Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis Doctoral

Estudios poliedrales de problemas de coloreo de grafos

Delle Donne, Diego Andrés

2016-10-11

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Delle Donne, Diego Andrés. (2016-10-11). Estudios poliedrales de problemas de coloreo de grafos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:
Delle Donne, Diego Andrés. "Estudios poliedrales de problemas de coloreo de grafos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2016-10-11.

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Computación

Estudios poliedrales de problemas de coloreo de grafos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Computación

Diego Andrés Delle Donne

Director de tesis: Dr. Javier Marenco

Consejera de estudios: Dra. Flavia Bonomo

Fecha de defensa: 11 de octubre de 2016

Resumen

Los problemas de coloreo de vértices surgen en una amplia gama de situaciones de la vida real. Ejemplos de ellos son los problemas de asignación de frecuencias en redes de telecomunicaciones, problemas de asignación de aulas a las materias de una universidad e incluso algunos problemas de planificación (*scheduling*). En general, cualquier problema de asignación de *recursos* a *tareas* que contemple incompatibilidades entre pares de tareas para usar el mismo recurso, puede ser visto como un problema de coloreo de los vértices de un grafo. Existen muchas variantes de problemas de coloreo de grafos motivadas generalmente por restricciones reales, tales como *Precoloring extension*, *μ-coloring*, *(γ, μ)-coloring* y *List-coloring*, entre otras.

La *programación lineal entera* (PLE) ha demostrado ser una herramienta muy adecuada para resolver problemas de optimización combinatoria. En los últimos 15 años la PLE fue aplicada con éxito a problemas de coloreo de vértices recurriendo a distintas formulaciones para el problema clásico de coloreo tales como el *modelo estándar*, la *formulación por representantes*, el *orientation model* y la *formulación por conjuntos independientes*, entre otras.

Si bien muchos problemas de coloreo de grafos pueden ser resueltos en tiempo polinomial en ciertas familias de grafos, la mayoría de estos problemas no está "bajo control" desde el punto de vista poliedral. Es decir, no se conocen formulaciones de programación lineal entera con descripciones completas de los poliedros asociados. En el contexto de la teoría poliedral, la equivalencia entre los problemas de optimización y separación sugiere que para estos problemas debería existir alguna formulación cuyo problema de separación asociado pueda ser resuelto en tiempo polinomial y, más aun, tal que el poliedro asociado admita una caracterización "elegante", en términos de desigualdades lineales. La búsqueda de tales caracterizaciones es el objetivo principal del presente trabajo de tesis.

El objetivo teórico es completar la contraparte poliedral de aquellos problemas de coloreo de grafos que se encuentren ya bien resueltos por medio de técnicas combinatorias. El estudio de estos poliedros puede llevarnos a un mejor entendimiento de sus estructuras permitiéndonos de esta forma encontrar nuevas familias de grafos para las cuales algunos problemas de coloreo tengan resolución polinomial, aportando así nuevos resultados útiles en la práctica. De este estudio surgen también nuevas familias de desigualdades válidas que pueden incorporarse a algoritmos de planos de corte para contribuir así a mejorar su performance en la práctica. Con estos objetivos, en esta tesis estudiamos los poliedros asociados a cuatro formulaciones distintas para el problema clásico de coloreo: el modelo estándar, la formulación por representantes, el *orientation*

model y la formulación por conjuntos independientes.

Presentamos adaptaciones de algunas de estas formulaciones para distintas variantes de coloreo y en algunos casos mostramos que los problemas de optimización en los poliedros asociados son polinomialmente equivalentes al problema de optimización sobre el poliedro de coloreo clásico. Damos caracterizaciones completas de los poliedros de coloreo para grafos que surgen de ciertas operaciones. Para algunas de las formulaciones estudiadas, hallamos descripciones completas de los poliedros asociados a distintas familias de grafos, entre ellas los árboles, grafos block, split y co-interval, entre otras. Estudiamos también la relación entre los poliedros de coloreo $\mathcal{P}_{col}$ y el poliedro de conjuntos independientes $STAB$ y mostramos que en algunos casos, el primero es una cara del segundo (o hasta coincide con éste) para un grafo asociado al grafo original. Estos resultados nos permiten obtener nuevas familias de desigualdades válidas para $\mathcal{P}_{col}$ basadas en desigualdades válidas conocidas para $STAB$. Más aun, a raíz de estos resultados hallamos descripciones completas de $\mathcal{P}_{col}$ para algunas familias de grafos en las que se conoce una descripción de $STAB$ para el grafo asociado.

Presentamos también un estudio poliedral clásico para el *orientation model* en el cual describimos algunas familias de desigualdades válidas que definen facetas del poliedro asociado. Basados en la estructura de estas familias, presentamos el procedimiento de *path lifting*, que combina dos desigualdades válidas genéricas y un camino entre dos vértices particulares y genera una familia infinita de desigualdades válidas. Mostramos que este procedimiento puede generar facetas del poliedro de coloreo asociado y damos condiciones suficientes para que esto ocurra.

Polyhedral studies of vertex coloring problems

Abstract

Vertex coloring problems arise in a wide range of real-life situations. Some common examples are frequency assignment problems in telecomunication networks, classroom assignment problems at universities and even certain scheduling problems. In general, any problem consisting in the assignment of some *resources* to *jobs* with incompatibility conditions among these jobs to use the same resource can be seen as a vertex coloring problem on some graph. There exist many variants of the vertex coloring problem, usually motivated by real restrictions, such as *Precoloring extension*, *μ-coloring*, *(γ, μ)-coloring* and *List-coloring*, among others.

Integer linear programming (ILP) has prooved to be a powerful tool to solve combinatorial optimization problems. In the last 15 years it has been successfully applied to vertex coloring problems by resorting to different formulations for the classical coloring problem such as the standard model, the representatives formulation, the orientation model and the independent set formulation, among others.

Despite the fact that many vertex coloring problems are polynomially solvable on certain graph classes, most of these problems are not "under control" from a polyhedral point of view. This is, we don't know integer programming formulations with complete descriptions for the associated polytopes. In the context of polyhedral theory, the equivalence between optimization and separation suggests for these problems the existence of integer programming formulations with polynomially-solvable separation problems and, moreover, whose associated polytopes admit elegant characterizations, in terms of linear inequalities. The search for such characterizations is the main goal of this thesis.

The theoretical goal is to complete the polyhedral counterpart of those coloring problems which we know can be solved in polynomial time by means of combinatorial techniques. The study of these polytopes can lead us to a better understanding of their structures revealing some insight by which we can find new classes of graphs where vertex coloring problems are polynomial, thus contributing with new practical results. This study also yields new families of valid inequalities which may be used in cutting plane schemes, thus improving the performance on the resolution of vertex coloring problems. With these objectives, in this thesis we study four different known formulations for the classical graph coloring problem: the standard model, the representatives formulation, the orientation model and the independent set formulation.

We present adaptations of some of these formulations for several variants of vertex coloring and, in some cases, we show that the optimization problems associated with the corresponding polytopes are polynomially equivalent to the optimization problem associated to the polytope for the classical vertex coloring problem. We give complete characterizations of coloring polytopes for graphs that are the product of some graph operators. For some of the studied formulations, we found complete descriptions for the associated polytopes to several classes of graphs such as trees, block, split and co-interval graphs, among others. We further study the relation between coloring polytopes $\mathcal{P}_{col}$ and stable set polytopes $STAB$ and we show that, in some cases, the coloring polytope for a graph G corresponds to a face of (or even coincides with) $STAB(\tilde{G})$ for a particular graph $\tilde{G}$. These results allowed us to deduce new families of valid inequalities for $\mathcal{P}_{col}$ based on valid inequalities known for $STAB$. Furthermore, from these results we found complete descriptions for $\mathcal{P}_{col}$ for some classes of graphs for which $STAB$ is known for the associated graph.

We also present a classical polyhedral study of the orientation model, where we introduce new families of facet-inducing valid inequalities. Based on the structure of these families, we introduce the *path lifting* procedure, which combines two generic valid inequalities and a path between two particular vertices and generates an infinite family of valid inequalities for the associated polytope. We show that this procedure is able to generate facets of the polytope and we give sufficient conditions for this to occur.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a mi director **Javier Marenco**. Es para mí un inmenso placer aprender y trabajar a su lado. No sólo por el excelente *maestro* que representa para mí, sino además por la excelente persona que es. Da gusto aprender de él y con él.

Agradezco también a los jurados, **Dra. Isabel Méndez-Díaz**, **Dra. Gabriela Argiroffo** y **Dr. Abilio Lucena**, por tomarse el tiempo para leer esta tesis. Sé que la evaluación de una tesis de doctorado es una tarea para nada sencilla.

Agradezco a mi vieja **Clementina**, por el amor que me da cada día de mi vida (¡a veces demasiado!). A mi viejo **José Alberto (Cacho)**, por bancarme siempre, aunque no le quede muy en claro de qué trabajo. A mi hermano **Juan**, en quien puedo confiar siempre pase lo que pase.

Agradezco a mis compañeros del "seminario de los martes" en la UNGS, que más de una vez me han sufrido contándoles mis avances y mis bloqueos: **Javi MV**, **Marce**, **Ivo**, **Guala** y **Mónica**. Un agradecimiento especial a **Mónica** por las tantas charlas poliedrales que pudimos compartir. Más agradecimientos también al resto de mis compañeros de la UNGS: **Santi**, **Fran**, **Daniel**, **Adriana**, **Martín** y **Luciano**.

Un agradecimiento especial a **Annegret Wagler** y a su esposo **Michael** que nos recibieron en Francia y nos brindaron toda la ayuda que pudimos necesitar durante nuestra estadía en *Clermont-Ferrand*. La experiencia en Clermont fue fundamental para poder terminar esta tesis. Otro agradecimiento va también a **Sahar Bsaybes** (de LIMOS), quien aun sin conocernos fue con nosotros la persona más gentil en todo los aspectos. Sin su ayuda, nuestro paso por Clermont hubiese sido increíblemente más dificil.

Mi último agradecimiento va para la persona más importante de mi vida. La que me hace feliz todos los días. La que me hace reir con su risa y llorar con su llanto. La que me ama como yo la amo. La persona con la que amo viajar, por el mundo o con la mente, porque me entiende tal cual soy. Aquella que me bancó todos estos años de mi vida mientras terminaba esta tesis. La persona que quiero tener a mí lado como compañera, ahora y por el resto de mi vida, porque simplemente no puede haber nadie mejor para eso. Un millón de gracias **Euge**, por ser el amor de mi vida... :-)

Para Euge...

Índice general

1. Introducción **15**

1.1. Problemas de coloreo de vértices 15
1.2. Modelos de programación lineal entera 17
1.3. Algoritmos geométricos y optimización combinatoria 21
1.4. Contenido de esta tesis 23

2. El modelo estándar para problemas de coloreo **27**

2.1. El modelo y algunos resultados generales 28
2.2. Árboles y grafos block 33
2.3. $\mathcal{P}^{s}_{col}$ y el *stable set polytope* 39
2.3.1. Nuevas facetas de $\mathcal{P}^{s}_{col}$ 41
2.3.2. Ciclos y grafos cactus 43
2.3.3. Otras desigualdades conocidas para $STAB$ 44
2.3.4. Sobre la perfección de $\mathcal{S}^{C}_{G}$ 47

3. La formulación por representantes asimétrica **53**

3.1. La formulación por representantes 54
3.1.1. Una reformulación más compacta 55
3.2. De conjuntos independientes y matchings 59
3.3. Caracterizaciones poliedrales 62
3.3.1. Grafos G con $\alpha(G) \leq 2$ 63
3.3.2. Complementos de grafos sin paw 65
3.3.3. Complementos de grafos sin *kite* 68

4. El *orientation model* I: estudio inicial **73**
4.1. La formulación del *orientation model* 74
4.2. Objetivo inicial 75
4.3. Resultados existentes sobre $\mathcal{P}^{\mathrm{O}}_{col}$ 77
4.4. Nuevas desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{O}}_{col}$ 79
4.4.1. Desigualdades válidas basadas en caminos 84
4.4.1.1. *Path inequalities* 84
4.4.1.2. *Weighted path inequalities* 88
4.4.1.3. *Spiral inequalities* 93
4.4.1.4. *Double spiral inequalities* 99
4.4.1.5. *Triple spiral inequalities* 101

5. El *orientation model* II: procedimientos generadores de facetas **105**
5.1. Procedimientos de *path lifting* 106
5.1.1. Primer procedimiento 107
5.1.2. Segundo procedimiento 110
5.1.3. Generalización: el procedimiento de *path θ-lifting* 111
5.1.4. Facetas provenientes de *path liftings* 113
5.2. *Alternating spiral path inequalities* 116

6. Breves notas sobre la formulación por ctos. independientes **121**
6.1. La formulación 122
6.2. Caracterizaciones simples de $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$ 124
6.2.1. Grafos bipartitos completos 124
6.2.2. Grafos *split* 125
6.2.3. Grafos co-intervalos 126

7. Comentarios finales y problemas abiertos **129**
7.1. Resultados generales 129
7.2. Descripciones completas de $\mathcal{P}_{col}$ 131
7.3. Nuevas facetas y procedimientos 133
7.4. Otras formulaciones 135

Bibliografía **137**

A. Conceptos básicos de teoría de grafos y optimización combinatoria **143**
A.1. Teoría de grafos 143
A.2. Teoría poliedral 144
A.3. Complejidad computacional 146

Índice de figuras

1.1. Jerarquía de problemas de coloreo. 17

2.1. Un grafo block. 34
2.2. Un ejemplo de grafo fraccionario $G_f(\hat{x})$. 35
2.3. Un grafo G y el grafo auxiliar $\mathcal{S}_G^C$ para $|C| = 3$. 40
2.4. Un grafo cactus. 43
2.5. Antiagujeros utilizados en la demostración de la Proposición 2.3.3. 46
2.6. Un ciclo de caminos impar $\mathcal{C}$ y el grafo de cuerdas $\mathcal{H}(\mathcal{C})$. . . . 48
2.7. Agujeros usados en la demostración del Teorema 2.3.3. 50

3.1. Un grafo G, una orientación $\prec$ de $\overline{G}$ y el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ resultante. . 60
3.2. Los grafos paw, diamante y K_4. 66
3.3. Grafos $\overline{G}$, $\mathcal{R}_G^{\prec}$ y $H_G^{\prec}$ para un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free G. 68
3.4. Un kite y un claw. 69
3.5. La vecindad de la anti-arista uv en $\mathcal{R}_G^{\prec}$. 70
3.6. El grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ de la Figura 3.1 y su representación como grafo FCI. 72

4.1. Un conjunto de intervalos y el grafo de intervalos asociado. . . 76
4.2. Estructura para las *reinforced orientation inequalities* 79
4.3. Tipos de soluciones en la cara de $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$ definida por (4.9). . . . 81
4.4. Solución para la Afirmación 5. 87
4.5. Solución utilizada en la Afirmación 6. 91
4.6. *Spiral inequalities* (sin intersección de caminos). 94
4.7. Soluciones utilizadas en la Afirmación 2 (a) y la Afirmación 5 (b). 97
4.8. Soluciones utilizadas en la Afirmación 6 98
4.9. *Double spiral inequalities* (sin intersección de caminos). 100

4.10. *Triple spiral inequalities* (sin intersección de caminos). 102

5.1. Esquema de la estructura para el procedimiento de *path lifting*. 107
5.2. Ejemplo de estructura utilizada en las desigualdades ASPI. . . 118

CAPÍTULO 1

Introducción

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto $C \subset \mathbb{N}$, un *coloreo* de G es una asignación $c : V \to C$, de "colores" a vértices de G, de forma tal que $c(v) \neq c(w)$ para cada arista $vw \in E$. Los problemas de coloreo de vértices surgen en una amplia gama de situaciones de la vida real. Un ejemplo clásico son los problemas de asignación de frecuencias en redes de telecomunicaciones donde se requiere asignar una frecuencia a cada antena de una red de telecomunicaciones, evitando que antenas cercanas compartan la frecuencia asignada. Modelando la red con un grafo donde dos vértices (i.e., antenas) son adyacentes si las correspondientes antenas pueden interferir entre sí, es posible obtener una asignación factible por medio de un coloreo del grafo [9]. Otra situación clásica modelable como un problema de coloreo se da en la asignación de aulas a las materias de una universidad [10, 23]. En este caso, es necesario asignar un aula (o color) a cada materia en forma tal que dos materias cuyos horarios se superponen no se dicten en la misma aula. En general, cualquier problema de asignación de *recursos* a *tareas* que contemple incompatibilidades entre pares de tareas para usar el mismo recurso, puede ser visto como un problema de coloreo de los vértices de un grafo.

1.1. Problemas de coloreo de vértices

El problema clásico de *coloreo de vértices* consiste en hallar un coloreo de G minimizando la cantidad de colores utilizados. Este valor mínimo es conocido como el *número cromático* de G, y se lo denota como $\chi(G)$. Existen muchas variantes del problema de coloreo de grafos motivadas generalmente por restricciones reales; los siguientes son algunos ejemplos:

Precoloring extension [4]: Dado un grafo $G = (V, E)$ y una asignación parcial $\rho : V' \to \mathbb{N}$, para algún $V' \subseteq V$, se pide hallar un coloreo $c : V \to \mathbb{N}$ con la menor cantidad de colores tal que $c(v) = \rho(v)$ para cada vértice $v \in V'$. En otras palabras, un subconjunto de vértices de G está coloreado de antemano y el problema consiste en extender este coloreo al resto del grafo utilizando la cantidad mínima de colores.

μ-coloring [5]: Este problema toma adicionalmente como entrada una función $\mu : V \to \mathbb{N}$ que define una cota superior $\mu(v)$ para el color asignado a cada vértice v, es decir, el coloreo resultante $c : V \to \mathbb{N}$ debe cumplir que $c(v) \leq \mu(v)$, para todo $v \in V$.

(γ, μ)-coloring [6]: Además de la cota superior dada por la función $\mu : V \to \mathbb{N}$, esta generalización del problema de *μ-coloring* considera otra función $\gamma : V \to \mathbb{N}$ que establece una cota inferior para el color asignado a los vértices de G. Así, se busca un coloreo $c : V \to \mathbb{N}$ tal que $\gamma(v) \leq c(v) \leq \mu(v)$ para todo $v \in V$. Nótese que este problema también generaliza el problema de *precoloring extension*.

List-coloring [29, 59, 60]: Este problema considera un conjunto $L(v)$ de colores válidos para cada $v \in V$ y pide hallar un coloreo c para el cual $c(v) \in L(v)$ para todo $v \in V$. Es sencillo ver que esta versión de coloreo es una generalización de todas las anteriores.

Max-coloring [26, 55]: Dado un grafo $G = (V, E)$ y una función de peso en los vértices $\omega : V \to \mathbb{R}_+$, se pide hallar un coloreo de G minimizando la suma de los pesos de las clases de color, donde el peso de una clase de color S está dado por el máximo peso entre los vértices de S. Es decir, se busca minimizar la suma $\sum_{S \in \mathbb{S}} \max\{\omega(v) : v \in S\}$, donde $\mathbb{S}$ es la partición en clases de color definida por el coloreo.

Coloreo de suma mínima [42, 43]: Dado un grafo $G = (V, E)$ este problema consiste en hallar un coloreo $c : V \to \mathbb{N}$ de G minimizando la suma de los colores asignados. Es decir, se pretende que la suma $\sum_{v \in v} c(v)$ sea mínima.

Existen en la literatura muchas otras variantes del problema clásico de coloreo de vértices, algunas consideran restricciones locales (ver por ejemplo [59]) y otras variantes tienen en cuenta aspectos generales del coloreo requerido (ver por ejemplo [39]). Prácticamente todas las variantes de coloreo resultan ser generalizaciones del problema clásico y a su vez es posible encontrar otras relaciones de generalización entre ellas. Como ejemplo, la Figura 1.1 muestra las relaciones de generalización entre algunos de los problemas arriba descriptos. Una flecha de un problema a otro indica que el primero es una generalización

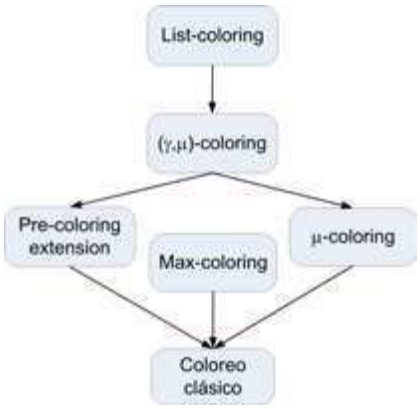

Figura 1.1: Jerarquía de problemas de coloreo.

del segundo.

Si bien el problema clásico de coloreo de vértices pertenece a la clase de problemas NP-difícil [31], existen muchas clases de grafos para los cuales este problema puede ser resuelto en tiempo polinomial. Una de las clases más importantes en las que esto sucede son los grafos perfectos [33]. Decimos que un grafo G es *perfecto* si $\chi(H) = \omega(H)$ para cada subgrafo inducido H de G, donde $\omega(H)$ representa el tamaño de un subgrafo completo máximo de H. Aunque el problema clásico de coloreo pueda resolverse en tiempo polinomial en esta familia, puede no suceder lo mismo con las generalizaciones de este problema mencionadas arriba. Resulta interesante entonces estudiar las complejidades computacionales de estas variantes en subclases de grafos perfectos. En [6, 7], se estudia para varias subclases de grafos perfectos, la "frontera" de complejidad entre el problema clásico de coloreo y el problema de *list-coloring*. Mostramos en la Tabla 1.1 un resumen de las complejidades conocidas para las clases de grafos estudiadas en [6, 7].

1.2. Modelos de programación lineal entera

La *programación lineal entera* (PLE) ha demostrado ser una herramienta muy adecuada para resolver problemas de optimización combinatoria [50], y en los últimos 15 años la PLE fue aplicada con éxito a problemas de coloreo de vértices recurriendo a distintas formulaciones para el problema clásico de coloreo. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de colores C, mostramos a continuación un resumen de algunas de las formulaciones de PLE existentes para este problema.

Clase	**Coloreo**	**Precol**	μ**-col**	(γ, μ)**-col**	**List-col**
Distance-hereditary	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
De intervalos	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
De intervalos unitarios	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
Grafos de líneas de $K_{n,n}$	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
Grafos de líneas de K_n	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
Bipartitos	P	NP-C	NP-C	NP-C	NP-C
Split	P	P	NP-C	NP-C	NP-C
Complementos de bipartitos	P	P	?	?	NP-C
Cografos	P	P	P	?	NP-C
Bipartitos completos	P	P	P	P	NP-C
Split completos	P	P	P	P	NP-C
Arboles	P	P	P	P	P
Block	P	P	P	P	P
Cactus	P	P	P	P	P

"NP-C": problema NP-completo "P": problema polinomial "?": problema abierto

Tabla 1.1: Complejidades conocidas en algunas clases de grafos [6, 7].

***Modelo estándar* [20, 47, 48].** Este modelo utiliza una variable binaria x_{vc} para cada vértice $v \in V$ y cada color $c \in C$ para indicar si el vértice v recibe el color c o no. Con estas definiciones, un coloreo válido de G es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C} x_{vc} &= 1 && \forall v \in V, \\ x_{vc} + x_{wc} &\leq 1 && \forall vw \in E, \forall c \in C, \\ x_{vc} &\in \{0, 1\} && \forall v \in V, \forall c \in C. \end{aligned}$$

Esta formulación se puede extender con variables w_c para cada color $c \in C$ para indicar si el color es utilizado o no. Así, el coloreo óptimo se encuentra minimizando la suma de estas últimas variables.

***Modelo de representantes* [13].** En este modelo, un coloreo se determina por las clases de color que induce, y cada clase es representada por uno de sus miembros. Para cada par ordenado de vértices $(u, v) \in V \times V$ con $uv \notin E$, el modelo utiliza una variable binaria x_{uv} para indicar si el vértice u es el "representante" de la clase de color asignada al vértice v o no. El modelo utiliza además una variable binaria x_{uu} para cada vértice $u \in V$, que indica si u es el representante de su propia clase o no. Con estas definiciones, un coloreo

válido de G es un vector que cumple las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_{uu} + \sum_{v \in \bar{N}(u)} x_{vu} &= 1 && \forall u \in V \\ \sum_{v \in K} x_{uv} &\leq x_{uu} && \forall u \in V,\ \forall \text{ clique } K \subseteq \bar{N}(u) \\ x_{uu}, x_{uv} &\in \{0,1\} && \forall u \in V,\ \forall v \in \bar{N}(u) \end{aligned}$$

donde una *clique* es un conjunto de vértices adyacentes dos a dos y $\bar{N}(u)$ son los vértices de G no adyacentes a u. Dado un coloreo de G, el representante de una clase de color puede ser cualquiera de los vértices de la clase. Por este motivo, los poliedros asociados a esta formulación presentan mucha simetría ya que un coloreo está representado por muchas soluciones factibles. En [12] se presenta una variante de la formulación por representantes en la cual se anula toda simetría, logrando una relación uno a uno entre los coloreos de G y las soluciones factibles del modelo. Esta nueva formulación se conoce con el nombre de *asymetric representatives formulation* y es el objeto de estudio del Capítulo 3 de este trabajo, por lo cual dejamos los detalles de la formulación asimétrica para más adelante.

***Orientation model* [9, 32, 44].** A diferencia de los modelos anteriores que utilizan sólo variables binarias, este modelo introduce una variable entera x_v para cada $v \in V$ que representa el color asignado al vértice v. Para representar correctamente las restricciones de coloreo, el modelo utiliza una variable binaria de orientación y_{vw} para cada arista $vw \in E$ de manera tal que $y_{vw} = 1$ si y sólo si $x_v < x_w$. Con estas definiciones, un coloreo válido de G usando $|C|$ colores es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} x_v - x_w &\geq 1 - |C| y_{vw} && \forall vw \in E, v < w \\ x_w - x_v &\geq 1 - |C|(1 - y_{vw}) && \forall vw \in E, v < w \\ x_v &\in \{0, \ldots, |C| - 1\} && \forall v \in V \\ y_{vw} &\in \{0,1\} && \forall vw \in E \end{aligned}$$

Esta formulación puede extenderse con una variable z para indicar el máximo color asignado a algún vértice del grafo. Así, el coloreo óptimo se encuentra minimizando esta última variable.

