcal{T}^{-1}(f)\right\| \leq \left\|\mathcal{T}^{-1}\right\|\|f\|. \end{aligned}$$

En cuanto a las coordenadas: si $f \in W_i$ entonces $\gamma_i(f_i) = f_i$, de donde $1 \leq \|\gamma_i\|$. Para la otra desigualdad, notar que $\|\gamma_i(f)\| = \|S_i(f) - S_{i-1}(f)\| \leq 2\|\mathcal{T}^{-1}\|\|f\|$. ■

El resultado anterior, aunque de gran simpleza, es sorprendente: al igual que en las bases de Schauder para un espacio de Banach, las funciones coordenadas resultan automáticamente continuas (ver por ejemplo [Hei11], Teorema 4.13). A continuación remarcamos algunas propiedades:

Observación 2.16. *Si* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es una base de subespacios de* $\mathcal{H}$*, entonces:*

1. *Si* $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ *es un isomorfismo topológico entre espacios de Hilbert, entonces* $\{T(W_i), T \cdot \gamma_i \cdot T^{-1}\}_{i\in I}$ *es base de subespacios para* $\widetilde{\mathcal{H}}$*, pues*
$$T^{-1}(f) = \sum_i \gamma_i \left(T^{-1}f\right) \Rightarrow f = \sum_i T\gamma_i \left(T^{-1}f\right),$$
y $T\gamma_i(T^{-1}f) \in T(W_i)$*. Ver Definición 2.19.*

2. *Si* $I_0 \subseteq I$*, entonces* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I_0}$ *es base de subespacios de* $\overline{span}(\cup_{i\in I_0} W_i)$*, pues si* $f \in \overline{span}(\cup_{i\in I_0} W_i)$*,* $f = \sum_{i\in I} \gamma_i(f)$*, pero si* $i \notin I_0$ *entonces* $\gamma_i(W_j) = \{0\}$ $\forall j \in I_0$*, y entonces* $\gamma_i \equiv 0$ *en* $\overline{span}(\cup_{i\in I_0} W_i)$*, de donde resulta* $f = \sum_{i\in I_0} \gamma_i(f)$*.*

3. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es exacta, es decir,*
$$\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{span}(\cup_{j\neq i} W_j) \quad \forall\ i \in I$$
(condición (2) en el Teorema 2.7). Para ver esto, basta con notar que cada $f \in \mathcal{H}$ *se escribe como* $f = \gamma_i(f) + \sum_{j\neq i} \gamma_j(f)$*, y que*
$$W_i \cap \overline{span}(\cup_{j\neq i} W_j) = \{0\},$$
ya que $\gamma_i|_{W_i} = Id$*, y* $\gamma_i|_{W_j} = 0$ *si* $i \neq j$*.*

El siguiente teorema nos da una forma equivalente para determinar cuando una familia es una base de subespacios.

Teorema 2.17. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios cerrados de* $\mathcal{H}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es base de subespacios.*

2. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *total y existe una familia de operadores* $\{\gamma_i\}_{i\in I}$*,* $\gamma_i : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *lineales tales que* $\gamma_i|_{W_i} = Id$*,* $\gamma_i|_{W_j} = 0\ \forall\ i \neq j$*, y tal que si* $S_N(f) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(f)$ *(operador suma parcial) entonces existe* $C > 0$ *tal que* $\|S_N\| \leq C$ $\forall\ N$*.*

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ Esta implicación es el contenido del Teorema 2.14 y su Corolario.

$(2 \Rightarrow 1)$ Si $f \in span(\cup_i W_i)$ (sin clausura) y $f = \sum_{i=1}^M f_i$ ($f_i \in W_i$), para cada $N \geq M$ se tiene que
$$S_N(f) = \sum_{i=1}^M S_N(f_i) = \sum_{i=1}^M f_i = f$$

(pues $S_N(f_i) = f_i$), y entonces $S_N f \to f \ \forall \ f \in span(\cup_i W_i)$. Para $f \in \mathcal{H}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in span(\cup_i W_i)$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$. Si $g = \sum_{i=1}^{M} g_i$ $(g_i \in W_i)$, y $N \geq M$, entonces

$$\|f - S_N f\| \leq \|f - g\| + \|g - S_N g\| + \|S_N g - S_N f\| \leq (1 + C)\,\varepsilon$$

(notar que el segundo término es 0), de donde resulta que $S_N f \to f \ \forall \ f \in \mathcal{H}$. Esto demuestra que cada $f \in \mathcal{H}$ se puede escribir como $f = \sum_i f_i$, con $f_i \in W_i$. Pero como los operadores γ_i son acotados ($\|\gamma_i\| \leq 2C$), esto implica que $\gamma_j(f) = \sum_i \gamma_j(f_i) = f_j$, de donde resulta que la representación es única. ■

Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia exacta, entonces las proyecciones ortogonales restringidas

$$P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$$

resultan isomorfismo topológico para todo $i \in I$ (ver Observación 2.9), y por lo tanto tienen inversa acotada, que denotaremos por $Q_i : V_i \to W_i$. Además, se tiene que

$$P_{V_i}|_{W_j} = 0 \ \forall \ i \neq j,$$

por lo que los operadores definidos por $\gamma_i = Q_i P_{V_i}$ satisfacen

$$\gamma_i|_{W_i} = Id, \ \gamma_i|_{W_j} = 0 \ \forall \ i \neq j.$$

Aplicando esto al teorema anterior, obtenemos:

Corolario 2.18. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia exacta y $S_N = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i$ (donde $\gamma_i = Q_i P_{V_i}$ son los operadores definidos en el párrafo anterior), entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios si y solo si existe $C > 0$ tal que $\|S_N\| \leq C \ \forall \ N$.*

El corolario anterior tiene su análogo vectorial, ver por ejemplo [Hei11] Teorema 5.12.

A continuación se desarrolla el concepto de base de subespacios equivalentes, que para nosotros es particularmente importante porque lo usaremos, en analogía con el caso vectorial, para introducir el concepto de base de Riesz de subespacios.

Definición 2.19. *Dadas $\{W_i\}_{i\in I}$ base de subespacios de $\mathcal{H}$, y $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ base de subespacios de $\widetilde{\mathcal{H}}$, diremos que son equivalentes si existe un isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $\widetilde{W}_i = T(W_i) \ \forall i$. Claramente es relación de equivalencia.*

Tenemos la siguiente caracterización de bases de subespacios equivalentes:

Teorema 2.20. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una base de subespacios de $\mathcal{H}$ y $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ una base de subespacios de $\widetilde{\mathcal{H}}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{W_i\}_{i\in I}$ y $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ son bases de subespacios equivalentes.*

2. *Existen* $T_i : W_i \to \widetilde{W}_i$ *isomorfismos topológicos tales que* $\forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$ *se tiene que*

$$\sum_{i\in I} f_i \text{ converge en } \mathcal{H} \iff \sum_{i\in I} T_i(f_i) \text{ converge en } \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ Por definición de base de subespacios equivalentes, tenemos T isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $\widetilde{W}_i = T(W_i)$. Definimos $T_i = T|_{W_i}$, y claramente $T_i : W_i \to \widetilde{W}_i$ es isomorfismo topológico. Además, si $\sum_{i\in I} f_i$ converge entonces

$$\sum_{i\in I} T_i(f_i) = \sum_{i\in I} T(f_i) = T\left(\sum_{i\in I} f_i\right)$$

y entonces la serie converge. Recíprocamente, si $\sum_{i\in I} T_i(f_i)$ converge, aplicando T^{-1} vemos que $\sum_{i\in I} f_i$ converge.

$(2 \Rightarrow 1)$ Definimos $Tf = \sum_i T_i\gamma_i f$ (bien definido pues $f = \sum_i \gamma_i f$ i.e. la serie converge). Así, T es lineal y $T(W_i) = \widetilde{W}_i$ ($f_{i_0} \in W_{i_0} \Rightarrow \gamma_i(f_{i_0}) = \delta_{ii_0} f_{i_0}$ y entonces $T(f_{i_0}) = T_{i_0}(f_{i_0})$, y usar $T_i : W_i \to \widetilde{W}_i$ isomorfismo topológico). Veamos que T es isomorfismo topológico: $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ sobre pues $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ es base de subespacios y $T_i : W_i \to \widetilde{W}_i$ isomorfismo topológico ($\widetilde{f} = \sum_i \widetilde{f}_i$, $\widetilde{W}_i \ni \widetilde{f}_i = T_i(f_i)$, entonces $\sum_i f_i$ converge y $T(\sum_i f_i) = \widetilde{f}$), y T es inyectivo ($T(f) = T(h)$ sii $\sum_i T_i\gamma_i f = \sum_i T_i\gamma_i h$ sii $T_i\gamma_i f = T_i\gamma_i h$, etc.).

Falta ver que T es continua: si $S_N(f) = \sum_{i=1}^N T_i\gamma_i f$, entonces

$$\|S_N\| \leq \sum_{i=1}^N \|T_i\gamma_i\| < \infty \quad \forall\ N,$$

y puesto que por definición $S_N(f) \to T(f)$, tenemos que $\sup_N \|S_N(f)\| < \infty\ \forall\ f$. Usando el Principio de Acotación Uniforme (Banach-Steinhaus) concluimos que $\sup_N \|S_N\| = C < \infty$. Con eso, y teniendo en cuenta que $\|T(f)\| \leq \sup_N \|S_N(f)\|$, resulta $\|T\| \leq C$.

Juntando todo tenemos que T es biyección lineal continua, es decir, isomorfismo topológico. ■

A continuación desarrollamos el concepto de base dual de una base de subespacios:

Observación 2.21. *Si* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es una base de subespacios, entonces para todo* $i \in I$ *se tiene*

$$\mathcal{H} = W_i \oplus \overline{span}(\cup_{j\neq i} W_j) = W_i \oplus V_i^{\perp}$$

(ver el punto (3) en la Observación 2.16). Además,

$$V_i^{\perp} = \ker(\gamma_i) = Rang(\gamma_i^*)^{\perp},$$

y como $Rang(\gamma_i)$ *es cerrado, podemos concluir que (*$Rang(\gamma_i^*)$ *también es cerrado y entonces)* $Rang(\gamma_i^*) = V_i$*. Tenemos el siguiente análogo al caso vectorial:*

Teorema 2.22. *Con la notación de la observación anterior,* $\{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ *es base de subespacios de* $\mathcal{H}$*, que se llama la base dual de* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$*.*

Demostración . Vamos a usar el Teorema 2.17. Primero veamos que $\{V_i\}_{i\in I}$ es total: si $f \perp V_i \ \forall i$, entonces

$$0 = \langle f, \gamma_i^* g\rangle = \langle \gamma_i f, g\rangle \ \forall \ g \in \mathcal{H},$$

es decir, $\gamma_i(f) = 0 \ \forall i$, y entonces $f = 0$.

Por otro lado, tengo $\{\gamma_i^*\}_{i\in I}$ familia de operadores tales que

$$\gamma_i^*|_{V_i} = Id$$

(si $g_i \in V_i$, $\langle f, g_i\rangle = \left\langle \sum_j \gamma_j f, g_i \right\rangle = \sum_j \langle \gamma_j f, g_i\rangle = \langle \gamma_i f, g_i\rangle = \langle f, \gamma_i^* g_i\rangle \ \forall \ f \in \mathcal{H}$, donde hemos usado $W_i \perp V_j$ si $i \neq j$), y

$$\gamma_i^*|_{V_j} = 0 \ \text{ si } \ i \neq j$$

($g_j \in V_j$, $\langle f, \gamma_i^* g_j\rangle = \langle \gamma_i f, g_j\rangle = 0$ si $i \neq j \ \forall \ f \in \mathcal{H}$).

Finalmente, si $S_N(f) = \sum_{i=1}^N \gamma_i^*(f)$ es el operador suma parcial, entonces $S_N^*(f) = \sum_{i=1}^N \gamma_i(f)$, luego se cumple que $\|S_N\| = \|S_N^*\| \leq C$ según el Teorema 2.17 (por ser $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ base de subespacios), y entonces el mismo teorema (en la otra dirección) nos dice que $\{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ es base de subespacios de $\mathcal{H}$. ■

Observación 2.23. *En la demostración anterior no se usa el Teorema 2.7, pero la base dual de* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es exactamente la única familia biortogonal cuya existencia asegura dicho Teorema.*

Observación 2.24. *La base de subespacios dual de la base de subespacios* $\{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ *es nuevamente* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$*.*

Otro concepto importante en el estudio de las bases de subespacios (y en las bases vectoriales) es el de base de subespacios incondicional. Nuevamente, para nosotros es particularmente importante ya que las bases de Riesz de subespacios serán precisamente las bases de subespacios incondicionales.

Definición 2.25. *Una base de subespacios* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *de* $\mathcal{H}$ *se dice incondicional si* $\sum_i \gamma_i f$ *converge incondicionalmente* $\forall \ f \in \mathcal{H}$*. Es decir, las bases de subespacios incondicionales son un subconjunto de las bases de subespacios.*

Observación 2.26. *Si* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es base de subespacios incondicional, entonces*

$$\left\{ \{f_i\}_i \in \prod_i W_i : \sum_i f_i \ \textit{converges} \right\} =$$

$$= \left\{ \{f_i\}_i \in \prod_i W_i : \sum_i f_i \ \textit{converge unconditionally} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \sum_{i\in Ii} \bigoplus W_i.$$

La igualdad viene de lo siguiente: si $\sum_i f_i$ *converge a* h, *entonces* $h = \sum_i f_i$ *y entonces* $f_i = \gamma_i(h)$, *y sabemos que* $\sum_i \gamma_i(h)$ *converge incondicionalmente. La inclusión es el Lemma de Orlicz (ver Teorema 3.16 en [Hei11]):*

Lema 2.27 (Orlicz). *Sea* $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ *una sucesión. Si* $\sum_{i\in I} f_i$ *converge incondicionalmente, entonces* $\sum_{i\in I} \|f_i\|^2$ *converge.*

Observación 2.28. *Si* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es base de subespacios incondicional de* $\mathcal{H}$ *y* $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ *es un isomorfismo topológico, entonces* $\{T(W_i), T \cdot \gamma_i \cdot T^{-1}\}_{i\in I}$ *también es base de subespacios incondicional de* $\widetilde{\mathcal{H}}$.

Observación 2.29. *Las descomposiciones ortogonales de* $\mathcal{H}$ *son una caso particular de base de subespacios incondicional, que llamaremos base ortogonal de subespacios. Esto es: si* $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ *es una familia de subespacios total y tal que*

$$\mathcal{M}_i \perp \mathcal{M}_j \quad \forall\, i \neq j,$$

entonces

$$f = \sum_{i\in I} P_{\mathcal{M}_i}(f) \qquad \forall\, f \in \mathcal{H},$$

con convergencia incondicional (es decir, $\{\mathcal{M}_i\,, P_{\mathcal{M}_i}\}_{i\in I}$ *es base de subespacios incondicional), y se pone*

$$\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{M}_i$$

Si $\left\{\widetilde{\mathcal{M}_i}\right\}_{i\in I}$ *es otra descomposición ortogonal (de otro espacio de Hilbert* $\widetilde{\mathcal{H}}$*) tal que* $\mathcal{M}_i$ *es isomorfo a* $\widetilde{\mathcal{M}_i}$ $\forall\, i$, *entonces resultan bases de subespacios equivalentes, ya que en tal caso se pueden construir isomorfismos isométricos*

$$T_i : \mathcal{M}_i \to \widetilde{\mathcal{M}_i}$$

(basta con llevar base ortonormal en base ortonormal), con lo cual tendríamos

$$\sum_{i\in I} f_i \text{ converge} \iff \sum_{i\in I} T_i(f_i) \text{ converge} \iff \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \text{ converge},$$

y aplicamos el Teorema 2.20

Como dos (sub)espacios de Hilbert son isomorfos si y solo si tienen el mismo cardinal, resulta que (salvo reordenación) dos descomposiciones ortogonales son equivalentes (como base de subespacios) si tienen la misma cantidad de subespacios del mismo cardinal. Finalmente, si $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ *es una base ortogonal de subespacios, entonces es su propia base dual.*

El siguiente teorema caracteriza con simpleza las bases de subespacios incondicionales:

Teorema 2.30. *Sea* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *una base de subespacios de* $\mathcal{H}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ *es base de subespacios incondicional de* $\mathcal{H}$.

2. *Para toda permutación* π *de* I, $\left\{W_{\pi(i)}, \gamma_{\pi(i)}\right\}_{i\in I}$ *es base de subespacios de* $\mathcal{H}$ *(por permutación de* I *se entiende una biyección* $\pi : I \to I$*).*

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ Si $f \in \mathcal{H}$, entonces $f = \sum_i \gamma_i(f) = \sum_i \gamma_{\pi(i)}(f)$ (si una serie converge incondicionalmente, cualquier reordenación converge a lo mismo), para ver que $\left\{W_{\pi(i)}, \gamma_{\pi(i)}\right\}_{i\in I}$ es base de subespacios necesito ver que esa es la única forma de escribir f. Pero si tuviera $f = \sum_i \widetilde{f}_{\pi(i)}$, entonces

$$\gamma_{\pi(j)}(f) = \sum_i \gamma_{\pi(j)}\left(\widetilde{f}_{\pi(i)}\right) = \gamma_{_{\pi(j)}}\left(\widetilde{f}_{\pi(j)}\right) = \widetilde{f}_{\pi(j)}$$

(estoy usando la Observación 2.13), lo que muestra que la representación es única.

$(2 \Rightarrow 1)$ Hay que ver que para toda $f \in \mathcal{H}$ la representación $f = \sum_i \gamma_i(f)$ converge incondicionalmente. Si π es una permutación de I, existe una única $\left\{\widetilde{f}_{\pi(i)}\right\}_i \in \prod_i W_{\pi(i)}$ tal que $f = \sum_i \widetilde{f}_{\pi(i)}$, pero (como en el punto anterior) $\gamma_{\pi(j)}(f) = \widetilde{f}_{\pi(j)}$, lo que demuestra que $\sum_j \gamma_{\pi(j)}(f)$ converge. ■

El teorema anterior nos permite probar el siguiente:

Teorema 2.31. *Dada una base de subespacios* $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$, *esta resulta incondicional si y solo si su base dual* $\{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ *es incondicional.*

Demostración . Esto es consecuencia inmediata de los Teoremas 2.22 y 2.30, y de la Observación 2.24: $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional de $\mathcal{H} \Rightarrow$ $\left\{W_{\pi(i)}, \gamma_{\pi(i)}\right\}_{i\in I}$ base de subespacios para toda permutación π de $I \Rightarrow \left\{V_{\pi(i)}, \gamma^*_{\pi(i)}\right\}_{i\in I}$ es base de subespacios para toda permutación π de $I \Rightarrow \{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ base de subespacios incondicional. Para la otra implicación, usar el la Observación 2.24. ■

2.3. Bases de Riesz de subespacios

Las descomposiciones de Riesz, estructuras que nosotros llamamos base de Riesz de subespacios, fueron introducidas en [CK04] como un caso particular de marco de fusión donde no hay redundancia. Se prueba en dicho trabajo que esto es equivalente a que la familia de subespacios sea imagen por isomorfismo topológico de una descomposición ortogonal (esto sería el equivalente para familias de subespacios de lo que en [Hei11] y en muchos trabajos más se toma como definición de base de Riesz vectorial). Posteriormente, en [Sun06] y en un contexto más general, se prueba otra condición equivalente: una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es una descomposición de Riesz si es total y satisface una desigualdad del tipo

$$\alpha \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I} f_i\right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \qquad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$$

Nosotros partimos de la que nos parece la “copia natural” de la definición vectorial de base de Riesz: la imagen por un isomorfismo topológico entre espacios de Hilbert de una descomposición ortogonal de subespacios (es decir, en principio no como un caso particular de los marco de fusión), y completamos una caracterización de familias de subespacios que son base de Riesz de subespacios, similar a la existente para sucesiones de vectores (ver Teorema 1.9), en términos de bases de subespacios incondicionales, en términos de producto interno, en términos de los “coeficientes” utilizables, y por último en término de sucesiones de Bessel exactas y familias biortogonales. Además, mostramos que toda base de subespacios incondicional es sucesión de Bessel de subespacios, al igual que en el caso vectorial.

Definición 2.32. *Una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de subespacios (cerrados) de $\mathcal{H}$ es una base de Riesz de subespacios de $\mathcal{H}$ si es una base de subespacios equivalente a una base ortogonal de subespacios de $\mathcal{H}$.*

Teniendo en cuenta la Observación 2.29, en la definición anterior se puede usar cualquier base ortogonal de subespacios de cualquier espacio de Hilbert. Es decir, una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios si existe una base ortogonal de subespacios $\left\{\widetilde{\mathcal{M}_i}\right\}_{i\in I}$ de un espacio de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}$ y un isomorfismo topológico $T:\widetilde{\mathcal{H}}\to\mathcal{H}$ tal que $W_i=T\left(\widetilde{\mathcal{M}_i}\right)$ para todo $i\in I$.

La primer consecuencia inmediata de esta definición, es que la base dual de una base de Riesz de subespacios es también una base de Riesz de subespacios:

Teorema 2.33. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, entonces la base dual $\{V_i\}_{i\in I}$ (que es la única familia biortogonal, ver Observación 2.23) también es base de Riesz de subespacios..*

Demostración . Esto resulta de la Observación 2.21 y el Teorema 2.22. Si $\mathcal{H}=\overset{\perp}{\oplus}\mathcal{M}_i$, $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ es isomorfismo topológico, y $W_i=T\left(\mathcal{M}_i\right)$ entonces $\{W_i,\gamma_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, con $\gamma_i=T\cdot P_{\mathcal{M}_i}\cdot T^{-1}$. Por lo tanto la base dual es

$$V_i=Rang\left(\gamma_i^*\right)=Rang\left(\left(T^{-1}\right)^*\cdot P_{\mathcal{M}_i}\cdot T^*\right)=\left(T^{-1}\right)^*\left(\mathcal{M}_i\right),$$

es decir, $\{V_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios (estamos usando que T^* es isomorfismo topológico, y por lo tanto, también lo es $(T^{-1})^*$). ■

Para el estudio de las bases de Riesz de subespacios es importante el concepto de sucesión de Bessel de subespacios, concepto que fuera introducido en [CK04]. Nosotros damos a continuación una definición equivalente, para seguir “el camino vectorial”; en la sección de marcos de fusión retomaremos el tema.