***Distance model* [24].** Este modelo es una reformulación del *orientation model* y utiliza una variable entera x_{vw} para cada par de vértices $v, w \in V$ la cual indica la distancia entre los colores asignados a v y a w, o sea, $x_{vw} = c(v) - c(w)$, donde $c : V \to \mathbb{N}$ es el coloreo representado. Al igual que el *orientation model*,

este modelo utiliza variables binarias de orientación y_{vw}, para cada arista $vw \in E$. Con estas definiciones, un coloreo válido de G usando $|C|$ colores es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
x_{vw} &\geq 1 - |C| y_{vw} && \forall vw \in E, v < w \\
-x_{vw} &\geq 1 - |C|(1 - y_{vw}) && \forall vw \in E, v < w \\
x_{vw} &= x_{vk} + x_{kw} && \forall v, k, w \in V, v < k < w \\
-(|C| - 1) \leq x_{vw} &\leq |C| - 1 && \forall v, w \in V, v < w \\
x_{vw} &\in \mathbb{Z} && \forall v, w \in V, v < w \\
y_{vw} &\in \{0, 1\} && \forall vw \in E, v < w
\end{aligned}$$

Al igual que el *orientation model*, este modelo puede extenderse con una variable z que indique la máxima diferencia entre los colores asignados a dos vértices del grafo. Así, el coloreo óptimo se encuentra minimizando esta última variable.

***Formulación por conjuntos independientes* [46].** Un conjunto de vértices S de un grafo se dice *independiente* si ningún par de vértices del conjunto es adyacente. Hallar un coloreo de vértices en un grafo es equivalente a particionar su conjunto de vértices en conjuntos independientes. Con este objetivo, este modelo utiliza una variable binaria x_S para cada conjunto independiente $S \subseteq V$, la cual indica si el conjunto S es parte o no de la solución. Con estas definiciones, un coloreo válido de G usando $|C|$ colores es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{S \in \mathcal{I} \\ v \in S}} x_S &= 1 && \forall v \in V \\
\sum_{S \in \mathcal{I}} x_S &\leq |C| \\
x_S &\in \{0, 1\} && \forall S \in \mathcal{I}
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{I}$ es el conjunto de todos los conjuntos independientes de G. En caso de querer hallar un coloreo óptimo, se puede eliminar la segunda restricción y minimizar como función objetivo el lado izquierdo de la misma. Dado que la cantidad de conjuntos independientes de un grafo es en general muy grande, una variante de esta formulación consiste en utilizar solamente conjuntos independientes maximales y relajar la primer restricción del modelo cambiando la igualdad por una desigualdad de mayor o igual, para obtener así una cantidad menor de variables en el modelo. De todas maneras, la cantidad de variables es potencialmente exponencial en función del tamaño del grafo, con lo cual una resolución por medio de generación de columnas es el enfoque natural para resolver este modelo. Esta formulación es el objeto de estudio del Capítulo 6 de este trabajo, por lo cual dejamos los detalles para entonces.

***Formulación supernodal* [10].** Un *multicoloreo* de un grafo $G = (V, E)$ es una función $c : V \to 2^{|C|}$ que cumple que $|c(v)| = d_v$, para ciertos valores de entrada d_v, para todo $v \in V$, y es tal que $c(v) \cap c(w) = \emptyset$, para toda arista $vw \in E$. En esta formulación, se construye un grafo $G' = (Q, E')$ contrayendo ciertos vértices particulares de G de forma tal que cada coloreo de G corresponde a algún multicoloreo de G'. Así, hallando un multicoloreo de este último, es posible revertir el mismo hacia un coloreo de G que utilice los mismos colores. El modelo utiliza una variable binaria x_{qc} para cada "super nodo" $q \in Q$ y cada color $c \in C$ la cual determina si c es uno de los colores asignados a q o no. Con estas definiciones, un multicoloreo válido de G' es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{c \in C} x_{qc} &= d_q && \forall q \in Q, \\ x_{q_1 c} + x_{q_2 c} &\leq 1 && \forall q_1 q_2 \in E', \forall c \in C, \\ x_{qc} &\in \{0, 1\} && \forall q \in Q, \forall c \in C. \end{aligned}$$

El valor utilizado para d_q es la cantidad de vértices de G que representa el super nodo q. Al igual que el modelo estándar, esta formulación se puede extender con variables w_c para cada color $c \in C$ para indicar si el color es utilizado o no por alguno de los super nodos $q \in Q$. A su vez, el coloreo óptimo se encuentra minimizando la suma de estas últimas variables.

1.3. Algoritmos geométricos y optimización combinatoria

El algoritmo de resolución más conocido y empleado en la práctica para problemas de programación lineal (PL) es hoy en día el método *simplex*, ideado por George Dantzig a mediados del Siglo XX [61]. Si bien este algoritmo tiene un tiempo de resolución de peor caso exponencial en función del tamaño de la entrada, es sabido que la PL es un problema bien resuelto. Es decir, pertenece a la clase de problemas P, para los cuales se conocen algoritmos polinomiales para su resolución. Este resultado se debió inicialmente al *método del elipsoide* presentado por el matemático Leonid Khachiyan en 1979 (ver [34] para más detalles). Más adelante, se conocerían otros algoritmos polinomiales con órdenes de complejidad más competitivos que el del método del elipsoide, sin embargo, este método jugaría un papel muy importante en el campo de la optimización combinatoria.

En el contexto de la optimización sobre conjuntos convexos, el *problema de separación* toma un poliedro P y un vector $\hat{y}$, y consiste en determinar si $\hat{y}$ pertenece a P o no, y en caso negativo, hallar un hiperplano que separe a

$\hat{y}$ de P. Por otro lado, el *problema de optimización* toma un poliedro P y un vector c, y consiste en hallar un punto $\hat{x} \in P$ que maximice la función objetivo $c^T\hat{x}$, o bien indicar que $P = \emptyset$. Basados en el método del elipsoide, Grötschel, Lovász y Schrijver [34] demostraron en 1981 que los problemas de separación y optimización son polinomialmente equivalentes, es decir, si uno de ellos puede resolverse en tiempo polinomial, lo mismo ocurrirá con el otro. Este resultado constituyó uno de los avances más importantes de los últimos tiempos en el campo de la optimización combinatoria.

Si bien la PLE es un problema NP-dficil, en muchos casos se conoce una descripción completa del poliedro entero asociado, de modo tal que esta descripción puede usarse para resolver el problema de separación asociado en tiempo polinomial [57]. Esto implica que el problema en cuestión puede resolverse en tiempo polinomial. De este hecho y del resultado de Grötschel, Lovász y Schrijver arriba mencionado, nace una conjetura generalizada que establece que si un problema de optimización combinatoria puede ser resuelto en tiempo polinomial, entonces debe existir alguna formulación de PLE de dicho problema cuyo poliedro entero asociado admita una caracterización "elegante", en términos de desigualdades lineales.

Si bien muchos problemas de coloreo de grafos pueden ser resueltos en tiempo polinomial en ciertas familias de grafos, la mayoría de estos problemas no está "bajo control" desde el punto de vista poliedral. Es decir, no se conocen formulaciones de PLE con descripciones completas de los poliedros asociados. Los resultados arriba mencionados sugieren que, para estos problemas debería existir alguna formulación cuyo problema de separación asociado pueda ser resuelto en tiempo polinomial y, más aun, tal que el poliedro asociado admita una caracterización elegante, en términos de desigualdades lineales. La búsqueda de tales caracterizaciones es el objetivo principal del presente trabajo de tesis.

Desde un punto de vista teórico, el objetivo es completar la contraparte poliedral de aquellos problemas de coloreo de grafos que se encuentren ya bien resueltos por medio de técnicas combinatorias. Por otro lado, el estudio de estos poliedros puede llevarnos a un mejor entendimiento de sus estructuras permitiéndonos de esta forma encontrar nuevas familias de grafos para las cuales algunos problemas de coloreo tengan resolución polinomial, aportando así nuevos resultados útiles en la práctica. También en el aspecto práctico de los resultados de esta tesis, se presentan nuevas familias de desigualdades válidas para las formulaciones analizadas, que se pueden incorporar a algoritmos de planos de corte para contribuir así a mejorar su performance en la práctica.

1.4. Contenido de esta tesis

En el Capítulo 2 analizamos los poliedros que surgen del modelo estándar [20, 47, 48]. En la Sección 2.1 se describe el modelo en detalle en su versión para el problema de coloreo clásico y se presenta una adaptación de este modelo para el problema de *list-coloring* (la cual a su vez resulta en una formulación para los problemas de *precoloring extension*, μ-*coloring* y (γ, μ)-*coloring*, siendo éstos casos particulares de *list-coloring*). Se estudia la relación entre los poliedros asociados a estas formulaciones y se muestra que los problemas de optimización en todos estos poliedros son polinomialmente equivalentes. Esto implica que para aquellas familias sobre las que el problema de *list-coloring* es NP-difícil, los poliedros asociados a esta formulación, aun para el problema clásico de coloreo, no tendrán separación polinomial. Si bien esto limita mucho el alcance de nuestro análisis en esta formulación, quedan aun algunas clases simples de grafos para las cuales *list-coloring* es polinomial; árboles, grafos block, ciclos y grafos cactus entre ellas. Finalizando la Sección 2.1 se presenta un resultado general con el cual se obtiene la caracterización completa del poliedro de coloreo para un grafo, cuando éste surge de la operación de *identificación en un vértice* de otros dos grafos.

En la Sección 2.2 se presenta una caracterización completa del poliedro de coloreo que se obtiene cuando el grafo es un árbol. A su vez, utilizando una familia de desigualdades conocida como *desigualdades clique* [20], se da también una caracterización completa del poliedro para grafos block. En la Sección 2.3 mostramos que el poliedro de coloreo clásico asociado al modelo estándar para un grafo G y un conjunto de colores C corresponde a una cara del poliedro de los conjuntos independientes para un grafo particular $\mathcal{S}_G^C$. Basados en este hecho, presentamos una nueva familia de desigualdades válidas para el poliedro de coloreo que generaliza varias de las desigualdades conocidas en la literatura. Conjeturamos que esta nueva familia de desigualdades alcanza para describir el poliedro de coloreo para ciclos y demostramos que si esta conjetura es cierta, entonces la misma familia junto con las desigualdades clique son suficientes para describir este poliedro cuando el grafo es un cactus. Finalmente, estudiamos la perfección de $\mathcal{S}_G^C$. En particular, presentamos una caracterización de los grafos G tales que $\mathcal{S}_G^C$ es un grafo perfecto.

En el Capítulo 3 analizamos los poliedros que surgen de la formulación por representantes [12, 13]. En la Sección 3.1 detallamos el modelo presentado en [13] y la reformulación asimétrica del mismo presentada unos años más tarde en [12]. En la Sección 3.1.1 proponemos un reformulación de la versión asimétrica del modelo eliminando un conjunto de igualdades y un conjunto de variables, modificando a su vez levemente las restantes desigualdades del modelo. Esta reformulación representa una formulación más compacta de un

poliedro equivalente que permite deducir importantes resultados analizados más adelante. En esta misma sección, presentamos versiones de esta formulación para los problemas de *max-coloring* y *precoloring extension*, y estudiamos la relación entre los poliedros asociados mostrando que los problemas de optimización en estos poliedros son (en cierta forma) polinomialmente equivalentes. Esto implica que para aquellas familias sobre las que el problema de *max-coloring* o el de *precoloring extension* es NP-difícil, los poliedros asociados a esta formulación, aun para el problema clásico de coloreo, no tendrán separación polinomial.

En la Sección 3.2 mostramos que el poliedro de coloreo asociado a la formulación compacta para un grafo G (presentada en la Sección 3.1.1) coincide con el poliedro de los conjuntos independientes de un grafo particular $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Se muestra también la relación entre $\mathcal{R}_G^{\prec}$ y el grafo de líneas de G, al cual notamos $L(G)$. La sección cierra con resultados sobre las relaciones entre los poliedros de matching de $L(G)$, el poliedro de conjuntos independientes de $\mathcal{R}_G^{\prec}$ y el poliedro de coloreo de G, sintetizadas en la Proposición 3.2.1. La Sección 3.3 presenta caracterizaciones completas para los poliedros de coloreo asociados a tres familias de grafos. La primera de ellas es la familia de los grafos G con $\alpha(G) \leq 2$, donde $\alpha(G)$ es el tamaño de un conjunto independiente máximo de G, la segunda y la tercera familia son las de aquellos grafos cuyo complemento no contiene un paw o un kite, respectivamente (ver Sección 3.3.2 y Sección 3.3.3, respectivamente). En estas secciones se refuerzan además resultados existentes en [12], con respecto a la facetitud de una familia de desigualdades válidas y resultados existentes en [8] con respecto a una caracterización estructural implicada para el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$.

En el Capítulo 4 analizamos los poliedros que surgen del *orientation model* [9, 32, 44]. La Sección 4.1 presenta en detalle la formulación del modelo y muestra que el problema de coloreo de suma mínima puede resolverse sobre el mismo poliedro de coloreo clásico variando la función objetivo. Esto implica que para aquellas familias sobre las que este problema es NP-difícil, los poliedros asociados a esta formulación, aun para el problema clásico de coloreo, no tendrán separación polinomial. En la Sección 4.3 damos una breve síntesis sobre los resultados existentes para esta formulación, algunos de ellos referenciados luego. La Sección 4.4 comienza con la presentación de las *reinforced orientation inequalities*, siendo éstas desigualdades válidas nuevas que definen facetas del poliedro asociado a esta formulación, que se basan en estructuras de clique dentro de las vecindades de dos vértices adyacentes. En la Subsección 4.4.1 se presenta una serie de familias de desigualdades válidas nuevas que definen facetas del poliedro asociado a esta formulación, todas ellas basadas en caminos del grafo. En primera instancia se presentan las *path inequalities* y las *weigthed path inequalities* (WPI), cuya estructura es un camino cualquiera del

grafo. Luego, en la Subsección 4.4.1.3, se presentan las *spiral inequalities*, una generalización de las WPI. Estas desigualdades abren una exploración que da lugar a las *double spiral* y *triple spiral inequalities*, presentadas en las subsecciones sucesivas. El capítulo cierra con una breve reflexión acerca de estas últimas desigualdades, dando lugar al estudio presentado en el siguiente capítulo.

El Capítulo 5 continúa con el estudio del *orientation model*, y el resultado principal es la introducción de procedimientos generadores de facetas para los poliedros asociados a esta formulación. La Sección 5.1 presenta los procedimientos que denominamos *path lifting*. Basados en dos desigualdades válidas genéricas y un camino entre dos vértices particulares, estos procedimientos generan una nueva desigualdad válida combinando estos elementos. La Sección 5.1.1 y la Sección 5.1.2 presentan dos versiones de procedimientos de path lifting. Se muestra además que algunas de las desigualdades presentadas en el Capítulo 4 pueden ser generadas por medio de estos procedimientos. En particular, las *double* y *triple spiral inequalities* y las *reinforced orientation inequalities*. La Sección 5.1.3 introduce una generalización de los dos primeros procedimientos presentados, que genera una familia infinita de desigualdades válidas para el poliedro asociado. En la Sección 5.1.4 se muestra que los procedimientos de path lifting pueden generar facetas del poliedro de coloreo asociado y se dan condiciones suficientes para que esto ocurra. Finalmente, presentamos en la Sección 5.2 una nueva familia de desigualdades válidas para el poliedro asociado, que surge de una aplicación iterativa de los procedimientos mencionados.

El Capítulo 6 presenta un breve estudio sobre algunos poliedros de coloreo que surgen de la formulación por conjuntos independientes. En la Sección 6.1 presentamos en detalle la formulación y discutimos sobre su cantidad de variables, presentando también la versión de este modelo que utiliza solamente conjuntos independientes maximales. Luego, en la Sección 6.2 damos descripciones completas de los poliedros de coloreo asociados a tres familias conocidas de grafos: los grafos bipartitos completos (Subsección 6.2.1), los grafos *split* (Subsección 6.2.2) y los complementos de grafos de intervalos (Subsección 6.2.3).

Finalmente, el Capítulo 7 cierra esta tesis presentando una síntesis de sus contenidos, conclusiones y comentarios finales. Se plantea además una serie de problemas abiertos que surgen de los resultados desarrollados en esta tesis.

CAPÍTULO 2

El modelo estándar para problemas de coloreo

El modelo estándar es probablemente la formulación más intuitiva para problemas de coloreo de vértices. Sin embargo, los primeros estudios poliedrales al respecto no aparecieron sino hasta 2002 y se deben a Coll, Marenco, Méndez-Díaz y Zabala en [20]. Dicho trabajo presenta una serie de familias de desigualdades válidas para el poliedro asociado y se identifica cuáles de ellas definen facetas. Unos años más tarde, Méndez-Díaz y Zabala obtuvieron los resultados más importantes respecto de esta formulación, desarrollando algoritmos de planos de corte y de branch & cut en [47, 48]. Éstos representaron los primeros algoritmos poliedrales realmente competitivos en la práctica para el problema de coloreo de vértices.

En este capítulo estudiamos el poliedro asociado al *modelo estándar* para problemas de coloreo de grafos. Luego de describir adecuadamente este modelo, presentamos una adaptación para el problema de *list-coloring* y estudiamos la relación entre los poliedros asociados a estas formulaciones, mostrando que los problemas de optimización en todos estos poliedros son polinomialmente equivalentes. Presentamos una caracterización completa del poliedro de coloreo para un grafo, cuando éste surge de la operación de *identificación en un vértice* de otros dos grafos y caracterizaciones completas para los casos en que el grafo es un árbol o un grafo block. Mostramos que el poliedro de coloreo clásico asociado al modelo estándar para un grafo G y un conjunto de colores C corresponde a una cara del poliedro de los conjuntos independientes para un grafo particular $\mathcal{S}_G^C$ y, basados en este hecho, presentamos una nueva familia de desigualdades válidas para el poliedro de coloreo que generaliza varias

de las desigualdades conocidas en la literatura. Conjeturamos que esta nueva familia de desigualdades describe completamente el poliedro para ciclos y cactus. Finalmente, estudiamos la perfección de $\mathcal{S}_G^C$ y caracterizamos los grafos G tales que $\mathcal{S}_G^C$ es un grafo perfecto.

2.1. El modelo y algunos resultados generales

Sea $G = (V, E)$ el grafo de entrada y C el conjunto de colores disponibles. La formulación estándar para el problema clásico de coloreo utiliza una variable binaria x_{vc} para cada vértice $v \in V$ y cada color $c \in C$ para indicar si el vértice v recibe o no el color c. De esta forma, un coloreo válido de G usando colores de C es un vector que satisface las siguientes restricciones:

$$\sum_{c \in C} x_{vc} = 1 \qquad \forall v \in V, \tag{2.1}$$

$$x_{vc} + x_{wc} \leq 1 \qquad \forall vw \in E, \forall c \in C, \tag{2.2}$$

$$x_{vc} \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V, \forall c \in C. \tag{2.3}$$

Las restricciones (2.1) aseguran que cada vértice reciba exactamente un color de C y las restricciones (2.2) impiden que dos vértices adyacentes reciban el mismo color. De esta manera, la formulación dada por (2.1)-(2.3) da una caracterización de los coloreos válidos de G. Para encontrar un coloreo que utilice la menor cantidad de colores (y hallar así $\chi(G)$), esta formulación puede extenderse usando una variable w_c para cada color $c \in C$ para indicar si el color c es asignado a alguno de los vértices de G o no. La formulación extendida reemplaza las restricciones (2.2) por las siguientes:

$$x_{vc} + x_{wc} \leq w_c \qquad \forall vw \in E, \forall c \in C$$

Así, puede hallarse un coloreo óptimo minimizando la suma de las variables w_c sobre todos los colores $c \in C$. Ésta es en realidad la formulación utilizada en [20, 47, 48]. En estos trabajos se resalta el hecho de que en los poliedros asociados a esta formulación existen muchas soluciones para un mismo coloreo. Es decir, dada una partición del grafo en k diferentes clases de color, existen $\binom{|C|}{k}$ soluciones que representan dicha partición. Esta característica se denomina *simetría* y es en general un problema que conviene evitar. Los algoritmos desarrollados en [47, 48] utilizan desigualdades (no válidas en el sentido clásico) para eliminar estas simetrías obteniendo un poliedro en el cual cada partición en clases de color se asocia a una única solución del mismo. En esta tesis nos concentraremos en la versión no extendida de este modelo, es decir, no consideraremos las variables w_c ni las desigualdades para eliminar la simetría del poliedro asociado.

Esta formulación puede adaptarse para modelar el problema de *list-coloring* (y por lo tanto también los problemas de *precoloring extension*, *μ-coloring* y (γ, μ)-*coloring*). Para ello, agregamos las siguientes restricciones para cada vértice $v \in V$

$$x_{vc} = 0 \qquad \forall c \in C \setminus L(v) \tag{2.4}$$

donde $L(v)$ es el conjunto de colores permitidos para el vértice v. Estas restricciones impiden que se asigne a un vértice v un color que no pertenece a su lista de colores admisibles $L(v)$.

En este capítulo, llamaremos $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C)$ (resp. $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(G, C, L)$) a la cápsula convexa de los puntos $x \in \mathbb{R}^{|V||C|}$ que satisfacen las restricciones (2.1)-(2.3) (resp. (2.1)-(2.4)). Además, si $\mathcal{G}$ es una familia de grafos, entonces $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G}, C)$ y $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(\mathcal{G}, C, L)$ denotan las correspondientes familias de polítopos. Es posible que omitamos el conjunto C en estas definiciones cuando el mismo se deduzca del contexto o bien sea irrelevante al enunciado. Llamamos $\mathcal{P}^{\mathrm{s}}_{col}$ a la familia de poliedros $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ con G un grafo cualquiera.

Recordemos que dada una familia de polítopos $\mathcal{P}$, el *problema de separación* asociado toma un polítopo $P \in \mathcal{P}$ y un vector $\hat{y}$ y consiste en determinar si $\hat{y}$ pertenece a P o no, y en caso negativo, hallar un hiperplano separando a $\hat{y}$ de P. Al mismo tiempo, el *problema de optimización* toma un polítopo $P \in \mathcal{P}$ y un vector c y consiste en hallar un vector $\hat{x} \in P$ que maximice la función objetivo $c^t\hat{x}$, salvo que $P = \emptyset$.

Teorema 2.1.1 *Dada una familia de grafos $\mathcal{G}$ y un conjunto de colores C, el problema de separación sobre $P^{\mathrm{s}}_{col}(\mathcal{G}, C)$ puede resolverse en tiempo polinomial si y sólo si el problema de separación sobre $P^{\mathrm{s}}_{list}(\mathcal{G}, C, L)$ puede resolverse en tiempo polinomial para cualquier $L : V \to 2^C$.*

Demostración. Sea $G = (V, E) \in \mathcal{G}$ y sea $Q = \{x \in \mathbb{R}^{|V||C|} : x_{vc} = 0$ para todo $v \in V$ y todo $c \in C \setminus L(v)\}$. Veremos que

$$P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(G, C, L) = P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C) \cap Q. \tag{2.5}$$

Sea $\hat{x} \in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(G, C, L)$. El punto $\hat{x}$ es una combinación convexa de coloreos de G que utilizan sólo asignaciones permitidas por L y por lo tanto, en todos estos coloreos se cumple que $x_{vc} = 0$ para todo $v \in V$ y todo $c \in C \setminus L(v)$, con lo cual todos estos puntos pertenecen a Q. Por ende, $\hat{x}$ también pertenece a Q, implicando de esta manera que $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(G, C, L) \subseteq P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C) \cap Q$, pues está claro por otro lado que $\hat{x} \in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C)$, ya que éste es combinación convexa de coloreos de G.
Tomemos ahora un punto $\hat{x} \in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C) \cap Q$. Como $\hat{x} \in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C)$, este punto

es una combinación convexa de coloreos $x^1, \ldots, x^k$ de G. Dado que $\hat{x} \in Q$, entonces para todo vértice $v \in V$ y todo color $c \in C \setminus L(v)$ se cumple que $\hat{x}_{vc} = 0$ y por lo tanto $\hat{x}^j_{vc} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Así, $x^j \in Q$ para todo $j = 1, \ldots, k$ y eso implica que todos estos coloreos pertenecen a $P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ y por lo tanto, lo mismo ocurre con $\hat{x}$, ya que este último es combinación convexa de los anteriores. Esto prueba que $P^{\text{s}}_{\text{col}}(G, C) \cap Q \subseteq P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ y por lo tanto (2.5) es verdadera.

Entonces, un punto $\hat{x} \notin P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$, o bien no pertenece a $P^{\text{s}}_{\text{col}}(G, C)$ o bien vale que $\hat{x}_{vc} > 0$ para algún $v \in V$ y $c \in C \setminus L(v)$. Si el problema de separación sobre $P^{\text{s}}_{\text{col}}(G, C)$ se puede resolver en tiempo polinomial, entonces para separar un punto de $P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ se puede simplemente verificar si $x_{vc} = 0$, para todo $v \in V$ y $c \in C \setminus L(v)$ y, si esas condiciones se cumplen, separar el punto (en tiempo polinomial) de $P^{\text{s}}_{\text{col}}(G, C)$. Así, el problema de separación sobre $P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ se puede resolver en tiempo polinomial.

La afirmación recíproca es trivial, ya que $P^{\text{s}}_{\text{col}}(G, C)$ es $P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ con $L(v) = C$ para todo vértice $v \in V$.

□

Como mencionamos en el Capítulo 1, Grötschel, Lovász y Schrijver [34] demostraron, basados en el método del elipsoide, que los problemas de separación y de optimización son polinomialmente equivalentes. Es decir, si uno de ellos puede resolverse en tiempo polinomial, lo mismo ocurrirá con el otro. Este resultado nos permite deducir la siguiente consecuencia del teorema anterior.

Corolario 2.1.1 *Dada una familia de grafos $\mathcal{G}$ y un conjunto de colores C, el problema de optimización sobre $P^{\text{s}}_{col}(\mathcal{G}, C)$ se puede resolver en tiempo polinomial si y sólo si el problema de optimización sobre $P^{\text{s}}_{list}(\mathcal{G}, C, L)$ se puede resolver en tiempo polinomial para cualquier conjunto de restricciones L.*

Finalmente, los resultados anteriores nos permiten alcanzar la siguiente importante conclusión acerca del potencial del modelo estándar para problemas de coloreo de vértices.

Teorema 2.1.2 *Sea $\mathcal{G}$ una familia de grafos y C un conjunto de colores. Si el problema de* list-coloring *en $\mathcal{G}$ y C es NP-difícil, entonces el problema de optimización/separación sobre $P^{\text{s}}_{col}(\mathcal{G}, C)$ es NP-difícil.*

Demostración. Si el problema de optimización sobre $P^{\text{s}}_{\text{col}}(\mathcal{G}, C)$ se puede resolver en tiempo polinomial, entonces es posible optimizar sobre $P^{\text{s}}_{\text{list}}(G, C, L)$ para cualquier L en tiempo polinomial resolviendo así el problema de *list-coloring* en G y C también en tiempo polinomial, contradiciendo así la hipótesis.

□

El objetivo principal de esta tesis es el de encontrar caracterizaciones elegantes para poliedros de coloreo de $\mathcal{P}^s_{col}$, para distintas familias de grafos. Idealmente, para aquellas familias donde el problema clásico de coloreo tiene resolución polinomial creemos que deberíamos ser capaces de hallar tales caracterizaciones para alguna formulación de PLE de este problema, independientemente de la complejidad de *list-coloring* para esas familias. Sin embargo, el Teorema 2.1.2 representa un fuerte obstáculo para el modelo estándar en este sentido. Este teorema implica que aun cuando el problema clásico de coloreo sea polinomial sobre una familia $\mathcal{G}$, el poliedro asociado a la formulación estándar no tendrá una caracterización poliedral elegante si el problema de *list-coloring* sobre $\mathcal{G}$ es NP-completo. Este hecho limita severamente el alcance del análisis para esta formulación, ya que se conocen muy pocas clases no triviales de grafos para las cuales el problema de *list-coloring* es polinomial (ver, e.g., la Tabla 1.1). Estas clases son en general grafos de estructuras no demasiado complicadas, como por ejemplo los árboles, los grafos block, los ciclos y los cactus, entre otros. Dado que estas clases de grafos tienen resolución polinomial para *list-coloring*, es esperable que podamos hallar entonces descripciones poliedrales elegantes para los correspondientes poliedros.

A continuación presentamos en el Teorema 2.1.3 un resultado general sobre $P^s_{\text{col}}(G)$ que permite encontrar la descripción de este poliedro cuando G se obtiene mediante una operación en particular a partir de otros dos grafos. Para la subsecuente demostración, recurrimos al siguiente principio basado en el teorema de dualidad, enunciado por Edmonds en [27].

Proposición 2.1.1 *[27] Sea S un conjunto finito de soluciones*

$$S \subseteq P = \{x \in \mathbb{R}^{|I|}_+ : \sum_{i \in I} a_{ji} x_i \leq b_j, j \in J\}.$$

Tenemos que $conv(S) = P$ si y solo si para todo vector $\phi \in \mathbb{Z}^{|I|}$,

$$\text{máx}\{\phi^T x : x \in S\} = \text{mín}\{\sum_{j \in J} \lambda_j b_j : \sum_{j \in J} \lambda_j a_{ji} \geq \phi_i, i \in I, \lambda \in \mathbb{R}^{|J|}_+\}.$$

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ tales que $V_1 \cap V_2 = \{v\}$, la *identificación en un vértice* de G_1 y G_2 es el grafo $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Teorema 2.1.3 *Sea C un conjunto de colores y $G = (V, E)$ la identificación en un vértice de los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ con $V_1 \cap V_2 = \{v\}$. Si para $k = 1, 2$, sabemos que*

$$P^s_{col}(G_k) = \{x \in \mathbb{R}^{|V||C|}_+ : \sum_{i \in V} \sum_{c \in C} a^j_{ic} x_{ic} \leq b_j, j \in J_k\},$$

entonces

$$P^s_{col}(G) = \{x \in \mathbb{R}^{|V||C|}_+ : \sum_{i \in V} \sum_{c \in C} a^j_{ic} x_{ic} \leq b_j, j \in (J_1 \cup J_2)\}.$$

La siguiente demostración es una adaptación directa de una demostración de Fekete [30] para un problema de coloreo definido en [25]. La demostración de Fekete es a su vez una adaptación de una demostración dada por Chvátal para un resultado similar con respecto al poliedro de los conjuntos independientes de un grafo [19].

Demostración. Sea $\phi = (\phi_{ic})_{i\in V, c\in C}$ un vector de valores enteros y llamemos $\phi^k = (\phi_{ic})_{i\in V_k, c\in C}$, para $k = 1, 2$. Sea $m = \max\{\phi^T x : x \in P^s_{\text{col}}(G)\}$ y para cada $c' \in C$ y $k = 1, 2$, definimos $m_k(c') = \max\{(\phi^k)^T x : x \in P^s_{\text{col}}(G_k), x_{vc'} = 1\}$. Nótese que

$$\max\{(\phi^k)^T x - \sum_{c\in C} m_k(c) x_{vc} : x \in P^s_{\text{col}}(G_k)\} = 0.$$

Así, para $k = 1, 2$, por la Proposición 2.1.1, existen valores reales no negativos μ_j, $j \in J_k$, tales que $\sum_{j\in J_k} \mu_j b_j = 0$ y

$$\sum_{j\in J_k} \mu_j a^j_{ic} \geq \begin{cases} \phi_{ic}, & \text{para } i \in V_k \setminus \{v\} \text{ y } c \in C, \\ \phi_{vc} - m_k(c), & \text{para } i = v \text{ y } c \in C. \end{cases}$$

Por otro lado, es claro que $\max\{\sum_{c\in C} m x_{vc} : x \in P^s_{\text{col}}(G_1)\} = m$. Por lo tanto, por la Proposición 2.1.1, existen valores reales no negativos μ^*_j, $j \in J_1$, tales que $\sum_{j\in J_1} \mu^*_j b_j = m$ y

$$\sum_{j\in J_1} \mu^*_j a^j_{ic} \geq \begin{cases} 0, & \text{para } i \in V_k \setminus \{v\} \text{ y } c \in C, \\ m, & \text{para } i = v \text{ y } c \in C. \end{cases}$$

Definimos ahora

$$\lambda_j = \begin{cases} \mu_j + \mu^*_j, & \text{si } j \in J_1, \\ \mu_j, & \text{si } j \in J_2. \end{cases}$$

Demostraremos que $\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j b_j = m$ y $\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j a^j_{ic} \geq \phi_{ic}$, para cada $i \in V, c \in C$, con lo cual la Proposición 2.1.1 implica la conclusión deseada.

Para $i \in V_1 \setminus \{v\}$ y $c \in C$ tenemos

$$\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j a^j_{ic} = \sum_{j\in J_1} \lambda_j a^j_{ic} = \sum_{j\in J_1} \mu_j a^j_{ic} + \sum_{j\in J_1} \mu^*_j a^j_{ic} \geq \phi_{ic}.$$

Para $i \in V_2 \setminus \{v\}$ y $c \in C$ tenemos

$$\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j a^j_{ic} = \sum_{j\in J_2} \lambda_j a^j_{ic} = \sum_{j\in J_1} \mu_j a^j_{ic} \geq \phi_{ic}.$$

Para cada $c \in C$ tenemos

$$\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j a^j_{vc} = \sum_{j\in J_1} \mu_j a^j_{vc} + \sum_{j\in J_1} \mu^*_j a^j_{vc} + \sum_{j\in J_2} \mu_j a^j_{vc}$$
$$\geq (\phi_{vc} - m_1(c)) + m + (\phi_{vc} - m_2(c)) \geq \phi_{vc},$$

ya que $m = \max\{m_1(c') + m_2(c') - \phi_{vc'} : c' \in C\} \geq m_1(c) + m_2(c) - \phi_{vc}$. Finalmente,

$$\sum_{j\in(J_1\cup J_2)} \lambda_j b_j = \sum_{j\in J_1} \mu_j b_j + \sum_{j\in J_1} \mu^*_j b_j + \sum_{j\in J_2} \mu_j b_j = m,$$

pues $\sum_{j\in J_1} \mu_j b_j = \sum_{j\in J_2} \mu_j b_j = 0$ y $\sum_{j\in J_1} \mu^*_j b_j = m$. □

2.2. Árboles y grafos block

Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos. Esta familia de grafos es en general una de las más simples en términos de estructura y la mayoría de los problemas de optimización combinatoria admiten soluciones polinomiales en ella. Tal es así que el problema de *list-coloring* en árboles admite una resolución en tiempo lineal [38].

En el siguiente teorema damos una caracterización completa de $P^s_{\text{col}}(G)$ cuando G es un árbol. Probamos que si G es un árbol, entonces $P^s_{\text{col}}(G, C)$ se describe por completo con las restricciones (2.1) y (2.2), para cualquier conjunto de colores C.

Teorema 2.2.1 *Si $G = (V, E)$ es un árbol y C un conjunto de colores, entonces $P^s_{col}(G, C) = \{x \in \mathbb{R}^{|V||C|}_+ : x$ satisface (2.1) y (2.2)$\}$.*

Demostración. Si G es una arista, entonces las desigualdades (2.1) y (2.2) representan un problema de asignación y por lo tanto la formulación correspondiente resulta en un poliedro entero. Si G contiene dos o más aristas, entonces es una identificación en un vértice de dos árboles más pequeños, y así el Teorema 2.1.3 implica el resultado deseado. □

El Teorema 2.1.1 y el Teorema 2.2.1 prueban que el problema de separación sobre $P^s_{\text{list}}(G, L)$ se puede resolver en tiempo polinomial cuando G es un árbol. Este resultado brinda la contraparte poliedral del algoritmo combinatorio presentado en [38] para resolver el problema de *list-coloring* sobre árboles en tiempo polinomial. Estudiamos a continuación una generalización de los árboles.

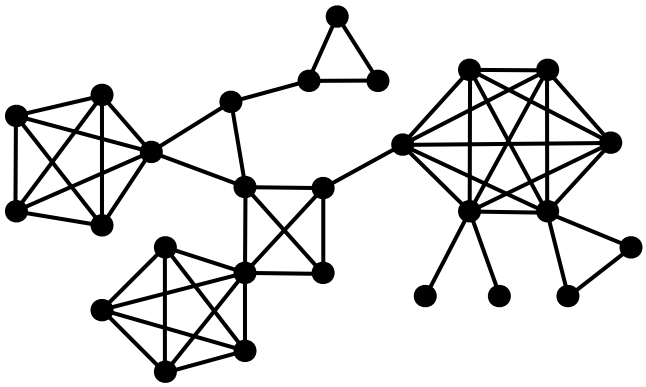

Figura 2.1: Un grafo block.

Un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ de un grafo $G = (V, E)$ es una *componente biconexa* si el subgrafo de G inducido por $V' \setminus \{v\}$ es conexo para todo $v \in V'$. Un grafo *block* es un grafo en el cual cada componente biconexa maximal es una clique, es decir, en el cual todo ciclo induce un subgrafo completo. El problema de *list-coloring* sobre grafos block puede ser resuelto en tiempo polinomial [37]. Mostramos que las restricciones (2.1) y (2.2) son suficientes para describir a $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ cuando G es un árbol y, como se puede ver en el ejemplo de la Figura 2.1, los grafos block son esencialmente "árboles de cliques". Sin embargo, a pesar de las similitudes con los árboles, los grafos block admiten cliques más grandes que estos últimos, y es sabido que las desigualdades clique definen facetas de $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ para cliques maximales [20].

Teorema 2.2.2 *[20] Sea $G = (V, E)$ un grafo y C un conjunto de colores. Dada una clique $K \subseteq V$ y un color $c \in C$, la* desigualdad clique

$$\sum_{v \in K} x_{vc} \leq 1 \tag{2.6}$$

es válida para $P^{\mathrm{s}}_{col}(G, C)$. Si $|C| > \chi(G)$ y K es una clique maximal, entonces (2.6) define una faceta de $P^{\mathrm{s}}_{col}(G, C)$.

Probaremos en esta sección que las restricciones (2.1) y (2.6) dan una caracterización completa de $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ cuando G es un grafo block. Para ello, definimos $Q(G) := \{x \in \mathbb{R}_+^{|V||C|} : x \text{ satisface (2.1) y (2.6)}\}$, y probaremos luego que $Q(G)$ es un poliedro entero, implicando así que $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G) = Q(G)$. Definimos primero el *grafo fraccionario* $G_f(\hat{x})$, asociado a un vector $\hat{x} \in [0,1]^{|V||C|}$, de la siguiente manera.

Definición 2.2.1 (grafo fraccionario) *Dado $\hat{x} = (\hat{x}_{vc}) \in [0,1]^{|V||C|}$, el* grafo fraccionario *asociado a $\hat{x}$ es $G_f(\hat{x}) = (V \cup C, E(\hat{x}))$ donde $E(\hat{x}) = \{vc \in V \times C : 0 <$*

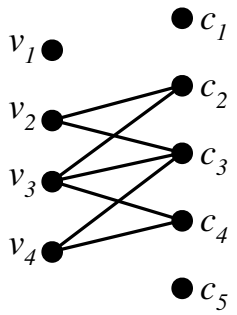

Figura 2.2: Un ejemplo de grafo fraccionario $G_f(\hat{x})$.

$\hat{x}_{vc} < 1\}$. *Es decir, las aristas del grafo conectan un vértice $v \in V$ y otro vértice $c \in C$ tales que la variable $\hat{x}_{vc}$ tiene un valor fraccionario. Llamamos V-nodos y C-nodos a los elementos de V y a los de C, respectivamente.*

A modo de ejemplo, sea G un ciclo de 4 vértices con aristas v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4 y v_4v_1, y sea $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ un conjunto de colores. Sea $\hat{x} \in P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G, C)$ un vector cuyos valores no nulos son los siguientes:

- $\hat{x}_{v_1c_1} = 1$
- $\hat{x}_{v_2c_2} = \hat{x}_{v_2c_3} = \frac{1}{2}$
- $\hat{x}_{v_3c_2} = \hat{x}_{v_3c_3} = \hat{x}_{v_3c_4} = \frac{1}{3}$
- $\hat{x}_{v_4c_3} = \hat{x}_{v_4c_4} = \frac{1}{2}$

Con estos elementos, el grafo fraccionario $G_f(\hat{x})$ resultante es el que se muestra en la Figura 2.2. Se puede ver que el V-nodo v_1 está aislado, pues el vértice correspondiente de G no tiene ninguna variable asociada con valor fraccionario. Los C-nodos c_1 y c_5 también son aislados, aunque éstas son dos situaciones distintas entre sí; el color c_1 está asignado al vértice v_1 con un valor entero (i.e., $\hat{x}_{v_1c_1} = 1$) y a ningún otro vértice con valor fraccionario, mientras que el color c_5 no está asignado (ni total ni parcialmente) a ningún vértice de G.

Notemos que los conjuntos V y C dan, como regla general, una bipartición de $G_f(\hat{x})$, ya que ambos son en cualquier caso conjuntos independientes de $G_f(\hat{x})$. Por otro lado, si un punto $\hat{x}$ satisface (2.1), entonces

1. un V-nodo v es un vértice aislado si y sólo si $x_{vc} = 1$ para algún $c \in C$, y
2. cada V-nodo no aislado está conectado a al menos dos C-nodos.

Cuando $G = K_n$ (es decir, G es un grafo completo), el grafo fraccionario de un punto $x \in Q(K_n)$ tiene muchas propiedades interesantes, y utilizaremos algunas de ellas para demostrar que $Q(K_n)$ es un poliedro entero. Para un punto

$x \in Q(K_n)$, decimos que un color $c \in C$ está *saturado* si la correspondiente restricción (2.6) se cumple por igualdad en x; de lo contrario, decimos que c es un color *seguro*. En lo siguiente, utilizaremos la notación $x(U, D) = \sum_{v \in U} \sum_{c \in D} x_{vc}$. Utilizaremos también $x(v, D)$ y $x(U, c)$ para $x(\{v\}, D)$ y $x(U, \{c\})$, respectivamente.

Proposición 2.2.1 *Sea $G_f(x) = (V \cup C, E(x))$ el grafo fraccionario asociado a un vector $x \in Q(K_n)$ y sea $H = (V_H \cup C_H, E_H)$ un subgrafo inducido de $G_f(x)$ sin vértices aislados. Llamemos $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \{vc \in E(x) : v \in V_H \text{ y } c \notin C_H\}$ y $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \{cv \in E(x) : c \in C_H \text{ y } v \notin V_H\}$. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

i) Si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$, entonces $|V_H| \leq |C_H|$.

ii) Si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$, entonces o bien $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \emptyset$ o bien $|V_H| < |C_H|$.

iii) Si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$ y existe un color seguro $c \in C_H$, entonces $|V_H| < |C_H|$.

iv) Si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \emptyset$ y no existe un color seguro en C_H, entonces $|C_H| \leq |V_H|$.

v) si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \emptyset$ y no existe un color seguro en C_H, entonces o bien $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$ o bien $|C_H| < |V_H|$.

Demostración.

i) Como H no tiene V-nodos aislados, entonces todo $v \in V_H$ sin vecinos en $C \backslash C_H$ satisface $x(v, C_H) = 1$. Así, si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$ entonces $x(V_H, C_H) = |V_H|$. Además, por (2.6), todo color $c \in C$ satisface $x(V_H, c) \leq 1$ y entonces $|V_H| = x(V_H, C_H) \leq |C_H|$.

ii) Como $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$, entonces $x(V_H, C_H) = |V_H|$. Para todo $c \in C_H$, por (2.6), tenemos que $x(V, c) \leq 1$, y así

$$\begin{aligned} |C_H| \geq x(V, C_H) &= x(V_H, C_H) + x(V \setminus V_H, C_H) \\ &= |V_H| + x(V \setminus V_H, C_H). \end{aligned}$$

Si $|V_H| = |C_H|$, entonces $x_{vc} = 0$ para todo $v \in V \setminus V_H$ y $c \in C_H$, implicando así que $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \emptyset$. Si no, $|V_H| < |C_H|$, por *i)*.

iii) Dado que $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$, entonces $x(V_H, C_H) = |V_H|$ y como c es un color seguro, esto implica que $x(V_H, c) < 1$. Entonces, por (2.6), ocurre que $|V_H| = x(V_H, C_H) < |C_H|$.

iv) Si no hay ningún color seguro en C_H, entonces $x(V, C_H) = |C_H|$ y si $E_{\mathbf{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{CV}}} = \emptyset$ entonces $x(V, C_H) = x(V_H, C_H)$. Así, $|C_H| = x(V, C_H) = x(V_H, C_H) \leq |V_H|$.

v) Al igual que en la prueba del ítem *iv)*, tenemos que $|C_H| = x(V, C_H) = x(V_H, C_H)$. Si $E_{\mathrm{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} \neq \emptyset$ entonces $x(V_H, C_H) < |V_H|$, y esto implica que $|C_H| = x(V, C_H) = x(V_H, C_H) < |V_H|$. Si no, tenemos que $E_{\mathrm{H}}^{\overrightarrow{\mathrm{VC}}} = \emptyset$.

□

Lema 2.2.1 *Sea $G_f(x) = (V \cup C, E(x))$ el grafo fraccionario asociado a una solución $x \in Q(K_n)$, y sean $\hat{v}\hat{c}, \hat{v}\hat{c}' \in E(x)$ para algún $\hat{v} \in V$ y $\hat{c}, \hat{c}' \in C$. Si el camino $P = \{\hat{c}, \hat{v}, \hat{c}'\}$ no pertenece a ningún ciclo de $G_f(x)$, entonces P pertenece a un camino simple y sin cuerdas $P' = \{c_1, \ldots, \hat{c}, \hat{v}, \hat{c}', \ldots, c_2\}$, donde c_1 y c_2 son colores seguros en x.*

Demostración. Como P no pertenece a ningún ciclo, entonces $\hat{v}$ es un vértice de corte de $G_f(\hat{x})$, es decir, la eliminación de v de $G_f(\hat{x})$, deja a $\hat{c}$ y $\hat{c}'$ en distintas componentes conexas del grafo resultante. Sea $H = (V_H \cup C_H, E_H)$ la componente conexa de $G_f(x) \setminus \{\hat{v}\}$ que contiene a $\hat{c}$. Como H es una componente conexa, no existen C-nodos fuera de H conectados a V-nodos de H. Dado que $\hat{v} \notin V_H$ y $\hat{c} \in C_H$, la Proposición 2.2.1*(ii)* implica que $|V_H| < |C_H|$, o sea $|V_H| + 1 \leq |C_H|$.
Probaremos ahora que debe existir un C-nodo seguro $c_1 \in C_H$, mostrando que la suma de las aristas incidentes a los C-nodos de H es estrictamente menor que $|C_H|$. Dado que $\hat{v}$ es el único V-nodo fuera de H conectado a C-nodos en H, entonces $x(V \setminus V_H, C_H) = x(\hat{v}, C_H)$. Sabemos además que $x(\hat{v}, C_H) < 1$ ya que $x_{\hat{v}\hat{c}'} > 0$ y $\hat{c}' \notin C_H$. De esta manera, la suma de las aristas incidentes a C-nodos de H es

$$x(V, C_H) = x(V_H, C_H) + x(V \setminus V_H, C_H) < |V_H| + 1 \leq |C_H|.$$

Así, existe un C-nodo seguro $c_1 \in C_H$ y, como H es conexo, existe un camino (sin cuerdas) P_1 entre $\hat{c}$ y c_1.

Análogamente, podemos deducir que en la componente conexa de $G_f(x) \setminus \{\hat{v}\}$ que contiene a $\hat{c}'$, existe un camino P_2 entre $\hat{c}'$ y un color seguro c_2. Dado que los caminos P_1 y P_2 están contenidos en diferentes componentes conexas de $G_f(x) \setminus \{\hat{v}\}$, el camino simple y sin cuerdas P' puede obtenerse concatenando P_1, $\hat{v}$, y P_2.

□

Con estos resultados, podemos dar una caracterización completa de $P_{\mathrm{col}}^{\mathrm{s}}(G)$ cuando G es un grafo block.

Teorema 2.2.3 *Si $G = (V, E)$ es un grafo block, entonces $P_{col}^{\mathrm{s}}(G) = \{x \in \mathbb{R}_+^{|V||C|} :$ x satisface (2.1) y (2.6)$\}$.*

Demostración. Demostraremos que $Q(G)$ es un poliedro entero, implicando así que $P^{s}_{\text{col}}(G) = Q(G) = \{x \in \mathbb{R}_{+}^{|V||C|} : x \text{ satisface (2.1) y (2.6)}\}$. La demostración se realiza por inducción en la cantidad de cliques maximales de G.

Supongamos primero que $G = K_n$ y sea $\hat{x} \in Q(G)$ un vector con un valor fraccionario $\hat{x}_{vq}$ para algún $v \in V$ y algún $q \in C$. Probaremos que $\hat{x}$ es una combinación convexa de otras dos soluciones $x^a, x^b \in Q(G)$, implicando así que $\hat{x}$ no es un vértice del poliedro. Como $\hat{x}$ cumple (2.1), debe existir un color $q' \in C$ distinto de q con $\hat{x}_{vq'}$ también fraccional. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}_{+}$ tal que $\varepsilon < \text{mín}\{\hat{x}_{wc}, 1 - \hat{x}_{wc}\}$ para todo $(w, c) \in V \times C$ con valor fraccionario $\hat{x}_{wc}$, y $x(V, c) + \varepsilon < 1$ para todo color seguro $c \in C$. Sea $G_f(\hat{x})$ el grafo fraccionario asociado a $\hat{x}$. Como $G_f(\hat{x})$ es bipartito, todo ciclo en $G_f(\hat{x})$ es un ciclo par. Supongamos que las aristas vq y vq' pertenecen a un ciclo de $G_f(\hat{x})$ y sea $H = \{q', v, q, v_2, \ldots, c_t, v_t\}$ tal ciclo. Notar que los vértices de H alternan entre C-nodos y V-nodos, debido a la construcción de $G_f(\hat{x})$. Podemos entonces construir las soluciones x^a y x^b de la siguiente manera (considerando precedencia cíclica):

$$x^a_{wc}\ (resp.\ x^b_{wc}) = \begin{cases} \hat{x}_{wc} + \varepsilon\ (resp.\ \hat{x}_{wc} - \varepsilon) & \text{si } w \text{ precede a } c \text{ en el ciclo} \\ \hat{x}_{wc} - \varepsilon\ (resp.\ \hat{x}_{wc} + \varepsilon) & \text{si } c \text{ precede a } w \text{ en el ciclo} \\ \hat{x}_{wc}\ (resp.\ \hat{x}_{wc}) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Es sencillo ver que $\hat{x} = \frac{1}{2}(x^a + x^b)$. Verifiquemos entonces que ambas soluciones pertenecen a $Q(K_n)$. Como primera observación, toda variable modificada corresponde a una variable con valor fraccional en $\hat{x}$ (ya que éstas corresponden a aristas de $G_f(\hat{x})$), con lo cual la elección de ε implica que todos los nuevos valores se mantienen entre 0 y 1.

Las restricciones (2.1) para los V-nodos que no están en H no sufren modificaciones y lo mismo ocurre con las restricciones (2.6) para los C-nodos que no están en H. Para todo V-nodo en H, la restricción (2.1) correspondiente se mantiene satisfecha tanto en x^a como en x^b, ya que ε se suma en un color y se resta en otro (i.e., el color anterior y el posterior de tal V-nodo en el ciclo). Finalmente, para todo C-nodo en H, la restricción (2.6) correspondiente se mantiene satisfecha, tanto en x^a como en x^b, ya que ε se suma a un V-nodo y se resta a otro (i.e., el V-nodo anterior y el posterior a tal C-nodo en el ciclo). Por lo tanto, x^a y x^b pertenecen a $Q(K_n)$.