Definición 2.34. *Una familia de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel de subespacios si*

$$\sum_{i\in I}\left\|P_{W_i}\left(f\right)\right\|^2<\infty\qquad\forall\ f\in\mathcal{H}.$$

Observación 2.35. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es sucesión de Bessel de subespacios, entonces existe una constante $\beta > 0$ (que llamaremos la constante de la sucesión de Bessel) tal que*

$$\sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2 .$$

Esto resulta de considerar los siguientes operadores:

$$T_N : \mathcal{H} \to \sum \bigoplus_i W_i, \qquad T_N(f) = \{P_{W_i}(f)\}_{i=1}^N ,$$

y

$$T : \mathcal{H} \to \sum \bigoplus_i W_i, \qquad T(f) = \{P_{W_i}(f)\}_{i\in I} .$$

Cada T_N es lineal, con $\|T_N(f)\| \leq \sqrt{N}\|f\|$, y como

$$\sup_N \|T_N(f)\| = \sup_N \left(\sum_{i=1}^N \|P_{W_i}(f)\|^2\right)^{1/2} < \infty \ \forall \ f \in \mathcal{H},$$

Banach-Steinhaus dice que el operador T es acotado, y entonces

$$\sum_{i\in I} \left\|P_{W_j}(f)\right\|^2 = \|T(f)\|^2 \leq \|T\|^2 \|f\|^2 .$$

El siguiente lema se puede encontrar en [CK04]

Lema 2.36. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es sucesión de Bessel de subespacios con constante β es la constante, y $\{f_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $\sum_{i\in I} f_i$ converge incondicionalmente, y*

$$\left\|\sum_{i\in I} f_i\right\| \leq \sqrt{\beta}\left\|\{f_i\}_{i\in I}\right\| .$$

Demostración . Si $I_0 \subseteq I$ es un conjunto finito, y $g \in \mathcal{H}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \sum_{i\in I_0} f_i \ , g \right\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I_0} \langle f_i \ , g\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I_0} \langle P_{W_i}(f_i) \ , g\rangle\right| = \left|\sum_{i\in I_0} \langle f_i \ , P_{W_i}(g)\rangle\right| \leq \\
&\leq \sum_{i\in I_0} \|f_i\| \, \|P_{W_i}(g)\| \leq \left(\sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i\in I_0} \|P_{W_i}(g)\|^2\right)^{1/2} \leq \\
&\leq \sqrt{\beta}\left(\sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2\right)^{1/2} \|g\| .
\end{aligned}$$

Eso implica que

$$\left\|\sum_{i\in I_0} f_i\right\| \leq \sqrt{\beta}\left(\sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{\beta}\left(\sum_{i\in I} \|f_i\|^2\right)^{1/2} ,$$

y puesto que la serie $\sum_{i\in I} \|f_i\|^2$ converge incondicionalmente, podemos concluir que $\sum_{i\in I} f_i$ converge incondicionalmente, y

$$\left\| \sum_{i\in I} f_i \right\| \leq \sqrt{\beta} \left\| \{f_i\}_{i\in I} \right\| . \qquad \blacksquare$$

A continuación mostraremos que las bases de Riesz de subespacios admiten una caracterización similar a las de sus homónimas vectoriales, como la dada por el Teorema 1.9. Para poder enunciar adecuadamente la última equivalencia, necesitamos tener presente el siguiente hecho: en el caso vectorial, una sucesión de Bessel $\{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{H}$ para la cual existe una única familia biortogonal que es sucesión de Bessel, es base de Riesz. En el caso de familias de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$, la existencia de una única familia biortogonal es equivalente a pedir que

$$P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$$

sea isomorfismo topológico para todo i, donde

$$V_i = \overline{\operatorname{span}} \left(\cup_{j\neq i} W_j\right)^{\perp}$$

es la única familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$ (Teorema 2.7 y comentarios previos, y Observación 2.9). Con esto presente, enunciamos el siguiente teorema:

Teorema 2.37. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios*
2. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es total (sin subespacios triviales), y existen constantes α, $\beta > 0$ tales que para cada $I_0 \subseteq I$ finito se tiene que*
$$\alpha \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I_0} f_i \right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \qquad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$$
3. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios y para toda $\{f_i\}_i \in \prod_{i\in I} W_i$, se tiene que*
$$\sum_{i\in I} f_i \text{ converge } \iff \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \text{ converge.}$$
4. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional.*
5. *Existe un producto interno $(\cdot \mid \cdot)$ en $\mathcal{H}$ equivalente (al producto original) y tal que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base ortogonal de subespacios de $\mathcal{H}$ con dicho producto interno.*

6. $\{W_i\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel de subespacios, tiene una única sucesión biortogonal de subespacios* $\{V_i\}_{i\in I}$ *que también es sucesión de Bessel de subespacios, y existe* $c>0$ *tal que (los isomorfismos topológicos)* $P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$ *satisfacen*

$$\left\| P_{V_i}|_{W_i}(f_i)\right\| \geq c\,\|f_i\| \quad \forall\ f_i \in W_i \quad y \quad \forall\ i \in I \tag{2.8}$$

(los operadores $P_{V_i}|_{W_i}$ *son uniformemente acotados por abajo).*

En cualquier caso, cada $f \in \mathcal{H}$ *se puede poner de forma única como* $f = \sum_{i\in I} f_i$, *(*$\{f_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$*), donde la serie converge incondicionalmente.*

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ Que $\{W_i\}_{i\in I}$ es total es inmediato por ser base de subespacios. La hipótesis implica la existencia de una familia $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ tal que $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I}\mathcal{M}_i$, y un isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $W_i = T(\mathcal{M}_i)$ para todo $i \in I$. Tomemos $I_0 \subseteq I$ finito y $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$, y denotemos $f = \sum_{i\in I_0} f_i$, entonces $T^{-1}(f) = \sum_{i\in I_0} T^{-1}(f_i)$ y

$$\left\|T^{-1}(f)\right\|^2 = \sum_{i\in I_0}\left\|T^{-1}(f_i)\right\|^2.$$

Puesto que

$$\frac{\|T^{-1}(f_i)\|}{\|T^{-1}\|} \leq \|f_i\| \leq \|T\|\left\|T^{-1}(f_i)\right\|$$

elevando al cuadrado y sumando (y usando la igualdad anterior) queda

$$\frac{\|T^{-1}(f)\|^2}{\|T^{-1}\|^2} \leq \sum_{i\in I_0}\|f_i\|^2 \leq \|T\|^2\left\|T^{-1}(f)\right\|^2,$$

de donde se deduce (de la forma habitual) que

$$\frac{\|f\|^2}{\|T^{-1}\|^2\|T\|^2} \leq \sum_{i\in I_0}\|f_i\|^2 \leq \|T\|^2\left\|T^{-1}\right\|^2\|f\|^2.$$

Es decir,

$$\frac{1}{\|T\|^2\|T^{-1}\|^2}\sum_{i\in I_0}\|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I_0} f_i\right\|^2 \leq \left\|T^{-1}\right\|^2\|T\|^2\sum_{i\in I_0}\|f_i\|^2.$$

$(2 \Rightarrow 1)$ La segunda desigualdad de (2) implica que $\sum_{i\in I} f_i$ converge incondicionalmente si $\{f_i\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$ (porque $\sum_{i\in I}\|f_i\|^2$ converge incondicionalmente), y la primera dice que tal serie converge solo si $\{f_i\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$. Eso implica que el operador

$$T : \sum\bigoplus_{i\in I} W_i \to \mathcal{H}, \qquad T\left(\{f_i\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} f_i$$

esta bien definido, es lineal, acotado y acotado por abajo. Esto último implica que T es inyectivo y su rango es cerrado, y teniendo en cuenta que dicho rango contiene a $span\left(\cup_i W_i\right)$ que es denso (por ser total la familia $\{W_i\}_{i\in I}$), se concluye que T es isomorfismo topológico. Para terminar, llamar

$$\widetilde{\mathcal{H}} = \sum \bigoplus_{i\in I} W_i \quad \text{y} \quad \widetilde{\mathcal{M}}_i = T^{-1}\left(W_i\right) = \left\{\{f\delta_{ij}\}_j : f \in W_i\right\}$$

(la "copia" de W_i en $\sum \bigoplus_{i\in I} W_i$), entonces $\left\{\widetilde{\mathcal{M}}_i\right\}_{i\in I}$ es base ortogonal de subespacios, y $W_i = T\left(\widetilde{\mathcal{M}}_i\right)$.

($1 \Rightarrow 4$) Esto es inmediato de la Observación 2.28 y la Observación 2.29.

($4 \Rightarrow 3$) Denotemos por $\{\gamma_i\}_{i\in i}$ las funciones coordenadas de (la base de subespacios incondicional) $\{W_i\}_{i\in I}$. Por el Teorema 2.31 sabemos que la base dual $\{V_i, \gamma_i^*\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional (donde $V_i = \gamma_i^*\left(W_i\right)$), y $V_i \perp W_j$ para todo $i \neq j$.

Tomemos $f \in \mathcal{H}$. Poniendo $f = \sum_i \gamma_i^*\left(f\right)$, resulta $P_{W_j}\left(f\right) = P_{W_j}\left(\gamma_j^*\left(f\right)\right)$ para todo $j \in I$, y entonces

$$\left\|P_{W_j}\left(f\right)\right\| \leq \left\|\gamma_j^*\left(f\right)\right\| \qquad \text{para todo } j \in I.$$

Puesto que $\sum_i \gamma_i^*\left(f\right)$ converge incondicionalmente, el Lema de Orlicz's implica que $\sum_i \left\|\gamma_i^*\left(f\right)\right\|^2$ converge, y entonces $\sum_i \left\|P_{W_i}\left(f\right)\right\|^2$ converge. Es decir, hemos demostrado que $\{W_i\}_{i\in I}$ es sucesión de Bessel de subespacios (Definición 2.34). Usando el Lema 2.36, concluimos que

$$\{f_i\}_i \in \sum \bigoplus_i W_i \Rightarrow \sum_i f_i \text{ converge.}$$

La implicación "$\sum_i f_i$ converge $\Rightarrow \{f_i\}_i \in \sum \bigoplus_i W_i$" está en la Observación 2.26. Juntando todo, queda: si $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional, entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios y

$$\sum_{i\in I} f_i \text{ converge } \iff \sum_{i\in I} \left\|f_i\right\|^2 \text{ converge.}$$

($3 \Rightarrow 1$) Llamemos $\widetilde{\mathcal{H}} = \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, y denotemos por $\widetilde{W_i}$ la copia isomorfa W_i en $\widetilde{\mathcal{H}}$ (de forma tal que $\left\{\widetilde{W_i}\right\}_{i\in I}$ es base ortogonal de subespacios de $\widetilde{\mathcal{H}}$). Para cada $j \in I$ definamos

$$T_j : W_j \to \widetilde{W_j}, \qquad T_j\left(f_j\right) = \{\delta_{ij} f_j\}_{i\in I}$$

el operador "inclusión". Entonces, $\sum_i T_i\left(f_i\right)$ converge en $\widetilde{\mathcal{H}}$ si y solo si $\sum_i \left\|f_i\right\|^2$ converge (porque $\left\|\sum_{i=N}^M T_i\left(f_i\right)\right\|_{\widetilde{\mathcal{H}}}^2 = \sum_{i=N}^M \left\|f_i\right\|^2$). Usando la hipótesis, resulta que

$$\sum_i T_i\left(f_i\right) \text{ converge } \iff \sum_{i\in I} f_i \text{ converge,}$$

y entonces el Teorema 2.20 implica que $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\left\{\widetilde{W_i}\right\}_{i\in I}$ son base de subespacios equivalentes, es decir, $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios.

$(2 \Rightarrow 5)$ En la demostración de $(2 \Rightarrow 1)$, vimos que si $\widetilde{\mathcal{H}} = \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$ y

$$T : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}, \qquad T\left(\{f_i\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} f_i,$$

entonces T es isomorfismo topológico. Para $f, g \in \mathcal{H}$, definamos

$$(f \mid g) = \left\langle T^{-1}f, T^{-1}g\right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}},$$

es decir, si

$$f = \sum_{i\in I} f_i \quad \text{y} \quad g = \sum_{i\in I} g_i$$

(elementos genéricos de $\mathcal{H}$) entonces

$$(f \mid g) = \sum_{i\in I} \langle f_i, g_i\rangle$$

La norma inducida es

$$(f \mid f) = \sum_{i\in I} \|f_i\|^2,$$

y puesto que (2) implica que

$$\alpha \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I} f_i\right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I} \|f_i\|^2 \quad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i,$$

resulta equivalente a la norma original en $\mathcal{H}$. Finalmente, con la notación utilizada en la demostración de $(2 \Rightarrow 1)$, tenemos que

$$(W_i \mid W_j) = \left\langle T^{-1}(W_i), T^{-1}(W_j)\right\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \langle \mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \{0\} \quad \forall\ i \neq j.$$

$(5 \Rightarrow 1)$ Si denotamos

$$|||f||| = (f \mid f)$$

la norma inducida por el producto interno $(\cdot \mid \cdot)$ en $\mathcal{H}$, entonces la hipótesis dice que la función identidad

$$Id : (\mathcal{H}, (\cdot \mid \cdot)) \to (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$$

es biyección continua, y entonces isomorfismo topológico. Puesto que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base ortogonal de subespacios de $(\mathcal{H}, (\cdot \mid \cdot))$, resulta base de Riesz de subespacios de $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

$(1 \Rightarrow 6)$ Puesto que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, el Teorema 2.33 nos dice que tiene única familia biortogonal $\{V_i\}_{i\in I}$ que también es base de Riesz de subespacios. Veamos que ambas son sucesiones de Bessel de subespacios: tomemos $\{g_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} W_i$ una familia con finitas coordenadas no nulas, y $f \in \mathcal{H}$ Entonces, usando (2) (cuya equivalencia con (1) ya está probada), vemos que

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \{P_{W_i} f\}_{i\in I}, \{g_i\}_{i\in I}\right\rangle\right| &= \left|\sum_{i\in I} \langle P_{W_i} f, g_i\rangle\right| = \left|\left\langle f, \sum_{i\in I} g_i\right\rangle\right| \leq \|f\| \left\|\sum_{i\in I} g_i\right\| \leq \\ &\leq \beta \|f\| \left(\sum_{i\in I} \|g_i\|^2\right)^{1/2};\end{aligned}$$

tomando el supremo sobre todas las familias con finitas coordenadas no nulas y de norma uno, concluimos que

$$\left\|\{P_{W_i}f\}_{i\in I}\right\| \leq \beta \|f\|,$$

es decir, $\{W_i\}_{i\in I}$ es una sucesión de Bessel de subespacios. Un razonamiento análogo muestra que lo mismo vale para la familia $\{V_i\}_{i\in I}$

Resta probar que las proyecciones

$$P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$$

(sobre las cuales ya se hizo notar que son isomorfismos topológicos) satisfacen la cota inferior uniforme (2.8). Denotemos por $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ las funciones coordenadas de la base de subespacios $\{W_i\}_{i\in I}$, y para cada $i \in I$ sea $Q_i : V_i \to W_i$ el operador inverso de $P_{V_i}|_{W_i}$ in V_i, entonces

$$\gamma_i = Q_i \cdot P_{V_i} \quad \text{ para todo } i \in I$$

(pues $V_i \perp W_j$ si $i \neq j$, y entonces $f = \sum_j \gamma_j(f) \Rightarrow P_{V_i}(f) = P_{V_i}(\gamma_i(f)) \Rightarrow Q_i(P_{V_i}(f)) = \gamma_i(f)$). En particular, $Q_i = \gamma_i$ en V_i y puesto que

$$\|Q_i\| = \sup_{\substack{g_i\in V_i\\ \|g_i\|=1}} \|Q_i(g_i)\| = \sup_{\substack{g_i\in V_i\\ \|g_i\|=1}} \|\gamma_i(g_i)\| \leq \|\gamma_i\|$$

existe $C > 0$ (por el Corolario 2.15) tal que

$$\|Q_i\| \leq C \quad \forall\, i \in I.$$

Finalmente, si $f_i \in W_i$ entonces $f_i = Q_i P_{V_i} f_i$ y

$$\|f_i\| \leq \|Q_i\| \, \|P_{V_i} f_i\| \leq C \, \|P_{V_i} f_i\|$$

de donde resulta (2.8) con $c = 1/C$.

($6 \Rightarrow 4$) Denotemos, por $Q_i : V_i \to W_i$ el operador inverso de $P_{V_i}|_{W_i}$ para cada $i \in I$. Si $g_i \in V_i$, usando (2.8) vemos que

$$c\,\|Q_i(g_i)\| \leq \left\| P_{V_i}|_{W_i} \, Q_i(g_i)\right\| = \|g_i\|$$

y entonces

$$\|Q_i\| \leq 1/c \quad \forall\, iI.$$

Definamos $\gamma_i = Q_i \cdot P_{V_i}$, entonces para todo $i \in I$ se tiene que $\gamma_i|_{W_i} = Id$, $\gamma_i|_{W_j} = 0$ si $i \neq j$ (por ser familias biortogonales), y si denotamos

$$S_N(f) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(f),$$

entonces para $f,\ g \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle S_N(f), g\rangle| &= \left|\sum_{i=1}^{N} \langle Q_i P_{V_i}(f), g\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} \langle Q_i P_{V_i}(f), P_{W_i}(g)\rangle\right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} |\langle Q_i P_{V_i}(f), P_{W_i}(g)\rangle| \leq \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{c} \|P_{V_i}(f)\| \, \|P_{W_i}(g)\| \leq \\
&\leq \frac{1}{c} \left(\sum_{i=1}^{N} \|P_{V_i}(f)\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N} \|P_{W_i}(g)\|^2\right)^{1/2} \leq C \, \|f\| \, \|g\| \, ,
\end{aligned}$$

donde C es una constante (que unifica las constantes de $\{W_i\}_{i\in I}$ y $\{V_i\}_{i\in I}$ como sucesiones de Bessel de subespacios, y la constante $1/c$). Eso implica que

$$\|S_N\| \leq C \qquad \text{para todo } N \in \mathbb{N},$$

y entonces el Teorema 2.17 implica que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios. Pero la misma demostración nos permite inferir que $\left\{W_{\pi(i)}, \gamma_{\pi(i)}\right\}_{i\in I}$ es base de subespacios para cualquier permutación π de I (notar que la hipótesis en (6) no tiene en cuenta el orden en I), y entonces el Teorema 2.30 implica que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional. ■

En el Ejemplo 2.58, más adelante, se muestra que la condición (2.8) en el Teorema 2.37 es esencial, en el sentido de que existen sucesiones de Bessel de subespacios que tienen única biortogonal que también es sucesión de Bessel de subespacios, pero que no son base de Riesz de subespacios.

En el curso de la demostración de ($4 \Rightarrow 3$) en el teorema anterior, queda probado el siguiente resultado:

Proposición 2.38. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios incondicional, entonces es sucesión de Bessel de subespacios.*

La siguiente observación es clave para el estudio de las bases de Riesz de subespacios invariantes por traslaciones enteras, tema a tratar en el próximo capítulo:

Observación 2.39.

1. *Para verificar que una familia total $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, basta con chequear la condición (2) del Teorema 2.37 en un subconjunto denso $\mathcal{D} \subseteq \sum \bigoplus_i W_i$. Explícitamente, basta con chequear que:*

   ($2'$) *existen constantes $\alpha,\ \beta > 0$ tales que para cada $I_0 \subseteq I$ finito se tiene que*

   $$\alpha \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I_0} f_i\right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \qquad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}$$

   donde $\mathcal{D}$ es un subconjunto denso en $\sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, *ya que esta implica dicha condición (hay que tener cuidado al leer esto: dada una familia $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}$, la misma debe satisfacer la desigualdad para todo I_0 finito). Para verlo, tomemos $\{f_i\} \in \prod_{i\in I} W_i$, y $I_0 \subseteq I$ un conjunto finito. Puesto que $\left\{f_i \chi_{I_0}(i)\right\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_i W_i$, existe una sucesión $\left\{\left\{f_i^j\right\}_i\right\}_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$ tal que*

$$\left\{f_i^j\right\} \xrightarrow[j\to\infty]{\sum \bigoplus_i W_i} \left\{f_i \chi_{I_0}\right\}.$$

Esto implica, en particular, que

$$\left\|f_i^j\right\| \xrightarrow[j\to\infty]{} \|f_i\| \qquad \forall\ i \in I_0.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\alpha \sum_{i\in I_0} \left\|f_i^j\right\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I_0} f_i^j\right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \left\|f_i^j\right\|^2$$

y tomando $\lim_{j\to\infty}$ *(y usando que las sumas son finitas y la continuidad de la norma) concluimos que*

$$\alpha \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_{i\in I_0} f_i\right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 .$$

2. *Usando el punto anterior podemos ver que, más aún, basta con chequear que*

$$\alpha \sum_i \|f_i\|^2 \leq \left\|\sum_i f_i\right\|^2 \leq \beta \sum_i \|f_i\|^2 \qquad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}$$

si $\mathcal{D} \subseteq \sum \bigoplus_i W_i$ es un denso tal que:

   a) *cada $\{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}$ tiene una cantidad finita de componentes distinta de cero, y*
   b) *$\{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D} \Rightarrow \left\{f_i \chi_{I_0}(i)\right\}_{i\in I} \in \mathcal{D}$ para todo $I_0 \subseteq I$ finito (es decir, si una familia está en $\mathcal{D}$ entonces cualquier familia que se obtiene cambiando coordenadas por ceros está en $\mathcal{D}$).*

Una forma de construir un conjunto $\mathcal{D}$ que tenga esas dos propiedades y que además sea contable es así: tomar $\mathcal{D}_i \subseteq W_i$ denso contable, y tal que $0 \in \mathcal{D}_i$ y definir

$$\mathcal{D} = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{D}_i : \text{ sólo finitas } f_i\text{'s son distintas de cero} \right\},$$

que es contable pues está incluido en $\prod_i \mathcal{D}_i$.

Más aún, si $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{H}$ es un denso contable tal que $0 \in \mathcal{E}$, se puede tomar $\mathcal{D}_i = P_{W_i}(\mathcal{E})$, resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{D}_i : \text{ sólo finitas } f_i\text{'s son distintas de cero} \right\} \\ &= \left\{ \{P_{W_i}(f_i)\}_{i\in I} : \ \{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{F} \right\}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{F} = \left\{ \{f_i\}_{i\in I} \text{ tq: } f_i \in \mathcal{E}\ \forall\ i \text{ y sólo finitas} f_i\text{'s son distintas de cero} \right\}$*. Usando esto último concluimos que la condición en el punto (2) del teorema anterior se puede reemplazar con*

$$\alpha \sum_i \|P_{W_i}(f_i)\|^2 \leq \left\| \sum_i P_{W_i}(f_i) \right\|^2 \leq \beta \sum_i \|P_{W_i}(f_i)\|^2 \qquad \forall\ \{f_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}.$$

Un par de observaciones más acerca de las bases de Riesz de subespacios:

Observación 2.40. *Si $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz de subespacios, entonces:*

1. *Para cada $I_0 \subseteq I$, la familia $\{W_i\}_{i\in I_0}$ es base de Riesz de subespacios de $\overline{span}(U_{i\in I_0} W_i)$ (esto es, una subfamilia de una base de Riesz de subespacios es base de Riesz de subespacios del espacio que genera). Esto es inmediato del punto (2) del Teorema 2.37.*

2. *Si $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ es un isomorfismo topológico, entonces $\{T(W_i)\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios de $\widetilde{\mathcal{H}}$.*

Las bases de Riesz de subespacios se pueden caracterizar por medio de bases de Riesz, o dicho de otra forma, permiten tener un criterio bajo el cual, juntando bases de Riesz de diferentes subespacios, obtenemos una base de Riesz del espacio que generan:

Teorema 2.41 (Caracterización Mediante Bases)**.** *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios (cerrados) de $\mathcal{H}$, y para cada $i \in I$, sea $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ una base de Riesz para W_i. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, y existen constantes α y β tales que para cada $i \in I$, $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ es base de Riesz para W_i con constantes α y β.*

2. *$\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es base de Riesz para $\mathcal{H}$.*

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ Como $\{W_i\}_{i\in I}$ es total, es evidente que $\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es completo. Tomemos $\{c_{ij}\}_{i,j}$ una sucesión con finitos términos no nulos. Si $f_i = \sum_j c_{ij} e_{ij}$, entonces $\forall\ i \in I$ vale

$$\alpha \sum_j |c_{ij}|^2 \leq \|f_i\|^2 \leq \beta \sum_j |c_{ij}|^2$$

y entonces
$$\alpha \sum_i \sum_j |c_{ij}|^2 \leq \sum_i \|f_i\|^2 \leq \beta \sum_i \sum_j |c_{ij}|^2$$
Pero además, como $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, existen constantes κ y λ tales que
$$\kappa \sum_i \|f_i\|^2 \leq \left\| \sum_i f_i \right\|^2 \leq \lambda \sum_i \|f_i\|^2$$
de donde resulta (usando la definición de f_i)
$$\alpha\kappa \sum_i \sum_j |c_{ij}|^2 \leq \left\| \sum_i \sum_j c_{ij} e_{ij} \right\|^2 \leq \beta\lambda \sum_i \sum_j |c_{ij}|^2$$

($2 \Rightarrow 1$) Por definición de base de Riesz, existe una base ortonormal $\{\widetilde{e}_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ de $\mathcal{H}$ y un isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $T(\widetilde{e}_{ij}) = e_{ij}$. Llamemos $\mathcal{M}_i = span\left(\{\widetilde{e}_{ij}\}_{j\in J_i}\right)$, entonces
$$\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{M}_i \qquad \text{y} \qquad W_i = T(\mathcal{M}_i),$$
es decir, $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios. Además
$$\left\| \sum_j c_{ij} e_{ij} \right\|^2 = \left\| \sum_j c_{ij} T(\widetilde{e}_{ij}) \right\|^2 = \left\| T\left(\sum_j c_{ij} \widetilde{e}_{ij} \right) \right\|^2,$$
de donde resulta
$$\left\| \sum_j c_{ij} e_{ij} \right\|^2 \leq \|T\|^2 \left\| \sum_j c_{ij} \widetilde{e}_{ij} \right\|^2 = \|T\|^2 \sum_j |c_{ij}|^2$$
y
$$\left\| \sum_j c_{ij} e_{ij} \right\|^2 \geq \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \left\| \sum_j c_{ij} \widetilde{e}_{ij} \right\|^2 = \frac{1}{\|T^{-1}\|^2} \sum_j |c_{ij}|^2$$
es decir, tengo constantes uniformes para las bases de Riesz $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ de W_i (esto, además, es inmediato si notamos que las bases de Riesz de cada W_i son subbases de la base de Riesz para $\mathcal{H}$). ■

Corolario 2.42. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios y $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ es base ortonormal para W_i, entonces las siguientes afirmaciones resultan equivalentes:*

1. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios.*
2. *$\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es base de Riesz para $\mathcal{H}$.*

Observación 2.43. *Si* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es base de Riesz de subespacios, su dual biortogonal se puede construir a partir de bases vectoriales: para cada* $i \in I$*, sea* $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ *una base ortonormal para* W_i*, entonces el Teorema 2.41 implica que* $\{e_{ij}\}_{j\in J_i, i\in I}$ *es base de Riesz para* $\mathcal{H}$*, y entonces tiene (una única) base de Riesz biortogonal* $\{\widetilde{e}_{st}\}_{s\in J_t, t\in I}$*. Definiendo*

$$V_s = \overline{span}\left(\{\widetilde{e}_{st}\}_{t\in J_s}\right)$$

tenemos que $W_i \perp V_s$ *para todo* $i \neq s$*, y si*

$$W_i \ni f = \sum_j \langle f, e_{ij}\rangle\, e_{ij}$$

entonces

$$\langle f, \widetilde{e}_{it}\rangle = \sum_j \langle f, e_{ij}\rangle \langle e_{ij}, \widetilde{e}_{it}\rangle = \langle f, e_{it}\rangle\,,$$

de donde podemos concluir que $f \perp V_i$ *si y solo si* $f = 0$*. Es decir,* $\{V_i\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal por definición, y entonces la Observación 2.23 (junto con el Teorema 2.33) nos dice que debe ser la base de Riesz dual de* $\{W_i\}_{i\in I}$*.*

2.4. Marcos de fusión

Los marcos de fusión fueron introducidos en [CK04] como “marcos de subespacios”, pero posteriormente en [CKS08] se cambió su nombre a marcos de fusión. Cabe destacar que en el trabajo original, se formula la definición utilizando “pesos”, los cuales hemos omitido, solamente a fines de obtener una notación más clara. Los resultados incluidos se pueden generalizar con facilidad al caso con pesos.