Supongamos ahora que las aristas vq y vq' no pertenecen a un ciclo del grafo fraccionario. En este caso, por el Lema 2.2.1, estas aristas pertenecen a un camino simple (y sin cuerdas) $P = \{c_1, \ldots, q', v, q, \ldots, c_2\}$, donde c_1 y c_2 son colores seguros en $\hat{x}$. Notemos que los vértices de P alternan entre C-nodos y V-nodos debido a la construcción de $G_f(\hat{x})$. Definamos entonces x^a y x^b usando P de la misma manera que antes sin considerar precedencia cíclica

en este caso. Al igual que antes, $\hat{x} = \frac{1}{2}(x^a + x^b)$ y es sencillo ver que ambas soluciones permanecen en $[0,1]^{|V||C|}$ y que las restricciones (2.1) se satisfacen. Con respecto a las restricciones (2.6), para cada C-nodo fuera de P, éstas no se modifican y para cada C-nodo de P, salvo por c_1 y c_2, el argumento es el mismo que antes. Finalmente, como c_1 y c_2 son colores seguros, las restricciones (2.6) asociadas a estos colores se cumplen, tanto en x^a como en x^b, para el valor de ε elegido. Esto concluye la demostración para el caso base $G = K_n$.

Supongamos que G tiene dos o más cliques maximales. Si toda clique maximal de G tuviese al menos dos vértices pertenecientes a otras cliques, entonces podríamos formar un ciclo en G que no induce un subgrafo completo. Como esto no es posible por ser G un grafo block, entonces G contiene una clique maximal K tal que sólo un vértice $v \in K$ pertenece a otras cliques maximales del grafo. Es decir, tal que $K \cap K' \subseteq \{v\}$, para toda clique maximal K' of G, diferente de K. Por lo tanto, G es la identificación en un vértice (i.e., el vértice v) de $G[K]$ y $G[(V \setminus K) \cup \{v\}]$. Ya que ambos son grafos block con menos cliques maximales que G, entonces la hipótesis inductiva y el Teorema 2.1.3 implican la conclusión deseada.

□

El Teorema 2.1.1 junto con el Teorema 2.2.3 implican que el problema de separación sobre $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{list}}(G, L)$ puede ser resuelto en tiempo polinomial para cualquier L, cuando G es un grafo block. Este resultado da un algoritmo poliedral polinomial para el problema de *list-coloring* en grafos block, como contraparte del algoritmo combinatorio presentado en [37].

2.3. $\mathcal{P}^{\mathrm{s}}_{col}$ y el *stable set polytope*

Recordemos que un conjunto *independiente* (o *estable*) en un grafo es un conjunto de vértices disjuntos dos a dos, es decir, tal que no existe ninguna arista del grafo que conecte dos vértices del conjunto. El *stable set polytope* $STAB(H)$ de un grafo $H = (V_H, E_H)$ es la cápsula convexa de los vectores característicos de todos los conjuntos independientes de H. Es decir, $STAB(H)$ es la cápsula convexa de todos los vectores $y \in \mathbb{R}^{|V_H|}$ que satisfacen las siguientes restricciones:

$$y_v + y_w \leq 1 \qquad \forall vw \in E_H \tag{2.7}$$

$$y_u \in \{0,1\} \qquad \forall u \in V_H. \tag{2.8}$$

Existe una conocida reducción del problema de coloreo de vértices al problema de conjunto independiente de máxima cardinalidad (ver [21] por ejemplo). Inspirados en esta reducción, mostramos en esta sección la relación poliedral entre $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ y el poliedro de conjuntos independientes de un grafo auxiliar

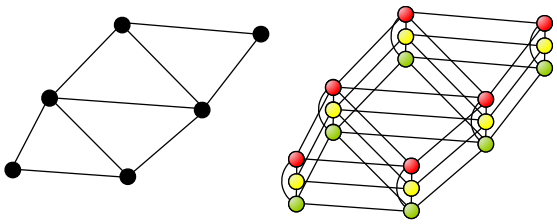

Figura 2.3: Un grafo G y el grafo auxiliar $\mathcal{S}^C_G$ para $|C| = 3$.

$\mathcal{S}^C_G$, para el cual todo coloreo de G define un conjunto independiente de $\mathcal{S}^C_G$.

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de colores C, construimos el grafo auxiliar $\mathcal{S}^C_G = (V \times C, E_{\mathcal{S}^C_G})$, donde

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{S}^C_G} =& \{(v,c)(v,c') : \text{ con } v \in V,\, c, c' \in C \text{ y } c \neq c'\} \cup \\ & \{(v,c)(w,c) : \text{ con } vw \in E \text{ y } c \in C\}. \end{aligned}$$

Informalmente, para cada vértice v de G, el grafo $\mathcal{S}^C_G$ contiene una clique de tamaño $|C|$, donde cada vértice (v, c) de dicha clique corresponde al color c. Llamamos *cliques básicas* a estas cliques. Además, para cada par de vértices adyacentes $vw \in E$, existen $|C|$ aristas entre las correspondientes cliques de $\mathcal{S}^C_G$, uniendo los pares de vértices que corresponden al mismo color. La Figura 2.3 muestra un ejemplo con $|C| = 3$. Vale notar que todo coloreo $c : V \to C$ de G define el conjunto independiente $\{(v, c(v)) : v \in V\}$ en $\mathcal{S}^C_G$.

Debido a la construcción de $\mathcal{S}^C_G$, es fácil ver que los vectores característicos de conjuntos independientes de este grafo pueden describirse con las siguientes restricciones:

$$\sum_{c \in C} x_{(v,c)} \leq 1 \qquad \forall v \in V, \tag{2.9}$$

$$x_{(v,c)} + x_{(w,c)} \leq 1 \qquad \forall vw \in E, \forall c \in C, \tag{2.10}$$

$$x_{(v,c)} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V, \forall c \in C. \tag{2.11}$$

Por definición, una arista de $\mathcal{S}^C_G$ o bien pertenece a una clique básica o bien proviene de una arista de G. En el primer caso, las restricciones (2.9) aseguran que se escoja a lo sumo un vértice de dicha arista y en el segundo caso, la desigualdad (2.10) impone esta restricción. Así,

$$STAB(\mathcal{S}^C_G) = \text{conv}(\{x \in \mathbb{R}^{|V||C|}_+ : x \text{ satisface (2.9)-(2.11)}\}).$$

Recordemos por otro lado que, para un grafo cualquiera G,

$$P^{S}_{\text{col}}(G) = \text{conv}(\{x \in \mathbb{R}^{|V||C|}_+ : x \text{ satisface (2.1)-(2.3)}\})$$

y notemos que la única diferencia entre (2.1)-(2.3) y (2.9)-(2.11) es la igualdad en (2.1), de lo cual se deduce que $P^{s}_{col}(G) \subseteq STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$. Más aun, $P^{s}_{col}(G)$ es la cara de $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$ definida por las desigualdades (2.9) (se sabe que éstas definen facetas de $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$).

Este resultado es interesante desde el punto de vista teórico, pero es incluso muy interesante desde el punto de vista práctico, ya que implica que toda desigualdad válida para $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$ es también válida para $P^{s}_{col}(G)$. El stable set polytope ha sido fuertemente estudiado y se conocen muchas familias de facetas del mismo. Más aun, se conocen también caracterizaciones completas de este poliedro para algunas familias de grafos, como por ejemplo, para los grafos perfectos. De esta forma, muchas de las facetas $P^{s}_{col}(G)$ podrían ser descriptas por desigualdades válidas conocidas para $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$.

2.3.1. Nuevas facetas de $\mathcal{P}^{s}_{col}$

Un *agujero* en un grafo es un ciclo inducido, es decir, es un ciclo tal que no existen aristas entre dos vértices no consecutivos del ciclo. De estas estructuras surgen las desigualdades de *agujero impar* para el poliedro $STAB(G)$, definidas de la siguiente manera:

$$\sum_{v \in H} x_v \leq \frac{|H|-1}{2} \qquad \forall \text{ agujero impar } H \subseteq V(G). \tag{2.12}$$

La validez de las mismas es obvia, pero se sabe además que bajo ciertas condiciones las desigualdades (2.12) definen facetas de $STAB(G)$ [49]. Estas desigualdades definen también la familia de los grafos *t-perfectos* siendo aquellos grafos G para los cuales estas desigualdades describen por completo $STAB(G)$ [19, 34]. Es preciso notar que la desigualdad (2.12) es válida para $STAB(G)$ aun cuando H tenga cuerdas (i.e., aristas entre vértices no consecutivos del ciclo). Si H es par, entonces la desigualdad obtenida de (2.12) al reemplazar el lado derecho por $|H|/2$ es también válida. Sin embargo, en estos casos, las desigualdades resultantes (a las que llamaremos desigualdades *de ciclo*) no definen facetas de $STAB(G)$.

Basados en el hecho de que $P^{s}_{col}(G)$ es una cara de $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$ y en que las desigualdades (2.12) definen facetas de este último, proponemos a continuación una nueva familia de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{s}_{col}$.

Teorema 2.3.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo, C un conjunto de colores y $J = \{v_1, \ldots, v_{|J|}\} \subseteq V$ un ciclo de G, tal que $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \ldots, |J| - 1$ y $v_1 v_{|J|} \in E$. Dadas $|J|$ listas de colores $l_1, \ldots, l_{|J|} \subseteq C$ tales que el último color de l_i coincide con el primer color de l_{i+1}, para $i = 1, \ldots, |J|$ (donde $l_{|J|+1} = l_1$), entonces la desigualdad* stable

cycle

$$\sum_{i=1}^{|J|} \sum_{c \in l_i} x_{v_i c} \leq \left\lfloor \frac{L}{2} \right\rfloor \tag{2.13}$$

con $L = \sum_{i=1}^{|J|} |l_i|$*, es válida para* $P^{\mathrm{s}}_{col}(G, C)$.

Demostración. Las variables en el lado izquierdo de (2.13) se pueden ordenar para obtener un ciclo de $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G}$ de longitud L. Así, (2.13) es una desigualdad válida de ciclo para $STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$. Dado que $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G) \subseteq STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$, entonces (2.13) es válida también para $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$. □

Se muestra en [34] que el problema de separación de las desigualdades de ciclo se puede resolver en tiempo polinomial. Cada desigualdad *stable cycle* (2.13) para $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ se puede asociar con una única desigualdad de ciclo para $STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$. Así, los problemas de separación para estas familias de desigualdades son equivalentes, y por lo tanto los resultados de [34] muestran que ambos pueden resolverse en tiempo polinomial. Esto implica a su vez el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1 *Para cualquier grafo G y cualquier conjunto de colores C, existe un algoritmo de tiempo polinomial que toma un punto* $x \in \mathbb{R}_{+}^{|V||C|}$ *y encuentra una desigualdad de tipo* stable cycle *violada por x o determina que no existe tal desigualdad.*

Como puede observarse, las desigualdades (2.13) están fuertemente relacionadas con las desigualdades de agujeros impares (2.12). Sin embargo, el ciclo de $\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G}$ asociado a (2.13) es un agujero impar si y solo si $l_1, \ldots, l_{|J|}$ son tales que:

(i) $L = \sum_{i=1}^{|J|} |l_i|$ es un número impar,

(ii) $1 \leq |l_i| \leq 2$, para $i = 1, \ldots, |J|$, y

(iii) si $v_i v_j \in E$ con $v_i, v_j \in J$, entonces $|l_i \cap l_j| \leq 1$, y si v_i y v_j son no consecutivos en J, entonces $l_i \cap l_j = \emptyset$.

Los ítems (ii) y (iii) aseguran que el ciclo asociado sea un agujero, es decir, que no tenga cuerdas. De esta manera, (2.13) puede definir facetas de $STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$ sólo si las propiedades mencionadas arriba se cumplen. Esto sugiere que estas propiedades podrían ser necesarias también para que (2.13) defina facetas de $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$, sin embargo, esto no es trivialmente cierto ya que la cara de $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (2.13) podría ser una faceta de $P^{\mathrm{s}}_{\mathrm{col}}(G)$ aun cuando la correspondiente cara de $STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$ no es una faceta de $STAB(\mathcal{S}^{\mathrm{C}}_{G})$.

Es sencillo ver que esta nueva familia de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{s}}_{col}$ generaliza las desigualdades de agujero impar para coloreo presentadas en

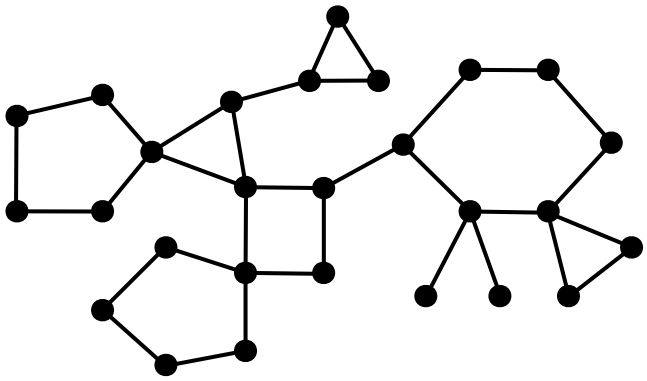

Figura 2.4: Un grafo cactus.

[20]. Más aun, si asignamos un color distinto c_i para cada vértice $v_i \in J \setminus \{v_{|J|}\}$ y tomamos $l_1 = [c_1]$ y $l_i = [c_{i-1}, c_i]$, para $i = 2, ..., |J|$ (con $c_{|J|} := c_1$), entonces (2.13) resulta ser la desigualdad *chain colors* presentada también en [20]. Por lo tanto, (2.13) es también una generalización de esta familia. Algunas de las desigualdades de estas dos familias mencionadas definen facetas de $\mathcal{P}^{s}_{col}$ bajo ciertas condiciones.

2.3.2. Ciclos y grafos cactus

Un grafo es un *cactus* si toda arista pertenece a lo sumo a un ciclo del mismo, es decir, es una colección de ciclos y aristas que se intersecan sólo en vértices. Como se puede ver en el ejemplo de la Figura 2.4, los grafos cactus son esencialmente "árboles de ciclos y/o aristas". Sabemos que las restricciones (2.1) y (2.2) son suficientes para describir a $P^{s}_{\text{col}}(G)$ cuando G es un árbol y sabemos que las desigualdades *stable cycle* (2.13) definen facetas de $STAB(\mathcal{S}^{C}_{G})$, del cual $P^{s}_{\text{col}}(G)$ es una cara propia. Sería plausible entonces que (2.1), (2.2) y (2.13) fueran suficientes para caracterizar por completo $P^{s}_{\text{col}}(G)$, cuando G es un grafo cactus.

Utilizando el software PORTA [16], pudimos verificar que las restricciones (2.1), (2.2) y (2.13) dan efectivamente una caracterización completa para $P^{s}_{\text{col}}(G)$ cuando G es un ciclo de pocos vértices. Una de las funcionalidades centrales de este software consiste en determinar todas las facetas de la cápsula convexa de un conjunto de puntos. Lamentablemente, los tiempos elevados de ejecución sólo permiten resolver casos muy pequeños. Basados en esta experimentación y en nuestra propia intuición, conjeturamos que las restricciones (2.1), (2.2) y (2.13) dan una caracterización completa para $P^{s}_{\text{col}}(G)$ cuando G es un ciclo. Más aun, si esta conjetura resulta ser cierta, entonces el Teorema 2.1.3, puede

utilizarse para demostrar que las desigualdades (2.1), (2.2) y (2.13) brindan una caracterización completa de $P^{s}_{col}(G)$ cuando G es un cactus.

Proposición 2.3.2 *Si las desigualdades (2.1), (2.2) y (2.13) describen por completo $P^{s}_{col}(G)$ cuando G es un ciclo cualquiera, entonces lo mismo ocurre cuando G es un grafo cactus.*

Demostración. Es fácil ver que un grafo cactus es un ciclo, una arista o bien es la identificación en un vértice de dos grafos cactus de menor tamaño. Inductivamente, el Teorema 2.1.3 implica el resultado deseado.

□

Dado que la Proposición 2.3.2 se basa en una conjetura, realizamos también una experimentación computacional con el fin de verificar si efectivamente las desigualdades (2.1), (2.2) y (2.13) describen por completo $P^{s}_{col}(G)$ cuando G es grafo cactus. En este caso, la experimentación consistió en enumerar en forma aleatoria una gran cantidad de puntos extremos del poliedro dado por la relajación lineal de la formulación para verificar si estos puntos son enteros o no. Logramos esta enumeración de puntos extremos, optimizando sucesivamente funciones objetivo aleatorias sobre el poliedro dado. Luego de una extensa experimentación en (más de mil) instancias aleatorias, no pudimos encontrar en estos poliedros puntos extremos con valores fraccionarios. Esto refuerza entonces la conjetura acerca de los ciclos y por consecuencia la misma acerca de los grafos cactus. Lamentablemente, luego de mucho tiempo y esfuerzo, no pudimos encontrar una demostración formal de estos resultados.

2.3.3. Otras desigualdades conocidas para $STAB$

Dada una solución entera $\hat{x} \in P^{s}_{col}(G)$ y un color $c \in C$, está claro que el conjunto de vértices $\{v \in V : \hat{x}_{vc} = 1\}$ es un conjunto independiente en G. De esta observación es sencillo ver que cualquier desigualdad válida para $STAB(G)$ puede transformarse en una desigualdad válida para $P^{s}_{col}(G)$, fijando simplemente un color cualquiera. Es decir, si la desigualdad $\sum_{v \in V} \pi_v y_v \leq \pi_0$ es válida para $STAB(G)$, entonces la desigualdad *trivial* $\sum_{v \in V} \pi_v x_{vc} \leq \pi_0$ es válida para $P^{s}_{col}(G)$, para cualquier color $c \in C$. De hecho, muchas de las desigualdades válidas conocidas para $\mathcal{P}^{s}_{col}$ surgen mediante la aplicación de esta idea. En el caso de las desigualdades de agujero impar (2.12), además de la desigualdad trivial para coloreo, pudimos deducir nuevas desigualdades para $P^{s}_{col}(G)$ como las *stable cycle* (2.13), identificando ciertas estructuras de G que producen agujeros en $\mathcal{S}^{C}_{G}$.

Se conocen muchas otras familias de desigualdades válidas que definen facetas de $STAB(G)$, asociadas a estructuras simples dentro de un grafo. Estas incluyen, por ejemplo, desigualdades basadas en cliques, anti-agujeros impares,

ruedas impares y redes (para más detalles sobre estas familias ver por ejemplo [14, 15, 52, 58]). Así como dedujimos las desigualdades *stable cycle* (2.13) a partir de la desigualdad de agujero impar para $STAB(\mathcal{S}_G^C)$, una idea atractiva es la de intentar deducir nuevas familias de desigualdades para $\mathcal{P}_{col}^s$ a partir de cliques, anti-agujeros impares, ruedas impares y redes. Es decir, identificar qué estructuras de G producen estas estructuras en $\mathcal{S}_G^C$. Lamentablemente, se puede ver que en todos los casos mencionados, estas estructuras aparecen en $\mathcal{S}_G^C$ sólo cuando las mismas están presentes en G. Es decir, las desigualdades obtenidas para $P_{\text{col}}^s(G)$ son las desigualdades triviales mencionadas anteriormente (i.e., las mismas desigualdades pero restringidas a un color en particular) y todas ellas son desigualdades ya conocidas y estudiadas. A modo de ejemplo, tomemos una clique K de $\mathcal{S}_G^C$. La correspondiente desigualdad clique para $STAB(\mathcal{S}_G^C)$ sería

$$\sum_{(v,c)\in K} x_{(v,c)} \leq 1. \tag{2.14}$$

Supongamos que K no es parte de ninguna de las cliques básicas $\{(v,c) : c \in C\}$ (ya que de lo contrario la desigualdad clique asociada estaría dominada por las igualdades del modelo). Analizando la construcción de $\mathcal{S}_G^C$, podemos ver que si $\{(v_1,c_1),(v_2,c_2),(v_3,c_3)\} \subseteq V(\mathcal{S}_G^C)$ es una clique de $\mathcal{S}_G^C$, entonces o bien $v_1 = v_2 = v_3$ o bien $c_1 = c_2 = c_3$. En el primer caso, la clique pertenece a una clique básica de $\mathcal{S}_G^C$ y en el segundo la clique está asociada a la clique $\{v_1, v_2, v_3\}$ de G. Esto puede extenderse por transitividad para llegar a la siguiente observación:

Observación 2.3.1 *Si K es una clique de $\mathcal{S}_G^C$, entonces o bien K está contenida en una clique básica de $\mathcal{S}_G^C$ o bien existe una clique Q en G y un color $c \in C$ tales que $K = \{(v,c) : v \in Q\}$.*

Como la clique utilizada en (2.14) no pertenece a ninguna clique básica de $\mathcal{S}_G^C$, entonces esta desigualdad es la desigualdad clique trivial para coloreo.

Con la Observación 2.3.1, podemos probar que si una estructura H de $\mathcal{S}_G^C$ es una clique, un antiagujero impar, una rueda impar o una red, y no está contenida en una clique básica, entonces la desigualdad para $STAB(\mathcal{S}_G^C)$ utiliza variables $x_{(v,c)}$ con un $c \in C$ fijo. Así, las desigualdades obtenidas para $P_{\text{col}}^s(G)$ no son más que las versiones triviales para coloreo de las desigualdades de clique, antiagujero impar, rueda impar y red. A continuación, damos una demostración formal para el caso de los anti-agujeros impares, ya que esto implica algunas propiedades interesantes de $\mathcal{S}_G^C$, que discutiremos más adelante. Un *antiagujero* es el grafo complemento de un agujero.

Proposición 2.3.3 *$H = \{(v_1,c_1),\ldots,(v_k,c_k)\} \subseteq V(\mathcal{S}_G^C)$ induce un antiagujero impar de $\mathcal{S}_G^C$ si y solo si $c_i = c_j$, para todo $i,j = 1,\ldots,k$ y $H' = \{v_1,\ldots,v_k\}$ induce un antiagujero impar de G.*

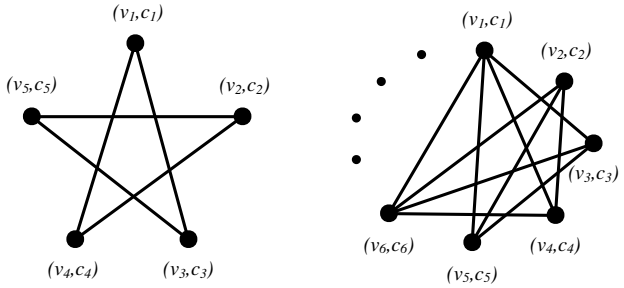

Figura 2.5: Antiagujeros utilizados en la demostración de la Proposición 2.3.3.

Demostración. Dada la construcción de $\mathcal{S}_G^C$, no es difícil ver que todo antiagujero impar $H' = \{v_1, \ldots, v_k\}$ de G produce un antiagujero impar $H = \{(v_1, c), \ldots, (v_k, c)\}$, para cada $c \in C$. Por ende, solo tenemos que demostrar la implicación opuesta. De hecho, alcanza con demostrar que si $H = \{(v_1, c_1), \ldots, (v_k, c_k)\}$ induce un antiagujero impar de $\mathcal{S}_G^C$ entonces $c_i = c_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, k$, ya que en este caso el correspondiente H' será un agujero impar de G.

Sea E_H el conjunto de aristas del antiagujero inducido por H y para mayor claridad, llamemos $w_i = (v_i, c_i)$. Supongamos primero que $k = 5$, es decir, $E_H = \{w_1w_3, w_3w_5, w_5w_2, w_2w_4, w_4w_1\}$, y supongamos que $c_1 \neq c_2$. La Figura 2.5 (izq.) ilustra la estructura de H. Como $w_1w_2 \notin E_H$, sabemos que $v_1 \neq v_2$ y como $w_1w_4, w_2w_4 \in E_H$, entonces o bien $w_4 = (v_1, c_2)$ o bien $w_4 = (v_2, c_1)$. Supongamos, s.p.d.g., que $w_4 = (v_1, c_2)$ y por ende la arista v_1v_2 existe en G, ya que $w_2w_4 \in E_H$. Como $w_3w_4 \notin E_H$, tenemos que $v_3 \neq v_1$, pero entonces $c_3 = c_1$ y la arista v_1v_3 existe en G, ya que sabemos que $w_1w_3 \in E_H$. También, $v_3 \neq v_2$, de lo contrario tendríamos $w_2w_3 \in E_H$. Por último, ya que $w_2w_5, w_3w_5 \in E_H$, entonces o bien $w_5 = (v_2, c_1)$ o bien $w_5 = (v_3, c_2)$. Si $w_5 = (v_2, c_1)$, entonces $w_1w_5 \in E_H$ (pues v_1v_2 es una arista de G), lo cual es falso, y si $w_5 = (v_3, c_2)$, entonces $w_4w_5 \in E_H$ (pues v_1v_3 es una arista de G), lo cual es también falso. En cualquier caso tenemos una contradicción que viene de suponer que $c_1 \neq c_2$, con lo cual esto prueba que $c_1 = c_2$. Ya que w_1 y w_2 pueden ser cualquier par de vértices consecutivos de H, entonces $c_i = c_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, 5$ y por ende H' induce un antiagujero impar de G.