En esta sección incluiremos las definiciones y resultados necesarios para el desarrollo de la tesis, como algunas correcciones a demostraciones o enunciados erróneos del trabajo original. Los resultados cuya demostración no incluimos pueden encontrarse en [CK04]. Presentamos además una caracterización de marco de fusión que es base de Riesz de subespacios por medio del marco de fusión dual, análoga a la condición vectorial que aparece en el apartado (11) del Teorema 1.12. Se explora también la “minimalidad de los coeficientes”, logrando una mejora del resultado que aparece en [CKS08].

Otro concepto estudiado es el de refinamiento. que hemos encarado con el mismo criterio que en [RS08], donde se entiende por refinamiento a la eliminación de espacios de la familia original y/o la eliminación de parte de algunos subespacios. Exponemos un criterio que permite detectar la parte “indispensable” de cada subespacio (que resulta suma directa con la clausura del espacio generado por el resto), como aquella que, bajo ciertas condiciones, se puede desechar. Proveemos además de dos ejemplos que muestran que el procedimiento funciona de manera no trivial tanto para eliminar subespacios completos de un marco de fusión, como para detectar una parte indispensable y otra que se puede eliminar.

Definición 2.44. *Una familia $\{W_i\}_{i\in I}$ de subespacios cerrados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se llama un marco de fusión si existen constantes positivas α y β tales que*

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2 \tag{2.9}$$

para toda $f \in \mathcal{H}$. Si $\alpha = \beta$, lo llamaremos un marco de fusión Ajustado.

Notar que si solo se cumple la desigualdad superior la familia es una sucesión de Bessel de subespacios (Definición 2.34).

Observación 2.45. *La definición anterior implica que la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es total.*

El primer resultado consiste en la caracterización de los marcos de fusión por medio de marcos (vectoriales):

Teorema 2.46 (Caracterización mediante marcos)**.** *Si para cada $i \in I$, $\{f_{ij}\}_{j\in J_i}$ es un marco para W_i con constantes α, β (la misma constante para todo $i \in I$), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{f_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para $\mathcal{H}$.*
2. *$\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión de $\mathcal{H}$.*

A continuación, definimos los operadores clásicos, similares a los que se utilizan en el caso vectorial.

Definición 2.47. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de subespacios (cerrados) de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, definimos (formalmente):*

1. *$C_W : \mathcal{H} \to \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, $C_W(f) = \{P_{W_i}(f)\}_i$, es el operador análisis del marco de fusión.*
2. *$R_W : \sum \bigoplus_{i\in I} W_i \to \mathcal{H}$, $R_W(\{f_i\}_i) = \sum_{i\in I} f_i$, es el operador síntesis del marco de fusión.*
3. *$S_W : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $S_W(f) = \sum_{i\in I} P_{W_i}(f)$, es el operador del marco de fusión.*

En este punto la definición es solo formal, en el sentido de que no se puede (sin saber nada sobre la familia $\{W_i\}_{i\in I}$) asegurar que están bien definidos (menos aún que sean acotados), ni que la imagen esté en el espacio especificado. Sin embargo veremos a continuación que caracterizan completamente los marcos de fusión.

Teorema 2.48. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios (cerrados), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El operador C_W está bien definido, es lineal y acotado.*
2. *El operador R_W está bien definido, es lineal y acotado.*

3. La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel de subespacios.*

En cualquier caso se tiene que $C_W^* = R_W$*, y (si vale cualquiera de las anteriores) resultan equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. El operador C_W *es acotado por abajo.*

2. El operador C_W^* *es sobre.*

3. La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ *es marco de fusión.*

(más adelante (Teorema 2.59) agregaremos la equivalencia entre las siguientes afirmaciones: C_W *es sobre;* R_W *es acotado por abajo;* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es base de Riesz de subespacios).*

Para el estudio de los marcos de fusión en espacios invariantes por traslaciones enteras, la siguiente observación es fundamental:

Observación 2.49. *Para verificar que una familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *de subespacios cerrados es un marco de fusión, basta con verificar la condición (2.9) en un subconjunto denso de* $\mathcal{H}$*. Esto se ve de la siguiente manera: si* $\mathcal{D}$ *es un subconjunto denso de* $\mathcal{H}$ *tal que la condición (2.9) vale para toda* $f \in \mathcal{D}$*, y*

$$\mathcal{D} \ni f_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} f,$$

entonces para todo subconjunto finito $I_0 \subseteq I$ *se tiene que*

$$\sum_{i\in I_0} \|P_{W_i}(f_j)\|^2 \leq \beta \|f_j\|^2,$$

y entonces, tomando $\lim_{j\to\infty}$ *y usando que la suma es finita, vemos que*

$$\sum_{i\in I_0} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2,$$

lo cual automáticamente implica que

$$\sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2.$$

Esto, a su vez, implica que el operador análisis C_W *esta bien definido, es lineal acotado, y (asumiendo la condición (2.9) en* $\mathcal{D}$*) acotado por abajo en* $\mathcal{D}$*, lo cual implica que* C_W *es acotado por abajo.*

Un marco de fusión también puede caracterizarse por medio de su operador de marco:

Teorema 2.50. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios (cerrados), entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es un marco de fusión con constantes* α *y* β.

2. *El operador* $S_W(f) = \sum_{i\in I} P_{W_i}(f)$ *está bien definido en* $\mathcal{H}$, *es lineal acotado, y satisface*

$$\alpha\langle f,f\rangle \leq \langle S_W f, f\rangle \leq \beta\langle f,f\rangle \qquad \text{para toda } f\in\mathcal{H}.$$

En tal caso, $S_W = C_W^* C_W$, *y en particular tenemos equivalencia entre las siguientes afirmaciones:*

1. $\{W_i\}_{i\in I}$ *es marco de fusión ajustado con constante* α.

2. $S = \alpha Id$.

De manera similar al caso vectorial, el operador de marco de fusión permite recuperar un elemento "analizado":

Teorema 2.51. *Si* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es un marco de fusión con constantes* α *y* β, *entonces* S_W *es un operador autoadjunto definido positivo e invertible, con*

$$\alpha\langle f,f\rangle \leq \langle S_W f, f\rangle \leq \beta\langle f,f\rangle \qquad \text{para toda } f\in\mathcal{H}.$$

Además, para cada $f\in\mathcal{H}$ *se tiene*

$$f = \sum_{i\in I} S_W^{-1} P_{W_i} f = \sum_{i\in I} P_{W_i} S_W^{-1} f,$$

donde ambas series convergen incondicionalmente (Notar, sin embargo, que $\left\{P_{W_i} S_W^{-1} f\right\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$, *mientras que* $\left\{S_W^{-1} P_{W_i} f\right\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} S_W^{-1}(W_i)$*).*

El teorema anterior sugiere el camino para definir un marco de fusión dual. El siguiente resultado aparece en el trabajo original, pero con una falencia en su demostración. Ofrecemos una demostración alternativa:

Teorema 2.52. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *un marco de fusión y* $T:\mathcal{H}\to\widetilde{\mathcal{H}}$ *un isomorfismo topológico. Entonces la familia* $\{T(W_i)\}_{i\in I}$ *es un marco de fusión para* $\widetilde{\mathcal{H}}$ *(esto es, la condición de ser marco de fusión se preserva por isomorfismo topológico). En particular,* $\left\{S_W^{-1}(W_i)\right\}_{i\in I}$ *es un marco de fusión que se denomina el marco de fusión dual.*

Demostración . Para cada $i\in I$, tomemos una base ortonormal $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ para W_i. Entonces, el Teorema 2.46 implica que $\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para $\mathcal{H}$, y entonces $\{T(e_{ij})\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco para $\widetilde{\mathcal{H}}$ (ya que la condición de marco vectorial se preserva por isomorfismo topológico). Además, para cada $i\in I$ tenemos que $\{Te_{ij}\}_{j\in J_i}$ es base de Riesz de $T(W_i)$ con constantes (uniformes) $\|T^{-1}\|^{-2}$ y $\|T\|^2$ (de nuevo, porque esta condición ser preserva por isomorfismo topológico), en particular, resultan marcos para $T(W_i)$ con las mismas constantes uniformes. Aplicando nuevamente el Teorema 2.46 (pero ahora en la otra dirección) concluimos que $\{T(W_i)\}_{i\in I}$ es un marco de fusión de $\widetilde{\mathcal{H}}$. ■

En [Gav06] también se hace notar el error en el trabajo original, y se da una demostración directa (sin apelar al uso de bases), que se basa en el próximo lema. Incluimos tal lema, con una demostración más directa que con la que aparecen en dicho trabajo, y para futuro uso:

Lema 2.53. *Sea $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ un operador lineal acotado, y V un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces*

$$P_V \cdot T^* = P_V \cdot T^* \cdot P_{\overline{T(V)}}$$

Demostración . La igualdad $T \cdot P_V = P_{\overline{T(V)}} \cdot T \cdot P_V$ es inmediata, y el resultado sigue de tomar adjunto en ambos miembros. ■

Corolario 2.54. *Sea $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ un isomorfismo topológico y V un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces:*

1. $P_V \cdot T^* = P_V \cdot T^* \cdot P_{T(V)}$.
2. $P_{T(V)} \cdot (T^*)^{-1} = P_{T(V)} \cdot (T^*)^{-1} \cdot P_V$.

Demostración . Para ver (1) aplicar el lema anterior y usar que $T(V)$ es cerrado. Para (2), aplicar el primero al operador T^{-1} y el subespacio $T(V)$ (que en nuestras hipótesis es cerrado), y usar que $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. ■

Corolario 2.55. *En las condiciones del corolario anterior,*

$$\frac{\|P_V(T^*f)\|}{\|T^*\|} \leq \|P_{TV}(f)\| \leq \left\|(T^*)^{-1}\right\| \|P_V(T^*f)\| \quad \text{para toda } f \in \mathcal{H}.$$

Demostración . La primer desigualdad es inmediata de (1); para la segunda, aplicar (2) a T^*f. ■

Usando este último corolario se puede dar una demostración directa del Teorema 2.52:

Demostración . Puesto que $\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión, existen constantes α y β tales que

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2,$$

y el corolario anterior me dice que

$$\frac{\|P_{W_i}(T^*f)\|}{\|T^*\|} \leq \|P_{TW_i}(f)\| \leq \left\|(T^*)^{-1}\right\| \|P_{W_i}(T^*f)\|,$$

de donde resulta

$$\sum_{i\in I} \frac{\|P_{W_i}(T^*f)\|^2}{\|T^*\|^2} \leq \sum_{i\in I} \|P_{TW_i}(f)\|^2 \leq \sum_{i\in I} \left\|(T^*)^{-1}\right\|^2 \|P_{W_i}(T^*f)\|^2,$$

que combinada con la primera dice

$$\frac{\alpha}{\|T^*\|^2}\|T^*f\|^2 \le \sum_{i\in I}\|P_{TW_i}(f)\|^2 \le \left\|(T^*)^{-1}\right\|^2 \beta \|T^*f\|^2 .$$

Usando que

$$\frac{1}{\left\|(T^*)^{-1}\right\|^2}\|f\|^2 \le \|T^*f\|^2 \le \|T^*\|^2\|f\|^2$$

se termina la demostración. ■

A continuación sentaremos las bases para establecer, bajo que condiciones, un marco de fusión es una base de Riesz de subespacios. Nuestra meta es una versión para subespacios del Teorema 1.12. En primer lugar incluimos un resultado elemental para mostrar un caso donde la teoría de marcos de fusión difiere de su análogo vectorial: en el caso vectorial, el operador de marco puede ser la identidad sin que el marco sea una base ortonormal. Para marcos de fusión, vale el siguiente:

Proposición 2.56. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios (cerrados). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I} W_i$.
2. $f = \sum_{i\in I} P_{W_i}(f)$ *para toda* $f \in \mathcal{H}$.
3. $\|f\|^2 = \sum_{i\in I}\|P_{W_i}(f)\|^2$ *para toda* $f\in\mathcal{H}$.

(es decir, un marco de fusión ajustado con constante 1 es necesariamente una descomposición ortogonal de $\mathcal{H}$).

Demostración . $(1 \Rightarrow 2)$ y $(2 \Rightarrow 3)$ son inmediatas. Para $(3 \Rightarrow 1)$ primero notar que (3) implica que la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es total. Además, $\forall\ j \in I$ se tiene que

$$\left\|P_{W_j}f\right\|^2 = \sum_{i\in I}\left\|P_{W_j}P_{W_i}(f)\right\|^2 = \left\|P_{W_j}(f)\right\|^2 + \sum_{i\neq j}\left\|P_{W_j}P_{W_i}(f)\right\|^2,$$

de donde $P_{W_j}\cdot P_{W_i} \equiv 0\ \forall\ j \neq i$. ■

Veamos ahora que toda base de Riesz de subespacios es un marco de fusión. Esta afirmación resulta trivial en el trabajo original [CK04], ya que en él las bases de Riesz de subespacios se definen como un caso particular de los marcos de fusión. Damos dos demostraciones: una por medio de bases, y otra directa.

Teorema 2.57. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una base de Riesz de subespacios, entonces es un marco de fusión.*

Demostración . Para cada $i \in I$, sea $\{e_{ij}\}_{j\in J_i}$ una base ortonormal para W_i, entonces el Corolario 2.42 implica que $\{e_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$es base de Riesz para $\mathcal{H}$, y entonces (apelando al Teorema 2.46), $\{W_i\}_{i\in I}$ es marco de fusión. ■

Usando el Corolario 2.55, podemos hacer una demostración directa, sin apelar a bases:

Demostración . Por definición de base de Riesz de subespacios, existe una familia de subespacios (cerrados) $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ y un isomorfismo topológico $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{M}_i \qquad \text{y} \qquad W_i = T(\mathcal{M}_i) \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}$ se tiene $\|T^*f\|^2 = \sum \|P_{\mathcal{M}_i}(T^*f)\|^2$, y

$$\frac{\|f\|}{\left\|(T^*)^{-1}\right\|} \leq \|T^*(f)\| \leq \|T^*\| \, \|f\| .$$

Además, el Corolario 2.55 implica que

$$\frac{\|P_{\mathcal{M}_i}(T^*f)\|}{\|T^*\|} \leq \|P_{W_i}(f)\| \leq \left\|(T^*)^{-1}\right\| \|P_{\mathcal{M}_i}(T^*f)\| ;$$

elevando al cuadrado y sumando, obtenemos

$$\frac{\|f\|^2}{\|T^*\|^2 \left\|(T^*)^{-1}\right\|^2} \leq \sum_i \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \|T^*\|^2 \left\|(T^*)^{-1}\right\| \|f\|^2 . \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior nos permite presentar el siguiente ejemplo, donde se muestra que la condición (2.8) en el Teorema 2.37 es esencial, en el sentido de que existen sucesiones de Bessel de subespacios que tienen única familia biortogonal que también es sucesión de Bessel de subespacios, pero que no son base de Riesz de subespacios. Veremos esto construyendo una sucesión $\{W_j\}_{j=1}^\infty$ que tiene única familia biortogonal pero que no es marco de fusión (y por ende, no es base de Riesz de subespacios):

Ejemplo 2.58. *Sea $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, y definamos las siguientes sucesiones y subespacios ($j \in \mathbb{N}$):*

$$\begin{cases} f_{2j-1} = e_{2j} + \frac{1}{j} e_{2j-1} \\ f_{2j} = e_{2j} \end{cases} , \quad \begin{cases} g_{2j-1} = j e_{2j-1} \\ g_{2j} = e_{2j} - j e_{2j-1} \end{cases} , \quad W_j = span\,(f_j) , \ \ V_j = span\,(g_j) .$$

Entonces:

1. *Las sucesiones $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ y $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ son ambas totales, y $\langle f_j, g_i\rangle = \delta_{ji} \ \forall \ i, j$. Eso implica que ambas son minimales, y para todo j se tiene que*

$$\mathcal{H} = W_j \oplus \overline{span}\,(\{f_i : i \neq j\}) = V_j \oplus \overline{span}\,(\{g_i : i \neq j\}) . \tag{2.10}$$

   (la suma es densa en $\mathcal{H}$, y cerrada ya que $\dim(W_j) = \dim(V_j) = 1$, ver los comentarios siguientes al Teorema 2.7).

2. *La sucesión $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ es sucesión de Bessel con $1 \leq \|f_j\| \leq 2$; en cambio, $\{g_j\}_{j=1}^\infty$ no es sucesión de Bessel (no es acotada por arriba).*

3. $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es sucesión de Bessel de subespacios, ya que si* $f \in \mathcal{H}$ *entonces*

$$\begin{aligned}\left\|P_{W_{2j-1}}(f)\right\|^2 &= \frac{j^2}{j^2+1}\left|\left\langle f,\ e_{2j}+\frac{1}{j}e_{2j-1}\right\rangle\right|^2 \leq \left|\left\langle f,\ e_{2j}+\frac{1}{j}e_{2j-1}\right\rangle\right|^2 \leq \\ &\leq \left|\langle f, e_{2j}\rangle\right|^2 + 2\left|\langle f, e_{2j}\rangle \langle f, e_{2j-1}\rangle\right| + \left|\langle f, e_{2j-1}\rangle\right|^2,\end{aligned}$$

y $\left\|P_{W_{2j}}(f)\right\|^2 = |\langle f, e_{2j}\rangle|^2$, *y entonces (usando la desigualdad de Schwartz)*

$$\begin{aligned}\sum_j \left\|P_{W_j}(f)\right\|^2 &\leq \sum_j |\langle f, e_{2j-1}\rangle|^2 + 2\sum_j |\langle f, e_{2j}\rangle \langle f, e_{2j-1}\rangle| + 2\sum_j |\langle f, e_{2j}\rangle|^2 \leq \\ &\leq 2\|f\|^2 + 2\left(\sum_j |\langle f, e_{2j}\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_j |\langle f, e_{2j-1}\rangle|^2\right)^{1/2} \leq 4\|f\|^2.\end{aligned}$$

4. $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ *no es marco de fusión:*

$$\left\|P_{W_{2j-1}}(e_{2k-1})\right\|^2 = \delta_{jk}\frac{1}{j^2+1},\ \left\|P_{W_{2j}}(e_{2k-1})\right\|^2 = 0,$$

y entonces

$$\sum_j \left\|P_{W_j}(e_{2k-1})\right\|^2 = \frac{1}{k^2+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Una cuenta análoga muestra que $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ *tampoco es marco de fusión.*

5. $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es familia biortogonal para* $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$*:* $V_i \perp W_j$ *para* $i \neq j$*, y* $V_i \not\perp W_i$ *(pues* $\langle g_i, f_i\rangle = 1\ \forall i$*).*

6. $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es sucesión de Bessel de subespacios, ya que*

$$\left\|P_{V_{2j-1}}(f)\right\|^2 = \frac{1}{j^2}|\langle f, je_{2j-1}\rangle|^2 = |\langle f, e_{2j-1}\rangle|^2,$$

y

$$\begin{aligned}\left\|P_{V_{2j}}(f)\right\|^2 &= \frac{1}{1+j^2}|\langle f,\ e_{2j} - je_{2j-1}\rangle|^2 \leq \\ &\leq |\langle f, e_{2j}\rangle|^2 + |\langle f, e_{2j}\rangle \langle f, e_{2j-1}\rangle| + |\langle f, e_{2j-1}\rangle|^2\end{aligned}$$

(hemos usado que $2j \leq 1 + j^2$*), y entonces*

$$\sum_j \left\|P_{V_j}(f)\right\|^2 \leq 3\|f\|^2.$$

Esto muestra que $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es sucesión de Bessel de subespacios, para la cual* $\{V_j\}_{j=1}^{\infty}$ *es la única familia biortogonal (por (2.10), ver Teorema 2.7) que también es sucesión de Bessel de subespacios, y sin embargo* $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ *no es base de Riesz de subespacios, sencillamente porque ni siquiera es un marco de fusión. Si observamos* *como actúan los operadores* $P_{V_j}\big|_{W_j}$ *en un vector unitario, vemos que no se cumple la condición (2.8), es decir, no son uniformemente acotados por abajo:*

$$\begin{aligned}\left\| P_{V_{2j-1}}\big|_{W_{2j-1}}\left(\frac{f_{2j-1}}{\|f_{2j-1}\|}\right)\right\| &= \frac{\langle f_{2j-1},\ g_{2j-1}\rangle}{\|f_{2j-1}\|\ \|g_{2j-1}\|}\\ &= \frac{1}{\sqrt{j^2+1}} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty,\end{aligned}$$

y entonces no puede existir la constante $c > 0$ *de la condición (2.8).*

Además, la familia $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ *no es base de subespacios: de serlo, puesto que los espacios* W_i *tienen dimensión* 1*, se tendría que cada* $f \in \mathcal{H}$ *se expresa de forma única como*

$$f = \sum_i c_i f_i,$$

de donde resultaría $c_i = \langle f,\ g_i\rangle$ *, y entonces las funciones coordenadas serían*

$$\gamma_i(f) = \langle f,\ g_i\rangle\, f_i.$$

Pero en tal caso,

$$\|\gamma_i(g_i)\| = \|g_i\|^2\,\|f_i\| \geq \|g_i\|^2\,,$$

y entonces

$$\|\gamma_i\| \geq \|g_i\| \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

lo cual contradice lo establecido en el Corolario 2.15.

Finalmente, establecemos condiciones bajo las cuales un marco de fusión es una base de Riesz de subespacios, es decir, la versión para "familias de subespacios" del Teorema 1.12. Se incluyen las primeras 10 equivalencias, dejando la última para más adelante, ya que esta depende del concepto de *minimalidad de coeficientes*, que desarrollaremos con posterioridad.

Teorema 2.59. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *un marco de fusión, con operador de marco* S_W*. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La familia* $\left\{S_W^{-1}(W_i)\right\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal para* $\{W_i\}_{i\in I}$*.*

2. *Existe una familia biortogonal para* $\{W_i\}_{i\in I}$*.*

3. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es minimal.*

4. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es* $\omega - li$*.*

5. *La familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es* $\ell^2 - li$*.*

6. *Para cada* $f \in \mathcal{H}$ *existe una única familia* $\{f_i\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$ *tal que* $f = \sum_{i\in I} f_i$*.*

7. *El operador síntesis R_W es inyectivo (y entonces, isomorfismo topológico).*

8. *El operador análisis C_W es sobre (y entonces, isomorfismo topológico).*

9. *La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios.*

10. *La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios.*

Demostración . ($1 \Rightarrow 2$) Es inmediato.

($2 \Rightarrow 3$) Esto es el comentario anterior al Teorema 2.7.

($3 \Rightarrow 4$) Si $\{f_i\} \in \prod_i W_i$ y $0 = \sum_i f_i$, entonces para toda $j \in I$ tenemos $f_j = \sum_{i\neq j} f_i$ y entonces $f_j = 0$ por hipótesis.

($4 \Rightarrow 5$) Esto es inmediato y fue remarcado en la Observación 2.3.

($5 \Rightarrow 6$) Puesto que $\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión, sabemos que $f = \sum_i P_{W_i} S_W^{-1} f$, con $\left\{P_{W_i} S_W^{-1} f\right\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$. Si además $f = \sum_i g_i$ para otra familia $\{g_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, entonces $0 = \sum_i \left(P_{W_i} S_W^{-1} f - g_i\right)$, y la hipótesis de $\ell^2 - li$ implica que $g_i = P_{W_i} S_W^{-1} f$ para todo $i \in I$.

($6 \Rightarrow 7$) Si R_W no fuera inyectivo, existirían dos familias distintas $\{f_i\}_{i\in I}$, $\{g_i\}_{i\in I}$ en $\sum \bigoplus_{i\in I} W_i$ tales que $\sum_i f_i = \sum_i g_i$, lo cual contradice (6).

($7 \Leftrightarrow 8$) Esto vale en general para cualquier par de operadores, teniendo en cuenta que $C_W^* = R_W$ (Teorema 2.48). La condición de ser isomorfismo topológico se deriva también del Teorema 2.48, ya que $\{W_i\}_{i\in I}$ es marco de fusión.

($7 \Rightarrow 9$) Sea $\widetilde{\mathcal{H}} = \sum \bigoplus_{i\in I} W_i$, y denotemos $\widetilde{W_i}$ la "inclusión" de W_i en $\widetilde{\mathcal{H}}$, de manera que $\widetilde{\mathcal{H}} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I} \widetilde{\mathcal{M}_i}$. Entonces, $R_W : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ es isomorfismo topológico y $W_i = R_W\left(\widetilde{W_i}\right)$, y entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios por definición.

($9 \Rightarrow 10$) Es inmediato.