Supongamos ahora que $k \geq 7$. La Figura 2.5 (der.) ilustra la estructura de H en este caso. Como $\{w_1, w_3, w_6\}$ es una clique, entonces por la Observación 2.3.1, o bien $v_1 = v_3 = v_6$ o bien $c_1 = c_3 = c_6$. Si $v_1 = v_3 = v_6 := v^*$, entonces $v_4 = v^*$ también, ya que $\{w_1, w_4, w_6\}$ es también una clique y $v_1 = v_6$. Pero esto no puede pasar ya que $w_3w_4 \notin E_H$. Por lo tanto $c_1 = c_3 = c_6 = c_4$. Finalmente, como $\{w_2, w_4, w_6\}$ es una clique y $c_4 = c_6$, entonces $c_2 = c_4 = c_6$. Esto prueba

que $c_1 = c_2$ y como w_1 y w_2 puede ser cualquier par de vértices consecutivos de H, tenemos que $c_i = c_j$, para todo $i, j = 1, \ldots, k$ y por ende H' induce un antiagujero impar de G. □

2.3.4. Sobre la perfección de $\mathcal{S}^C_G$

Recordemos que un grafo H se dice *perfecto* si $\chi(H') = \omega(H')$ para todo subgrafo inducido H' de H, donde $\omega(H')$ representa el tamaño de una clique máxima de H'. Chvátal demostró en [19] que el poliedro de conjuntos estables de un grafo perfecto se describe por completo con las restricciones de no negatividad y (la versión de conjuntos independientes de) las desigualdades clique (como las mostradas en (2.14)). Ya que $P^s_{\text{col}}(G)$ es una cara de $STAB(\mathcal{S}^C_G)$, resulta interesante estudiar la perfección de $\mathcal{S}^C_G$, pues una caracterización de $STAB(\mathcal{S}^C_G)$ es suficiente para caracterizar $P^s_{\text{col}}(G)$.

En 2006, Chudnovsky, Robertson, Seymour y Thomas [17] publicaron el *teorema fuerte de los grafos perfectos* donde demostraron que un grafo es perfecto si y solo si no contiene agujeros impares ni anti-agujeros impares como subgrafos inducidos. La Proposición 2.3.3 establece que $\mathcal{S}^C_G$ no contiene anti-agujeros impares (aparte de aquellos que vienen estrictamente de anti-agujeros impares de G), sin embargo, no es difícil ver que $\mathcal{S}^C_G$ puede contener agujeros impares, aun cuando G no los tiene. De hecho, de allí surgen las desigualdades *stable cycle* presentadas en este trabajo. Con el objetivo de analizar la perfección de $\mathcal{S}^C_G$, resulta imperativo caracterizar las estructuras de G que producen agujeros impares en $\mathcal{S}^C_G$. En esta sección estudiamos dichas estructuras y damos una caracterización de los grafos G para los cuales $\mathcal{S}^C_G$ es un grafo perfecto. Más aun, con tal caracterización demostramos finalmente que en ciertos casos esta familia de grafos es efectivamente la familia de los grafos block.

Para un grafo $G = (V, E)$, decimos que un *ciclo de caminos* de G es una colección de caminos inducidos $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_k\}$, con $P_i = \{v^i_1, \ldots, v^i_{|P_i|}\}$, $|P_i| > 1$ y $v^i_{|P_i|} = v^{i+1}_1$ para todo $i = 1, \ldots, k$ (con $v^{k+1}_1 := v^1_1$), y tales que la concatenación de $P_1, \ldots, P_k$ forma un ciclo simple de G (consideramos aquí la concatenación de dos caminos consecutivos P_i y P_{i+1}, quitando una copia del vértice repetido v^{i+1}_1). Notemos que los caminos son disjuntos entre sí salvo por los vértices de sus extremos y que el ciclo formado puede tener aristas entre vértices de dos caminos P_i y P_j siempre que $i \neq j$ (ya que cada camino debe ser un camino inducido del grafo). La *multilongitud* de $\mathcal{C}$ se define como $\sum_{i=1}^k |P_i|$, donde $|P_i|$ es la cantidad de vértices de P_i. Un ciclo de caminos impar es un ciclo de caminos con multilongitud impar. El *grafo de cuerdas* $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ de un ciclo de caminos $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_k\}$, tiene un vértice p_i asociado a cada P_i en $\mathcal{C}$ y una arista conecta dos vértices p_i y p_j si y solo si existe una arista entre

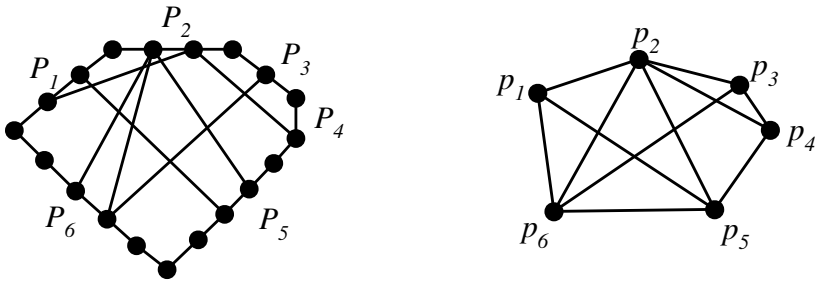

Figura 2.6: Un ciclo de caminos impar $\mathcal{C}$ y el grafo de cuerdas $\mathcal{H}(\mathcal{C})$.

un vértice de P_i y otro de P_j (notar que todo par P_i y P_j consecutivos cumple indefectiblemente con esta condición). La Figura 2.6 muestra un ejemplo de un ciclo de caminos impar (con multilongitud 25) y su correspondiente grafo de cuerdas.

Teorema 2.3.2 *Dado un grafo G y un conjunto de colores C, el grafo $\mathcal{S}_G^C$ tiene un agujero impar con longitud L si y solo si el grafo G tiene un agujero impar con longitud L o un ciclo de caminos impar $\mathcal{C}$ con multilongitud L y $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) \leq |C|$.*

Demostración. Demostraremos primero la implicación hacia la derecha. Sea $H = \{(v_1, c_1), \ldots, (v_L, c_L)\} \subseteq V(\mathcal{S}_G^C)$ un agujero impar inducido de $\mathcal{S}_G^C$. Sea $E_H = \{w_1w_2, w_2w_3, \ldots, w_{L-1}w_L, w_Lw_1\}$ el conjunto de aristas del agujero inducido, donde $w_i = (v_i, c_i)$. Nótese que un vértice de G puede aparecer en dos vértices w_i y w_j de H sólo si éstos son consecutivos en H, ya que esto implica que $w_iw_j \in E_H$ y H es un agujero. Más aun, tal vértice de G puede aparecer en a lo sumo dos vértices de H, por la misma razón. Otra observación pertinente es que si $v_i \neq v_{i+1}$, entonces $c_i = c_{i+1}$ y si $c_i \neq c_{i+1}$, entonces $v_i = v_{i+1}$ (tomando $L + 1 := 1$). Sea $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, L\}$ el conjunto de posiciones en las que se produce un "cambio de color" en el ciclo, es decir, los índices i tales que $c_i \neq c_{i-1}$ (i.e., $v_i = v_{i-1}$), considerando el índice 0 como L. Si $I = \emptyset$ entonces $\{v_1, \ldots, v_L\}$ induce un agujero impar de G y no hay nada más que demostrar. Supongamos entonces que $I \neq \emptyset$, y por lo tanto $|I| \geq 2$, pues no podría haber solo un cambio de color a lo largo del ciclo. Supongamos también, s.p.d.g., que $i_1 < \ldots < i_k$ y para cada $j = 1 \ldots, k$, definimos $P_j = \{v_{i_j}, \ldots, v_{i_{j+1}-1}\}$ (con $k + 1 = 1$). Como H es un agujero, no puede haber dos cambios de color seguidos (pues al mantenerse el mismo vértice habría una cuerda), con lo cual cada $|P_j| > 1$. Además, cada P_j induce un camino sin cuerdas en G, ya que $c_{i_j} = \cdots = c_{i_{j+1}-1}$ y H es un agujero. Como la concatenación de $P_1, \ldots, P_k$ forma un ciclo simple de G, entonces $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ es un ciclo de caminos impar de G cuya multilongitud es L. Dado el grafo de cuerdas $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, asignamos el color c_{i_j} al vértice p_j, para $j = 1, \ldots, k$. Notemos que $c_{i_j} \neq c_{i_{j+1}}$, ya que $i_{j+1} \in I$. Además, si p_j y p_t son

adyacentes en $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, entonces existe una arista uniendo un vértice de P_j con uno de P_t. Así, $c_{i_j} \neq c_{i_t}$, ya que de otra forma H no sería un agujero. Por lo tanto, la asignación dada representa un coloreo válido de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ y usa colores de C, así que $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) \leq |C|$.

Para la implicación hacia la izquierda, es sencillo ver que si G tiene un agujero impar $\{v_1, \ldots, v_L\}$, entonces $\{(v_1, c), \ldots, (v_L, c)\}$ induce un agujero impar de $\mathcal{S}_G^C$, para todo $c \in C$. Supongamos entonces que G no tiene un agujero impar y que $\mathcal{C} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ es un ciclo de caminos impar de G con multilongitud L, tal que $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) \leq |C|$. Tomemos un coloreo de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ que use colores de C y sea c_j el color asignado a p_j. Demostraremos que $H = \{(v, c_j) : j = 1, \ldots, k \text{ y } v \in P_j\}$ induce un agujero impar de $\mathcal{S}_G^C$ con longitud L. Los caminos de $\mathcal{C}$ son disjuntos salvo por los vértices de unión entre caminos, y los colores asignados a dos caminos consecutivos son distintos. Esto significa que al construir el conjunto de vértices para H, en ningún momento se repite un par (v, c), y esto prueba que la longitud de H es $\sum_{i=1}^{k} |P_i| = L$. Resta verificar que H induce efectivamente un agujero impar de $\mathcal{S}_G^C$.
Cada camino (sin cuerdas) $P_j \in \mathcal{C}$ se corresponde con el camino (sin cuerdas) $P'_j = \{(v, c_j) : v \in P_j\}$ en $\mathcal{S}_G^C$ y sabemos además que existe una arista entre los vértices (v, c_j) y (v, c_{j+1}) donde v es el último (resp. el primer) vértice del camino P_j (resp. P_{j+1}). Esto prueba que H es un ciclo de $\mathcal{S}_G^C$. Supongamos que H no induce un agujero, y por ende existe una arista entre un vértice $w_1 = (v_1, c_j) \in P'_j$ y otro $w_2 = (v_2, c_i) \in P'_i$, con $i \neq j$, tal que $w_1 w_2$ no es parte del ciclo. Entonces, $v_1 \neq v_2$ ya que P_j y P_i son disjuntos (salvo quizás en los extremos pero estamos en el caso en que $w_1 w_2$ no es parte del ciclo). Entonces $c_i = c_j$ y existe una arista $v_1 v_2$ en G. Pero entonces, la arista $p_j p_i$ existe en $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, contradiciendo así el hecho de que la asignación es un coloreo válido. Por lo tanto, H induce un agujero de $\mathcal{S}_G^C$. □

Corolario 2.3.1 *Dado un grafo G y un conjunto de colores C, el grafo $\mathcal{S}_G^C$ es perfecto si y solo si G es perfecto y no tiene un ciclo de caminos impar $\mathcal{C}$ con $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) \leq |C|$.*

El Corolario 2.3.1 caracteriza los grafos G tales que $\mathcal{S}_G^C$ es un grafo perfecto. Sin embargo, en ciertos casos es posible dar una caracterización de esta clase de grafos un poco más aplicable que la dada en el corolario. Un *diamante* es un grafo que se obtiene al quitar una arista de K_4 y un grafo *cordal* es un grafo que no contiene ciclos de cuatro o más vértices como subgrafos inducidos. Se prueba en [1] que un grafo es un grafo block si y solo si es cordal y no tiene diamantes como subgrafos inducidos. Recurriendo a esta caracterización, el siguiente teorema implica que la familia de grafos que satisfacen las propiedades del Corolario 2.3.1 es exactamente la de los grafos block, siempre que $|C| > 2$.

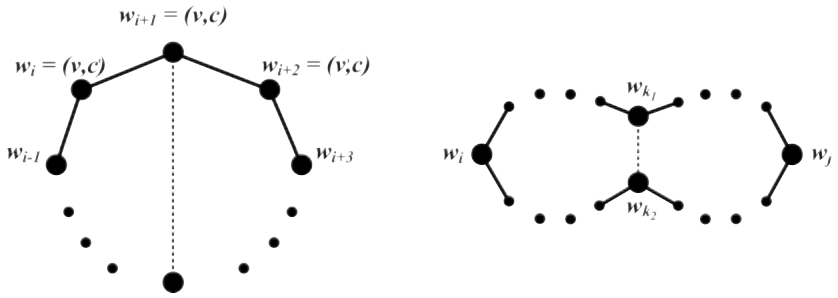

Figura 2.7: Agujeros usados en la demostración del Teorema 2.3.3.

Teorema 2.3.3 *Los grafos block no contienen ciclos de caminos impares. Más aun, un grafo perfecto sin ciclos de caminos impares $\mathcal{C}$ con $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) = 3$ es un grafo block, con lo cual no contiene ningún ciclo de caminos impar.*

Demostración. Sea $G = (V, E)$ un grafo block y C un conjunto de colores. Supongamos que $\mathcal{S}_G^C$ tiene un agujero $H = \{w_1, \ldots, w_{|H|}\}$, con $w_i = (v_i, c_i)$. En lo siguiente, usaremos subíndices módulo $|H|$. Supongamos primero que los vértices $v_1, \ldots, v_{|H|}$ inducen un completo de G (i.e., son parte de una clique de G). Claramente, existe w_i con $c_i \neq c_{i+1}$, pues de lo contrario H induciría una clique de $\mathcal{S}_G^C$; así, $v_i = v_{i+1}$. También, $v_i \neq v_{i+2}$, pues si no existiría una cuerda entre w_i y w_{i+2}; entonces c_{i+1} tiene que ser igual a c_{i+2}. Es decir, existen $v, v' \in V$ y $c, c' \in C$ tales que $w_i = (v, c')$, $w_{i+1} = (v, c)$ y $w_{i+2} = (v', c)$. Esto implica que alguno de los vértices del camino $\{w_{i+3}, w_{i+4}, \ldots, w_{i-1}\}$ debe utilizar o bien el vértice v o bien el color c, y por lo tanto existe una arista entre tal vértice y w_{i+1}, lo cual contradice el hecho de que H sea un agujero. La Figura 2.7 (izquierda) ilustra estas estructuras; la arista punteada identifica la cuerda del ciclo. Supongamos entonces que los vértices $v_1, \ldots, v_{|H|}$ no inducen un completo de G, con lo cual existen w_i y w_j tales que $v_i v_j \notin E$, i.e., v_i y v_j pertenecen a cliques maximales distintas de G. Así, debe existir un vértice $v \in V$ tal que $v = v_{k_1}$ con $i < k_1 < j$ y tal que $v = v_{k_2}$ con $j < k_2 < i$ (recordar que estamos usando índices módulo $|H|$). Pero entonces $v_{k_1} = v_{k_2}$ lo cual implica que H no era un agujero. La Figura 2.7 (derecha) ilustra estas estructuras; nuevamente se identifica la cuerda del ciclo con una arista punteada. Esto prueba que $\mathcal{S}_G^C$ no contiene agujeros, sea cual sea el conjunto de colores C. Por lo tanto, el Teorema 2.3.2 implica que G no puede tener un ciclo de caminos impares.

Supongamos ahora que $G = (V, E)$ es perfecto y no tiene ningún ciclo de caminos impar $\mathcal{C}$ con $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) = 3$. Veremos que G no tiene diamantes inducidos ni es un grafo cordal. Supongamos que existe un diamante en G con vértices $a, b, c, d \in V$, tales que $ac \notin E$. Tomemos $P_1 = \{a, b, c\}$, $P_2 = \{c, d\}$, y $P_3 = \{d, a\}$. Claramente, $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, P_3\}$ es un ciclo de caminos impar y $\mathcal{H}(\mathcal{C})$

es un triángulo, con lo que $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) = 3$, una contradicción. Supongamos ahora que G contiene un agujero $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Como G es perfecto, entonces k es par. Tomemos entonces $P_1 = \{a_1, a_2\}$, $P_2 = \{a_2, a_3\}$, y $P_3 = \{a_3, \ldots, a_k, a_1\}$. Nuevamente, $\mathcal{C} = \{P_1, P_2, P_3\}$ es un ciclo de caminos impar y $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ es un triángulo, con lo cual $\chi(\mathcal{H}(\mathcal{C})) = 3$, otra contradicción. Por lo tanto, G no contiene ni un diamante ni un agujero como subgrafos inducidos, lo que implica que G es un grafo block. □

Corolario 2.3.2 *Dado un grafo G y un conjunto de colores C con $|C| > 2$, el grafo $\mathcal{S}_G^C$ es perfecto si y solo si G es un grafo block.*

Para $|C| = 2$, existen grafos G que no siendo block producen un grafo $\mathcal{S}_G^C$ perfecto. Un ejemplo simple es el diamante y un caso más general es cualquier grafo completo sin una de sus aristas. Para $|C| = 1$, queda claro que $\mathcal{S}_G^C$ es perfecto si y solo si G también lo es, ya que ambos grafos coinciden.

El Corolario 2.3.1 y el Teorema 2.3.3 implican que las restricciones de no negatividad junto con las restricciones (2.1) y las desigualdades clique (2.6) aplicadas a las cliques de $\mathcal{S}_G^C$, brindan una caracterización completa de $P_{\text{col}}^{\text{s}}(G)$ cuando G es un grafo block. Por otro lado, de la Observación 2.3.1 sabemos que una clique de $\mathcal{S}_G^C$, o bien es una clique básica o bien proviene de una clique de G. Por lo tanto, la conjunción de estos resultados indica que las restricciones (2.1) y las desigualdades clique (2.6) dan una caracterización completa de $P_{\text{col}}^{\text{s}}(G)$ cuando G es un grafo block, brindando así una demostración alternativa del Teorema 2.2.3.

CAPÍTULO 3

La formulación por representantes asimétrica

Campêlo, Corrêa y Frota propusieron en 2004 una nueva formulación para problemas de coloreo: la formulación por representantes [13]. A diferencia del modelo estándar estudiado en el Capítulo 2, esta formulación no identifica el color asignado a cada vértice, sino que simplemente realiza una partición del grafo en clases de color. Si bien esto evita ciertos problemas de simetría en los poliedros, veremos que en la formulación presentada en 2004 surgen otros problemas de simetría. En 2008, Campêlo, Campos y Corrêa, presentan la formulación por representantes asimétrica, en la cual se resuelven estos problemas de simetría y se logra una relación uno a uno entre los coloreos de un grafo y el poliedro correspondiente asociado a este modelo.

En este capítulo estudiamos los poliedros asociados a la *formulación por representantes asimétrica* para problemas de coloreo de grafos. En primera instancia detallamos el modelo presentado en [13] y la reformulación asimétrica del mismo presentada unos años más tarde en [12]. Proponemos luego una reformulación de la versión asimétrica del modelo que resulta en una formulación más compacta de un poliedro equivalente y presentamos versiones de esta formulación para los problemas de *max-coloring* y *precoloring extension*. Mostramos que los problemas de optimización en los poliedros asociados son (en cierta forma) polinomialmente equivalentes. Por otro lado, mostramos que el poliedro de coloreo asociado a la formulación compacta para un grafo G coincide con el poliedro de los conjuntos independientes de un grafo particular $\mathcal{R}^{\prec}_{G}$. Este tipo de poliedros fue ampliamente estudiado en la literatura, con lo cual el resultado anteriornos permite hallar descripciones completas

para el poliedro de coloreo utilizando resultados previos sobre el poliedro de conjuntos independientes. Estudiamos entonces la relación entre G y $\mathcal{R}_G^{\prec}$ para algunas familias de grafos y presentamos caracterizaciones completas para los poliedros de coloreo asociados a éstas.

3.1. La formulación por representantes

Dado un gafo $G = (V, E)$, llamamos $\overline{G} = (V, \overline{E})$ al grafo complemento de G. Decimos que un grafo $G' = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, y es un *subgrafo inducido* si $V' \subseteq V$ y $E' = \{uv \in E : u, v \in V'\}$. Decimos además que G' es un subgrafo *generador* de G si $V' = V$. Para un subconjunto de vértices $W \subseteq V$, definimos $G[W]$ como el subgrafo de G inducido por los vértices de W. Dado un vértice $u \in V$, la *vecindad* (resp. *anti-vecindad*) de u es $N(u) = \{v \in V : uv \in E\}$ (resp. $\bar{N}(u) = \{v \in V : uv \in \overline{E}\}$).

En la formulación por representantes presentada en [13], un coloreo de G se determina por la partición del grafo en las clases de color que éste define, y cada clase es "representada" por uno de sus miembros. Es decir, en cada clase de color $S \subseteq V$, existe un vértice $u \in S$ que se elije como el representante de la clase. Para cada par ordenado de vértices $(u, v) \in V \times V$ con $uv \notin E$, el modelo utiliza una variable binaria x_{uv} para indicar si el vértice u es el "representante" de la clase de color asignada al vértice v o no. Se utiliza además una variable binaria x_{uu} para cada vértice $u \in V$, que indica si u es el representante de su propia clase o no. En este capítulo, usaremos la notación $x(u, W)$ y $x(W, u)$ para denotar las sumas $\sum_{v \in W} x_{uv}$ y $\sum_{v \in W} x_{vu}$, respectivamente. Con estas definiciones, un coloreo válido de G es un vector que cumple las siguientes restricciones:

$$x_{uu} + x(\bar{N}(u), u) = 1 \qquad \forall u \in V \tag{3.1}$$

$$x(u, K) \leq x_{uu} \qquad \forall u \in V,\ \forall \text{ clique } K \subseteq \bar{N}(u) \tag{3.2}$$

$$x_{uu}, x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad \forall u \in V,\ \forall v \in \bar{N}(u) \tag{3.3}$$

Las restricciones (3.1) aseguran que todo vértice sea representado por uno de sus anti-vecinos o bien por sí mismo y las restricciones (3.2) evitan que el vértice u represente a algún otro vértice si u no es un representante él mismo. A su vez, las restricciones (3.2) evitan que u represente simultáneamente a dos de sus anti-vecinos, si es que existe una arista entre ellos.

En la formulación (3.1)-(3.3), dado un coloreo de G, el representante de una clase de color puede ser cualquiera de los vértices de la misma. Así, un coloreo de G está representado por muchas soluciones factibles, con lo cual los poliedros asociados a esta formulación presentan cierta simetría en este sentido. Para evitar este problema, en [12] se presenta una variante de la formulación

por representantes en la cual el representante de una clase de color está predeterminado de antemano. En dicha formulación, se establece un orden para los vértices del grafo y el representante de una clase de color es el vértice de menor orden en la clase. Con esta reformulación se evita toda simetría en los poliedros asociados, logrando una relación uno a uno entre los coloreos de G y las soluciones factibles del modelo. Esta nueva formulación es la que se conoce con el nombre de *formulación por representantes asimétrica* (o en inglés, *asymetric representatives formulation*).

Dado un grafo $G = (V, E)$ y el orden total $\prec$ definido sobre el conjunto de vértices, la anti-vecindad de un vértice $u \in V$ se divide en dos conjuntos: la *anti-vecindad inferior* $\bar{N}^{\text{L}}(u) = \{v \in \bar{N}(u) : v \prec u\}$ y la *anti-vecindad superior* $\bar{N}^{\text{U}}(u) = \{v \in \bar{N}(u) : u \prec v\}$. En la formulación *asimétrica*, se mantienen las variables x_{uu} para cada $u \in V$, pero las variables x_{uv} se restringen solo a los vértices $v \in \bar{N}^{\text{U}}(u)$. Es decir, u puede representar a v solo si $u \prec v$. Así, el representante de una clase de color será siempre el vértice de menor orden en el conjunto. La formulación del modelo con estas definiciones es levemente diferente a la anterior. En este caso, un coloreo válido de G es un vector que satisface las siguientes restricciones:

$$x_{uu} + x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u) = 1 \qquad \forall u \in V, \tag{3.4}$$

$$x(u, K) \leq x_{uu} \qquad \forall u \in V,\ \forall \text{ clique } K \subseteq \bar{N}^{\text{U}}(u), \tag{3.5}$$

$$x_{uu}, x_{uv} \in \{0, 1\} \qquad \forall u \in V,\ \forall v \in \bar{N}^{\text{U}}(u), \tag{3.6}$$

El problema clásico de coloreo de vértices puede resolverse con esta formulación minimizando la cantidad de representantes en la solución, i.e., la función objetivo es la suma de las variables x_{uu}, para $u \in V$. A continuación analizamos un poco más esta formulación y presentamos una versión más compacta de la misma.

3.1.1. Una reformulación más compacta

Cada variable x_{uu} de la formulación (3.4)-(3.6) puede despejarse de la ecuación (3.4), quedando $x_{uu} = 1 - x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u)$. A raíz de una sugerencia de Campêlo y Campos [11], proponemos una reformulación de este modelo en la cual estas variables son reemplazadas en las restricciones (3.5), quedando estas últimas de la siguiente forma:

$$x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u) + x(u, K) \leq 1 \qquad \forall u \in V,\ \forall \text{ clique } K \subseteq \bar{N}^{\text{U}}(u). \tag{3.7}$$

De esta manera, las variables x_{uu} y las ecuaciones (3.4) pueden eliminarse de la formulación dejando una versión más compacta de la misma solamente con la familia de restricciones (3.7). Para esta reformulación, es preciso reescribir la

función objetivo de la siguiente manera:

$$\text{mín} \sum_{u \in V} x_{uu} = \text{mín} \sum_{u \in V} \Big(1 - x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u)\Big) = \text{máx} \sum_{u \in V} x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u) - |V|,$$

Como se puede ver, esta nueva expresión busca maximizar la cantidad de vértices que están representados por otros, lo cual es equivalente a minimizar la cantidad de representantes en el coloreo obtenido.

Esta reformulación del modelo es de por sí interesante por el simple hecho de ser más compacta, pero veremos además, en la Sección 3.2, que esta reformulación nos permite deducir importantes resultados para el desarrollo de este trabajo. Antes de avanzar sobre este tema, veremos a continuación algunos resultados que siguen la misma línea que el resultado planteado en el Teorema 2.1.1 para el modelo estándar (del Capítulo 2) los cuales a su vez permiten llegar a una conclusión para la formulación por representantes equivalente a la que plantea el Teorema 2.1.2 para el modelo estándar.

El problema de *max-coloring* Recordemos primero que este problema pide hallar un coloreo minimizando la suma de los pesos de las clases de color, donde el peso de una clase S está dado por el máximo peso entre los vértices de S, para una determinada función de peso $\omega : V \to \mathbb{R}_+$. La formulación por representantes asimétrica presentada más arriba (así como la reformulación compacta de la misma) se corresponde con el problema clásico de coloreo de vértices. Sin embargo, utilizando un orden particular en el conjunto de vértices del grafo, este modelo puede adaptarse para resolver el problema de *max-coloring*. Como especificamos, dado un orden de los vértices, el representante de una clase de color es el vértice con el índice más bajo entre los de la misma clase. Siendo así, si se utiliza la función de peso ω para ordenar los vértices del grafo en forma no creciente, entonces el representante de una clase de color será siempre un vértice con peso máximo dentro de la clase. Es necesario además reescribir la función objetivo para reflejar el propósito del problema de *max-coloring*, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\text{mín} \sum_{S \in \mathbf{S}} \text{máx}\{\omega(v) : v \in S\} &= \text{mín} \sum_{u \in V} \omega(u) \cdot x_{uu} \\
&= \text{mín} \sum_{u \in V} \omega(u) \cdot (1 - x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u)) \\
&= \text{máx} \sum_{u \in V} \omega(u) \cdot x(\bar{N}^{\text{L}}(u), u) - \sum_{u \in V} \omega(u)
\end{aligned}$$

Como se observa, la función objetivo es similar a la función objetivo del problema clásico pero cada variable x_{wu} se multiplica por el peso del vértice u. Esto es coherente con el hecho de que el problema clásico de coloreo es un caso particular del problema de *max-coloring* en el cual $\omega(u) = 1$, para todo $u \in V$ (en cuyo caso las expresiones de ambas funciones objetivo coinciden).

El problema de *precoloring extension* Dado un precoloreo $\rho : V' \to C$, para un cierto $V' \subseteq V$, el problema de *precoloring extension* pide extender tal coloreo a todo el grafo utilizando en total la menor cantidad de colores. Al igual que para el problema de *max-coloring*, adaptaremos la formulación por representantes para modelar el problema de *precoloring extension*. Para ello utilizamos un orden particular sobre los vértices del grafo. Dado el precoloreo ρ, definimos $\rho^{-1}(c) := \{v \in V' : \rho(v) = c\}$, para cada color $c \in C$. Decimos que un orden $\prec$ es *consistente* con ρ si para cada vértice no precoloreado w (i.e., $w \in V \setminus V'$) y cada color c con $\rho^{-1}(c)$ no vacío, existe al menos un vértice $v \in \rho^{-1}(c)$ tal que $v \prec w$. Vale notar que hallar un orden consistente es una tarea trivial para cualquier precoloreo ρ, por ejemplo, tomando un vértice de cada $\rho^{-1}(c)$ no vacío y comenzando el orden con estos vértices. Para un orden $\prec$ consistente con ρ, definimos

$$\text{rep}(v) = \min_{\prec}\{u \in \rho^{-1}(\rho(v))\}$$

para todo $v \in V'$. En otras palabras, $\text{rep}(v)$ es el menor de los vértices precoloreados con el mismo color que v. Utilizando un orden consistente con ρ, se puede ver que la formulación por representantes asimétrica para el problema de *precoloring extension* queda dada por (3.6)-(3.7) y las siguientes restricciones adicionales

$$x_{uv} = 1 \qquad \forall uv \in \overline{E} \text{ tal que } u = \text{rep}(v). \tag{3.8}$$

La función $\text{rep}(v)$ identifica al representante de cada clase de vértices precoloreados para el orden consistente dado y las restricciones (3.8) aseguran que cada vértice precoloreado sea representado por el correspondiente representante precoloreado. Por otro lado, los vértices no precoloreados no se restringen a ningún representante en particular.

Dado un grafo $G = (V, E)$, un orden $\prec$ para V y un precoloreo $\rho : V \to \mathbb{N}$, llamamos en este capítulo $P^{\text{R},\prec}_{\text{col}}(G)$ (resp. $P^{\text{R},\prec}_{\text{pre}}(G, \rho)$) a la cápsula convexa de los puntos $x \in \mathbb{R}^{|\overline{E}|}$ que satisfacen las restricciones (3.6)-(3.7) (resp. (3.6)-(3.8)). Si $\mathcal{G}$ es una familia de grafos, entonces $P^{\text{R},\prec}_{\text{col}}(\mathcal{G})$ y $P^{\text{R},\prec}_{\text{pre}}(\mathcal{G}, \rho)$ denotan las correspondientes familias de polítopos. Es posible que omitamos el orden $\prec$ en las definiciones anteriores siempre que éste sea claro por el contexto.

Teorema 3.1.1 *Dada una familia de grafos $\mathcal{G}$, si el problema de separación sobre $P^{\text{R},\prec}_{col}(G)$ puede resolverse en tiempo polinomial para cualquier $G \in \mathcal{G}$ y cualquier orden $\prec$, entonces para cualquier $G \in \mathcal{G}$ y cualquier precoloreo ρ, el problema de separación sobre $P^{\text{R},\prec_2}_{pre}(G, \rho)$ puede ser resuelto en tiempo polinomial para cualquier orden $\prec_2$ consistente con ρ.*

Demostración. Sea $\prec_2$ un orden consistente con ρ y sea $Q = \{x \in \mathbb{R}^{|\overline{E}|} : x_{uv} = 1$

para todo $u, v \in V$ tal que $u = \text{rep}(v)\}$. Veremos que

$$P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho) = P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G) \cap Q. \tag{3.9}$$

Para ver que $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G) \cap Q \subseteq P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$, tomemos un punto $\hat{x} \in P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G) \cap Q$. Como $\hat{x} \in P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G)$, entonces $\hat{x}$ es combinación convexa de coloreos $x^1, \ldots, x^k$ de G. Ya que $\hat{x} \in Q$, entonces $\hat{x}_{uv} = 1$ para cada $u, v \in V$ tal que $u = \text{rep}(v)$, y esto implica que $\hat{x}^j_{uv} = 1$ para todo $j = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, $x^j \in Q$ para $j = 1, \ldots, k$. Entonces, todos estos coloreos pertenecen a $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$ y lo mismo ocurre con $\hat{x}$.
Para ver que $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho) \subseteq P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G) \cap Q$, tomemos ahora un punto $\hat{x} \in P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$. Este punto es una combinación convexa de coloreos de G y por lo tanto es trivial ver que $\hat{x} \in P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G)$. Además, estos coloreos (cuya combinación da $\hat{x}$) son tales que cada vértice $u \in V$ tal que $u = \text{rep}(u)$ es el representante de su clase de color y u representa a todos los otros vértices $v \in V$ con $u = \text{rep}(v)$. Por lo tanto, todos estos coloreos pertenecen a Q y lo mismo ocurre con $\hat{x}$, implicando que $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho) \subseteq P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G) \cap Q$. Esto prueba que (3.9) se cumple.

Supongamos que el problema de separación sobre $P^{\text{R},\prec}_{\text{col}}(G)$ puede ser resuelto en tiempo polinomial para cualquier orden $\prec$. Entonces, un punto $\hat{x} \notin P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$ o bien no pertenece a $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G)$ o bien tiene $\hat{x}_{uv} < 1$ para algún $u, v \in V$ tal que $u = \text{rep}(v)$. Así, para separar de $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$ un punto cualquiera simplemente debemos verificar si $x_{uv} = 1$ para todo $u, v \in V$ con $u = \text{rep}(v)$ y, si esto se verifica, separar entonces el punto de $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{col}}(G)$ (en tiempo polinomial). Por lo tanto, el problema de separación sobre $P^{\text{R},\prec_2}_{\text{pre}}(G,\rho)$ puede resolverse en tiempo polinomial. □

En virtud de la equivalencia entre los problemas de separación y optimización poliedral [34] mencionada en el Capítulo 1 de esta tesis, se llega a la siguiente conclusión.

Corolario 3.1.1 *Dada una familia de grafos $\mathcal{G}$, si el problema de optimización sobre $P^{\text{R},\prec}_{col}(G)$ se puede resolver en tiempo polinomial para cualquier $G \in \mathcal{G}$ y cualquier orden $\prec$, entonces para cualquier $G \in \mathcal{G}$ y cualquier precoloreo ρ, el problema de optimización sobre $P^{\text{R},\prec_2}_{pre}(G,\rho)$ puede resolverse en tiempo polinomial para cualquier orden $\prec_2$ consistente con ρ.*

Finalmente, estos resultados nos permiten llegar a una conclusión importante acerca del potencial de la formulación por representantes analizada en este capítulo.

Teorema 3.1.2 *Sea $\mathcal{G}$ una familia de grafos. Si el problema de* precoloring extension *o el problema de* max-coloring *es NP-completo sobre $\mathcal{G}$, entonces el problema de*

optimización/separación sobre $P_{col}^{R,\prec}(\mathcal{G})$ con un orden $\prec$ arbitrario es también NP-completo.

Demostración. Supongamos que el problema de optimización sobre $P_{\text{col}}^{R,\prec}(G)$ se puede resolver en tiempo polinomial para $G \in \mathcal{G}$ y cualquier orden $\prec$. Sabemos que utilizando la función de peso para ordenar los vértices de G podemos resolver en tiempo polinomial el problema de *max-coloring* sobre $P_{\text{col}}^{R,\prec}(G)$. Más aun, para cualquier precoloreo ρ, podemos optimizar sobre $P_{\text{pre}}^{R,\prec_2}(G,\rho)$ con un orden consistente $\prec_2$ en tiempo polinomial, resolviendo así el problema de *precoloring extension* en G y ρ. Ambos problemas serían entonces polinomiales, lo cual contradice la hipótesis.

□

El Teorema 3.1.2 plantea para la formulación por representantes un resultado equivalente al que plantea el Teorema 2.1.2 para el modelo estándar del Capítulo 2. En esta ocasión, el teorema implica que aun cuando el problema clásico de coloreo sea polinomial sobre $\mathcal{G}$, el poliedro asociado a la formulación por representantes no tendrá una descripción elegante (para un orden arbitrario de los vértices) si el problema de *precoloring extension* o el problema de *max-coloring* son NP-completos sobre $\mathcal{G}$. Esto podría limitar el alcance del análisis para esta formulación ya que sabemos que estos problemas son NP-difíciles para muchas clases de grafos. Sin embargo, existen varias clases para las cuales se conocen algoritmos polinomiales para estos problemas, con lo cual los resultados de esta formulación en estas clases con el fin de hallar caracterizaciones poliedrales elegantes no se ven demasiado comprometidos (o al menos no tanto como en el caso del modelo estándar).

3.2. De conjuntos independientes y matchings

En el Capítulo 2 establecimos una relación entre el poliedro de coloreo del modelo estándar y el poliedro de conjuntos independientes de un cierto grafo auxiliar. En esta sección mostraremos una relación similar aunque mucho más fuerte entre $P_{\text{col}}^{R,\prec}(G)$ y el poliedro de conjuntos independientes de un cierto grafo relacionado con G y con el orden $\prec$. Recordemos que un conjunto independiente en un grafo es un conjunto de vértices disjuntos dos a dos y que llamamos $STAB(H)$ a la cápsula convexa de los vectores característicos de todos los conjuntos independientes de un grafo $H = (V_H, E_H)$. Existen varias formulaciones distintas para $STAB(H)$ además de la mencionada en el Capítulo 2, y una de ellas se basa en las bien conocidas *desigualdades clique*. En esta formulación, $STAB(H)$ se describe como la cápsula convexa de los

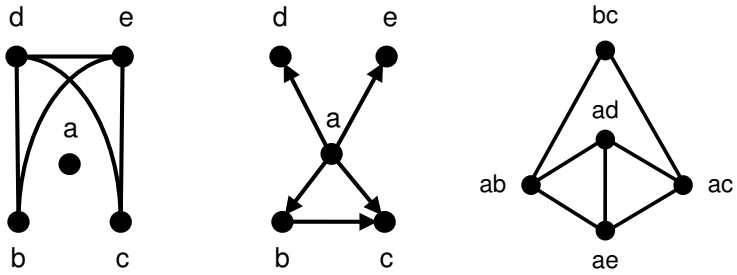

Figura 3.1: Un grafo G, una orientación $\prec$ de $\overline{G}$ y el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ resultante.

vectores $y \in \mathbb{R}^{|V_H|}$ que satisfacen las siguientes restricciones:

$$\sum_{u \in K} y_u \leq 1 \qquad \forall K \subseteq V_H, \text{ siendo } K \text{ una clique}, \tag{3.10}$$

$$y_u \in \{0,1\} \qquad \forall u \in V_H. \tag{3.11}$$

Como mostramos en la sección anterior, la formulación de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ está dada por las restricciones (3.6)-(3.7). Notemos que todos los coeficientes no nulos de las restricciones (3.7) son 1 y el mismo valor toma el lado derecho. Así, las restricciones (3.6)-(3.7) representan la descripción de $STAB(H)$ para un cierto grafo H, distinto de G pero fuertemente relacionado a éste. Veremos a continuación cuál es este grafo y algunas de las propiedades que cumple.

Definimos el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ cuyo conjunto de vértices contiene un vértice por cada anti-arista de G (es decir, un vértice por cada arista de $\overline{G}$). Por otro lado, dos vértices e_1 y e_2 de $\mathcal{R}_G^{\prec}$ serán adyacentes en este grafo si las correspondientes anti-aristas e_1 y e_2 de G aparecen juntas en alguna restricción (3.7). Formalmente, el conjunto de vértices de $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es $V(\mathcal{R}_G^{\prec}) = \overline{E}$ y el conjunto de aristas es

$$E(\mathcal{R}_G^{\prec}) = \{(uv)(u'v') \in \overline{E} \times \overline{E} : x_{uv}, x_{u'v'} \in \sup(\pi, \pi_0), \text{ para algún } (\pi, \pi_0) \text{ de (3.7)}\},$$

donde $\sup(\pi, \pi_0) = \{x_{uv} : \pi_{uv} \neq 0\}$, es decir, $\sup(\pi, \pi_0)$ es el *soporte* de la desigualdad dada por (π, π_0). La Figura 3.1 muestra una ilustración de un grafo G, una orientación $\prec$ de su complemento $\overline{G}$ (una flecha de u a v indica que $u \prec v$) y el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ resultante. Con estas definiciones, llegamos a un resultado interesante acerca de esta formulación:

Teorema 3.2.1 *Dado un grafo $G = (V, E)$ y un orden $\prec$ sobre V, tenemos que $x \in \{0,1\}^{|\overline{E}|}$ es el vector de incidencia de un coloreo válido de G si y solo si x es el vector característico de un conjunto independiente de $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Es decir,*

$$P_{col}^{\text{R},\prec}(G) = STAB(\mathcal{R}_G^{\prec}).$$

Demostración. Para la inclusión hacia la derecha, tomemos un punto $\hat{x} \in P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$. Como $\hat{x} \in P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$, entonces $\hat{x}$ es la combinación convexa de coloreos $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^k$ de G. Sea $S^j := \{x_{uv} : \hat{x}^j_{uv} = 1\}$, para $j = 1, \ldots, k$. Cada coloreo $\hat{x}^j$ satisface (3.6) y (3.7), por ende para cada restricción (π, π_0) de (3.7), $|S^j \cap \sup(\pi, \pi_0)| \leq 1$. Entonces, por la definición de $\mathcal{R}^{\prec}_G$, el conjunto S^j corresponde a un conjunto independiente de $\mathcal{R}^{\prec}_G$ y así $x^j \in STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$, para $j = 1, \ldots, k$. Con lo cual, $\hat{x} \in STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$.

Para la inclusión hacia la izquierda, tomemos un punto $\hat{x} \in STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$. Como $\hat{x} \in STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$, entonces $\hat{x}$ es la combinación convexa de conjuntos independientes $\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^k$ de $\mathcal{R}^{\prec}_G$. Siendo un conjunto independiente, cada x^j satisface (3.6) y (3.7), por la definición de $\mathcal{R}^{\prec}_G$, y entonces $x^j \in P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$ para cada $j = 1, \ldots, k$. Por lo tanto, $\hat{x} \in P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$.

□

El *grafo de líneas* $L(G)$ de un grafo $G = (V, E)$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es E y tal que dos vértices e_1 y e_2 de $L(G)$ son adyacentes si las aristas e_1 y e_2 de G comparten alguno de sus extremos. En [21], Cornaz y Jost dan una reducción polinomial del problema de coloreo de vértices al problema de conjunto independiente máximo. Dado un grafo G y una orientación acíclica D de $\overline{G}$, se construye un grafo particular notado $\tilde{G}$ a partir del grafo de líneas $L(D)$, removiendo de éste todas las aristas entre pares de arcos $uv, uw \in \overline{E}$, tales que $vw \in \overline{E}$. Se muestra en [21] que existe una correspondencia uno a uno entre los conjuntos independientes de $\tilde{G}$ y los coloreos de G.

De la construcción de $\tilde{G}$, se deduce que este grafo auxiliar coincide con $\mathcal{R}^{\prec}_G$. Nuestra construcción de $\mathcal{R}^{\prec}_G$ da una interpretación alternativa (ausente en [21]) de esta correspondencia entre coloreos de G y conjuntos independientes de $\tilde{G}$ (i.e., $\mathcal{R}^{\prec}_G$), pues cada arco uv de D expresa el hecho de que u representa el color asignado a v, haciendo evidente así la "independencia" entre los arcos escogidos. Más aun, el Teorema 3.2.1 representa el argumento poliedral para la correspondencia mencionada entre coloreos y conjuntos independientes.

Como comentamos, el grafo $\tilde{G}$ de [21] se construye eliminando algunas aristas del grafo de líneas de $\overline{G}$. Tenemos por lo tanto la siguiente observación para $\mathcal{R}^{\prec}_G$.

Observación 3.2.1 *[21] $\mathcal{R}^{\prec}_G$ es un subgrafo generador de $L(\overline{G})$. Es decir, tenemos $V(\mathcal{R}^{\prec}_G) = V(L(\overline{G}))$ y $E(\mathcal{R}^{\prec}_G) \subseteq E(L(\overline{G}))$.*

Decimos que dos aristas de un grafo son adyacentes si comparten uno de sus extremos. Un *matching* en un grafo es un conjunto de aristas no adyacentes dos a dos, es decir, tal que no existe ningún vértice del grafo que pertenezca a dos

(o más) aristas del conjunto. Si todo vértice del grafo pertenece a una arista del matching se dice que el matching es *perfecto*. El *matching polytope* $MATCH(H)$ de un grafo $H = (V_H, E_H)$ es la cápsula convexa de los vectores característicos de todos los matchings de H. Es decir, $MATCH(H)$ es la cápsula convexa de todos los vectores $y \in \mathbb{R}^{|E_H|}$ que satisfacen las siguientes restricciones:

$$\sum_{v \in N(u)} y_{uv} \leq 1 \qquad \forall u \in V_H, \tag{3.12}$$

$$y_{uv} \in \{0,1\} \qquad \forall uv \in E_H. \tag{3.13}$$

Un conjunto independiente de $L(H)$ es un conjunto de vértices de este grafo no adyacentes dos a dos. Es decir, es un conjunto de aristas de H no adyacentes dos a dos. En otras palabras, es un matching de H. No es difícil ver que el matching polytope de H coincide con el stable set polytope de $L(H)$. Por este motivo, el Teorema 3.2.1 y la Observación 3.2.1 sugieren una fuerte relación entre $MATCH(\overline{G})$ (i.e., $STAB(L(\overline{G}))$) y $P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$, la cual describimos en la siguiente proposición.

Proposición 3.2.1 *Para cualquier grafo G, tenemos*

$$STAB(L(\overline{G})) = MATCH(\overline{G}) \subseteq P^{\mathrm{R},\prec}_{col}(G) = STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G).$$

Demostración. Todo matching de $\overline{G}$ contiene a lo sumo una arista incidente a un vértice u, para cualquier $u \in V$. Por lo tanto, es trivial verificar que si $x \in \{0,1\}^{|\overline{E}|}$ induce un matching de $\overline{G}$, entonces x satisface (3.7), y por ende pertenece a $P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$. Así, cualquier combinación convexa de matchings de $\overline{G}$ pertenece a $P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$. □

El resultado también se deduce de la Observación 3.2.1, que implica que cualquier conjunto independiente de $L(\overline{G})$ es un conjunto independiente de $\mathcal{R}^{\prec}_G$, y por lo tanto la inclusión entre los poliedros queda dada.

3.3. Caracterizaciones poliedrales

El stable set polytope ha sido ampliamente estudiado y se conocen ya muchas desigualdades que definen facetas del mismo. Más aun, se conocen también caracterizaciones completas del poliedro para algunas familias de grafos. Debido al Teorema 3.2.1, dada una familia de grafos $\mathcal{G}$, nos interesa conocer la estructura de la familia $\mathcal{R}^{\prec}_{\mathcal{G}} := \{\mathcal{R}^{\prec}_G : G \in \mathcal{G}\}$, ya que caracterizaciones completas de los stable set polytopes asociados a $\mathcal{R}^{\prec}_{\mathcal{G}}$ nos darán caracterizaciones completas para $P^{\mathrm{R},\prec}_{\mathrm{col}}(G)$, cuando G es un grafo de la familia $\mathcal{G}$.

3.3.1. Grafos G con $\alpha(G) \leq 2$

El *número de estabilidad* $\alpha(G)$ de un grafo G es el tamaño de un conjunto independiente máximo de G. Para grafos G con $\alpha(G) \leq 2$, el problema clásico de coloreo de vértices puede ser resuelto en tiempo polinomial [41]. Damos en esta sección una caracterización completa para $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$, cuando $\alpha(G) \leq 2$.

Proposición 3.3.1 *Dado un grafo $G = (V, E)$, tenemos que $\alpha(G) \leq 2$ si y solo si para cualquier orden $\prec$, tenemos $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(\overline{G})$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha(G) \leq 2$ y sea $u \in V$. Para cualquier orden $\prec$ de los vértices, $\bar{N}^{\text{U}}(u)$ induce un subgrafo completo de G (de lo contrario u y los extremos de la anti-arista de $\bar{N}^{\text{U}}(u)$ darían un K_3 en $\overline{G}$ y entonces $\alpha(G) > 2$). Así, la restricción (3.7) con la clique $\bar{N}^{\text{U}}(u)$ implica que para todo par de vértices $v, w \in \bar{N}^{\text{L}}(u) \cup \bar{N}^{\text{U}}(u) = \bar{N}(u)$, los vértices $uv, uw \in V(\mathcal{R}_G^{\prec})$ son adyacentes en $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Entonces, cada par de aristas de $\overline{G}$ que compartan el vértice u como extremo corresponden a vértices adyacentes de $\mathcal{R}_G^{\prec}$ y así, como u es un vértice cualquiera, $L(\overline{G})$ es un subgrafo de $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Por la Observación 3.2.1, $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(\overline{G})$.

Supongamos ahora que $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(\overline{G})$ para cualquier orden $\prec$ y supongamos que $\alpha(G) > 2$. Sea $\{u, v, w\} \in V$ un conjunto independiente de G y tomemos un orden $\prec$ tal que $u \prec v \prec w$. Con este orden, x_{uv} y x_{uw} no pueden aparecer simultáneamente en el soporte de una restricción de (3.7), pues $v, w \in \bar{N}^{\text{U}}(u)$ y $vw \notin E$. Por lo tanto, los vértices uv y uw no son adyacentes en $\mathcal{R}_G^{\prec}$, contradiciendo así el hecho de que $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(\overline{G})$, pues uv y uw sí son adyacentes en $L(\overline{G})$.

□

Como el matching polytope de un grafo coincide con el stable set polytope de su grafo de líneas, el siguiente resultado es una consecuencia directa de la Proposición 3.2.1 y la Proposición 3.3.1. A su vez, brinda un argumento poliedral para el hecho de que el problema clásico de coloreo en grafos G con $\alpha(G) \leq 2$ puede reducirse a un problema de matching en su grafo complemento. [41].

Corolario 3.3.1 *Dado un grafo G, tenemos que $\alpha(G) \leq 2$ si y solo si para todo orden $\prec$ tenemos que $STAB(L(\overline{G})) = MATCH(\overline{G}) = P_{col}^{\text{R},\prec}(G) = STAB(\mathcal{R}_G^{\prec})$.*

En 1965, Edmonds [27] demostró que las siguientes desigualdades dan una caracterización completa del matching polytope de un grafo $H = (V_H, E_H)$:

$$\sum_{v \in N(u)} x_{uv} \leq 1 \qquad \forall u \in V_H \tag{3.14}$$

$$\sum_{uv \in E_H(S)} x_{uv} \leq \frac{|S|-1}{2} \qquad \forall S \subseteq V_H, |S| \text{ impar} \tag{3.15}$$

$$x_{uv} \geq 0 \qquad \forall uv \in E_H \tag{3.16}$$

Con este hecho y el resultado del Corolario 3.3.1, podemos deducir que las restricciones (3.14)-(3.16) aplicadas al complemento de un grafo G dan una caracterización completa de $P^{\text{R,}}_{\text{col}}(G)$ si y solo si $\alpha(G) \leq 2$. Este resultado aparece (aunque sin demostración) en [21]. Lo presentamos también aquí en nuestra notación por motivos de completitud.

Teorema 3.3.1 *[21] Dado un grafo $G = (V, E)$, las restricciones (3.14)-(3.16) aplicadas a $\overline{G}$ dan una caracterización completa de $P^{\text{R,}\prec}_{col}(G)$ para cualquier orden $\prec$ si y solo si $\alpha(G) \leq 2$.*

El problema de separación de las restricciones (3.14)-(3.16) se puede resolver en tiempo polinomial [34]. Este hecho junto a los resultados del Teorema 3.1.1 y del Teorema 3.3.1, muestran que existe un algoritmo polinomial para los problemas de *precoloring extension* y *max-coloring* en grafos G con $\alpha(G) \leq 2$. No tenemos conocimiento de resultados que establezcan la complejidad algorítmica de estos problemas en esta clase de grafos; creemos que éstas eran hasta ahora problemas abiertos.