($10 \Rightarrow 1$) Denotemos por $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ a las funciones coordenada, que existen bajo la hipótesis (10) (ver Observación 2.13). Entonces, puesto que $f = \sum_i P_{W_i} S_W^{-1} f$ para toda f en $\mathcal{H}$, por unicidad se tiene que $\gamma_i = P_{W_i} S_W^{-1}$ para todo $i \in I$. Entonces, la única familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$ es la definida por $V_i = \gamma_i^*(\mathcal{H}) = S_W^{-1} P_{W_i}(\mathcal{H}) = S_W^{-1}(W_i)$ (ver Observación 2.21). ■

En las condiciones del teorema anterior, es inmediato ver que si denotamos $\mathcal{M}_i = S_W^{-1/2}(W_i)$, entonces $\mathcal{H} = \overset{\perp}{\bigoplus}_{i\in I} \mathcal{M}_i$ (esto se menciona en el trabajo original [CK04]). Las condiciones anteriores, para que un marco de subespacios sea una base de Riesz, apuntan todas en la misma dirección: falta de redundancia. En el trabajo original se dice, equivocadamente, que los marcos de fusión se comportan de manera semejante a los vectoriales en cuanto a eliminar la redundancia, afirmando que al eliminar un subespacio de un marco de fusión queda otro marco de fusión o un conjunto no total. El siguiente ejemplo muestra que es posible eliminar un subespacio y que el resultado sea un conjunto total, que no es marco de fusión:

Ejemplo 2.60. *Considerar la familia $\{W_j\}_{j=1}^{\infty}$ del Ejemplo 2.58. Dicha familia es sucesión de Bessel de subespacios total que no es marco de fusión, pero $\{\mathcal{H},\ W_j\}_{j=1}^{\infty}$ es un marco de fusión.*

En varios trabajos se ha estudiado el problema de "refinar" marcos de fusión, ya sea por eliminación de subespacios del marco de fusión (ver [Asg09] y [XZD14], y en dimensión finita [CK08]), o de forma más general, tomando subespacios incluidos en los subespacios del marco de fusión original (ver [RS08]), en la mayoría de los casos concentrándose en el rol de los "pesos" que fueran utilizados en la definición original de marco de fusión en [CK04]. Presentaremos un resultado diferente sobre refinamiento, pero para llegar a el es necesario antes investigar el "tamaño de los coeficientes" utilizados para la síntesis.

Si $\{f_j\}_{j\in I}$ es marco en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, se sabe que cada $f \in \mathcal{H}$ se puede expresar como una serie de la forma

$$f = \sum_{j\in I} c_j f_j .$$

En general la forma no es única. Pero los coeficientes que tienen norma mínima en ℓ^2 son los que se obtienen vía el operador de marco, utilizando el marco dual (ver Teorema 1.11). Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión, para cada $f \in \mathcal{H}$ tenemos que

$$f = \sum_{i\in I} S_W^{-1} P_{W_i}(f) = \sum_{i\in I} P_{W_i}\left(S_W^{-1} f\right),$$

por lo que resulta natural investigar resultados similares al caso vectorial, analizando la (minimalidad de la) norma de los "coeficientes", ya sea en $\sum\bigoplus_{i\in I} S_W^{-1}(W_i)$ o en $\sum\bigoplus_{i\in I} W_i$, dependiendo del camino utilizado para reconstruir f. Aquí aparece esta dificultad adicional, ya que, a deferencia del caso vectorial, el espacio de análisis cambia, dependiendo del orden en que usemos el marco dual. Primero analizamos el resultado incluido en [CKS08] (el más débil), que es acerca de la representación

$$f = \sum_{i\in I} S_W^{-1} P_{W_i}(f)$$

y la norma $\left\{S_W^{-1} P_{W_i} f\right\}_i$ en $\sum\bigoplus_{i\in I} S_W^{-1}(W_i)$ (el espacio de análisis, en este caso).

Lema 2.61. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un marco de fusión con operador de marco S_W, $\widetilde{W}_i = S_W^{-1}(W_i)$ el marco de fusión dual, $C_{\widetilde{W}}$ el operador análisis del marco de fusión $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$, P la proyección ortogonal de $\sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i$ sobre Rang $\left(C_{\widetilde{W}}\right)$ (que es cerrado dado que $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ es marco de fusión), y T el operador definido por*

$$T : \mathcal{H} \to \sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i, \qquad T(f) = \left\{S_W^{-1} P_{W_i}(f)\right\}_{i\in I} .$$

Entonces $C_{\widetilde{W}}^{*} \cdot P \cdot T = Id$.

Demostración . Notar que $\left\{S_W^{-1} P_{W_i} f\right\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i$. La demostración sale de manera directa, verificando que $f = C_{\widetilde{W}}^{*}(Tf)$ para toda $f \in \mathcal{H}$, y usando que $\ker\left(C_{\widetilde{W}}^{*}\right) = Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)^{\perp}$. ■

Teorema 2.62. *Con la notación del lemma anterior, para toda* $\{g_i\}_{i\in I} \in \sum \bigoplus_{i\in I} \widetilde{W_i}$ *tal que* $f = \sum_i g_i$*, se tiene*

$$\left\| P\left(\left\{S_W^{-1} P_{W_i} f\right\}_i\right)\right\| \leq \|\{g_i\}_i\| \tag{2.11}$$

(es decir, no muestra que los coeficientes tienen norma mínima pero si su proyección).

Demostración . Escribamos $\{g_i\}_i = \{h_i^1\}_i + \{h_i^2\}_i$ con $\{h_i^1\}_i \in Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$ y $\{h_i^2\}_i \in Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)^{\perp}$, entonces $f = C_{\widetilde{W}}^*(\{g_i\}_i) = C_{\widetilde{W}}^*(\{h_i^1\}_i)$. Usando que $C_{\widetilde{W}}^*$ es inyectivo en $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$, vemos que $\{h_i^1\}_i = P\left(\left\{S_W^{-1} P_{W_i} f\right\}_i\right)$ (por el lema anterior), de donde se sigue inmediatamente el resultado. ■

Esta es la forma en la que el resultado se encuentra en el trabajo original, donde además los autores destacan el hecho de que es un resultado más débil que el caso vectorial porque no se obtiene una cota efectiva para los coeficientes, sino para su proyección. Un análisis más detallado permite mejorar esta situación, además de clarificar la relación de los espacios $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$ y $Rang\,(T)$ en $\sum \bigoplus_{i\in I} \widetilde{W_i}$:

Observación 2.63.

1. *$Rang\,(T)$ es cerrado. Para verlo, notar que*

$$\|Tf\|^2 = \sum_i \left\|S_W^{-1} P_{W_i}(f)\right\|^2;$$

usando que

$$\|S_W\|^{-1} \|P_{W_i}(f)\| \leq \left\|S_W^{-1} P_{W_i}(f)\right\| \leq \left\|S_W^{-1}\right\| \|P_{W_i}(f)\|$$

y (2.9), obtenemos

$$\alpha \|S_W\|^{-2} \|f\|^2 \leq \|Tf\|^2 \leq \beta \left\|S_W^{-1}\right\|^2 \|f\|^2,$$

donde α y β son las constantes del marco de fusión $\{W_i\}_{i\in I}$. Esto implica que T es acotado por abajo, y entonces tiene rango cerrado.

2. *$C_{\widetilde{W}}^* : Rang\,(T) \to \mathcal{H}$ es isomorfismo topológico: inyectivo pues*

$$C_{\widetilde{W}}^*(Tf) = C_{\widetilde{W}}^*(Tg) \Rightarrow f = g \Rightarrow T(f) = T(g);$$

y sobre ya que $f = C_{\widetilde{W}}^*(Tf)$.

3. *$P|_{Rang(T)} : Rang\,(T) \to Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$ es isomorfismo topológico: inyectiva pues*

$$P(Tf) = P(Tg) \Rightarrow C_{\widetilde{W}}^* P(Tf) = C_{\widetilde{W}}^* P(Tg),$$

es decir, $f = g$, y entonces $Tf = Tg$; sobre pues para llegar a $C_{\widetilde{W}}(f)$ (un elemento genérico de $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$), basta con considerar la función $g = S_{\widetilde{W}}(f) = C_{\widetilde{W}}^* C_{\widetilde{W}}(f)$: como $g = C_{\widetilde{W}}^* PT(g)$, resulta $PT(g) = C_{\widetilde{W}}(f)$ (de nuevo, por ser $C_{\widetilde{W}}^*$ inyectivo en $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$).

Esto muestra, de alguna manera, la relación entre los subespacios $Rang\,(T)$ y $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$ en $\sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i$, ya que se obtiene

$$\sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i = Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)\overset{\perp}{\oplus}\ker\left(C^*_{\widetilde{W}}\right) = Rang\,(T)\oplus\ker\left(C^*_{\widetilde{W}}\right).$$

Además, esto implica que el operador $P|_{Rang(T)}$ es acotado por abajo, y entonces existe $c>0$ tal que (2.11) se puede expresar como

$$\left\|\left\{S_W^{-1}P_{W_i}(f)\right\}_i\right\| \le c\,\|\{g_i\}_i\|,$$

es decir, una cota superior para el tamaño de los coeficientes.

Finalmente, hacemos notar que el Teorema 2.62 se puede obtener como un caso particular del Teorema 2.65 (adelante):

Observación 2.64. *Con la notación utilizada en el Teorema 2.62 y el lema anterior: $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ es un marco de fusión, y entonces para toda $f\in\mathcal{H}$ tenemos que*

$$f=\sum_i P_{\widetilde{W}_i}S_{\widetilde{W}}^{-1}f = C^*_{\widetilde{W}}\left(\left\{P_{\widetilde{W}_i}S_{\widetilde{W}}^{-1}f\right\}_i\right),\quad con\quad \left\{P_{\widetilde{W}_i}S_{\widetilde{W}}^{-1}f\right\}_i = C_{\widetilde{W}}\left(S_{\widetilde{W}}^{-1}f\right),$$

y también por el lema anterior

$$f=C^*_{\widetilde{W}}P\left(\left\{S_W^{-1}P_{W_i}f\right\}_i\right).$$

Puesto que $C^*_{\widetilde{W}}$ es inyectivo en $Rang\left(C_{\widetilde{W}}\right)$, concluimos que

$$\left\{P_{\widetilde{W}_i}S_{\widetilde{W}}^{-1}f\right\}_i = P\left(\left\{S_W^{-1}P_{W_i}f\right\}_i\right).$$

Entonces, el Teorema 2.65 (adelante) aplicado al marco de fusión $\left\{\widetilde{W}_i\right\}_{i\in I}$ implica que $P\left(\left\{S_W^{-1}P_{W_i}f\right\}_i\right)$ tiene la norma mínima entre las familias $\{g_i\}_{i\in I}\in\sum\bigoplus_{i\in I}\widetilde{W}_i$ tales que $f=\sum_i g_i$ (además de clarificar quien es la familia $P\left(\left\{S_W^{-1}P_{W_i}f\right\}_i\right)$).

La siguiente es la segunda visión sobre la “minimalidad de los coeficientes”, y sigue un camino que parece más natural que el anterior: si tomamos un marco de fusión $\{W_i\}_{i\in I}$ y una $f\in\mathcal{H}$, la representación $f=\sum_{i\in I}P_{W_i}\left(S_W^{-1}f\right)$ me da una forma de sintetizar f a partir de un elemento de $\sum\bigoplus_{i\in I}W_i$. Veremos que este es el elemento de norma mínima. El siguiente teorema es completamente análogo al caso vectorial (ver Teorema 1.11), y se puede deducir de un resultado más general en [Sun06]. Incluimos una prueba directa:

Teorema 2.65. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un marco de fusión con operador de marco S_W, $f\in\mathcal{H}$, y $\{g_i\}_{i\in I}\in\sum\bigoplus_{i\in I}W_i$ tal que $f=\sum_i g_i$, entonces*

$$\left\{\left(g_i - P_{W_i}S_W^{-1}f\right)\right\}_{i\in I}\perp\left\{P_{W_i}S_W^{-1}f\right\}_{i\in I}\ \ en\ \sum\bigoplus_{i\in I}W_i.$$

En particular

$$\left\|\{g_i\}_{i\in I}\right\|^2 = \left\|\left\{g_i - P_{W_i}S_W^{-1}f\right\}_{i\in I}\right\|^2 + \left\|\left\{P_{W_i}S_W^{-1}f\right\}_{i\in I}\right\|^2,$$

y por lo tanto $\left\{P_{W_i}S_W^{-1}f\right\}_{i\in I}$ *tiene la norma mínima entre todas las familias* $\{g_i\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$ *tales que* $f = \sum_i g_i$.

Demostración . Si $f = \sum_i g_i$, (para cualquier familia $\{g_i\}_{i\in I} \in \sum\bigoplus_{i\in I} W_i$) entonces

$$\left\langle f, S_W^{-1}f\right\rangle = \left\langle \sum_i g_i, S_W^{-1}f\right\rangle = \sum_i \left\langle g_i, S_W^{-1}f\right\rangle = \sum_i \left\langle g_i, P_{W_i}S_W^{-1}f\right\rangle,$$

en particular

$$\left\langle f, S_W^{-1}f\right\rangle = \sum_i \left\langle P_{W_i}S_W^{-1}f,\ P_{W_i}S_W^{-1}f\right\rangle,$$

de donde

$$0 = \sum_i \left\langle g_i - P_{W_i}S_W^{-1}f,\ P_{W_i}S_W^{-1}f\right\rangle. \qquad \blacksquare$$

Este resultado tiene implicaciones similares a las del caso vectorial, cuando se aplica a una proyección en particular. Esto es, tomando como función a $P_{W_k}(f)$ (para cierto $k \in I$ fijo), se obtiene

$$P_{W_k}f = \sum_{i\in I} P_{W_i}S_W^{-1}P_{W_k}f,$$

entonces considerando $g_i = \delta_{ik}P_{W_k}f$ para todo $i \in I$, vemos que

$$\left\|\{\delta_{ik}P_{W_k}f\}_i\right\|^2 = \sum_i \left\|\delta_{ik}P_{W_k}f - P_{W_i}S_W^{-1}P_{W_k}f\right\|^2 + \sum_i \left\|P_{W_i}S_W^{-1}P_{W_k}f\right\|^2$$

es decir

$$\|P_{W_k}f\|^2 = \left\|P_{W_k}f - P_{W_k}S_W^{-1}P_{W_k}f\right\|^2 + 2\sum_{i\neq k} \left\|P_{W_i}S_W^{-1}P_{W_k}f\right\|^2 + \left\|P_{W_k}S_W^{-1}P_{W_k}f\right\|^2, \tag{2.12}$$

igualdad que para f en W_k es

$$\|f\|^2 = \left\|f - P_{W_k}S_W^{-1}f\right\|^2 + 2\sum_{i\neq k} \left\|P_{W_i}S_W^{-1}f\right\|^2 + \left\|P_{W_k}S_W^{-1}f\right\|^2.$$

Entonces, para $f \in W_k$ tenemos que

$$\left\|P_{W_k}S_W^{-1}f\right\| = \|f\| \quad \text{es equivalente a} \quad f = P_{W_k}S_W^{-1}f, \tag{2.13}$$

y cualquiera de estas implica que

$$\sum_{i\neq k} \left\|P_{W_i}S_W^{-1}f\right\|^2 = 0, \text{ y entonces } P_{W_i}S_W^{-1}f = 0 \text{ para todo } i \neq k. \tag{2.14}$$

Si esto ocurre para toda $f \in W_k$, tenemos el siguiente:

Teorema 2.66. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ un marco de fusión con operador de marco S_W, y denotemos $\widetilde{W_i} = S_W^{-1}(W_i)$ (el dual canónico del marco de fusión). Supongamos que para algún $k \in I$ se tiene que*

$$\left\|P_{W_k} S_W^{-1} f\right\| = \|f\| \qquad \textit{para toda } f \in W_k. \tag{2.15}$$

Entonces

$$\mathcal{H} = W_k \oplus \overline{span}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right). \tag{2.16}$$

y $\widetilde{W_k} = \overline{span}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right)^{\perp}$.

Demostración . Debido a (2.13) y a (2.14), la hipótesis (2.15) implica que $W_i \perp \widetilde{W_k}$ para todo $i \neq k$. Esto a su vez implica que $\overline{\mathrm{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) \perp \widetilde{W_k}$, y entonces

$$\overline{\mathrm{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) \subseteq \left(\widetilde{W_k}\right)^{\perp} \tag{2.17}$$

Además, si $0 \neq f \in W_k$ luego $0 \neq S_W^{-1} f \in \widetilde{W_k}$, de donde podemos concluir (usando la hipótesis y (2.13)) que

$$\left\langle f, S_W^{-1} f\right\rangle = \left\langle f, P_{W_k} S_W^{-1} f\right\rangle = \langle f, f\rangle = \|f\|^2 \neq 0,$$

por lo que $f \notin \left(\widetilde{W_k}\right)^{\perp}$ y entonces

$$W_k \cap \left(\widetilde{W_k}\right)^{\perp} = \{0\} \tag{2.18}$$

Esto implica (por (2.17) y (2.18)) que

$$W_k \cap \overline{\mathrm{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) = \{0\},$$

y teniendo en cuenta que

$$f = \sum_{i\in I} P_{W_i} S_W^{-1} f = P_{Wk} S_W^{-1} f + \sum_{i\neq k} P_{W_i} S_W^{-1} f \qquad \text{para toda } f \in \mathcal{H},$$

obtenemos (2.16). Finalmente, (2.17), (2.18), y (2.16) implican que

$$\left(\widetilde{W_k}\right)^{\perp} = \overline{\mathrm{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right), \quad \text{es decir} \quad \widetilde{W_k} = \overline{\mathrm{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right)^{\perp}. \qquad \blacksquare$$

Como corolario, obtenemos la equivalencia que nos faltaba (comparado con su par vectorial) en el Teorema 2.59:

Corolario 2.67. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión con operador de marco S_W, tal que para todo $i \in I$ se tiene que*

$$\left\|P_{W_i} S_W^{-1} f\right\| = \|f\| \quad \textit{para toda } f \in W_i, \tag{2.19}$$

entonces el marco de fusión dual canónico $\left\{\widetilde{W_i}\right\}_{i\in I}$ es (la única) familia biortogonal de $\{W_i\}_{i\in I}$. En particular, $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios.

Recíprocamente, si $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, entonces es marco de fusión para el cual vale (2.19).

Demostración . Para la “ida”, notar que la hipótesis implica que (2.16) vale para todo $k \in I$, y entonces el punto (2) del Teorema 2.7 nos dice que $\left\{\widetilde{W_i}\right\}_{i\in I}$ es la única familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$. Esto a su vez implica que $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios por el Teorema 2.59.

Recíprocamente, si $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios, entonces sabemos que es un marco de fusión (Teorema 2.57), y entonces

$$f = \sum_i P_{W_i}\left(S_W^{-1} f\right) \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

Pero como es una base de subespacios, la representación es única entonces y las funciones coordenadas (ver Observación 2.13) deben ser $\gamma_i = P_{W_i} S_W^{-1}$, en particular, $P_{W_i} S_W^{-1}$ debe ser el operador identidad en W_i para todo $i \in I$, de donde se sigue (2.19). ∎

Los resultados precedentes se pueden utilizar para estudiar “refinamientos” en marcos de fusión, con un enfoque similar al expuesto en [RS08], el cual es más general que la mera idea de quitar subespacios del marco de fusión original: en dicho trabajo, se define como refinamiento de un marco de fusión $\{W_i\}_{i\in I}$ a una familia $\{E_i\}_{i\in J}$ que satisface

$$J \subseteq I, \quad \text{y} \quad E_i \subseteq W_i \quad \forall\, i \in J,$$

y se exponen algunos resultados relacionados, utilizando el concepto de “exceso”, en el caso particular en que dicho exceso es finito. Nosotros presentaremos un procedimiento que permite detectar, para cada subespacio de un marco de fusión, partes “fundamentales” (que no tienen redundancia dentro del marco de fusión), y partes “desechables” (que pueden descartarse de forma tal que la familia resultante sigue siendo marco de fusión). Por lo pronto es conveniente tener presente el Ejemplo 2.60, donde mostramos que al remover todo un subespacio de un marco de fusión podemos obtener una familia total que no es marco de fusión.

Vamos a necesitar la siguiente observación fundamental:

Observación 2.68. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una marco de fusión con operador de marco S_W, y para todo $i \in I$ ponemos $W_i = \overset{\perp}{\bigoplus}_{j\in J_i} \mathcal{M}_{ij}$, entonces $\{\mathcal{M}_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ es un marco de fusión con las **mismas constantes** y el **mismo operador de marco** S_W. Para verlo, notar que si $f \in \mathcal{H}$ entonces,*

$$P_{W_i}(f) = \sum_{j\in J_i} P_{\mathcal{M}_{ij}}(f) \qquad y \qquad \|P_{W_i}(f)\|^2 = \sum_{j\in J_i} \left\|P_{\mathcal{M}_{ij}}(f)\right\|^2,$$

y entonces

$$S_W(f) = \sum_{i\in I} P_{W_i}(f) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} P_{\mathcal{M}_{ij}}(f) \qquad y \qquad \sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \left\|P_{\mathcal{M}_{ij}}(f)\right\|^2.$$

(notar que las series convergen incondicionalmente).

Supongamos que $\{W_i\}_{i\in I}$ es un marco de fusión con operador de marco S_W, y constantes α y β, y definamos

$$G_{W_k} = Id - P_{W_k} S_W^{-1}, \qquad G_{W_k} : W_k \to W_k.$$

Con esta notación, notar que (2.13) dice

$$\ker(G_{W_k}) = \left\{ f \in W_k : \left\| P_{W_k} S_W^{-1} f \right\| = \|f\| \right\},$$

y entonces la hipótesis (2.15) en el Teorema 2.66 se puede expresar como $\ker(G_{W_k}) = W_k$. Esto indicaría, de alguna manera, que una “parte indispensable” de un marco tiene que ver con el núcleo de dicho operador. A continuación desarrollamos esa idea: llamemos $E_k = \ker(G_{W_k})$, de forma tal que

$$W_k = E_k \overset{\perp}{\oplus} E_k^{\perp_W}$$

y consideremos el marco de fusión $\left\{ W_i : i \neq k,\ E_k,\ E_k^{\perp_W} \right\}$, el cual tiene el mismo operador de marco S_W:

Teorema 2.69. *Con las notaciones precedentes:*

1. *El operador G_{E_k} (correspondiente al subespacio E_k del marco de fusión $\left\{ W_i,\ E_k,\ E_k^{\perp_W} \right\}_{i\neq k}$) es idénticamente cero, y entonces*

$$\mathcal{H} = E_k \oplus \overline{span}\left((\cup_{i\neq k} W_i) \cup E_k^{\perp_W} \right).$$

   En particular, si removemos cualquier subespacio de E_k del marco de fusión $\{W_i\}_{i\in I}$, obtenemos una familia no total.

2. *Si el operador $G_{W_k} : W_k \to W_k$ tiene rango cerrado, entonces $\{W_i : i \neq k,\ E_k\}$ es un marco de fusión tal que*

$$\mathcal{H} = E_k \oplus \overline{span}(\cup_{i\neq k} W_i). \tag{2.20}$$

   Esto es, podemos remover el subespacio $E_k^{\perp_W}$ del marco de fusión.

3. $G_{W_k} = G_{E_k} \oplus G_{E_k^{\perp_W}}$*, es decir*

$$G_{W_k} = \begin{cases} G_{E_k} & \text{en } E_k \\ G_{E_k^{\perp_W}} & \text{en } E_k^{\perp_W} \end{cases}$$

   donde

$$G_{E_k} : E_k \to E_k \quad \text{es} \quad G_{E_k} \equiv 0$$

   y

$$G_{E_k^{\perp_W}} : E_k^{\perp_W} \to E_k^{\perp_W} \quad \text{es inyectivo y tiene rango denso.} \tag{2.21}$$

   En particular, $Rang(G_{W_k})$ es cerrado si y solo si $G_{E_k^{\perp_W}}$ es isomorfismo topológico.

Demostración .

1. Si $f \in E_k$ entonces por definición de E_k se tiene que

$$f = P_{W_k} S_W^{-1} f = P_{E_k} S_W^{-1} f + P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} f,$$

de donde

$$f - P_{E_k} S_W^{-1} f = P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} f,$$

y entonces ambos lados de la igualdad deben ser cero. Eso implica que el operador G_{E_k} es idénticamente cero, y entonces el Teorema 2.66 implica que

$$\mathcal{H} = E_k \oplus \overline{\text{span}} \left(\cup_{i \neq k} W_i \cup E_k^{\perp_W} \right).$$

2. Denotemos por α y β las constantes del marco de fusión $\{W_i\}_{i \in I}$. Las hipótesis y la definición de E_k implican que

$$G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}} : E_k^{\perp_W} \to Rang\,(G_{W_k})$$

es isomorfismo topológico, con inversa acotada $G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1}$. Sea $f \in \mathcal{H}$, entonces

$$f = \sum_i S_W^{-1} P_{W_i}(f) \Rightarrow P_{W_k} f = \sum_i P_{W_k} S_W^{-1} P_{W_i}(f),$$

de donde

$$G_{W_k}(P_{W_k} f) = P_{W_k} f - P_{W_k} S_W^{-1}(P_{W_k} f) = \sum_{i \neq k} P_{W_k} S_W^{-1} P_{W_i}(f).$$

Pero

$$G_{W_k}(P_{W_k} f) = G_{W_k}\left(P_{E_k} f + P_{E_k^{\perp_W}} f\right) = G_{W_k}\left(P_{E_k^{\perp_W}} f\right)$$

y entonces

$$\begin{aligned} P_{E_k^{\perp_W}} f &= G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1} \left(\sum_{i \neq k} P_{W_k} S_W^{-1} P_{W_i}(f) \right) = \\ &= G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1} P_{W_k} S_W^{-1} C_W^* \left(\{(1 - \delta_{ik}) P_{W_i}(f)\}_i \right) \end{aligned}$$

(donde C_W es el operador análisis del marco de fusión $\{W_i\}_{i \in I}$), de donde se deduce que

$$\left\| P_{E_k^{\perp_W}} f \right\| \leq \left\| G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1} \right\| \left\| S_W^{-1} \right\| \sqrt{\beta} \left(\sum_{i \neq k} \|P_{W_i} f\|^2 \right)^{1/2}.$$

Usando que $\left\{W_i : i \neq k,\ E_k,\ E_k^{\perp_W}\right\}$ es también un marco de fusión con constantes α y β, se obtiene

$$\begin{aligned}\alpha \|f\|^2 &\leq \sum_{i\neq k} \|P_{W_i} f\|^2 + \|P_{E_k} f\|^2 + \left\|P_{E_k^{\perp_W}} f\right\|^2 \leq \\ &\leq \sum_{i\neq k} \|P_{W_i} f\|^2 + \|P_{E_k} f\|^2 + \left\|G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1}\right\|^2 \left\|S_W^{-1}\right\|^2 \beta \sum_{i\neq k} \|P_{W_i} f\|^2 ,\end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{\alpha}{\left(1+\left\|G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}}^{-1}\right\|^2 \beta \left\|S_W^{-1}\right\|^2\right)} \|f\|^2 \leq \sum_{i\neq k} \|P_{W_i} f\|^2 + \|P_{E_k} f\|^2 \leq \beta \|f\|^2 .$$

Resta ver (2.20): de (1) de este teorema sabemos que

$$E_k \cap \overline{\text{span}}\left((\cup_{i\neq k} W_i) \cup E_k^{\perp_W}\right) = \{0\} ,$$

y entonces

$$E_k \cap \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right) = \{0\} ,$$

y si llamamos S_E al operador de marco del marco de fusión $\{W_i : i \neq k,\ E_k\}$ (que ya no es necesariamente S_W) entonces cada $f \in \mathcal{H}$ se puede expresar como

$$f = P_{E_k} S_E^{-1} f + \sum_{i\neq k} P_{W_i} S_E^{-1}(f) \in E_k \oplus \overline{\text{span}}\left(\cup_{i\neq k} W_i\right),$$

es decir, tenemos (2.20).

3. Veamos primero que

$$\mathit{Rang}\left(G_{W_k}\right) \subseteq E_k^{\perp_W}, \text{ y es un subconjunto denso.} \tag{2.22}$$

Para ello, definamos (para cada $k \in I$) el operador

$$G_{W_k}^a = G_{W_k} P_{W_k} = P_{W_k} - P_{W_k} S_W^{-1} P_{W_k},$$

que resulta autoadjunto, definido en $\mathcal{H}$, y con

$$\mathit{Rang}\left(G_{W_k}^a\right) = \mathit{Rang}\left(G_{W_k}\right) = \left(G_{W_k}\left(E_k^{\perp_W}\right)\right).$$

Poniendo

$$\mathcal{H} = E_k^{\perp_W} \overset{\perp}{\oplus} E_k \overset{\perp}{\oplus} W_k^{\perp},$$

vemos que

$$\ker\left(G_{W_k}^a\right) = E_k \overset{\perp}{\oplus} W_k^{\perp},$$

y entonces

$$E_k^{\perp_W} = \ker\left(G_{W_k}^a\right)^{\perp} = \overline{Rang\left(G_{W_k}^a\right)} = \overline{Rang\left(G_{W_k}\right)}.$$

Del primer punto de este teorema sabemos que $G_{W_k}|_{E_k} = 0 = G_{E_k}$ (la primer igualdad es la definición de E_k), veamos ahora que también

$$G_{W_k}|_{E_k^{\perp_W}} = G_{E_k^{\perp_W}}$$

Para ello, escribimos

$$\begin{aligned} G_{W_k} &= P_{E_k} + P_{E_k^{\perp_W}} - \left(P_{E_k} S_W^{-1} + P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}\right) = \\ &= \left(P_{E_k} - P_{E_k} S_W^{-1}\right) + \left(P_{E_k^{\perp_W}} - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}\right) \end{aligned}$$

entonces para cualquier $f \in W_k$ se tiene

$$G_{W_k}(f) - \left(P_{E_k^{\perp_W}}(f) - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}(f)\right) = \left(P_{E_k}(f) - P_{E_k} S_W^{-1}(f)\right)$$

y eso implica que

$$G_{W_k}(f) - \left(P_{E_k^{\perp_W}}(f) - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}(f)\right) = \left(P_{E_k}(f) - P_{E_k} S_W^{-1}(f)\right) = 0 \quad \forall f \in W_k,$$

en particular, para $f \in E_k^{\perp_W}$ esto dice

$$G_{W_k}(f) = f - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}(f) = G_{E_k^{\perp_W}}(f). \tag{2.23}$$

Finalmente, (2.22), (2.23) y la definición de E_k implican (2.21) ■

Observación 2.70. *Las siguientes son condiciones bajo las cuales $G_{E_k^{\perp_W}}$ (y entonces G_{W_k}) tiene rango cerrado:*

1. $\dim\left(E_k^{\perp_W}\right) < \infty$ *(lo cual ocurre si, en particular,* $\dim(W_k) < \infty$*).*

2. $\left\| P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}\Big|_{E_k^{\perp_W}} \right\| < 1$ *(esto es cierto para cualquier operador de la forma $Id - T$, con $\|T\| < 1$, ver por ejemplo Teorema 10.7 en [Rud91]). Notar que si hacemos la misma cuenta que en (2.12) pero para el marco de fusión $\left\{W_i,\ E_k,\ E_k^{\perp_W}\right\}_{i\neq k}$ y aplicada a $P_{E_k^{\perp_W}} f$, obtenemos*

$$\begin{aligned} \left\| P_{E_k^{\perp_W}} f \right\|^2 &= \left\| P_{E_k^{\perp_W}} f - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} P_{E_k^{\perp_W}} f \right\|^2 + 2 \sum_{i\neq k} \left\| P_{W_i} S_W^{-1} P_{E_k^{\perp_W}} f \right\|^2 + \\ &\quad + 2 \left\| P_{E_k} S_W^{-1} P_{E_k^{\perp_W}} f \right\|^2 + \left\| P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} P_{E_k^{\perp_W}} f \right\|^2, \end{aligned}$$

igualdad que para $f \in E_k^{\perp_W}$ *resulta*

$$\|f\|^2 = \left\|f - P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} f\right\|^2 + 2\sum_{i\neq k} \left\|P_{W_i} S_W^{-1} f\right\|^2 + 2\left\|P_{E_k} S_W^{-1} f\right\|^2 + \left\|P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} f\right\|^2 .$$

Esto, teniendo en cuenta la definición de $G_{E_k^{\perp_W}}$ *y que es inyectivo en* $E_k^{\perp_W}$*, implica que*

$$\left\|P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} f\right\| < \|f\| \qquad \text{para toda } f \in E_k^{\perp_W} - \{0\}$$

y entonces siempre se tiene que

$$\left\| P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}\Big|_{E_k^{\perp_W}} \right\| \leq 1.$$

Si bien el teorema anterior permitiría, en teoría, refinar un marco de fusión, podría ocurrir que el operador G_{W_k} nunca cumpla las hipótesis pedidas (por ejemplo, que siempre tenga núcleo trivial y/o que nunca tenga rango cerrado). En los siguientes ejemplos mostramos dos situaciones en las cuales efectivamente detecta el exceso, en el primero de un subespacio completo, y en el segundo de una parte de un subespacio de un marco de fusión.

Ejemplo 2.71 (detección de subespacio redundante)**.** *Supongamos que* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es un marco de fusión con constantes* α *y* β*, y con operador de marco* S_W*, y que* $U \subseteq \mathcal{H}$ *es un subespacio cerrado. Entonces*

$$\{U, W_i : i \in I\}$$

es otro marco de fusión ya que

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_{W_i} f\|^2 \leq \|P_U f\|^2 + \sum_{i\in I} \|P_{W_i} f\|^2 \leq (\beta + 1) \|f\|^2 .$$

Llamemos S_U *al operador de marco de este nuevo marco de fusión, entonces*

$$S_U(f) = S_W(f) + P_U(f) \Rightarrow f = S_W S_U^{-1}(f) + P_U S_U^{-1}(f) \qquad \forall\ f \in \mathcal{H}$$

en particular

$$G_U(f) = f - P_U S_U^{-1}(f) = S_W S_U^{-1}(f) \qquad \forall\ f \in U,$$

y como S_W *y* S_U *son ambos isomorfismos topológicos, concluimos que*

$$\ker(G_U) = \{0\},$$

y entonces

$$U = \ker(G_U)^{\perp_U}$$

(el complemento ortogonal de $\{0\}$ *en* U*); además*

$$Rang(G_U) = S_W S_U^{-1}(U)$$

es cerrado (de nuevo, porque ambos operadores son isomorfismos topológicos), con lo cual el punto (2) del teorema anterior nos dice que podemos descartar U *del marco de fusión* $\{U, W_i : i \in I\}$*.*

Este ejemplo, en el cual sabíamos de antemano que podíamos descartar el subespacio U*, aplica exactamente igual si de antemano no tenemos la información, con lo cual confirma que si un subespacio es prescindible, entonces el operador correspondiente efectivamente va a revelar este hecho. Esto se aplica, en particular, al caso se subespacios repetidos en el marco de fusión.*

Ejemplo 2.72 (eliminación de parte redundante de un subespacio)**.** *Sea* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una base ortonormal de* $\mathcal{H}$*. Escribamos* $\mathbb{N}$ *como unión no necesariamente disjunta de conjuntos (de cardinal no necesariamente finito), de forma tal que cada natural esté a lo más en* K *conjuntos. Es decir,* $\mathbb{N} = \cup_{j\in I} N_j$ *donde*

$$1 \leq |N_j| \leq \infty \qquad y \qquad 1 \leq \sum_{j\in I} \chi_{N_j}(i) = n_i \leq K \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

y llamemos

$$W_j = \overline{span}\{e_i : i \in N_j\}$$

Entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ *es marco de fusión con constantes* 1 *y* K *ya que*

$$P_{W_j}(f) = \sum_{i\in N_j} \langle f, e_i\rangle\, e_i, \qquad \left\|P_{W_j}(f)\right\|^2 = \sum_{i\in N_j} |\langle f, e_i\rangle|^2$$

y entonces

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f, e_i\rangle|^2 \leq \sum_{j\in I}\sum_{i\in N_j} |\langle f, e_i\rangle|^2 = \sum_{j\in I} \left\|P_{W_j} f\right\|^2 \leq K \sum_{i\in\mathbb{N}} |\langle f, e_i\rangle|^2 = K\,\|f\|^2\,.$$

El operador de marco es

$$S_W(f) = \sum_{j\in I} P_{W_j} f = \sum_{j\in I}\sum_{i\in N_j} \langle f, e_i\rangle\, e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} n_i \langle f, e_i\rangle\, e_i$$

con inversa

$$S_W^{-1}(f) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{n_i} \langle f, e_i\rangle\, e_i.$$

Si $k \in I$*, tenemos*

$$f \in W_k \quad sii \quad f = \sum_{i\in N_k} \langle f, e_i\rangle\, e_i$$

$$\begin{aligned} f \quad &= \quad P_{W_k} S_W^{-1}(f) \iff \sum_{i\in N_k} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \langle f, e_i\rangle\, e_i = 0 \\ &\iff \quad \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \langle f, e_i\rangle = 0 \quad \forall\, i \in N_k \\ &\iff \quad \langle f, e_i\rangle = 0 \quad \forall\, i \in N_k \ \text{tq: } n_i \neq 1 \end{aligned}$$

Entonces si $G_{W_k} = Id - P_{W_k} S_W^{-1}$, $G_{W_k} : W_k \to W_k$ *tenemos que*

$$\begin{aligned} E_k &= \ker(G_{W_k}) = \{f \in W_k : \langle f, e_i \rangle = 0 \quad \forall\, i \in N_k \ \textit{tq: } n_i \neq 1\} = \\ &= \overline{span}\{e_i : i \in N_k \ \textit{tq: } n_i = 1\}\,. \end{aligned}$$

Según la notación del teorema anterior, este subespacio es "indispensable" en el marco de fusión, veamos que podemos descartar el resto: para $f \in W_k$ *se tiene que*

$$\left\| P_{W_k} S_W^{-1}(f) \right\|^2 = \sum_{i \in N_k} \left| \frac{1}{n_i} \langle f, e_i \rangle \right|^2,$$

y

$$E_k^{\perp_W} = \overline{span}\{e_i : i \in N_k \ \textit{tq: } n_i \neq 1\}$$

Si $n_i \neq 1$ *entonces* $n_i \geq 2$, *de donde*

$$\left\| P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1}(f) \right\|^2 = \sum_{i \in N_k : n_i \neq 1} \left| \frac{1}{n_i} \langle f, e_i \rangle \right|^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{i \in N_k : n_i \neq 1} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq \frac{1}{4} \|f\|^2 \quad \forall\, f \in E_k^{\perp_W},$$

y entonces

$$\left\| P_{E_k^{\perp_W}} S_W^{-1} \Big|_{E_k^{\perp_W}} \right\| \leq \frac{1}{2}$$

y el punto (2) del teorema anterior nos dice que $\{W_i : i \neq k,\ E_k\}$ *es un marco de fusión tal que* $\mathcal{H} = E_k \oplus \overline{span}(\cup_{i \neq k} W_i)$.

En este ejemplo, al igual que en el anterior, el resultado era previsible por la forma en que fue construido el marco de fusión. Sin embargo, para detectar la parte redundante no se usa que previamente uno sabe que existe redundancia, ni en que subespacios se encuentra. Es decir, el método podría aplicarse y resultar efectivo, sin conocimiento previo del marco de fusión.

Capítulo 3

Espacios invariantes por traslaciones enteras

En este capítulo se estudiarán las estructuras de espacios vectoriales vistas en el Capítulo 2, para el caso especial de los espacios invariantes por traslaciones enteras de $L^2(\mathbb{R}^n)$, siendo el objetivo final caracterizar dichas estructuras, en términos de los que se conoce como espacios fibra. En la primer sección se darán las definiciones y resultados generales de la teoría de espacios invariantes por traslaciones enteras, y en la segunda la mencionada caracterización.

Un subespacio V de $L^2(\mathbb{R}^n)$ se dice invariante por traslaciones enteras si satisface

$$f \in V \iff f(\cdot - k) \in V \ \forall \ k \in \mathbb{Z}^n.$$

La teoría de espacios invariantes por traslaciones ha sido estudiada por diversos autores y en diversos contextos, teniendo una notable expansión en los últimos 20 años. Los mismos juegan un rol fundamental en áreas como teoría de muestreo, wavelets y análisis de multiresolución, bases y marcos de Gabor, Splines, y teoría de aproximación, y aparecen frecuentemente ligados a la teoría de bases y marcos en espacios de Hilbert (o en contextos más generales), particularmente en lo que concierne a bases y marcos formados por traslaciones de una o más funciones. Han tenido un fuerte desarrollo, motivado tanto por la belleza de los resultados obtenidos, como por la innumerable cantidad de aplicaciones tecnológicas: procesamiento de imágenes, compresión y transmisión de datos, etc.

Utilizando la transformada de Fourier, se puede ver a estos espacios "en el dominio de la frecuencia", resultando íntimamente relacionados con los espacios invariantes bajo multiplicación por exponencial (*doubly invariant*, en inglés). En la caracterización de estos últimos, Helson (ver [Hel64]) introduce la *función rango*, la cual se convierte en una herramienta fundamental para el estudio de los espacios invariantes por traslaciones enteras, por medio de un proceso conocido como *fibración* (o técnicas de fibración, en general), el cual permite estudiar y caracterizar diferentes estructuras relacionadas con los espacios invariantes por traslaciones enteras por medio de estructuras similares en espacios conocidos como *espacios fibra*, subespacios cerrados de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$.

Justamente, utilizando estas técnicas de fibración es que aparecen las primeras caracterizaciones de la estructura de un espacio invariante por traslaciones enteras (ver [BDVR94] y también [RS95]). Finalmente en [Bow00] se da una caracterización más general, tanto de la estructura de los espacios como de marcos y bases de Riesz de traslaciones, y de operadores que preservan traslaciones enteras, por técnicas de fibración. Estas mismas técnicas son las que nos permitieron desarrollar las caracterizaciones presentadas en la segunda sección de este capítulo.

3.1. Nociones generales

En esta sección se incluyen las nociones y resultados generales sobre espacios invariantes por traslaciones enteras, tanto para sentar las bases como para mostrar las técnicas y los resultados que serán utilizados y generalizados en la próxima sección. La mayoría de ellos son resultados conocidos, y se pueden encontrar, por ejemplo en [Bow00], o con un nivel de generalidad menor en [BDVR94]. Unos pocos han sido desarrollados explícitamente para este trabajo, o tomados de otros trabajos. Incluimos además algunas demostraciones alternativas a las propuestas en los trabajos de referencia, y que pensamos son más claras y conceptualmente más adecuadas.

Usamos como herramienta la transformada de Fourier, que se define para funciones de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ como

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \omega \cdot x}\, dx \qquad \omega \in \mathbb{R}^n,$$

y se extiende como un operador unitario a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Denotamos por

$$\begin{aligned} t_y f(x) &= f(x-y) \\ M_y f(x) &= e^{2\pi i x \cdot y} f(x) \end{aligned}$$

($y \in \mathbb{R}^n$) los operadores traslación y modulación respectivamente. Ambos son operadores unitarios en $L^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (t_y f)\,\hat{}\,(\omega) &= M_{-y}\hat{f}(\omega) \\ (M_y f)\,\hat{}\,(\omega) &= t_y \hat{f}(\omega) \end{aligned}$$

Como referencia para resultados generales sobre transformada de Fourier citamos, por ejemplo, [Gr08].

Con $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ denotamos el "toro", identificado (con su estructura de grupo) con $[0,1)^n$. De forma casi exclusiva utilizaremos traslaciones por elementos $k \in \mathbb{Z}^n$ es decir $t_k f := f(\cdot - k)$, y nos referiremos a este tipo de operación como *traslación entera.*

Definición 3.1. *Un subespacio cerrado $V \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio invariante por traslaciones enteras (EITE) si*

$$f \in V \quad \textit{implica} \quad t_k f \in V \quad \textit{para todo } k \in \mathbb{Z}^n.$$

Dado un conjunto de funciones Φ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, denotamos con $E(\Phi)$ el conjunto

$$E(\Phi) = \{t_k \phi : k \in \mathbb{Z}^n, \phi \in \Phi\}.$$

El EITE generado por Φ es

$$S(\Phi) = \overline{span}(E(\Phi)).$$

Si V es un EITE, la longitud de V es el cardinal del conjunto generador más pequeño, y denotaremos por

$$long(V) = \min\{\#\Phi \,:\, V = S(\Phi)\} \leq \infty.$$

($\#\Phi \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ es la cantidad de elementos de Φ, $\mathbb{N}_0$ denota los enteros no negativos).

Si V es un EITE, entonces la proyección ortogonal P_V (de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre V) conmuta con las traslaciones enteras t_k, $k \in \mathbb{Z}^n$. Puesto que el conjunto

$$\left\{e^{2\pi i k\cdot\omega}\chi_{\mathbb{T}^n}(\omega + l)\right\}_{k,l\in\mathbb{Z}^n}$$

es base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^n)$, si denotamos $\chi_{\mathbb{T}^n}(\omega + l) = \widehat{\psi}_l(\omega)$ resulta

$$\left(t_k\psi_l\right)^{\hat{}}(\omega) = e^{2\pi i k\cdot\omega}\chi_{\mathbb{T}^n}(\omega + l),$$

por lo que (teniendo en cuenta que la transformada de Fourier es un operador unitario de $L^2(\mathbb{R}^n)$) la familia $\{t_k\psi_l\}_{k,l\in\mathbb{Z}^n}$ también es base ortonormal para $L^2(\mathbb{R}^n)$, y entonces

$$\{P_V\left(t_k\psi_l\right)\}_{k,l\in\mathbb{Z}^n} = \{t_k P_V\left(\psi_l\right)\}_{k,l\in\mathbb{Z}^n}$$

es un marco de Parseval para V. En particular, $V = S\left(\{P_V\left(\psi_l\right)\}_{l\in\mathbb{Z}^n}\right)$, es decir todo EITE se puede generar con una familia contable. Por la continuidad del operador t_k, operaciones como tomar complemento ortogonal o clausura "preservan" la invariancia por traslaciones. Por ejemplo, si V es un EITE, entonces $V^{\perp}$ también lo es. Notar además que $S(\Phi)$ es el menor espacio invariante por traslaciones enteras que contiene el conjunto Φ.

Para el estudio de los espacios invariantes por traslaciones aparece como herramienta fundamental (en un proceso conocido como "fibración", a describir en los próximos párrafos) las funciones vectoriales a valores en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. El espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$ consiste en todas las funciones vectoriales $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ medibles tales que la norma

$$\|F\| = \left(\int_{\mathbb{T}^n} \|F(\omega)\|_{\ell^2}^2 \, d\omega \right)^{\frac{1}{2}}$$

es finita. El producto interno definido por

$$\langle F, G \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \langle F(\omega), G(\omega) \rangle_{\ell^2} \, d\omega$$

hace de $L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$ un espacio de Hilbert separable, e induce la norma previamente definida. Cuando no haya confusión posible, denotaremos dicho espacio por $L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2)$.

Como $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ es un espacio de Hilbert separable, las nociones de $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ s-medible (medible fuerte) y w-medible (medible débil) coinciden, siendo esta última que la aplicación escalar

$$\omega \to \langle F(\omega), a \rangle_{\ell^2}$$

sea medible para todo $a \in \ell^2$. Si denotamos por $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ la base ortonormal estándar de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ (notación que mantendremos en toda la sección) resulta $a = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k e_k$ ($a_k \in \mathbb{C}$) y

$$\langle F(\omega), a \rangle_{\ell^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{a_k} \, \langle F(\omega), e_k \rangle_{\ell^2}$$

(con convergencia incondicional), por lo cual F resulta medible si y solo si las "funciones coordenadas"

$$\omega \to \langle F(\omega), e_k \rangle$$

resultan medibles para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Además valen las siguientes:

1. Si $\lambda : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ es una función escalar medible y $F, G : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son funciones vectoriales medibles, entonces $\lambda F + G$ es medible.

2. Si $F, G : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son medibles, entonces $\omega \to \langle F(\omega), G(\omega) \rangle_{\ell^2}$ es medible, en particular $\omega \to \|F(\omega)\|_{\ell^2}^2$ es medible.

3. Si $F, F_j : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ son funciones vectoriales medibles tales que $F_j(\omega) \xrightarrow[j \to \infty]{\ell^2} F(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, entonces F es medible.

Para una referencia concisa y clara sobre funciones vectoriales medibles y su integración (integral de Bochner), recomendamos consultar [Yo81].

El siguiente teorema es fundamental en el estudio de espacios invariantes por traslaciones enteras:

Teorema 3.2. *El operador* $\tau : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$ *definida (para* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$*) por*

$$\tau f(\omega) = \{\hat{f}(\omega + k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n},$$

es un isomorfismo isométrico entre los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ *y* $L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$.

La sucesión $\{\hat{f}(\omega + k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ *se llama la fibra de* f *en* ω.

La demostración de este teorema es básicamente observar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(\omega + k)d\omega$$

(incluso $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sii $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(\omega + k) \in L^1(\mathbb{T}^n)$), y utilizar que la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en $L^2(\mathbb{R}^n)$. A partir de este operador τ se logra una caracterización clave de los EITE mediante la función rango:

Definición 3.3. *Una función rango es una aplicación*

$$J : \mathbb{T}^n \to \{\textit{subespacios cerrados de } \ell^2(\mathbb{Z}^n)\}.$$

Una función rango se dice medible si la aplicación $\omega \to P_{J(\omega)}(a)$ *es medible (como aplicación de* $\mathbb{T}^n$ *en* $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$*) para todo* $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. *Recordar que* $P_{J(\omega)}$ *es la proyección ortogonal de* $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *sobre* $J(\omega)$.

Esta definición de medibilidad puede parecer extraña, a primera vista, pero cobra sentido a partir de la demostración del Teorema 3.4, y más aún cuando se la ve en un contexto más general, relacionado con la teoría de *operadores lineales aleatorios.* Al respecto, haremos algunos comentarios en la Observación 3.11.