Teorema 3.3.2 *Tanto el problema de* precoloring extension *como el problema de* max-coloring *pueden resolverse en tiempo polinomial sobre grafos G con $\alpha(G) \leq 2$.*

Otra conclusión interesante surge de la reinterpretación de las *odd set inequalities* (3.15) en términos del poliedro de coloreo. Si bien sabemos que estas desigualdades son válidas para $P^{\text{R,}}_{\text{col}}(G)$ cuando $\alpha(G) \leq 2$, se puede ver que también resultan para G un grafo cualquiera, siempre que $\alpha(G[S]) \leq 2$. En particular, la desigualdad resultante en este caso está dominada por (o es la misma que) la siguiente reformulación de las *internal inequalities* de [12], ya que $\chi(G[S]) \geq \frac{|S|+1}{2}$.

Teorema 3.3.3 *[12] Dado un grafo $G = (V, E)$, un orden $\prec$ en el conjunto de vértices y un subconjunto $S \subseteq V$, la* internal inequality *definida como*

$$\sum_{u \in S} x(\bar{N}^{\text{L}}(u) \cap S, u) \leq |S| - \chi(G[S]) \tag{3.17}$$

es válida para $P^{\text{R,}\prec}_{col}(G)$. Además, (3.17) define una faceta de $P^{\text{R,}\prec}_{col}(G)$ si S induce un agujero impar o un anti-agujero impar.

Las condiciones presentadas en [12] para que (3.17) defina una faceta de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ (i.e., S induce un agujero impar o un anti-agujero impar) son suficientes pero no necesarias. En este sentido, no se da una caracterización completa para esta familia de facetas. En esta tesis no pudimos tampoco completar esta caracterización pero a continuación expandimos el conjunto de casos en los cuales las desigualdades (3.17) definen facetas de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$.

Dado un grafo $G = (V, E)$, un *vértice de corte* $u \in V$ es un vértice tal que al eliminarlo de G, se aumenta la cantidad de componentes conexas del grafo. Se dice que G es *2-conexo* si es conexo y no tiene vértices de corte. Por otro lado, G es *hypomatchable* si $G - v$ tiene un matching perfecto para todo $v \in V$. Edmonds y Pulleyblank [56] caracterizaron el subconjunto de desigualdades (3.15) que definen facetas del matching polytope. Estas desigualdades son aquellas en las que el conjunto S induce un subgrafo 2-conexo e hypomatchable. A continuación, utilizamos el mismo concepto para ampliar los resultados de [12] acerca de las *internal inequalities*.

Teorema 3.3.4 *Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subconjunto de vértices $S \subseteq V$, si $\alpha(G[S]) \leq 2$ y $\overline{G}[S]$ es 2-conexo e hypomatchable, entonces la* internal inequality *(3.17) define una faceta de $P_{col}^{\text{R},\prec}(G)$.*

Demostración. Dado que $\overline{G}[S]$ is a hypomatchable, entonces $|S|$ es impar. Además, para todo $u \in S$, es posible colorear $G[S] - u$ apareando vértices no adyacentes (con algún matching perfecto de $\overline{G}[S]$) y coloreando luego a u con un nuevo color; así, $\chi(G[S]) \leq \frac{|S|+1}{2}$. Sabemos además que $\alpha(G[S]) \leq 2$, lo que implica $\chi(G[S]) \geq \frac{|S|+1}{2}$. Se deduce entonces que $\chi(G[S]) = \frac{|S|+1}{2}$ y por lo tanto, la desigualdad (3.17) no es otra cosa que la desigualdad (3.15). Sabemos por otro lado que esta desigualdad define facetas de $MATCH(\overline{G})$ cuando $\overline{G}[S]$ es 2-conexo e hypomatchable. Como este poliedro tiene dimensión completa y (3.15) es valida para $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$, entonces por la Proposición 3.2.1, podemos asegurar que (3.17) define una faceta de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$. □

Tanto los agujeros impares como los anti-agujeros impares son grafos 2-conexos e hypomatchables, por lo tanto, el Teorema 3.3.4 generaliza los resultados de facetitud presentados en el Teorema 3.3.3.

3.3.2. Complementos de grafos sin paw

Habiendo encontrado ya una caracterización de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ para grafos con $\alpha(G) \leq 2$ (es decir, tales que $\overline{G}$ no tiene un K_3 como subgrafo), pasamos ahora a analizar una superclase de esta familia. Un *paw* es el grafo que se obtiene a partir de un K_3, agregando un cuarto vértice con grado 1. En esta sección analizamos la clase de grafos cuyos complementos no contienen un paw como subgrafo. Es preciso aclarar que el subgrafo prohibido no es necesariamente un

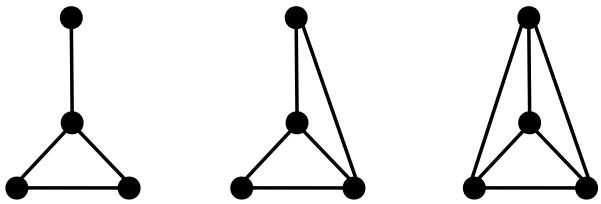

Figura 3.2: Los grafos paw, diamante y K_4.

subgrafo inducido. En términos de subgrafos inducidos prohibidos, esta sería la clase de los complementos de grafos $\{K_4$,diamante,paw$\}$-free (notemos que un *diamante* se obtiene agregando una arista al paw). La Figura 3.2 ilustra estas estructuras prohibidas para esta clase de grafos. Decimos que los grafos en esta clase son co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free. Previo al análisis de esta familia de grafos, presentamos un resultado general sobre $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ que permite encontrar la descripción de este poliedro cuando G se obtiene mediante una operación en particular a partir de otros dos grafos. Este resultado tiene un impacto similar al del Teorema 2.1.3 para el modelo estándar (que permite caracterizar el poliedro asociado cuando el grafo es una identificación en un vértice de otros dos grafos).

El *join completo* de dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo $G_1 \star G_2$ cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas es $E_1 \cup E_2 \cup (V_1 \times V_2)$. Como comentario general, notemos que cuando un grafo G es el join completo de otros grafos $G_1, \ldots, G_k$, entonces el conjunto de variables que describen $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ es la unión disjunta de los conjuntos de variables que describen los poliedros $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G_1), \ldots, P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G_k)$, ya que en la operación de join no se agregan anti-aristas entre los componentes. Más aun, cada restricción (3.7) para G usa variables restringidas únicamente a una de las componentes G_i, con $i \in \{1, \ldots, k\}$, y por lo tanto podemos decir que

$$P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G) = \{(X^1, \ldots, X^k) : X^i \in P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G_i), \text{ para } i = 1, \ldots, k\}.$$

Así, podemos dar una caracterización completa para $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ utilizando las caracterizaciones completas para los $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G_i)$.

Proposición 3.3.2 *Sea G el join completo de ciertos grafos $G_1, \ldots, G_k$ tales que $P_{col}^{\text{R},\prec}(G_i) = \{x : A^i x \leq b^i\}$, para $i = 1, \ldots, k$. Entonces,*

$$P_{col}^{\text{R},\prec}(G) = \{(x^1, \ldots, x^k) : A^i x^i \leq b^i, \text{ para } i = 1, \ldots, k\}.$$

En la siguiente proposición damos una caracterización estructural para la familia de grafos co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free.

Proposición 3.3.3 *Un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free G es el join completo de conjuntos independientes disjuntos de tamaño 3 y un subgrafo G' de G con $\alpha(G') \leq 2$.*

Demostración. La demostración es por inducción en la cantidad de conjuntos independientes de $G = (V, E)$ de tamaño mayor que 2. Si G no tiene tal conjunto, entonces $\alpha(G) \leq 2$ y no hay nada más que probar. Supongamos entonces que G contiene al menos un conjunto independiente S de tamaño mayor que 2. Como $\overline{G}$ no tiene K_4, entonces $|S| = 3$. Para cualquier vértice $v \in V \setminus S$, debe existir una arista $uv \in E$, para todo $u \in S$, de lo contrario $S \cup \{v\}$ induce un paw, un diamante o un K_4 en $\overline{G}$, contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, G es el join completo de S y $G[V \setminus S]$, y sabemos por hipótesis inductiva que $G[V \setminus S]$ es el join completo de conjuntos independientes disjuntos de tamaño 3 y un subgrafo G' de G con $\alpha(G') \leq 2$, lo cual prueba el resultado deseado.

□

Es fácil ver que si un grafo S tiene como únicos vértices a un conjunto independiente $\{u, v, w\}$, con $u \prec v \prec w$, entonces $\mathcal{R}_S^{\prec}$ es un camino de longitud 3, el cual es a su vez el grafo de líneas de un camino $P = \{u', v, w, u''\}$ con aristas $u'v, vw$ y wu'' (esto se ilustra en los grafos de la primera columna de la Figura 3.3). Así, las desigualdades (3.14)-(3.16) aplicadas a P dan una caracterización completa de $MATCH(P) = STAB(L(P)) = STAB(\mathcal{R}_S^{\prec}) = P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(S)$. Por el Teorema 3.3.1, para un grafo G' con $\alpha(G') \leq 2$, estas mismas desigualdades aplicadas a $\overline{G'}$ caracterizan $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G')$. Finalmente, sabemos por la Proposición 3.3.3 que un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free es el join completo de grafos como los arriba mencionadas y entonces, por medio de la Proposición 3.3.2 podemos deducir que las desigualdades (3.14)-(3.16) dan una caracterización completa de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$, cuando G es un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free. Restaría describir formalmente a qué grafo deben aplicarse estas restricciones para obtener dicha descripción.

Sea $G = G' \star S_1 \star \cdots \star S_k$, con $\alpha(G') \leq 2$ y tal que cada S_i induce un conjunto independiente de tamaño 3. Sea $S_i = \{u_i, v_i, w_i\}$, donde $u_i \prec v_i \prec w_i$, y definamos P_i como un camino $\{u_i', v_i, w_i, u_i''\}$ con aristas $u_i'v_i, v_iw_i$ y w_iu_i''. Definimos además $H_G^{\prec}$ como la unión disjunta de $\overline{G'}$ y cada uno de los P_i. Una observación trivial es el hecho de que $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(H_G^{\prec})$ (la Figura 3.3 ilustra estas construcciones).

Corolario 3.3.2 *Sea G un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free y $\mathcal{R}_G^{\prec} = L(H_G)$. Entonces, las desigualdades (3.14)-(3.16) aplicadas a H_G dan una caracterización completa de $P_{col}^{\text{R},\prec}(G)$.*

Recordemos que el problema de separación de las restricciones (3.14)-(3.16) se puede resolver en tiempo polinomial [34]. Siendo así, los resultados del Teorema 3.1.1 y del Corolario 3.3.2, muestran que existe un algoritmo polinomial para los problemas de *precoloring extension* y *max-coloring* en grafos co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free. Hasta donde sabemos, la complejidad algorítmica

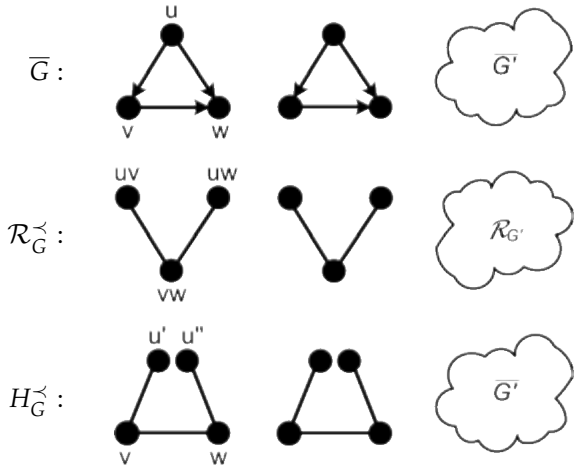

Figura 3.3: Grafos $\overline{G}$, $\mathcal{R}_G^{\prec}$ y $H_G^{\prec}$ para un grafo co-$\{K_4$, diamante, paw$\}$-free G.

de estos problemas en esta clase de grafos eran hasta ahora problemas abiertos.

Corolario 3.3.3 *Tanto el problema de* precoloring extension *como el problema de* max-coloring*, pueden resolverse en tiempo polinomial sobre la clase de grafos co-$\{K_4$,diamante,paw$\}$-free.*

3.3.3. Complementos de grafos sin *kite*

Nos movemos nuevamente a una superclase de la familia de grafos analizada en la sección anterior. Llamamos *kite* al grafo que se obtiene a partir del paw, conectando un nuevo vértice al vértice de grado 1, como se ilustra en la Figura 3.4 (izquierda). Estudiamos en esta sección la clase de grafos cuyos complementos no contienen un kite como subgrafo. Es preciso aclarar nuevamente que el subgrafo prohibido no es necesariamente un subgrafo inducido.

Un *claw* es un grafo compuesto por un vértice con tres vecinos de grado 1, como se ilustra en la Figura 3.4 (derecha). El grafo $\tilde{G}$ presentado por Cornaz y Jost fue analizado más tarde en [8] en busca de caracterizaciones estructurales. El siguiente teorema es una reformulación de uno de los resultados principales de [8].

Teorema 3.3.5 ([8]) *Para cualquier grafo G, el grafo $\tilde{G}$ (i.e., $\mathcal{R}_G^{\prec}$) es un grafo claw-free para cualquier orden $\prec$ si y solo si $\overline{G}$ no contiene un kite como subgrafo.*

En esta sección, revisamos la clase de grafos G tales que $\overline{G}$ no contiene un kite como subgrafo y damos un resultado un poco más detallado que el Teorema

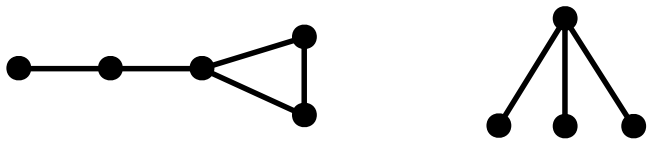

Figura 3.4: Un kite y un claw.

3.3.5. Vemos luego que este nuevo resultado tiene también otras implicaciones.

Un grafo es llamado *quasi-line* si la vecindad de todo vértice se puede particionar en dos cliques. Los grafos de líneas son una subclase de los grafos quasi-line, y estos últimos son a su vez una subclase de los grafos claw-free. El siguiente teorema da un resultado un poco más detallado que el Teorema 3.3.5, presentado en [8].

Teorema 3.3.6 *Para cualquier grafo G, el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es quasi-line para cualquier orden $\prec$ si y solo si $\overline{G}$ no contiene un kite como subgrafo.*

Demostración. Si para todo orden $\prec$ el grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es quasi-line, entonces también es claw-free y por lo tanto, por el Teorema 3.3.5, $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo.

Supongamos entonces que $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo. Dada la construcción de $\mathcal{R}_G^{\prec}$, el conjunto de vecinos de un vértice $uv \in V(\mathcal{R}_G^{\prec})$ está dado por todas las variables que aparecen en una desigualdad (3.7) junto con x_{uv}. En este sentido, la variable x_{uv} aparece en:

(i) toda desigualdad (3.7) para el vértice v, y

(ii) aquellas desigualdades (3.7) para el vértice u tales que v pertenece a la clique $K \subseteq \bar{N}^{\mathrm{U}}(u)$ correspondiente.

Para cada vértice $u \in V$, definimos

$$W_u^{\mathrm{L}} = \{wu \in V(\mathcal{R}_G^{\prec}) : w \in \bar{N}^{\mathrm{L}}(u)\},$$
$$W_u^{\mathrm{H}} = \{uw \in V(\mathcal{R}_G^{\prec}) : w \in \bar{N}^{\mathrm{U}}(u)\}.$$

El conjunto de vecinos de uv que surgen de (i) es $W_v^{\mathrm{L}} \cup W_v^{\mathrm{H}} \setminus \{uv\}$, mientras que el que surge de (ii) es $W_u^{\mathrm{L}} \cup W_{uv}^*$, donde $W_{uv}^* := \{uw \in W_u^{\mathrm{H}} : vw \in E\}$. La Figura 3.5 da una ilustración de estos conjuntos, en la cual las líneas gruesas (resp. las flechas finas) representan aristas (resp. anti-aristas) de G. Demostraremos que $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es un grafo quasi-line probando que para cada $uv \in V(\mathcal{R}_G^{\prec})$, las siguientes afirmaciones son ciertas:

Afirmación 1: Si $W_v^{\mathrm{l}} \cup W_v^{\mathrm{h}} \neq \{uv\}$, entonces $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_u^{\mathrm{l}} \cup W_{uv}^*]$ es una clique. Sea $xv \in W_v^{\mathrm{L}}$ o $vx \in W_v^{\mathrm{H}}$, con $x \neq u$. En cualquier caso, si existen $uw, uz \in W_{uv}^*$

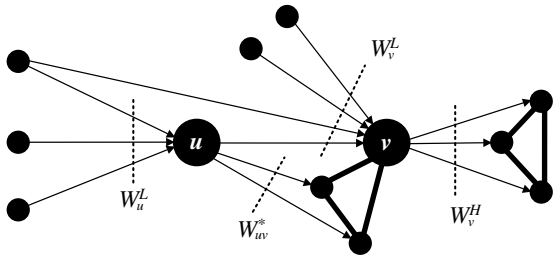

Figura 3.5: La vecindad de la anti-arista uv en $\mathcal{R}_G^{\prec}$.

tales que $wz \in \overline{E}$, entonces $\{x, v, u, w, z\}$ forma un kite en $\overline{G}$. Dado que esto no puede pasar, el conjunto $\{w \in V : vw \in W_{uv}^*\}$ es una clique de G, y la desigualdad (3.7) para u y esta clique agrupa cada variable con subíndice en $W_u^{\mathrm{L}} \cup W_{uv}^*$. Por lo tanto, este conjunto induce un subgrafo completo de $\mathcal{R}_G^{\prec}$.

Afirmación 2: Si $W_u^{\mathrm{l}} \cup W_{uv}^* \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_v^{\mathrm{l}} \cup W_v^{\mathrm{h}}]$ es una clique. Sea $xu \in W_u^{\mathrm{L}}$ o $ux \cup W_{uv}^*$. En cualquier caso, si existen $vw, vz \in W_v^{\mathrm{H}}$ tales que $wz \in \overline{E}$, entonces $\{x, u, v, w, z\}$ forma un kite en $\overline{G}$. Como éste no puede ser el caso, el conjunto $\bar{N}^{\mathrm{U}}(v)$ es una clique de G. Así, la desigualdad (3.7) para v y la clique $\bar{N}^{\mathrm{U}}(v)$ (o el conjunto vacío) agrupa todas las variables con subíndice en $W_v^{\mathrm{L}} \cup W_v^{\mathrm{H}}$. Por lo tanto, este conjunto induce un subgrafo completo de $\mathcal{R}_G^{\prec}$.

Afirmación 3: Si $W_v^{\mathrm{l}} \cup W_v^{\mathrm{h}} = \{uv\}$, entonces $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_u^{\mathrm{l}} \cup W_{uv}^*]$ se puede particionar en dos cliques. Notemos que $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_u^{\mathrm{L}}]$ es una clique y que cada vértice de W_u^{L} es adyacente a cada vértice de W_{uv}^*, en $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Si $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_u^{\mathrm{L}} \cup W_{uv}^*]$ no puede ser particionado en dos cliques entonces $\chi(\overline{\mathcal{R}_G^{\prec}[W_{uv}^*]}) > 2$, con lo cual existe un ciclo impar C en $\overline{\mathcal{R}_G^{\prec}[W_{uv}^*]}$. Cada anti-arista (uw, uz) de $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_{uv}^*]$ viene de una anti-arista $zw \in \overline{G}$. Si $C = \{ux, uw, uz\}$, entonces $\{v, u, x, w, z\}$ forman un kite en $\overline{G}$. Como éste no es el caso, supongamos que $|C| \geq 5$ y sean ux, uw, uz y uh cuatro vértices consecutivos de C. Así, $\{x, w, z, h, u\}$ forma un kite en $\overline{G}$, llegando de nuevo a una contradicción. Por lo tanto, tal ciclo no puede existir y entonces $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_u^{\mathrm{L}} \cup W_{uv}^*]$ se puede particionar en dos cliques.

Afirmación 4: Si $W_u^{\mathrm{l}} \cup W_{uv}^* = \emptyset$, entonces $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_v^{\mathrm{l}} \cup W_v^{\mathrm{h}}]$ se puede particionar en dos cliques. Notemos que $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_v^{\mathrm{L}}]$ es una clique y que cada vértice de W_v^{L} se conecta a cada vértice de W_v^{H}, en $\mathcal{R}_G^{\prec}$. Como en el caso anterior, si $\mathcal{R}_G^{\prec}[W_v^{\mathrm{L}} \cup W_v^{\mathrm{H}}]$ no se puede particionar en dos cliques entonces existe un ciclo C en $\overline{\mathcal{R}_G^{\prec}[W_v^{\mathrm{H}}]}$. El resto de la demostración para este caso es análoga a la de la Afirmación 3.

Las cuatro afirmaciones demostradas prueban que la vecindad de cualquier vértice uv de $\mathcal{R}_G^{\prec}$ se puede particionar en dos cliques. Por lo tanto, $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es un grafo quasi-line.

□

El Teorema 3.3.6 da un resultado un poco más detallado que el Teorema 3.3.5 (de [8]), y a su vez implica (junto con éste) que si $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es un grafo claw-free para todo orden $\prec$, entonces es un grafo quasi-line. Con este resultado, daremos una caracterización completa para $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$ cuando $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo. Para ello, nos basamos en los siguientes hechos.

Oriolo [51] presentó la siguiente familia de desigualdades válidas para el stable set polytope de un grafo, que en cierta forma generaliza las *odd-set inequalities* (3.15) del poliedro de matching. Sea $\mathcal{F} = \{K_1, \ldots, K_t\}$ un conjunto de cliques de un grafo $G = (V, E)$. Sea $1 \leq p \leq t$ un entero y $r = t \bmod p$. Sea $V_{p-1} \subseteq V$ el conjunto de vértices cubiertos por exactamente $(p-1)$ cliques de $\mathcal{F}$ y $V_{\geq p} \subseteq V$ el conjunto de vértices cubiertos por p o más cliques de $\mathcal{F}$. La *clique-family inequality* asociada a $\mathcal{F}$, p y r es

$$(p-r-1)\sum_{v\in V_{p-1}} x_v + (p-r)\sum_{v\in V_{\geq p}} x_v \leq (p-r)\left\lfloor \frac{t}{p} \right\rfloor. \tag{3.18}$$

Se prueba en [51] que (3.18) es válida para $STAB(G)$. La conjetura de Ben Rebea, propuesta también en [51], dice que (3.18) junto con las restricciones de no negatividad y las bien conocidas desigualdades clique describen por completo el stable set polytope de grafos quasi-line. Unos años más tarde se demostró la validez de esta conjetura [28]. Por estos motivos, por medio del Teorema 3.2.1 y el Teorema 3.3.6, podemos decir que las desigualdades mencionadas dan una caracterización completa de $P_{\text{col}}^{\text{R},\prec}(G)$, si $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo.

Teorema 3.3.7 *Sea G un grafo tal que $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo. Para cualquier orden $\prec$ en el conjunto de vértices, las restricciones de no negatividad, junto con las desigualdades (3.7) y las desigualdades clique-family (3.18) aplicadas a $\mathcal{R}_G^{\prec}$ dan una caracterización completa para $P_{col}^{\text{R},\prec}(G)$.*

Si bien el stable set polytope está bien caracterizado para grafos quasi-line, existen subclases de esta familia para las cuales la caracterización resulta mucho más elegante. De hecho, por los resultados de Chudnovsky y Seymour [18], sabemos que un grafo quasi-line es o bien un grafo *fuzzy circular interval* (FCI) o bien un grafo *semi-line*. Los grafos FCI se definen de la siguiente manera. Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia, $\mathcal{I}$ una colección de intervalos en $\mathcal{C}$ sin contenciones propias ni extremos en común, y V un multiconjunto de puntos de $\mathcal{C}$. El grafo *fuzzy circular interval* $G(V, \mathcal{I})$ tiene a V como conjunto de vértices y dos vértices son adyacentes si ambos pertenecen a un mismo intervalo $I \in \mathcal{I}$, donde las aristas entre los diferentes extremos de un mismo intervalo pueden omitirse.

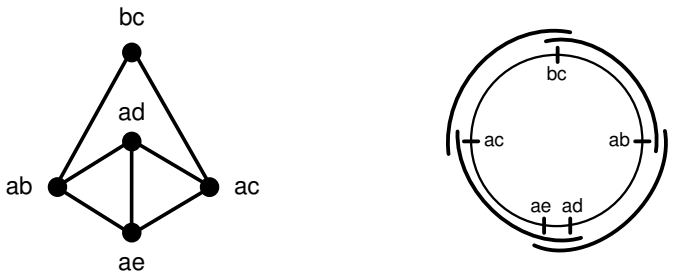

Figura 3.6: El grafo $\mathcal{R}_G^{\prec}$ de la Figura 3.1 y su representación como grafo FCI.

Los grafos semi-line son o bien grafos de línea o bien grafos quasi-line sin una representación como grafo FCI. Gracias a los resultados de Chudnovsky y Seymour [18], sabemos que todas las facetas del stable set polytope de grafos semi-line requieren únicamente coeficientes 0 o 1.

En vistas del Teorema 3.3.6, se puede pensar que es posible fortalecer aun más este resultado demostrando que $\mathcal{R}_G^{\prec}$ pertenece a alguna de estas subclases de grafos quasi-line cuando $\overline{G}$ no tiene un kite como subgrafo. En particular, resulta interesante verificar si todos los grafos $\mathcal{R}_G^{\prec}$ quasi-line son grafos semi-line o incluso grafos de líneas, ya que en estos casos las facetas de $P_{\text{col}}^{\text{R}}(G)$ requieren únicamente coeficientes 0 o 1. Desafortunadamente, existe el siguiente contraejemplo a este respecto. El grafo G de la Figura 3.1 de la Sección 3.2 es tal que $\overline{G}$ no tiene kite como subgrafo, con lo cual el Teorema 3.3.6 implica que $\mathcal{R}_G^{\prec}$ es un grafo quasi-line (además es fácil verificarlo para este caso en particular). Sin embargo, $\mathcal{R}_G^{\prec}$ no es ni un grafo de líneas (ya que es uno de los subgrafos prohibidos conocidos para los grafos de líneas [2]) ni un grafo semi-line (ya que tiene una representación como grafo FCI, mostrada aquí en la Figura 3.6). Esto indica en cierta forma que el Teorema 3.3.6 es tan ajustado como podría ser con respecto al tema aquí discutido.