Teniendo en cuenta las observaciones anteriores, una función rango J resulta medible si la aplicación escalar

$$\omega \to \left\langle P_{J(\omega)}(a), b \right\rangle_{\ell^2}$$

resulta medible para todo $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Además valen las siguientes:

1. J es medible si y solo si $P_{J(\omega)}(e_k)$ es medible (como función vectorial) para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, pues si $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ entonces

   $$P_{J(\omega)}(a) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k P_{J(\omega)}(e_k)$$

   (con convergencia incondicional en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$), y sus funciones coordenadas son

   $$\left\langle P_{J(\omega)}(a), e_j \right\rangle_{\ell^2} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} a_k \left\langle P_{J(\omega)}(e_k), e_j \right\rangle_{\ell^2}.$$

2. J es medible si y solo si $P_{J(\omega)}(F(\omega))$ es medible para toda $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ medible pues

   $$P_{J(\omega)}(F(\omega)) = P_{J(\omega)} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle F(\omega), e_k \rangle e_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle F(\omega), e_k \rangle P_{J(\omega)}(e_k).$$

El siguiente teorema caracteriza los espacios invariantes por traslaciones enteras en términos del operador τ. El mismo nos dice como "se ven" dichos espacios, cuando los miramos en $L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$, y constituye nuestro primer ejemplo de "técnica de fibración".

Teorema 3.4. *Un subespacio $V \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ es invariante por traslaciones si y solo si*

$$V = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,:\, \tau f(\omega) \in J_V(\omega) \text{ a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n\},$$

donde J_V en una función rango medible. La correspondencia entre V y J_V es uno a uno. Más aún, si $V = S(\Phi)$ para cierto $\Phi \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$J_V(\omega) = \overline{span}\{\tau\phi(\omega) \,:\, \phi \in \Phi\} \qquad a.e.\ \omega \in \mathbb{T}^n.$$

El subespacio $J_V(\omega)$ se llama el espacio fibra de V en ω.

A partir de este resultado, veremos que el operador τ nos permite estudiar diferentes fenómenos referentes a los espacios invariantes por traslaciones enteras, a partir de su "traducción" vía el isomorfismo τ; este procedimiento general es lo que se conoce como *técnica de fibración*, y será, en particular, la que utilizaremos para dar nuestra caracterización de estructuras de subespacios (base, marco de fusión, etc.) en un espacio invariante por traslaciones enteras.

Definición 3.5. *Si V es un EITE, la función dimensión asociada a V es*

$$\dim_V : \mathbb{T}^n \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}, \quad \dim_V(\omega) = \dim(J_V(\omega)).$$

En la siguiente proposición agrupamos las características fundamentales de la función rango de un EITE:

Proposición 3.6. *Si V, W son EITEs en $L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces:*

1. *$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisface $f \perp V$ si y solo si $\tau f(\omega) \perp J_V(\omega)$ a.e. ω (hay que tener cuidado: a.e.* ***depende de*** *f, es decir, el conjunto de medida nula depende de f). En particular, $W \perp V$ si y solo si $J_W(\omega) \perp J_V(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

2. *$V = \{0\}$ si y solo si $J_V(\omega) = \{0\}$ a.e. ω, y $V = L^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si $J_V(\omega) = \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

3. *$V \subseteq W$ si y solo si $J_V(\omega) \subseteq J_W(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

4. *Si $\{W_i\}_{i\in I}$ es una familia de EITEs y $U = \overline{span}\,(\cup_{i\in I} W_i)$, entonces U es EITE y*

$$J_U(\omega) = \overline{span}\,(\cup_{i\in I} J_{W_i}(\omega))$$

En particular, si $W_i = S(\Phi_i)$ para cierto conjunto $\Phi_i \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $U = S(U_{i\in I}\Phi_i)$ y

$$J_U(\omega) = \overline{span}\,(\tau\phi_i(\omega) : \phi_i \in \Phi_i, i \in I).$$

5. *Si* $W = V \overset{\perp}{\oplus} V^{\perp}$ *(complemento ortogonal en* W*), entonces* $V^{\perp}$ *es también un EITE,* $J_{V^{\perp}}(\omega) = J_V(\omega)^{\perp}$ *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$*, y* $J_W(\omega) = J_V(\omega) \overset{\perp}{\oplus} J_{V^{\perp}}(\omega)$ *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$.

6. $V \cap W$ *es un EITE, y* $J_{V \cap W}(\omega) = J_V(\omega) \cap J_W(\omega)$ *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$*. En particular,* $V \cap W = \{0\}$ *si y solo si* $J_V(\omega) \cap J_W(\omega) = \{0\}$ *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$.

Demostración . La ecuación clave para demostrar estos resultados es la siguiente:

$$\langle f, t_k \phi \rangle = \langle \tau f, \tau (t_k \phi) \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \langle \tau f(\omega), \tau \phi(\omega) \rangle e^{2\pi i k \cdot \omega} d\omega,$$

que es el $k-$ésimo coeficiente de Fourier de la función integrable $\omega \to \langle \tau f(\omega), \tau \phi(\omega) \rangle$ (notar que en la igualdad anterior hemos usado $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar producto interno en tres espacios de Hilbert diferentes). A partir de esto, y utilizando el Teorema 3.4, la demostración de las primeras 5 afirmaciones es más o menos inmediata. En (4), el "en particular" implica la medibilidad de $J_U(\omega)$. Para la demostración de (6) ver [AC09]. ■

Una de las cuestiones fundamentales en el estudio de espacios invariantes por traslaciones es poder determinar cuando los mismos tienen base de Riesz o marcos de traslaciones (enteras). Más precisamente, si $V = S(\Phi)$ una pregunta fundamental es cuando el conjunto $E(\Phi)$ es base de Riesz o marco para V. Una respuesta a esta pregunta, en términos de los espacios fibra, está en los siguientes teoremas clásicos (que se generalizaran en la siguiente sección, pasando de base de Riesz o marco a base de Riesz de subespacios o marcos de fusión):

Teorema 3.7. *Sea* Φ *un subconjunto contable de* $L^2(\mathbb{R}^n)$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $E(\Phi)$ *es sucesión de Bessel en* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *con constante* β.

2. $\{\tau\phi(\omega) : \phi \in \Phi\}$ *es sucesión de Bessel en* $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ *con constante* β *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$.

Teorema 3.8. *Sea* $V = S(\Phi)$*, donde* Φ *es un subconjunto contable de* $L^2(\mathbb{R}^n)$*. Entonces:*

1. $E(\Phi)$ *es un marco para* V *con constantes* α *y* β *si y solo si para a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$, $\{\tau\phi(\omega) : \phi \in \Phi\}$ *es un marco para* $J_V(\omega)$ *con constantes* α *y* β.

2. $E(\Phi)$ *es base de Riesz para* V *con constantes* α *y* β *si y solo si para a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$, $\{\tau\phi(\omega) : \phi \in \Phi\}$ *es una base de Riesz para* $J_V(\omega)$ *con constantes* α *y* β.

   Más aún, si Φ *es finito,* V *tiene base de Riesz de traslaciones si y solo si la función dimensión asociada a* V *es constante a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$.

Los teoremas anteriores dejan claro que si $V = S(\Phi)$ para cierto subconjunto contable $\Phi \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces puede ocurrir que el conjunto $E(\Phi)$ no sea base de Riesz ni marco para V (incluso para Φ finito). Sin embargo, siempre se puede elegir un conjunto generador para V de forma tal que sus traslaciones enteras sean un marco para V. Más precisamente, tenemos el siguiente ([Bow00], Teorema 3.3):

Teorema 3.9. *Si V es un EITE en $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una familia ortogonal $\{\phi_i\}_{i\in I} \subseteq S$ tal que $E(\{\phi_i\}_{i\in I})$ es marco de Parseval para V (en particular, $V = S(\{\phi_i\}_{i\in I})$), y tal que para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, el conjunto $\{\tau\phi_i(\omega) : i \in I\} - \{0\}$ es base ortonormal para $J_V(\omega)$. Si V tiene un conjunto generador finito, entonces el cardinal de Φ se puede elegir como la longitud de V.*

Sin embargo, el Teorema 3.8 nos permite mostrar un EITE que no tiene base de Riesz de traslaciones. Por ejemplo, considerar el espacio invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$
$$V = \overline{\operatorname{span}}\,\{t_k\phi : k \in \mathbb{Z}\}\,,$$
donde $\hat{\phi}(\omega) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(\omega)$. Puesto que $\dim_S(\omega) = 1$ a.e. $\omega \in [0, \frac{1}{2})$ y $\dim_S(\omega) = 0$ a.e. $\omega \in [\frac{1}{2}, 1)$, se sigue del Teorema 3.8 que V no tiene base de Riesz de traslaciones.

Un operador lineal acotado $L : V \to L^2(\mathbb{R}^n)$ se dice que **preserva traslaciones enteras** si $t_k L = L t_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Si L preserva traslaciones enteras, entonces $\overline{L\,(V)}$ es (cerrado e) invariante por traslaciones enteras. Más precisamente, si $V = S\,(\Phi)$ para cierto conjunto $\Phi \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\overline{L\,(V)} = S\,(L\,(\Phi))$, de donde además resulta que
$$J_{\overline{L(V)}}(\omega) = \overline{\operatorname{span}}\,\{\tau(L\phi)(\omega) : \phi \in \Phi\}$$
(estamos denotando $L\,(\Phi) = \{L(\phi) : \phi \in \Phi\}$).

Definición 3.10. *Dada una función rango medible J, un **operador rango en** J es una aplicación*

$$R : \mathbb{T}^n \to \left\{\textit{operadores lineales acotados definidos en subespacios cerrados de } \ell^2(\mathbb{Z}^n)\right\}$$

*de forma tal que el dominio de $R(\omega)$ es $J(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. R se dice **medible** si la aplicación escalar $\omega \to \left\langle R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\,(a)\right), b\right\rangle$ es medible para cada $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Un operador rango es **uniformemente acotado** si*

$$\textit{sup-ess}\,\{\|R(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\} < \infty.$$

Algunas notas sobre la medibilidad:

1. $\omega \to \left\langle R(\omega)\left(P_{J(\omega)}(a)\right), b\right\rangle$ medible para cada $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ equivale a $\omega \to R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\,(a)\right)$ vectorial medible para cada $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ (por definición de s-medible).

2. $R(\omega)$ medible sii $\omega \to R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\left(e_k\right)\right)$ medible para todo $k \in \mathbb{Z}^n$, pues si $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ entonces

$$R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\left(a\right)\right) = R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\left(\sum_k a_k e_k\right)\right) = \sum_k a_k R(\omega)\left(P_{J(\omega)}(e_k)\right).$$

3. $R(\omega)$ medible sii $\omega \to R(\omega)\left(F(\omega)\right)$ medible (vectorial) para toda $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ medible tal que $F(\omega) \in J(\omega)$ a.e. ω, pues

$$F(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle F(\omega), e_k\rangle e_k = P_{J(\omega)}\left(F(\omega)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle F(\omega), e_k\rangle P_{J(\omega)}\left(e_k\right)$$

y entonces

$$R(\omega)(F(\omega)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \langle F(\omega), e_k\rangle R(\omega)\left(P_{J(\omega)}\left(e_k\right)\right).$$

Otra forma también equivalente, es pedir $\omega \to R(\omega)\left(P_{J(\omega)}F(\omega)\right)$ medible (vectorial) para toda $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ medible.

Observación 3.11. *Tanto la noción de función rango medible $J(\omega)$ como la de operador rango medible $R(\omega)$ aparecen en otro contexto, no afín al de los espacios invariantes por traslaciones enteras: el contexto de los **operadores lineales aleatorios** (random linear operators, en inglés), con diferentes denominaciones. En dicho contexto, una función rango medible se denomina "multifunción" o "relación", y un operador rango medible como "operador lineal aleatorio medible" y aparecen diferentes nociones de medibilidad, en un contexto mucho más general que el presente, pero que podría ser aplicado, pensando a $\mathbb{T}^n$ como un espacio de probabilidad completo (recordar que identificamos dicho espacio con $[0,1)^n$, de medida 1).*

*En particular, si $J(\omega)$ es una función rango medible, entonces la $\omega \to P_{J(\omega)}$ es un caso particular de operador rango medible (con la definición dada), pero dicha noción de medibilidad **no coincide** con la noción de medible como función vectorial a valores en $\mathcal{B}\left(\ell^2(\mathbb{Z}^n)\right)$ (operadores acotados de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$). De hecho, se puede ver que esta última es una noción más fuerte, denominada "uniformemente medible" en el contexto de los operadores lineales aleatorios. La literatura al respecto es basta, mencionamos [BhR72] y [Rom] como ejemplos, y a la literatura específica incluida en las mismas.*

La siguiente es una proposición auxiliar, necesaria para la demostración del próximo teorema:

Proposición 3.12. *Sea V un espacio invariante por traslaciones enteras y $L : V \to L^2(\mathbb{R}^n)$ un operador lineal que preserva traslaciones enteras. Entonces para cada $f \in V$ existe un conjunto $D \subseteq \mathbb{T}^n$ de medida nula (que depende de f) tal que*

$$\|\tau\left(Lf\right)(\omega)\| \leq \|L\|\,\|\tau f(\omega)\| \qquad \forall\ \omega \in \mathbb{T}^n - D.$$

Demostración . Sea $f \in V$, $m \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, y denotemos $F = \tau f$, y por $\tilde{L} : \tau(V) \to L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2)$ el operador $\tilde{L} = \tau \cdot L \cdot \tau^{-1}$. Notar que el Teorema 3.4 implica que $mF \in \tau(V)$. Usando que L preserva traslaciones enteras es inmediato verificar que para cualquier polinomio trigonométrico $p(\omega) = \sum_k c_k e^{-2\pi i k\cdot\omega}$ se tiene que

$$\tilde{L}(pF) = p\tilde{L}(F).$$

Tomando una sucesión de polinomios trigonométricos $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ tal que

$$p_j(\omega) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} m(\omega) \quad \text{a.e. } \omega \qquad \text{y} \qquad \|p_j\|_{\infty} \leq \|m\|_{\infty}$$

(tal sucesión se puede construir usando el Teorema de Lusin y la densidad de los polinomios trigonométricos en el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{T}^n$, ver [Rud87] Teorema 2.24 y sección 4.24), y utilizando que

$$\|p_j(\omega)F(\omega) - m(\omega)F(\omega)\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{a.e. } \omega$$

y que

$$\|p_j(\omega)F(\omega) - m(\omega)F(\omega)\|^2 \leq 2\|m\|_{\infty}^2 \|F(\omega)\|^2,$$

y el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, concluimos que

$$p_jF \underset{j\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} mF$$

y análogamente

$$p_j\tilde{L}(F) \underset{j\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} m\tilde{L}(F)$$

Esto nos permite concluir que

$$\tilde{L}(mF) = m\tilde{L}(F).$$

De esto, y usando que τ es isometría resulta que

$$\left\|m\tilde{L}(F)\right\|_{L^2} = \left\|\tilde{L}(mF)\right\|_{L^2} \leq \left\|\tilde{L}\right\| \|mF\|_{L^2} = \|L\| \|mF\|_{L^2},$$

es decir

$$\int_{\mathbb{T}^n} |m(\omega)|^2 \left\|\tilde{L}(F)(\omega)\right\|^2 dw \leq \|L\|^2 \int_{\mathbb{T}^n} |m(\omega)|^2 \|F(\omega)\|^2 dw.$$

Puesto que esta desigualdad vale para toda $m \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, concluimos que

$$\left\|\tilde{L}(F)(\omega)\right\| \leq \|L\| \|F(\omega)\| \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n. \qquad \blacksquare$$

El siguiente teorema nos da una caracterización de los operadores invariantes por traslaciones y los operadores rango medibles. El mismo aparece en [Bow00], pero incluimos acá una demostración que nos parece conceptualmente más clara, y breve.

Teorema 3.13. *Sea V un espacio invariante por traslaciones enteras con función rango J_V. Existe una correspondencia uno a uno entre operadores que preservan traslaciones enteras definidos en V y operadores rango medibles uniformemente acotados en J_V via*

$$\tau\left(Lf\right)(\omega) = R(\omega)\left(\tau f(\omega)\right) \;\; a.e.\ \omega \in \mathbb{T}^n, \tag{3.1}$$

con

$$\|L\| = \textit{sup-ess}\left\{\|R(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\right\}. \tag{3.2}$$

Esto es: para cada operado L que preserva traslaciones enteras en V existe un único operador rango medible uniformemente acotado R en J_V tal que (3.1) y (3.2), y recíprocamente, para cada operador rango medible uniformemente acotado R en J_V existe un único operador L que preserva traslaciones enteras en V tal que (3.1) y (3.2).

Demostración . Veamos primero la construcción del operador rango medible a partir de un operador L que preserva traslaciones enteras. La clave para dicha construcción está en el uso de la Proposición 1.13.

Tomemos una familia $\left\{\phi_j\right\}_{j\in I} \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $V = S\left(\left\{\phi_j\right\}_{j\in I}\right)$ y de forma tal que $E\left(\left\{\phi_j\right\}_{j\in I}\right)$ sea marco de Parseval para V y tal que $\left\{\tau\phi_j\left(\omega\right)\right\}_{j\in I} - \{0\}$ sea base ortonormal de $J_V(\omega)$ a.e $\omega \in \mathbb{T}^n$ (tal familia existe por el Teorema 3.9). Denotemos $I_0(\omega) = \left\{j \in I : \tau\phi_j\left(\omega\right) \neq 0\right\}$.

Llamamos $\psi_j = L\phi_j$. Puesto que $\left\{\phi_j\right\}_{j\in I}$ es una familia contable, la Proposición 3.12 nos permite inferir que existe un conjunto de medida nula $H \subseteq \mathbb{T}^n$ fuera del cual vale que

$$\left\|\tau\psi_j(\omega)\right\| \leq \|L\| \left\|\tau\phi_j(\omega)\right\| \quad \forall\ j \in I.$$

Esto en particular implica que para todo $\omega \in \mathbb{T}^n - H$ vale que

$$\left\|\tau\phi_j(\omega)\right\| = 0 \implies \left\|\tau\psi_j(\omega)\right\| = 0 \quad \forall\ j \in I. \tag{3.3}$$

Puesto que $E\left(\left\{\phi_j\right\}_{j\in I}\right)$ es marco de Parseval para V, y teniendo en cuenta que L preserva traslaciones enteras, tenemos que

$$E\left(\left\{\psi_j\right\}_{j\in I}\right) = L\left(E\left(\left\{\phi_j\right\}_{j\in I}\right)\right)$$

es sucesión de Bessel con constante $\|L\|^2$. Esto a su vez, por el Teorema 3.7, implica que

$$\left\{\tau\psi_j\left(\omega\right)\right\}_{j\in I}$$

sea sucesión de Bessel con constante $\|L\|^2$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ (en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ ó en $J_{\overline{L(V)}}(\omega)$).

Esto permite definir a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ (usando la Proposición 1.13 y teniendo en cuenta (3.3)) el operador $R(\omega) : J_V(\omega) \to J_{\overline{L(V)}}(\omega)$ por

$$R(\omega)\left(\sum_j c_j\tau\phi_j\left(\omega\right)\right) = \sum_j c_j\tau\psi_j\left(\omega\right)$$

(sin ambigüedad por (3.3)). Tal operador es lineal y acotado, con

$$\begin{aligned}\left\|R(\omega)\left(\sum_{j\in I_0(\omega)} c_j\tau\phi_j(\omega)\right)\right\|^2 &= \left\|\sum_{j\in I_0(\omega)} c_j\tau\psi_j(\omega)\right\|^2 \leq \\ &\leq \|L\|^2\sum_{j\in I_0(\omega)}|c_j|^2 = \|L\|^2\left\|\sum_{j\in I_0(\omega)} c_j\tau\phi_j(\omega)\right\|^2\end{aligned}$$

(estamos repitiendo la demostración de la afirmación más general de la Proposición 1.13), lo cual implica

$$\|R(\omega)\| \leq \|L\| \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n. \tag{3.4}$$

El operador rango $R(\omega)$ es medible ya que si $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ se tiene que

$$P_{J_V(\omega)}(a) = \sum_j \left\langle a, \tau\phi_j(\omega)\right\rangle \tau\phi_j(\omega),$$

y entonces

$$R(\omega)\left(P_{J_V(\omega)}(a)\right) = \sum_j \left\langle a, \tau\phi_j(\omega)\right\rangle \tau\psi_j(\omega).$$

Finalmente, veamos que se satisface (3.1): Si $f \in \operatorname{span}\Big(E\left(\{\phi_j\}_{j\in I}\right)\Big)$ (sin clausura), $f = \sum_{j,k} c_k^j t_k\phi_j$ donde la suma finita, y entonces

$$\tau f(\omega) = \sum_{j,k} c_k^j e^{-2\pi ik\cdot\omega}\tau\phi_j(\omega) \Rightarrow R(\omega)\left(\tau f(\omega)\right) = \sum_{j,k} c_k^j e^{-2\pi ik\cdot\omega}\tau\psi_j(\omega)$$

y por otro lado

$$Lf = \sum_{j,k} c_k^j t_k\psi_j \Rightarrow \tau\left(Lf\right)(\omega) = \sum_{j,k} c_k^j e^{-2\pi ik\cdot\omega}\tau\psi_j(\omega).$$

El caso general se concluye así: para $f \in V$, tomamos una sucesión

$$span\left(E\left(\{\phi_j\}_{j\in I}\right)\right) \ni f_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f$$

de forma tal que $\tau f_i(\omega) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \tau f(\omega)$ y $\tau\left(Lf_i\right)(\omega) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \tau\left(Lf\right)(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ (pasando a una subsucesión si es necesario; estamos usando que $Lf_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} Lf$). Puesto que

$$\tau\left(Lf_i\right)(\omega) = R(\omega)\left(\tau f_i(\omega)\right) \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n$$

(en rigor, $\forall\ \omega \in \mathbb{T}^n - H$), tomando $\lim_{i\to\infty}$ y usando la continuidad de $R(\omega)$, obtenemos (3.1).

La resíproca (es decir, definir L a partir de R) requiere bastante menos trabajo. Basta con definir $\tilde{L} : \tau(V) \to L^2(\mathbb{T}^n, \ell^2(\mathbb{Z}^n))$ para $F = \tau f$ por

$$\tilde{L}(F)(\omega) = R(\omega)(F(\omega)) \qquad\qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Así definido, $\tilde{L}$ es claramente lineal y acotado, con

$$\left\|\tilde{L}\right\| \leq \text{sup-ess}\left\{\|R(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\right\},$$

y es elemental verificar que $L = \tau^{-1}\tilde{L}\tau$ preserva traslaciones enteras, y $\|L\| = \left\|\tilde{L}\right\|$. De esto y (3.4) resulta la igualdad $\|L\| = \text{sup-ess}\{\|R(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\}$. La unicidad es inmediata de (3.1). ■

Como caso particular, pero muy importante del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado (Lema 1.5 en [Bow00]):

Proposición 3.14. *Sea V un espacio invariante por traslaciones enteras en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\tau(P_V f)(\omega) = P_{J_V(\omega)}(\tau f(\omega)) \qquad a.e.\ \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Es decir, $\omega \to P_{J_V(\omega)}$ es el operador rango asociado a la proyección ortogonal P_V, que (tal como se hizo notar) preserva traslaciones enteras.

Si V y W son espacios invariantes por traslaciones enteras, $L : V \to W$ un operador que preserva traslaciones enteras con operador rango $R_L(\omega)$, entonces se tiene que (para a.e. ω) $R_L(\omega) : J_V(\omega) \to J_W(\omega)$. Esto se ve claramente en la demostración del teorema anterior, o directamente del hecho de que si $V = S\left(\{\phi_i\}_{i\in I}\right)$ entonces $\overline{L\,(V)} = S\left(\{L(\phi_i)\}_{i\in I}\right)$ (y usar (3.1)). Notar que siempre se puede tomar como W a $\overline{L\,(V)}$. En la siguiente proposición resumimos las propiedades más importantes de la relación entre operadores que preservan traslaciones enteras y sus respectivos operadores rango:

Proposición 3.15. *Sean U, V, W espacios invariantes por traslaciones enteras, $T : U \to V$ y $L : V \to W$ operadores que preservan traslaciones enteras, y $R_T(\omega)$, $R_L(\omega)$ sus operadores rango medibles respectivamente, entonces para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que:*

1. *El operador compuesto $L \cdot T : U \to W$ preserva traslaciones enteras, y su operador rango es la composición $R_L(\omega) \cdot R_T(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

2. *El operador adjunto $L^* : W \to V$ preserva traslaciones enteras y su operador rango satisface $R_{L^*}(\omega) = (R_L(\omega))^*$ para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

3. *Si $U \subseteq V$, entonces la restricción $L|_U$ es operador que preserva traslaciones enteras y su operador rango es la restricción $R_L(\omega)|_{J_U(\omega)}$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

4. *$\|Lf\| \geq c\,\|f\|$ para toda $f \in V$ si y solo si para a.e $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que*

$$\|R_L(\omega)\,(a)\| \geq c\,\|a\| \qquad \forall\ a \in J_V(\omega). \tag{3.5}$$

Esto es, L es acotado por abajo si R es a.e. ω uniformemente acotado por abajo. En tal caso, $L(V)$ es (invariante por traslaciones enteras y) cerrado, $R_L(\omega)\,(J_V(\omega))$ es cerrado (a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$), y

$$J_{L(V)}(\omega) = R_L(\omega)\,(J_V(\omega)) \tag{3.6}$$

5. *L es isomorfismo topológico si y solo si $R_L(\omega) : J_V(\omega) \to J_W(\omega)$ es isomorfismo topológico y acotado uniformemente por abajo para a.e $\omega \in \mathbb{T}^n$. En tal caso, L^{-1} preserva traslaciones enteras y su operador rango satisface, $R_{L^{-1}}(\omega) = (R_L(\omega))^{-1}$ para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

Demostración . En la mayoría de las afirmaciones, la cuestión de mayor cuidado es la medibilidad del operador rango.

1. Que el operador $L \cdot T$ preserva traslaciones enteras es inmediato, así como que para toda $f \in U$ vale

$$R_L(\omega)R_T(\omega)\,(\tau f(\omega)) = \tau\,(LTf)\,(\omega) \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Resta ver que la composición $\omega \to R_L(\omega)R_T(\omega)$ es medible: si $F : \mathbb{T}^n \to \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ es una función vectorial medible tal que $F(\omega) \in J_U(\omega)$ a.e. ω, entonces

$$\omega \to R_T(\omega)\,(F(\omega))$$

es medible, y eso a su vez implica que

$$\omega \to R_L(\omega)R_T(\omega)\,(F(\omega))\,.$$

2. Ver Teorema 4.8 en [Bow00].

3. Es inmediato que $L|_U$ preserva traslaciones enteras y que para toda $f \in U$ vale

$$R_L(\omega)|_{J_U(\omega)}\,(\tau f(\omega)) = \tau\,(\,L|_U\,f)\,(\omega) \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Resta ver que $R_L(\omega)|_{J_U(\omega)}\left(P_{J_U(\omega)}(a)\right)$ es medible (vectorial) para cada $a \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, pero

$$R_L(\omega)|_{J_U(\omega)}\left(P_{J_U(\omega)}(a)\right) = R_L(\omega)\left(P_{J_V(\omega)}\left(P_{J_U(\omega)}(a)\right)\right),$$

donde

$$\omega \to P_{J_V(\omega)}\left(P_{J_U(\omega)}(a)\right)$$

es medible (vectorial), pues $\omega \to P_{J_U(\omega)}(a)$ lo es.

4. Que L es un operador acotado por abajo si y solo si (3.5), es el Teorema 4.6 en [Bow00]. Una vez establecido esto, supongamos que L es acotado por abajo. Entonces su rango es cerrado, así como el de los operadores $R_L(\omega)$ (pues

también son acotados por abajo). Finalmente, si ponemos $V = S\left(\{\phi_i\}_{i\in I}\right)$, resulta

$$L\,(V) = S\left(\{L(\phi_i)\}_{i\in I}\right),$$

y entonces (a.e $\omega \in \mathbb{T}^n$) se tiene que

$$\begin{aligned} J_{L(V)}(\omega) &= \overline{\operatorname{span}}\left(\{\tau L(\phi_i)\}_{i\in I}\right) = \overline{\operatorname{span}}\left(\{R(\omega)(\tau\phi_i(\omega))\}_{i\in I}\right) \\ &= \overline{R(\omega)\,(J_V(\omega))} = R(\omega)\,(J_V(\omega)) \end{aligned}$$

5. Dado que un operador es isomorfismo topológico si y solo si es acotado por abajo y sobre, debido al punto (4) basta con verificar que un operador acotado por abajo $L : V \to W$ es sobre si y solo si los operadores $R_L(\omega) : J_V(\omega) \to J_W(\omega)$ (que resultan uniformemente acotados por abajo a.e. ω) son sobre (a.e. ω). Pero esto es una consecuencia inmediata de (3.6) (y el Teorema 3.4):

$$\begin{aligned} W &= L(V) \Longleftrightarrow J_W(\omega) = J_V(\omega) \text{ a.e. } \omega \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow J_W(\omega) = R_L(\omega)\,(J_V(\omega)) \text{ a.e. } \omega. \end{aligned}$$

En caso de ser L isomorfismo topológico, resulta inmediato que su inversa L^{-1} preserva traslaciones enteras. Resta ver la relación $R_{L^{-1}}(\omega) = (R_L(\omega))^{-1}$ para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. Pero usando el punto (1) y que

$$L^{-1}L = Id|_V \qquad \text{y} \qquad LL^{-1} = Id|_W$$

concluimos que

$$R_{L^{-1}}(\omega)R_L(\omega) = Id|_{J_V(\omega)} \qquad \text{y} \qquad R_L(\omega)R_{L^{-1}}(\omega) = Id|_{J_W(\omega)} \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Esto dice que $R_L(\omega)$ es un operador invertible, y que su inversa es el operador rango medible $R_{L^{-1}}(\omega)$. ■

3.2. Bases y marcos de fusión de subespacios invariantes por traslaciones enteras

En esta sección presentaremos el estudio de familias biortogonales de subespacios, bases de subespacios, bases de Riesz de subespacios, sucesiones de Bessel de subespacios, y marcos de fusión, todos para el caso particular de espacios invariantes por traslaciones enteras. En general, los resultados que se obtienen reflejan el comportamiento típico de los EITE, donde las estructuras tienen su réplica o análogo en los espacios de fibras, con alguna condición de uniformidad.

Comenzamos con las familias biortogonales de subespacios. Utilizaremos frecuentemente las notaciones establecidas en la sección 2.1.

Teorema 3.16. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios invariantes por traslaciones enteras, y definamos*

$$V_i = \overline{span}\left(\cup_{j\neq i} W_j\right)^{\perp}.$$

Entonces cada V_i *es un espacio invariante por traslaciones enteras, con función rango*

$$J_{V_i}(\omega) = \overline{span}\left(\cup_{j\neq i} J_{W_j}(\omega)\right)^{\perp}, \tag{3.7}$$

y además:

1. $\{V_i\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal para* $\{W_i\}_{i\in I}$ *si y solo si* $\{J_{V_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *es familia biortogonal para* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$. *Consecuentemente,* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es minimal (en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*) si y solo si* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *es minimal (en* $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$*) a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$.

2. $L^2(\mathbb{R}^n) = W_i \oplus V_i^{\perp}$ *para todo* $i \in I$ *si y solo si a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$ *se tiene que* $\ell^2(\mathbb{Z}^n) = J_{W_i}(\omega) \oplus J_{V_i}(\omega)^{\perp}$ *y existen constantes* $c_i > 0$ *tal que*

$$\left\| P_{J_{V_i}(\omega)}(a) \right\| \geq c_i \|a\| \qquad \text{para todo } a \in J_{W_i}(\omega). \tag{3.8}$$

   Notar que esto es equivalente a que $\{V_i\}_{i\in I}$ *sea la única familia biortogonal para* $\{W_i\}_{i\in I}$. *En particular,* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es exacta (en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, ver Definición 2.8) si y solo si a.e.* ω *se tiene que* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *es exacta (en* $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$*) y (3.8).*

Demostración . En primer lugar, que V_i es un espacio invariante por traslaciones enteras y su función rango viene dada por (3.7) se deduce de la Proposición 3.6. Además, $W_i \perp V_j$ si $i \neq j$ y eso es equivalente (por la misma proposición) a que $J_{W_i}(\omega) \perp J_{V_j}(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. Notar también que $P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$ es un operador que preserva traslaciones enteras que, según la Proposición 2.6, tiene como función rango a $P_{J_{V_i}(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}$.

1. Según la Observación 2.6, $\{V_i\}_{i\in I}$ es familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$ si y solo si $P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$ es inyectiva, es decir si y solo si $W_i \cap V_i^{\perp} = \{0\}$. Pero por la Proposición 3.6 esto es equivalente a que $J_{W_i}(\omega) \cap J_{V_i}(\omega)^{\perp} = \{0\}$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, y esto a que

$$P_{J_{V_i}(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)} : J_{W_i}(\omega) \to J_{V_i}(\omega)$$

   sea inyectivo. a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. Nuevamente, apelando a la Observación 2.6, concluimos que $\{J_{V_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es familia biortogonal para $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. Finalmente, el Teorema 2.7 nos dice que $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal (en $L^2(\mathbb{R}^n)$) si y solo si $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es minimal (en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$) a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.

2. Según la Observación 2.9, $L^2(\mathbb{R}^n) = W_i \oplus V_i^{\perp}$ si y solo si $P_{V_i}|_{W_i} : W_i \to V_i$ es isomorfismo topológico, y esto ocurre (por la Proposición 3.15) si y solo si

para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, tenemos que $P_{J_{V_i}(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)} : J_{W_i}(\omega) \to J_{V_i}(\omega)$ es isomorfismo topológico y existen constantes $c_i > 0$ tales que

$$\left\| P_{J_{V_i}(\omega)}(a) \right\| \geq c_i \|a\| \qquad \text{for all } a \in J_{W_i}(\omega).$$

Apelando nuevamente a la Observación 2.9, concluimos que esto es equivalente a que $\ell^2(\mathbb{Z}^n) = J_{W_i}(\omega) \oplus J_{V_i}(\omega)^{\perp}$ para todo i a.e. ω, y (3.8). Para terminar, el Teorema 2.7 nos da la unicidad. ■

El teorema anterior se puede expresar de una manera un poco más general, tomando como espacio de Hirbert de base un subespacio cerrado $U \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, y teniendo en cuenta que tanto las proyecciones como los ortogonales se toman en el. Concretamente:

Teorema 3.17. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios invariantes por traslaciones enteras, U otro subespacio invariante por traslaciones enteras tal que $W_i \subseteq U$ para todo $i \in I$, y definamos*

$$V_i = \overline{span}\left(\cup_{j\neq i} W_j\right)^{\perp}$$

donde el complemento ortogonal se toma en U. Entonces $J_{W_i}(\omega) \subseteq J_U(\omega)$, cada V_i es un espacio invariante por traslaciones enteras, con función rango

$$J_{V_i}(\omega) = \overline{span}\left(\cup_{j\neq i} J_{W_j}(\omega)\right)^{\perp}$$

(donde el complemento ortogonal se toma en $J_U(\omega)$), y:

1. *$\{V_i\}_{i\in I}$ es familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$ (en U) si y solo si $\{J_{V_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es familia biortogonal para $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ (en $J_U(\omega)$) a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$. Consecuentemente, $\{W_i\}_{i\in I}$ es minimal (en U) si y solo si $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es minimal (en $J_U(\omega)$) a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*

2. *$U = W_i \oplus V_i^{\perp}$ para todo $i \in I$ si y solo si a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que $J_U(\omega) = J_{W_i}(\omega) \oplus J_{V_i}(\omega)^{\perp}$ y existen constantes $c_i > 0$ tal que*

$$\left\| P_{J_{V_i}(\omega)}(a) \right\| \geq c_i \|a\| \qquad \textit{para todo } a \in J_{W_i}(\omega). \tag{3.9}$$

Notar que esto es equivalente a que $\{V_i\}_{i\in I}$ sea la única familia biortogonal para $\{W_i\}_{i\in I}$. En particular, $\{W_i\}_{i\in I}$ es exacta (en U) si y solo si a.e. ω se tiene que $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es exacta (en $J_U(\omega)$) y (3.9).

Demostración . La demostración es inmediata siguiendo la demostración del teorema anterior, teniendo algo de cuidado con las notaciones. Las afirmaciones sobre la función rango que corresponde a cada espacio se deducen de la Proposición 3.6. Como es necesario proyectar un subespacio sobre otro, la notación resulta algo compleja:

denotemos (en general) P_V^U la proyección ortogonal de U sobre V. Entonces, puesto que $W_i, V_i \subseteq U$ para todo i, se tiene que

$$P_{V_i}^U\big|_{W_i} = P_{V_i}|_{W_i} \qquad \text{y} \qquad P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)} = P_{J_{V_i}(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}.$$

Usando estas igualdades y el siguiendo la demostración del teorema anterior, concluimos que:

1. Se sigue de que $P_{V_i}^U\big|_{W_i}$ es inyectiva si y solo si $P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}$ lo es (y usar el Teorema 2.7 para la última afirmación).
2. Se sigue de que $P_{V_i}^U\big|_{W_i}$ es isomorfismo topológico si y solo si $P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}$ lo es (y usar el Teorema 2.7 para la última afirmación). ■

Observación 3.18. *En las condiciones de (2) del teorema anterior, $P_{V_i}^U\big|_{W_i}$ es isomorfismo topológico que preserva traslaciones enteras (es decir, no un mero isomorfismo topológico), y eso implica que*

$$\dim_{W_i}(\omega) = \dim_{V_i}(\omega) \qquad a.e.\ \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Esto se puede deducir directamente del hecho que $P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}$ es isomorfismo topológico, o del Teorema 4.10 en [Bow00].

La condición (3.8) está estrechamente relacionada con el concepto de "angulo" entre los espacios V_i y W_i, y esta con el hecho que de la suma de subespacios sea cerrada. Para ejemplificar esta situación incluimos la siguiente proposición, utilizando las notaciones precedentes.

Proposición 3.19. *Sean U, V, W espacios (cerrados) invariantes por traslaciones enteras de $L^2(\mathbb{R}^n)$ con función rango $J_U(\omega)$, $J_V(\omega)$, $J_W(\omega)$ respectivamente, y tales que V, $W \subseteq U$. Entonces:*

1. *Si $U = W \oplus V^{\perp_U}$ ($V^{\perp_U}$ = complemento ortogonal de V en U), entonces $J_U(\omega) = J_W(\omega) \oplus J_V(\omega)^{\perp_{J_U(\omega)}}$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.*
2. *Si $J_U(\omega) = J_W(\omega) \oplus J_V(\omega)^{\perp_{J_U(\omega)}}$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, entonces $U = \overline{W \oplus V^{\perp_U}}$.*

Demostración . La demostración de (1) es similar a la del punto (2) del Teorema 3.16: debido a la Observación 2.9, basta con notar que si

$$P_V^U\big|_W : W \to V \quad \text{es isomorfismo topológico,}$$

entonces

$$P_{J_V(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_W(\omega)} : J_W(\omega) \to J_V(\omega)$$

es isomorfismo topológico a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$.

Para el punto (2), notar primero que la hipótesis implica que

$$J_W(\omega) \cap J_V(\omega)^{\perp_{J_U(\omega)}} = \{0\} \text{ a.e. } \omega$$

(por ser suma directa). Además, la Proposición 3.6 (aplicada varias veces) implica que $J_W(\omega) \cap J_V(\omega)^{\perp_{J_U(\omega)}}$ es la función rango del espacio invariante por traslaciones enteras $W \cap V^{\perp_U}$, de donde concluimos que

$$W \cap V^{\perp_U} = \{0\}.$$

Llamemos $\tilde{U} = \overline{W \oplus V^{\perp_U}}$, entonces $\tilde{U}$ es subespacio (cerrado) invariante por traslaciones enteras, con $\tilde{U} \subseteq U$ (pues U contiene a W y a $V^{\perp_U}$). Pero

$$J_W(\omega) \oplus J_V(\omega)^{\perp_{J_U(\omega)}} \subseteq J_{\tilde{U}}(\omega),$$

de donde $J_U(\omega) \subseteq J_{\tilde{U}}(\omega)$ (a.e. ω), y entonces $U \subseteq \tilde{U}$. ■

A continuación caracterizaremos las bases de subespacios invariantes por traslaciones enteras. De manera concisa, el resultado dice que una familia es base de subespacios, cuando la familia correspondiente es base de subespacios en el espacio fibra, con operador suma parcial uniformemente acotado en $\omega \in \mathbb{T}^n$.

Teorema 3.20. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios invariantes por traslaciones enteras con funciones rango $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$, y definamos $U = \overline{\text{span}}(\cup_i W_i)$. Entonces U es invariante por traslaciones enteras, con función rango $J_U(\omega)$, y:*

1. *Si la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios de U con funciones coordenadas $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ y operador suma parcial $S_N = \sum_{i=1}^N \gamma_i$, entonces los operadores γ_i y S_N preservan traslaciones enteras, y si denotamos por $\Gamma_i(\omega)$, $\xi_N(\omega)$ sus funciones rango (medibles), respectivamente, entonces a.e. ω se tiene que $\{J_{W_i}(\omega), \Gamma_i(\omega)\}_{i\in I}$ es base de subespacios de $J_U(\omega)$, y existe $C > 0$ tal que*

$$\text{sup-ess}\{\|\xi_N(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\} \leq C \qquad \forall\ N \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

2. *Recíprocamente, si a.e. ω se tiene que la familia $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es base de subespacios de $J_U(\omega)$ con funciones coordenadas $\{\Gamma_i(\omega)\}_{i\in I}$ y operador suma parcial $\xi_N(\omega) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(\omega)$, y existe $C > 0$ tal que (3.10), entonces $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios de U, con funciones coordenadas γ_i y operador suma parcial S_N que preservan traslaciones enteras, cuyos operadores rango medible resultan $\Gamma_i(\omega)$ y $\xi_N(\omega)$, respectivamente.*

Demostración . Primero notar que (Proposición 3.6)

$$J_U(\omega) = \overline{\text{span}}\left(\cup_i J_{W_i}(\omega)\right),$$

y entonces la familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es total en U, y la familia $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es total en $J_U(\omega)$.

1. Si $\{W_i, \gamma_i\}_{i\in I}$ es base de subespacios de U, cada $f \in U$ se escribe como $f = \sum_i \gamma_i(f)$ de forma única. Entonces para cada $k \in \mathbb{Z}^n$,
$$t_k f = \sum_{i\in I} \gamma_i(t_k f)$$
y por la continuidad del operador t_k, también
$$t_k f = \sum_{i\in I} t_k \gamma_i(f).$$
Por unicidad, concluimos que
$$\gamma_i(t_k f) = t_k \gamma_i(f) \quad \text{ para todo } i \in I,$$
es decir, las funciones coordenadas son operadores que preservan traslaciones enteras. Eso implica que el operador suma parcial $S_N = \sum_{i=1}^N \gamma_i$ también preserva traslaciones enteras. Denotemos por $\Gamma_i(\omega)$ la función rango (medible) de γ_i y por $\xi_N(\omega)$ la función rango (medible) de S_N; veremos que (a.e. ω) se cumplen las condiciones de Teorema 2.17. En primer lugar, el Corolario 2.15 nos dice que existe una constante C ($\|\mathcal{T}^{-1}\|$ en dicho corolario) tal que
$$\|S_N\| \leq C \quad \forall\ N \in \mathbb{N}; \tag{3.11}$$
esto, junto con el Teorema 3.13 implica que
$$\text{sup-ess}\,\{\|\xi_N(\omega)\| : \omega \in \mathbb{T}^n\} \leq C \quad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$
Tomemos conjuntos contables $\Phi_i \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $W_i = S(\Phi_i)$, entonces $U = S(\cup_i \Phi_i)$ y (siendo $\{\cup_i \Phi_i\}$ e I contables) se puede concluir (usando (3.1)) que existe un conjunto $H \subseteq \mathbb{T}^n$ de medida nula, y tal que para todo $\omega \in \mathbb{T}^n - H$ vale que
$$\tau\left(\gamma_i \phi_j\right)(\omega) = \Gamma_i(\omega)\left(\tau\phi_j(\omega)\right) \qquad \forall\ \phi_j \in \Phi_j \quad \text{y} \quad \forall\ i, j \in I$$
Como
$$\gamma_i(\phi_i) = \phi_i \qquad \text{y} \qquad \gamma_i\left(\phi_j\right) = 0 \qquad \forall\ i \neq j,$$
podemos concluir que para todo $\omega \in \mathbb{T}^n - H$ vale que
$$\Gamma_i(\omega)\left(\tau\phi_i(\omega)\right) = \tau\phi_i(\omega) \qquad \forall\ \phi_i \in \Phi_i \quad \text{y} \quad \forall\ i \in I,$$
y
$$\Gamma_i(\omega)\left(\tau\phi_j(\omega)\right) = 0 \qquad \forall\ \phi_j \in \Phi_j \quad \text{y} \quad \forall\ i, j \in I.$$
Pero teniendo en cuenta que
$$J_{W_i}(\omega) = \overline{\text{span}}\left(\tau\phi_i(\omega) : \phi \in \Phi_i\right) \quad \text{y} \quad J_U(\omega) = \overline{\text{span}}\left(\tau\phi(\omega) : \phi \in \cup_i \Phi_i\right)$$
esto nos dice que
$$\Gamma_i(\omega)|_{J_{W_i}(\omega)} = Id \qquad \text{y} \qquad \Gamma_i(\omega)|_{J_{W_i}(\omega)} = 0 \qquad \forall\ i \neq j.$$
Es decir, a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, la familia $\{J_{W_i}(\omega),\ \Gamma_i(\omega)\}_{i\in I}$ cumpla las condiciones del Teorema 2.17, con lo cual podemos concluir que forma una base de subespacios para $J_U(\omega)$.

2. En este caso, veremos que podemos definir funciones $\gamma_i : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que la familia $\{W_i,\ \gamma_i\}_{i\in I}$ satisfaga las hipótesis de Teorema 2.17. En primer lugar, (3.10) implica que

$$\operatorname*{sup-ess}_{\omega} \|\Gamma_i(\omega)\| = \operatorname*{sup-ess}_{\omega} \left\|\xi_i(\omega) - \xi_{i-1}(\omega)\right\| \leq 2C.$$

Asumamos que $\omega \to \Gamma_i(\omega)$ es medible, entonces resulta un operador rango medible en $J_U(\omega)$ uniformemente acotado, y en tal caso el Teorema 3.13 nos da la existencia (para cada $i \in I$) de operadores $\gamma_i : U \to W_i$ que preservan traslaciones enteras y tales que para toda $f \in U$ vale

$$\tau\left(\gamma_i f\right)(\omega) = \Gamma_i(\omega)\left(\tau f(\omega)\right) \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Con la misma demostración y argumentos que en el punto anterior (pero leídos en sentido inverso), concluimos que

$$\gamma_i|_{W_i} = Id \qquad \text{y} \qquad \gamma_i|_{W_j} = 0 \quad \forall\ i \neq j,$$

y si denotamos por $S_N = \sum_{i=1}^N \gamma_i$, resulta operador que preserva traslaciones enteras en U con operador rango $\xi_N(\omega)$, por lo que (3.10) implica que

$$\|S_N\| \leq C \qquad \forall\ N \in \mathbb{N}.$$

Para terminar la demostración, resta ver que $\omega \to \Gamma_i(\omega)$ es operador rango medible en $J_U(\omega)$. Puesto que $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es base de subespacios para $J_U(\omega)$, en particular es exacta en $J_U(\omega)$ (ver Definición 2.8 y Observación 2.16), y por lo tanto el Teorema 2.7 nos dice que tiene única familia biortogonal $\{\mathcal{V}_i(\omega)\}_{i\in I}$ en $J_U(\omega)$ dada por

$$\mathcal{V}_i(\omega) = \overline{\operatorname{span}}\left(\cup_{j\neq i} J_{W_j}(\omega)\right)^{\perp}.$$

Denotemos por

$$V_i = \overline{\operatorname{span}}\left(\cup_{j\neq i} W_j\right)^{\perp},$$

donde el complemento ortogonal se toma en U. Entonces cada V_i es invariante por traslaciones enteras y con función rango medible

$$J_{V_i}(\omega) = \overline{\operatorname{span}}\left(\cup_{j\neq i} J_{W_j}(\omega)\right)^{\perp},$$

donde el complemento ortogonal se toma en $J_U(\omega)$ (ver Teorema 3.17), lo cual nos permite concluir que la única familia biortogonal de $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es precisamente $\{J_{V_i}(\omega)\}_{i\in I}$. Esto nos dice que

$$P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)} : J_{W_i}(\omega) \to J_{V_i}(\omega)$$

es isomorfismo topológico, con $\omega \to P_{J_{V_i}(\omega)}^{J_U(\omega)}\Big|_{J_{W_i}(\omega)}$ medible (por ser el operador rango medible de la restricción $P_{V_i}^U\big|_{W_i}$ con inversa

$$\eta_i(\omega) : J_{V_i}(\omega) \to J_{W_i}(\omega),$$

que resulta medible por ser la inversa de un operador rango medible. Puesto que las funciones coordenadas se pueden expresar como la composición

$$\Gamma_i(\omega) = \eta_i(\omega) P^{J_U(\omega)}_{J_{V_i}(\omega)}$$

(ver comentarios previos al Corolario 2.18), resultan operadores rango medibles (hemos usado repetidas veces la Proposición 3.15). ■

La necesidad del conjunto H en la demostración anterior es para salvar el error frecuente de pensar que un elemento genérico de $J_U(\omega)$ es de la forma $\tau f(\omega)$, con $f \in U$ (para cualquier espacio invariante por traslaciones enteras).

Finalmente, damos la caracterización de bases de Riesz de subespacios y de marcos de fusión de subespacios invariantes por traslaciones enteras. De manera análoga a los resultados anteriores, la estructura de la familia de subespacios se replica en los espacios fibra con alguna condición de uniformidad.

Teorema 3.21. *Sea $\{W_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios invariantes por traslaciones enteras con función rango $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$, y $U = \overline{span}\,(\cup_i W_i)$. Entonces U es invariante por traslaciones enteras con función rango $J_U(\omega) = \overline{span}\,(\cup_i J_{W_i}(\omega))$, y*

1. *La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios para U con constantes α y β si y solo si para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que la familia $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es base de Riesz de subespacios para $J_U(\omega)$ con constante α y β. Esto es, para cada conjunto finito $I_0 \in I$,*

$$\alpha \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I_0} f_i \right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \|f_i\|^2 \tag{3.12}$$

para toda $\{f_i\}_i \in \prod_i W_i$ si y solo si para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que

$$\alpha \sum_{i\in I_0} \left\|a^i\right\|^2 \leq \left\| \sum_{i\in I_0} a^i \right\|^2 \leq \beta \sum_{i\in I_0} \left\|a^i\right\|^2 \tag{3.13}$$

para toda $\{a^i\}_{i\in I} \in \prod_i J_{W_i}(\omega)$.

2. *La familia $\{W_i\}_{i\in I}$ es marco de fusión para U con constante α y β si y solo si para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, la familia $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es a marco de fusión para $J_U(\omega)$ con constantes α y β. Esto es,*

$$\alpha \|f\|^2 \leq \sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2 \tag{3.14}$$

para toda $f \in U$ si y solo si para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ se tiene que

$$\alpha \|a\|^2 \leq \sum_{i\in I} \left\| P_{J_{W_i}(\omega)}(a) \right\|^2 \leq \beta \|a\|^2 \tag{3.15}$$

para toda $a \in J_U(\omega)$.

Demostración .

1. En primer lugar, notar que $\{W_i\}_{i\in I}$ es total en U, y $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ es total en $J_U(\omega)$, y entonces el Teorema 2.37 implica que basta con probar la equivalencia entre (3.12) y (3.12). El pasaje de los espacios invariantes por traslaciones enteras a los espacios fibra se logra a partir de las siguientes ecuaciones: recordando que el operador τ definido en el Teorema 3.2 es un isomorfismo isométrico, tenemos que

$$\left\|\sum_{i\in I_0} f_i\right\|^2 = \left\|\tau\left(\sum_{i\in I_0} f_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i\in I_0}\tau f_i\right\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n}\left\|\sum_{i\in I_0}\tau f_i(\omega)\right\|^2 d\omega,$$

y

$$\sum_{i\in I_0}\|f_i\|^2 = \sum_{i\in I_0}\|\tau f_i\|^2 = \sum_{i\in I_0}\int_{\mathbb{T}^n}\|\tau f_i(\omega)\|^2\,d\omega = \int_{\mathbb{T}^n}\sum_{i\in I_0}\|\tau f_i(\omega)\|^2\,d\omega.$$

A partir de estas ecuaciones, concluimos que (3.12) es equivalente a

$$\alpha\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{i\in I_0}\|\tau f_i(\omega)\|^2\,d\omega \le \int_{\mathbb{T}^n}\left\|\sum_{i\in I_0}\tau f_i(\omega)\right\|^2 d\omega \le \beta\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{i\in I_0}\|\tau f_i(\omega)\|^2\,d\omega. \tag{3.16}$$

($\Longleftarrow$) Supongamos primero que (3.13) es cierto. Tomemos $\{f_i\}_i \in \prod_i W_i$ e $I_0 \subseteq I$ finito, entonces teniendo en cuenta que

$$f_i \in W_i \quad \text{implica} \quad \tau f_i(\omega) \in J_{W_i}(\omega) \quad \text{para a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n$$

(a.e. depende de f_i) y que I_0 es finito, podemos encontrar un conjunto $H \subseteq \mathbb{T}^n$ de medida nula y tal que

$$\alpha\sum_{i\in I_0}\|\tau f_i(\omega)\|^2 \le \left\|\sum_{i\in I_0}\tau f_i(\omega)\right\|^2 \le \beta\sum_{i\in I_0}\|\tau f_i(\omega)\|^2 \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{T}^n - H.$$

Integrando esta desigualdad obtenemos (3.16).

($\Longrightarrow$) Para la recíproca vamos a utilizar lo remarcado sobre el final de la Observación 2.39, para lo cual necesitamos, para cada $\omega \in \mathbb{T}^n$, un denso adecuado en $\sum\bigoplus_{i\in I} J_{W_i}(\omega)$. Sea $\mathcal{E} \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ un subconjunto contable y denso, y tal que $0 \in \mathcal{E}$, y definamos

$$\mathcal{F} = \left\{\left\{a^i\right\}_{i\in I} \text{ tq: } a^i \in \mathcal{E}\ \forall\ i \text{ y solo finitas } a^i \text{ 's son distintas de cero}\right\}$$

y

$$\mathcal{D}(\omega) = \left\{\left\{P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\}_{i\in I} :\ \left\{a^i\right\}_{i\in I} \in \mathcal{F}\right\},$$

entonces $\mathcal{D}(\omega)$ es denso contable en $\sum\bigoplus_{i\in I} J_{W_i}(\omega)$ que satisface

a) cada $\left\{P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\}_{i\in I} \in \mathcal{D}(\omega)$ tiene una cantidad finita de coordenadas distinta de cero, y

b) $\left\{P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\}_{i\in I} \in \mathcal{D}(\omega) \Rightarrow \left\{P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\chi_{I_0}(i)\right\}_{i\in I} \in \mathcal{D}(\omega)$ para todo $I_0 \subseteq I$ finito.

Entonces basta con ver que (3.12) implica que para a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ vale

$$\alpha \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 \leq \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 \leq \beta \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2$$

para toda $\{a^i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}$. Si esto no fuera así, significa que
alguno de los siguientes conjuntos

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \alpha \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 > \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 \text{ para algún } \left\{a^i\right\}_{i\in I} \in \mathcal{F}\right\}$$

ó

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 > \beta \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(a^i)\right\|^2 \text{ para algún } \left\{a^i\right\}_{i\in I} \in \mathcal{F}\right\}$$

(o ambos) tiene medida positiva. Supongamos que eso ocurre con el segundo: como $\mathcal{F}$ es una familia numerable, podemos concluir que existe un $\{d^i\}_{i\in I} \in \mathcal{F}$ tal que el conjunto

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 > \beta \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2\right\}$$

tiene medida positiva. Poniendo

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 > \beta \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2\right\} =$$
$$= \bigcup_{j=1}^{\infty} \left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 > \left(\beta + \frac{1}{j}\right) \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2\right\}$$

concluimos finalmente que existe $\varepsilon > 0$ y un conjunto de medida positiva $D \subseteq \mathbb{T}^n$ tal que

$$\left\|\sum_i P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 \geq (\beta + \varepsilon) \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 \qquad \text{para todo } \omega \in D.$$

Para cada $i \in I$, la función $\omega \to \chi_D(\omega)P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)$ es medible y

$$\chi_D(\omega)P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i) \in J_{W_i}(\omega) \quad \text{para a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n,$$

y entonces el Teorema 3.4 nos asegura que para cada i existe $g_i \in W_i$ tal que $\tau g_i(\omega) = \chi_D(\omega)P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)$. Llamemos $I_0 = \{i \in I : g_i \neq 0\}$, entonces I_0 es finito y

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i\in I_0} g_i\right\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^n} \left\|\sum_{i\in I_0} \tau g_i(\omega)\right\|^2 d\omega = \int_{\mathbb{T}^n} \left\|\sum_{i\in I_0} \chi_D(\omega)P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 d\omega \geq \\
&\geq (\beta+\varepsilon) \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{i\in I_0} \left\|\chi_D(\omega)P_{J_{W_i}(\omega)}(d^i)\right\|^2 d\omega = \\
&= (\beta+\varepsilon) \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{i\in I_0} \|\tau g_i(\omega))\|^2 d\omega = (\beta+\varepsilon) \sum_{i\in I_0} \|g_i\|^2,
\end{aligned}$$

lo cual contradice (3.12).

2. Notar que, en principio, deberíamos tener en cuenta que las proyecciones ortogonales P_{W_i} y $P_{J_{W_i}(\omega)}$ que aparecen en el enunciado tienen dominio U y $J_U(\omega)$ respectivamente, y entonces deberíamos utilizar notación del tipo $P^U_{W_i}$. Pero no es necesario más que restringir los dominios, por las observaciones hechas en la Demostración del Teorema 3.17.

   Como en la demostración del punto anterior, para $f \in U$ tenemos

$$\|f\|^2 = \|\tau f\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} \|\tau f(\omega)\|^2 d\omega,$$

   en particular, teniendo en cuenta la que $\tau(P_{W_i}f)(\omega) = P_{J_{W_i}(\omega)}(\tau f(\omega))$ (Proposición 3.14), resulta

$$\|P_{W_i}(f)\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(\tau f(\omega))\right\|^2 d\omega,$$

   y entonces

$$\sum_i \|P_{W_i}(f)\|^2 = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(\tau f(\omega))\right\|^2 d\omega,$$

   por lo que la desigualdad (3.14) es equivalente a

$$\alpha \int_{\mathbb{T}^n} \|\tau f(\omega)\|^2 d\omega \leq \int_{\mathbb{T}^n} \sum_i \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(\tau f(\omega))\right\|^2 d\omega \leq \beta \int_{\mathbb{T}^n} \|\tau f(\omega)\|^2 d\omega. \tag{3.17}$$

   ($\Longleftarrow$) Supongamos primero que (3.15) es cierto, y tomemos $f \in U$. Entonces, puesto que $\tau f(\omega) \in J_U(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$, tenemos que

$$\alpha \|\tau f(\omega)\|^2 \leq \sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(\tau f(\omega))\right\|^2 \leq \beta \|\tau f(\omega)\|^2 \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Integrando obtenemos (3.17).

($\Longrightarrow$) Para la recíproca: supongamos que sabemos que (3.14) es verdadero, y sea $\mathcal{D}$ un subconjunto denso y contable de $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$. Debido a la Observación 2.49 basta con probar que (3.15) vale a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ para cada vector de la forma $P_{J_U(\omega)}(a)$, con $a \in \mathcal{D}$. Es decir, basta con ver que a.e. $\omega \in \mathbb{T}^n$ vale que

$$\alpha \left\|P_{J_U(\omega)}(a)\right\|^2 \leq \sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(P_{J_U(\omega)}(a))\right\|^2 \leq \beta \left\|P_{J_U(\omega)}(a)\right\|^2 \quad \text{para toda } a \in \mathcal{D}.$$

Si esto no fuera así, significa que alguno de los siguientes conjuntos

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \alpha \left\|P_{J_U(\omega)}(a)\right\|^2 > \sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(P_{J_U(\omega)}(a))\right\|^2 \text{ para algún } a \in \mathcal{D}\right\}$$

ó

$$\left\{\omega \in \mathbb{T}^n : \sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)}(P_{J_U(\omega)}(a))\right\|^2 > \beta \left\|P_{J_U(\omega)}(a)\right\|^2 \text{ para algún } a \in \mathcal{D}\right\}$$

(o ambos) tiene medida positiva. Supongamos que eso ocurre con el segundo: con los mismos argumentos que los utilizados en la demostración del punto anterior, podemos concluir que existe $d \in \mathcal{D}$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto de medida positiva $D \subseteq \mathbb{T}^n$ tal que

$$\sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)} P_{J_U(\omega)}(d)\right\|^2 \geq (\beta + \varepsilon) \left\|P_{J_U(\omega)}(d)\right\|^2$$

para todo $\omega \in D$, y entonces

$$\sum_{i\in I} \left\|\chi_D(\omega) P_{J_{W_i}(\omega)} P_{J_U(\omega)}(d)\right\|^2 \geq (\beta + \varepsilon) \left\|\chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d)\right\|^2 \quad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n. \tag{3.18}$$

Pero la función $\omega \to \chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d)$ es medible y

$$\chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d) \in J_U(\omega) \quad \text{para a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n,$$

y entonces el Teorema 3.4 nos asegura que existe $g \in U$ tal que $\tau g(\omega) = \chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d)$. Entonces

$$P_{J_{W_i}(\omega)} (\tau g(\omega)) = P_{J_{W_i}(\omega)} \left(\chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d)\right) = \chi_D(\omega) P_{J_{W_i}(\omega)} \left(P_{J_U(\omega)}(d)\right). \tag{3.19}$$

y combinando (3.18) y (3.19) concluimos que a.e. ω

$$\sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)} (\tau g(\omega))\right\|^2 \geq (\beta + \varepsilon) \left\|\chi_D(\omega) P_{J_U(\omega)}(d)\right\|^2 = (\beta + \varepsilon) \left\|\tau g(\omega)\right\|^2,$$

que al integrarla resulta en

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{i\in I} \left\|P_{J_{W_i}(\omega)} (\tau g(\omega))\right\|^2 d\omega \geq (\beta + \varepsilon) \int_{\mathbb{T}^n} \left\|\tau g(\omega)\right\|^2 d\omega$$

lo cual contradice (3.17) (y entonces a (3.14)). ■

Como caso particular de teorema anterior, tenemos el siguiente:

Corolario 3.22. *Sea* $\{W_i\}_{i\in I}$ *una familia de subespacios invariantes por traslaciones enteras con función rango* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$, *y* $U = \overline{span}\,(\cup_i W_i)$. *Entonces (*$U$ *es invariante por traslaciones enteras con función rango* $J_U(\omega) = \overline{span}\,(\cup_i J_{W_i}(\omega))$ *y)* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel de subespacios en* U *con constante* β *si y solo si para a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$ *se tiene que la familia* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *es sucesión de Bessel de subespacios en* $J_U(\omega)$ *con constante* β. *Esto es,*

$$\sum_{i\in I} \|P_{W_i}(f)\|^2 \leq \beta \|f\|^2$$

para toda $f \in U$ *si y solo si para a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$ *tenemos que*

$$\sum_{i\in I} \left\| P_{J_{W_i}(\omega)}(a) \right\|^2 \leq \beta \|a\|^2$$

para toda $a \in J_U(\omega)$.

Observación 3.23. *También el operado de marco de fusión, y el dual canónico del marco de fusión se preservan cuando pasamos a los espacios fibra. Con la notación del punto (2) del Teorema 3.21: supongamos que la familia* $\{W_i\}_{i\in I}$ *es marco de fusión para* U, *entonces para a.e.* $\omega \in \mathbb{T}^n$, *la familia* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$ *es a marco de fusión para* $J_U(\omega)$. *Denotemos por*

$$S_W : U \to U, \qquad S_W = \sum_{i\in I} P_{W_i}$$

el operador de marco de fusión de $\{W_i\}_{i\in I}$, *y*

$$S_{J_W}(\omega) : J_U(\omega) \to J_U(\omega), \qquad S_{J_W}(\omega) = \sum_{i\in I} P_{J_{W_i}(\omega)}$$

el operador del marco de fusión $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$.

El operador del marco de fusión S_W *preserva traslaciones enteras (pues cada proyección lo hace), y es isomorfismo topológico. Además, para cada* $f \in U$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} \tau\left(S_W f\right)(\omega) &= \tau\left(\sum_{i\in I} P_{W_i} f\right)(\omega) = \sum_{i\in I} \tau\left(P_{W_i} f\right)(\omega) = \sum_{i\in I} P_{J_{W_i}(\omega)}\left(\tau f(\omega)\right) = \\ &= S_{J_W}(\omega)\left(\tau f(\omega)\right) \end{aligned}$$

es decir, el operador rango (medible) asociado a S_W *es exactamente* $S_{J_W}(\omega)$, *el operador del marco de fusión* $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$.

Por otro lado, S_W^{-1} *es un operador que preserva traslaciones enteras, que tiene asociado el operador rango medible* $S_{J_W}(\omega)^{-1}$ *(ver Proposición 3.15). Además,* $\widetilde{W}_i =$

$S_W^{-1}(W_i)$ *es espacio vectorial (cerrado) que preserva traslaciones enteras, con función rango*

$$J_{\widetilde{W_i}}(\omega) = S_{J_W}(\omega)^{-1}(J_{W_i}(\omega))$$

(de nuevo, por la Proposición 3.15). Es decir, la función rango de cada subespacio del marco de fusión dual canónico es exactamente el dual canónico del marco de fusión $\{J_{W_i}(\omega)\}_{i\in I}$*.En símbolos, si usamos el "tilde" para denotar el marco de fusión dual canónico, obtenemos que*

$$J_{\widetilde{W_i}}(\omega) = \widetilde{J_{W_i}(\omega)}.$$

A continuación mostraremos un método general para construir un marco de fusión para un subespacio invariante por traslaciones enteras V. Necesitamos la siguiente observación:

Observación 3.24. *Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y U, V son subespacios cerrados, entonces*

$$P_U(V) \subseteq V \qquad \text{si y solo si} \qquad P_U(V) = U \cap V,$$

y en tal caso la proyección $P_{U\cap V}^V : V \to U \cap V$ es exactamente $P_U|_V$.

Para $\Omega \subseteq \mathbb{T}^n$, denotemos la periodización de Ω por

$$\Omega^o = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^n} (\Omega + k) = \{\omega + k : \omega \in \Omega, k \in \mathbb{Z}^n\},$$

y para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ llamemos $(\rho_\Omega f)^\wedge = \chi_{\Omega^o}\hat{f}$. Entonces ρ_Ω es la proyección ortogonal sobre el espacio invariante por traslaciones

$$V_{\Omega^o} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}(\hat{f}) \subseteq \Omega^o \right\}.$$

Si $V = S(\Phi)$ es un espacio invariante por traslaciones enteras con espectro $\sigma(V)$ y

$$\sigma_j = \{\omega \in \mathbb{T}^n : \dim_V(\omega) = j\}, \quad \text{con } j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$

entonces $\sigma_j \cap \sigma_i = \varnothing$ y $\sigma(V) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \sigma_j$. En [BDVR94] se demuestra que

$$V = \overset{\perp}{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}} \rho_{\sigma_j}(V) = \overset{\perp}{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}} S\left(\rho_{\sigma_j}(\Phi)\right),$$

lo cual proporciona una descomposición ortogonal de V. De manera más general y con la misma notación, si ponemos

$$\sigma(V) = \bigcup_{i\in I} \Omega_i \tag{3.20}$$

unión disjunta de conjuntos medibles, se puede ver (con una demostración análoga) que

$$V = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} \rho_{\Omega_i}(V) = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} S\left(\rho_{\Omega_i}(\Phi)\right).$$

Para verificar esto se utilizan las siguientes cuestiones clave:

1. $\tau(\rho_\Omega f)(\omega) = \tau f(\omega)\chi_\Omega(\omega)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

2. $\rho_\Omega(V) \subseteq V$ ($f \in V \Rightarrow \tau f(\omega) \in J_V(\omega)$ y $\tau(\rho_\Omega f)(\omega) = \tau f(\omega)\chi_\Omega(\omega) \in J_V(\omega)$) y entonces $\rho_\Omega(V) = V \cap V_{\Omega^o}$, en particular es subespacio cerrado (e invariante por traslaciones enteras).

3. Si $V = S(\Phi)$ entonces $\rho_\Omega(V) = S(\rho_\Omega(\Phi))$ pues es subespacio cerrado que incluye $\rho_\Omega(\Phi)$.

Cuando la unión (3.20) no es disjunta pero (salvo por un conjunto de medida nula) la superposición es finita, tenemos un marco de fusión para V. Concretamente:

Teorema 3.25. *Sea $V = S(\Phi)$ un espacio invariante por traslaciones enteras con espectro $\sigma(V)$, y pongamos $\sigma(V) = \bigcup_{i\in I}\Omega_i$ de forma tal que cada Ω_i sea un subconjunto medible de $\mathbb{T}^n$, y tal que, excepto por un conjunto de medida nula, cada ω pertenece como mínimo a N subconjuntos Ω_i y a lo más a M subconjuntos Ω_i. Es decir, tal que*

$$N \leq \sum_{i\in I} \chi_{\Omega_i}(\omega) \leq M \qquad \textit{para a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Entonces la familia $\left\{\rho_{\Omega_i}(V)\right\}_{i\in I}$ es a marco de fusión para V con constantes N y M.

Demostración . Denotemos $W_i = \rho_{\Omega_i}(V)$, entonces para $f \in V$ se tiene que $P_{W_i}(f) = \rho_{\Omega_i}(f)$ (en rigor deberíamos trabajar con $P_{W_i}^V$, que por la Observación 3.24 es $\rho_{\Omega_i}\big|_V$). Entonces, si $f \in V$ tenemos

$$\|P_{W_i}(f)\|^2 = \left\|(P_{W_i}(f))^\wedge\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega^o}(\omega)\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega$$

y

$$N\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \leq \sum_{i\in I}\chi_{\Omega_i}(\omega)\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \leq M\left|\hat{f}(\omega)\right|^2 \qquad \text{a.e. } \omega \in \mathbb{T}^n.$$

Integrando sobre $\mathbb{R}^n$ obtenemos

$$N\|f\|^2 \leq \sum_{i\in I}\|P_{W_i}(f)\|^2 \leq M\|f\|^2. \qquad \blacksquare$$

Bibliografía

[ACM04] A. Aldroubi, C. Cabrelli and U. Molter. *Wavelets on irregular grids with arbitrary dilation matrices and frame atoms for* $L^2(\mathbb{R}^d)$, Appl. Comput. Harmon. Anal., Special Issue on Frames II, 17, 119-140, 2004.

[AC09] M. Anastasio and C. Cabrelli. *Sampling in a union of frame generated subspaces.* Sampl. Theory Signal Image Process., vol. 8 (2009), no. 3, pp. 261–286.

[Asg09] M. Asgari. *New characterizations of fusion frames (frames of subspaces).* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 119, No. 3, pp. 369–382 (2009).

[BDVR94] C. de Boor, R. A. DeVore and A. Ron, *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in* $L^2(\mathbb{R}^d)$. J. Funct. Anal., 119, 37-78, (1994).

[BhR72] Bharucha-Reid, A. T. *Random Integral Equations.* NewYork Academic Press, 1972.

[Bow00] M. Bownik, *The structure of shift-invariant subspaces of* $L^2(\mathbb{R}^n)$. J. Funct. Anal., 177, 282-309, (2000).

[Chr03] O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (2003).

[CK04] P.G. Casazza and G. Kutyniok. *Frames of subspaces.* En "Wavelets, Frames and Operator Theory" (College Park, MD, 2003), Contemp. Math. 345, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 87 - 113.

[CK08] P.G. Casazza and G. Kutyniok. *Robustness of Fusion Frames under Erasures of Subspaces and Local Frame Vectors.* Contemp. Math. 464 (2008).

[CKS08] P. G. Casazza, G. Kutyniok and S. Li. *Fusion Frames and Distributed Processing.* Appl. Comput. Harmon. Anal., 25 (2008) 114-132.

[Con90] J. Conway. *A First Course in Functional Analysis.* Graduate Text in Mathematics Vol. 96, Springer Verlag (1990).

[CP10] C. Cabrelli, V. Paternostro. *Shift-invariant spaces on LCA groups.* Journal of Functional Analysis Vol. 258, Issue 6,pp 2034–2059 (2010).

[DGM86] I.Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer. *Painless nonorthogonal expansions*, Journ. Math.Phys. 27 (1986), 1271-1283.

[DS52] R.J. Duffin, A. C, Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math.Soc. 72 (1952) 341-366.

[Gav06] P. Gavruta. *On the duality of fusion frames.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 333, no. 2, pp. 871-879 (2006).

[Gr08] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis.* Graduate Texts in Mathematics Vol 249, Springer Verlag (2008).

[Hei11] C. Heil. *A basis theory primer.* Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, (2011), expanded ed.

[Hel64] H. Helson. *Lectures on Invariant Subspaces.* Academic Press, New York, (1964).

[KT11] R.A. Kamyabi Gol, R. Raisi Tousi. *Shift Preserving Operators on Locally Compact Abelian Group.* Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 15, No. 5, pp. 1939-1955, (2011).

[Ma95] T. Ma. *Classical analysis on normed spaces.* World Scientific, Singapore (1995).

[NH07] M. Nielsen, H. Šikić. *Schauder bases of integer translates.* Applied and Computational Harmonic Analysis, Volume 23, Issue 2, pp. 259-262 (2007).

[Rom] W. Römisch. *On the Approximate Solution of Random Operator Equations.* Wiss. Zeitschr. Humboldt-Univ. Berlin, Math.-Nat. R. 30 (1981), 455-462.

[RS08] M Ruiz, D Stojanoff. *Some properties of frames of subspaces obtained by operator theory methods.* Journal of Mathematical Analysis and Applications 343, (2008), 366-378.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis 3^{th} edition.* Mc Graw-Hill International Editions (1987).

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* International series in pure and applied mathematics, Mc Graw-Hill, New York, NY (1991).

[RS95] A. Ron and Z. Shen. *Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of* $L^2(\mathbb{R}^d)$. Canad. J. Math., 47, 1051-1094, (1995).

[Si81] I. Singer. *Bases in Banach spaces. II.* Springer Verlag and Editura Academiei R.S.R., Berlin - Heidelberg - New York and Bucuresti, (1981).

[Sun06] W. Sun, *G-frames and G-Riesz Bases.* J. Math. Anal. Appl. 322, 437 - 452 (2006).

[XZD14] X. Xiao1, Y. Zhu, M. Ding. *Erasures and equalities for fusion frames in Hilbert spaces*. Bull. of the Malaysian Math. Sciences Society (2014).

[Yo81] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer Verlag, New York (1981).