CAPÍTULO 4

El *orientation model* I: estudio inicial

En 1998, Borndörfer, Eisenblätter, Grötschel y Martin presentan en un reporte técnico el *orientation model* para problemas de asignación de frecuencias [9]. A diferencia de los modelos existentes en ese entonces, este modelo utiliza variables enteras generales para representar los colores asignados a los vértices del grafo. En este capítulo realizamos un estudio inicial sobre los poliedros que surgen de esta formulación. En primera instancia presentamos en detalle la formulación del modelo y mostramos que el problema de coloreo de suma mínima puede resolverse sobre el mismo poliedro de coloreo clásico variando simplemente la función objetivo. Damos luego una breve síntesis sobre los resultados existentes para esta formulación, algunos de ellos referenciados luego. Como resultado principal presentamos una serie de familias de desigualdades válidas nuevas que definen facetas del poliedro asociado a esta formulación. Salvo por las *reinforced orientation inequalities* (ver Sección 4.4) todas las demás desigualdades presentadas se basan en caminos del grafo. Comenzamos presentando las *path inequalities* y las *weigthed path inequalities* (WPI), cuya estructura es un camino cualquiera del grafo. Luego, presentamos las *spiral inequalities*, una generalización de las WPI. Estas desigualdades abren una exploración que da lugar a las *double spiral* y *triple spiral inequalities*, presentadas en las subsecciones sucesivas. Estas familias inspiran a su vez ciertos procedimientos útiles para generar facetas de estos poliedros, que serán abordados luego en el Capítulo 5.

4.1. La formulación del *orientation model*

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de colores C, el *orientation model* utiliza una variable entera $x_v \in [0, |C| - 1]$ para todo $v \in V$, que contiene el valor del color asignado al vértice v. Se muestra en [44] que este conjunto de variables no es suficiente por sí mismo para modelar correctamente (con restricciones lineales) el espacio de soluciones/coloreos válidos. Para ello es necesario ampliar el espacio de variables y con este fin se introduce la variable binaria y_{vw} para todo $vw \in E$ con $v < w$, que indica si el color asignado a v es menor que el asignado a w o no. Con estas definiciones, un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|}$ representa un coloreo válido de G utilizando a lo sumo $|C|$ colores, si cumple las siguientes restricciones:

$$x_v - x_w \geq 1 - |C| y_{vw} \qquad \forall vw \in E, v < w \tag{4.1}$$

$$x_w - x_v \geq 1 - |C|(1 - y_{vw}) \qquad \forall vw \in E, v < w \tag{4.2}$$

$$x_v \in \{0, \ldots, |C| - 1\} \qquad \forall v \in V \tag{4.3}$$

$$y_{vw} \in \{0, 1\} \qquad \forall vw \in E \tag{4.4}$$

Para cada arista $vw \in E$, se debe asegurar que $|x_v - x_w| \geq 1$. Para modelar correctamente esta situación con desigualdades lineales se utilizan las restricciones (4.1) y (4.2). En los casos en que $y_{vw} = 0$, la desigualdad (4.1) asegura que $x_v > x_w$ (y (4.2) no impone restricciones) y en los casos en que $y_{vw} = 1$, la desigualdad (4.2) asegura que $x_w > x_v$ (y (4.1) no impone restricciones). Así, en cualquier caso, los vértices v y w recibirán colores distintos. Finalmente, (4.3) y (4.4) imponen la integralidad de las variables.

Para encontrar un coloreo que utilice la menor cantidad de colores (y así hallar $\chi(G)$), esta formulación puede extenderse agregando una variable z y usándola como cota superior de todas las variables x_v. Es decir, agregando las restricciones

$$x_v \leq z, \qquad \forall v \in V. \tag{4.5}$$

Así, puede hallarse un coloreo con mínima cantidad de colores simplemente minimizando la variable z. De todas maneras, en esta tesis nos concentraremos en la versión no extendida de este modelo, es decir, no consideraremos la variable z.

En este capítulo, llamaremos $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G, C)$ a la cápsula convexa de los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^{|V|+|E|}$ que satisfacen las restricciones (4.1)-(4.4). Si $\mathcal{G}$ es una familia de grafos, entonces $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G}, C)$ denota la correspondiente familia de polítopos. Es posible que omitamos el conjunto C en estas definiciones cuando el mismo sea irrelevante o se deduzca del contexto. Llamamos $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ a la familia de poliedros $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ con G un grafo cualquiera.

Si bien la formulación dada por (4.1)-(4.4) corresponde al problema clásico de coloreo, esta formulación puede adaptarse fácilmente para modelar el problema de coloreo de suma mínima. Recordemos que este problema pide hallar un coloreo tal que la suma de todos los colores asignados a los vértices sea mínima. La adaptación a este problema es inmediata, ya que consiste simplemente en utilizar como función objetivo la minimización de la suma de las variables x_v.

Observación 4.1.1 *El problema de coloreo de suma mínima sobre un grafo G puede ser resuelto minimizando* $\sum_{v \in V} x_v$ *sobre* $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

En forma similar a los resultados planteados en el Teorema 2.1.2 del Capítulo 2 y en el Teorema 3.1.2 del Capítulo 3, la Observación 4.1.1 nos permite alcanzar la siguiente conclusión acerca del potencial del *orientation model*.

Teorema 4.1.1 *Sea* $\mathcal{G}$ *una familia de grafos y* C *un conjunto de colores. Si el problema de coloreo de suma mínima en* $\mathcal{G}$ *y* C *es NP-completo, entonces el problema de optimización/separación sobre* $P^{\mathrm{o}}_{col}(\mathcal{G}, C)$ *es también NP-completo.*

Demostración. El resultado se deduce de la Observación 4.1.1 y la equivalencia entre los problemas de optimización y separación poliedral. □

Este resultado implica que aun cuando el problema clásico de coloreo sea polinomial sobre una familia $\mathcal{G}$, los poliedros $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G})$ no tendrán una caracterización elegante si el problema de coloreo de suma mínima sobre $\mathcal{G}$ es NP-completo. Si bien este hecho limita un poco el alcance del análisis para esta formulación, esta limitación no es tan importante como la dada en los capítulos anteriores para las correspondientes formulaciones, ya que el problema de coloreo de suma mínima suele tener complejidades menores o iguales a las de los problemas involucrados en las secciones anteriores (i.e., *list-coloring*, *precoloring extension* y *max-coloring*), para las familias de grafos consideradas en esta tesis.

4.2. Objetivo inicial

Siguiendo la misma línea desarrollada en los capítulos anteriores, el objetivo inicial del estudio poliedral fue el de intentar hallar familias de grafos $\mathcal{G}$ para las cuales pudiésemos dar una descripción completa de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G})$. Toda solución del *orientation model* da una orientación acíclica a las aristas del grafo mediante las variables y_{vw}, y esto define un orden parcial sobre los vértices del grafo. Debido a esta característica estructural, decidimos comenzar el estudio

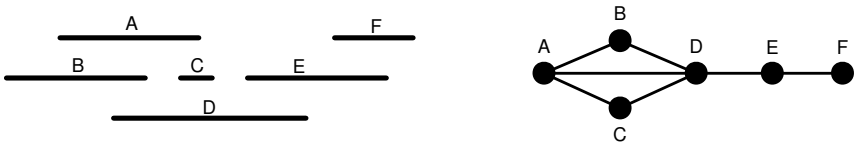

Figura 4.1: Un conjunto de intervalos y el grafo de intervalos asociado.

poliedral analizando familias de grafos para las que exista un "orden natural" entre los vértices.

Un *grafo de intervalos* es el grafo de intersección de un conjunto de intervalos sobre una recta. Es decir, cada vértice del grafo representa un intervalo en la recta y dos vértices son adyacentes si los intervalos representados se intersecan. La Figura 4.1 muestra un ejemplo de esta clase de grafos. Es fácil ver que los vértices de este tipo de grafos pueden ordenarse, por ejemplo, según el extremo izquierdo del intervalo que representan. Utilizando el software PORTA, comenzamos entonces el estudio de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ para grafos de esta familia. Recordemos que una de las funcionalidades centrales de este software consiste en determinar todas las facetas de la cápsula convexa de un conjunto de puntos. Lamentablemente, los tiempos elevados de ejecución sólo permiten resolver casos muy pequeños, con lo cual el uso es meramente inspirativo. La metodología típica al usar este software consiste en identificar las facetas del poliedro para casos pequeños, con la idea de luego poder generalizar estas facetas.

Aun desde los primeros experimentos, en grafos de intervalos de pocos vértices, la cantidad y variedad de facetas identificadas por PORTA fue muy grande. Frente a esta situación, comenzamos a experimentar sobre una subclase de los grafos de intervalos: los caminos. Lamentablemente, las facetas surgidas seguían siendo muy diversas y por lo tanto complicadas de generalizar. Aun pudiendo generalizarlas, identificar una descripción completa de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ (y una demostración formal de ello) parecía ser un objetivo un tanto ambicioso, aun para grafos G simples como los caminos.

Por otro lado, algo no poco importante es el hecho de que los trabajos poliedrales existentes con estudios de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ son muy escasos y no se conocen demasiadas familias de desigualdades válidas para estos poliedros (a diferencia por ejemplo de los poliedros de las formulaciones que estudiamos en los dos capítulos anteriores). Teniendo en cuenta esto, todo aporte al conocimiento sobre facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ es significativo, aun si la descripción conseguida de estos poliedros resulta parcial. En este capítulo, presentamos un estudio poliedral clásico de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ en el cual presentamos una serie de familias de desigualdades válidas que definen facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$. Inspirados en estas familias, pudimos elaborar procedimientos capaces de generar facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ partiendo de de-

sigualdades válidas genéricas. Describimos estos procedimientos en detalle y sus propiedades en el Capítulo 5.

4.3. Resultados existentes sobre $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$

Una de las características principales de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ es la fuerte simetría (en el sentido geométrico) que estos poliedros presentan, ya que existe un punto interior p en estos poliedros que funciona como centro de simetría. Es decir, todo punto de un poliedro $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ tiene un punto simétrico con respecto a p. Adicionalmente, ocurre algo similar con las facetas, ya que se sabe que para toda faceta del poliedro, existe una faceta simétrica, también con respecto a este punto p.

Estos hechos fueron observados inicialmente en [32] y explorados en mayor detalle en [35] y [44]. Transcribimos a continuación los principales resultados de estos trabajos a este respecto, adaptados a nuestra notación (y al caso particular de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ ya que en [32], [35] y [44] se trabaja con una generalización del problema de coloreo para problemas de asignación de frecuencias).

Teorema 4.3.1 ([35]) *El poliedro $P^{\mathrm{o}}_{col}(G,C)$ es simétrico con respecto al punto*

$$p = \left(\frac{|C|-1}{2}, \ldots, \frac{|C|-1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Esto significa que para cualquier punto $(x,y) \in P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G,C)$, el punto simétrico $\mathrm{sym}(x,y) = 2p - (x,y)$ también pertenece a $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G,C)$; este punto es

$$\mathrm{sym}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |C|\mathbf{1} - \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Debido a esta simetría, para toda cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G,C)$ existe una cara paralela y de la misma dimensión. Además, se conoce una fórmula sencilla para calcularla.

Teorema 4.3.2 ([35]) *Si $b \leq a^T(x,y)$ es una desigualdad válida (resp. y define una faceta) de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G,C)$, entonces $a^T(x,y) \leq 2a^T p - b$ es también una desigualdad válida (resp. y define una faceta) de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G,C)$.*

Resulta interesante notar que la versión simétrica de las restricciones (4.1) son las restricciones (4.2).

En [44], se presenta una serie de familias de desigualdades válidas que definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G,C)$. A continuación transcribimos algunas de ellas por estar relacionadas con algunos de los resultados que presentamos en este

capítulo. Si bien la variable de orden y_{vw} está definida sólo cuando $v < w$, usaremos esta variable indistintamente (i.e., aun si $v > w$), con el objetivo de simplificar la notación. En la práctica, la variable y_{vw} debería reemplazarse por $1 - y_{wv}$, cuando $v > w$. De la misma manera, dada una desigualdad $\pi x + \mu y \leq \alpha$, donde π_v y μ_e son los coeficientes de x_v y de y_e, respectivamente, con $v \in V$ y $e \in E$, definimos

$$\vec{\mu}_{vw} = \begin{cases} \mu_{vw} & \text{si } v < w \\ -\mu_{wv} & \text{si } w < v. \end{cases}$$

Usaremos esta notación (principalmente en la Sección 4.4) para demostrar que ciertas desigualdades válidas para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definen facetas de este poliedro.

Teorema 4.3.3 ([44]) *Dado un vértice $u \in V$ y una clique $K \subseteq N(u)$, la desigualdad* clique

$$\sum_{w \in K} y_{wu} \leq x_u \tag{4.6}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. Si K es una clique maximal en $G[N(u)]$ y $|C| \geq \chi(G) + 3$, entonces (4.6) define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Las condiciones para que una desigualdad clique (4.6) defina una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ planteadas en [44] incluyen el hecho de que $|C| \geq \chi(G) + 3$. Sin embargo es posible dar una demostración de que estas desigualdades definen facetas aun cuando $|C| \geq \chi(G) + 2$, fortaleciendo así los resultados conocidos para las mismas. Es preciso recordar igualmente, que se estudia en [44] una generalización de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ que surge de un problema de asignación de frecuencias. Los resultados de [44] que detallamos aquí están particularizados para el caso de los poliedros de coloreo, con lo cual eventualmente este fortalecimiento del teorema podría no ser cierto para los poliedros estudiados en [44].

Teorema 4.3.4 ([44]) *Dada una arista $vw \in E$ y una clique maximal K de $G[N(v) \cap N(w)]$, la desigualdad* double covering-clique

$$x_v + 1 + \sum_{u \in K} (y_{vu} - y_{wu}) \leq x_w + (|C| - |K|) y_{wv} \tag{4.7}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. Si $|C| \geq \chi(G) + 4$, entonces (4.7) define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

En función del Teorema 4.3.2, es sencillo ver que la versión simétrica de las desigualdades clique (4.6) es

$$x_u \leq |C| - 1 - \sum_{w \in K} y_{uw}. \tag{4.8}$$

Por otro lado, se puede ver también que la versión simétrica de las desigualdades double-covering clique son también desigualdades double-covering clique.

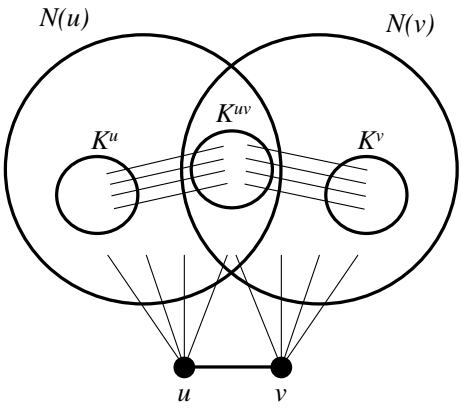

Figura 4.2: Esquema de la estructura para las *reinforced orientation inequalities*.

4.4. Nuevas desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$

La formulación del *orientation model* incluye las restricciones (4.1) y (4.2), cuyo objetivo es establecer la orientación en las aristas de G en forma coherente con los colores asignados. Se muestra en [44] que para una arista $uv \in E$, las correspondientes desigualdades (4.1) y (4.2) no definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ si $N(u) \cup N(v) \neq \emptyset$ (y $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ tiene dimensión completa). De hecho, las desigualdades double-covering clique (4.7) surgen como un fortalecimiento de (4.1) y (4.2). En el mismo sentido, presentamos a continuación otro fortalecimiento de estas desigualdades que es al mismo tiempo una generalización de las desigualdades double-covering clique (4.7).

Teorema 4.4.1 *Sea $uv \in E$. Sean $K^u \subseteq N(u) \setminus N(v)$, $K^v \subseteq N(v) \setminus N(u)$ y $K^{uv} \subseteq N(u) \cap N(v)$ tres cliques tales que $K^u \cup K^{uv}$ y $K^v \cup K^{uv}$ son también cliques (ver Figura 4.2). Si llamamos $Q = K^u \cup K^v \cup K^{uv}$, entonces la* reinforced orientation inequality *(ROI) definida como*

$$x_u - x_v \geq 1 - (|C| - |Q|)y_{uv} - \sum_{w \in K^u} y_{uw} - \sum_{w \in K^v} y_{wv} - \sum_{w \in K^{uv}} (y_{uw} - y_{vw}) \quad (4.9)$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. En el contexto de esta demostración, decimos que un vértice adyacente a u (resp. a v) es un *vecino exclusivo* si no es adyacente a v (resp. a u). Dada una solución entera $(x, y) \in P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, se puede ver que las tres sumatorias en el lado derecho de (4.9) tienen los siguientes significados:

- $\alpha = \sum_{w \in K^u} y_{uw}$: Cuenta la cantidad de vecinos exclusivos de u en K^u que reciben un color mayor al de u.

- $\beta = \sum_{w \in K^v} y_{wv}$: Cuenta la cantidad de vecinos exclusivos de v en K^v que reciben un color menor al de v.
- $\gamma = \sum_{w \in K^{uv}} (y_{uw} - y_{vw})$: Si $y_{uv} = 1$, entonces γ es la cantidad de vértices en K^{uv} que reciben un color en el rango de colores $[x_u, x_v]$. En caso contrario, γ es la cantidad de vértices en K^{uv} que reciben un color en el rango de colores $[x_v, x_u]$, multiplicada por -1.

Si $y_{uv} = 0$, entonces sabemos que $x_u - x_v \geq 1$. Del resto de los términos del lado derecho de (4.9), sólo γ podría ajustar la desigualdad (ya que α, β y el término asociado a y_{uv} sólo podrían relajarla). En este caso, γ aumentaría el lado derecho en una unidad por cada vértice en K^{uv} con color en el rango (x_v, x_u). Como todos estos vecinos en común reciben colores distintos (y distintos a x_u y x_v), entonces la diferencia entre los colores x_u y x_v tiene que ser al menos $1 + |\gamma|$. Es decir, la solución cumple $x_u - x_v \geq 1 - \gamma$, y por ende satisface (4.9).

Supongamos ahora que $y_{uv} = 1$. Sabemos que existen $|K^u| - \alpha$ vértices de K^u con color menor que x_u y $|K^v| - \beta$ vértices de K^v con color mayor que x_v. Sabemos además que existen $|K^{uv}| - \gamma$ vértices de K^{uv} con color o bien menor que x_u o bien mayor que x_v. Notemos que de todos estos vértices, los que reciben colores menores que x_u son una clique, pues pertenecen a $K^u \cup K^{uv}$, y lo mismo ocurre con los que reciben colores mayores que x_v, pues pertenecen a $K^v \cup K^{uv}$. Así, entre todos ellos se necesitan $|K^u| - \alpha + |K^v| - \beta + |K^{uv}| - \gamma$ colores distintos, es decir $|Q| - \alpha - \beta - \gamma$ colores. Algunos de estos colores serán menores que x_u y otros serán mayores que x_v y por lo tanto la distancia entre x_u y x_v no puede exceder $(|C| - 1) - (|Q| - \alpha - \beta - \gamma)$. En otras palabras, $x_v - x_u \leq (|C| - 1) - |Q| + \alpha + \beta + \gamma$, o lo que es lo mismo: $x_u - x_v \geq 1 - |C| + |Q| - \alpha - \beta - \gamma$. Y eso es exactamente lo que indica (4.9) cuando $y_{uv} = 1$. □

Es sencillo verificar que las ROI (4.9) generalizan a las desigualdades double-covering clique, ya que éstas son el caso particular con $K^u = K^v = \emptyset$. A continuación, damos condiciones necesarias y suficientes para aquellos casos en los que las ROI definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, cuando $|C| \geq \chi(G) + 2$. Estas condiciones son además una mejora con respecto a las condiciones suficientes propuestas en [44] para el caso particular de las desigualdades double-covering clique, ya que no es necesario que $|C| \geq \chi(G) + 4$.

Teorema 4.4.2 *Si $|C| \geq \chi(G) + 2$, entonces las ROI (4.9) definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ si y solo si todo vértice en $(N(u) \cap N(v)) \setminus Q$ tiene un no vecino en Q, donde $uv \in E$ es la arista asociada a la desigualdad y Q es la unión de las cliques asociadas a la misma.*

Demostración. Sean K^u, K^v y K^{uv} las cliques asociadas a la desigualdad tales que $K^u \subseteq (N(u) \setminus N(v))$, $K^v \subseteq (N(v) \setminus N(u))$ y $K^{uv} \subseteq (N(u) \cap N(v))$. Sea F

Tipo (*i*):	|	K^u	|	$\boldsymbol{v}$	|	w	|	$\dots$	|	w	|	$\boldsymbol{u}$	|	K^v	|
Tipo (*ii*):	|	w	|	$\dots$	|	w	|	$\boldsymbol{u}$	|	$\boldsymbol{v}$	|	z	|	$\dots$	|	z	|

Figura 4.3: Tipos de soluciones en la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (4.9).

la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (4.9), es decir, F es el conjunto de puntos de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ que cumplen (4.9) por igualdad. Es sencillo ver que existen dos tipos de soluciones enteras $(\hat{x}, \hat{y}) \in F$:

Tipo (*i*): En estas soluciones $\hat{x}_v < \hat{x}_u$ y se cumplen las siguientes condiciones:

- para todo color $c \in (\hat{x}_v, \hat{x}_u)$ existe $w \in K^{uv}$ con $\hat{x}_w = c$,
- todo $z \in K^u$ (resp. $z \in K^v$) cumple $\hat{x}_z < \hat{x}_v$ (resp. $\hat{x}_u < \hat{x}_z$).

Tipo (*ii*): En estas soluciones se tiene $\hat{x}_u < \hat{x}_v$ y para todo color $c < \hat{x}_u$ (resp. $c > \hat{x}_v$) existe un vértice $w \in (K^u \cup K^{uv})$ (resp. $z \in (K^v \cup K^{uv})$) con $\hat{x}_w = c$ (resp. $\hat{x}_z = c$).

La Figura 4.3 ilustra la estructura de las soluciones enteras en F. Las columnas representan los colores disponibles ordenados en forma creciente de izquierda a derecha, es decir, el color de un vértice será mayor que el color de todos los vértices que aparezcan a su izquierda en la ilustración. Un conjunto de vértices que abarca varias columnas indica que los vértices del conjunto pueden tomar cualquier valor en ese rango de columnas, aunque no necesariamente se utilizan todas las columnas del rango.
Sean $\pi \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veremos a continuación que si $\pi x + \mu y = \alpha$ para todo $(x, y) \in F$, entonces $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.9). Lo cual implica que esta última define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

Afirmación 1: $\pi_w = 0$, para todo $w \notin \{u, v\}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_u = 0$, $\hat{x}_v = |C| - 1$ y tal que existe un color c al lado de $\hat{x}_w$ que no está utilizado en $\hat{z}$ (esta solución existe ya que $|C| \geq \chi(G) + 2$). Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que w recibe el color c. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_w, entonces $\pi_w = 0$.
Afirmación 2: $\vec{\mu}_{wq} = 0$, para todo $wq \in E$ con $w, q \notin \{u, v\}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_u = 0$, $\hat{x}_v = |C| - 1$ y en la que existe un color c tal que el único vértice en c es w y el único en $c + 1$ es q (el hecho de que $|C| \geq \chi(G) + 2$ garantiza la existencia de esta solución). Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que w y q intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_w, x_q e y_{wq}, entonces por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{wq} = 0$.
Afirmación 3: $\vec{\mu}_{uq} = 0$ (resp. $\vec{\mu}_{vq} = 0$), para todo $q \in N(u) \setminus (K^u \cup N(v))$ (resp. $q \in N(v) \setminus (K^v \cup N(u))$). Sea $q \in N(u) \setminus (K^u \cup N(v))$ y $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$

de tipo (i) con $\hat{x}_v = \hat{x}_q = c$, $\hat{x}_u = c+1$ tal que el color $c+2$ no está utilizado en $\hat{z}$ (siendo $|C| \geq \chi(G)+2$, podemos construir esta solución poniendo a v y a q como únicos vértices del color c). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que $\hat{x}_q = c+2$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_q, y_{uq} y quizás también en variables y_{wq} con $w \neq u, v$, entonces por la Afirmación 1 y la Afirmación 2 tenemos que $\vec{\mu}_{uq} = 0$. La demostración para $\vec{\mu}_{vq} = 0$ es análoga.

Afirmación 4: $\vec{\mu}_{uq} = \vec{\mu}_{vq} = 0$, para todo $q \in (N(u) \cap N(v)) \setminus K^{uv}$. Sabemos por hipótesis que existe un vértice $w \in Q$ tal que $wq \notin E$. Si $w \in K^{uv}$, tomemos $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (i) con $\hat{x}_w = \hat{x}_q = c$, $\hat{x}_v = c-1$, $\hat{x}_u = c+1$ y tal que el color $c+2$ no está utilizado en $\hat{z}$ (de nuevo, como $|C| \geq \chi(G)+2$, podemos ubicar a w y a q como únicos vértices del color c). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que $\hat{x}_q = c+2$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_q, y_{uq} y quizás también en variables $y_{w'q}$ con $w' \neq u, v$, entonces por la Afirmación 1 y la Afirmación 2 tenemos que $\vec{\mu}_{uq} = 0$. Con un razonamiento análogo se puede ver que $\vec{\mu}_{vq} = 0$. Supongamos entonces que $w \in K^u$ y tomemos $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_w = \hat{x}_q = 0$, $\hat{x}_u = 1$, $\hat{x}_v = |C| - 1$ y tal que el color 2 no está utilizado en $\hat{z}$ (suponiendo que w y q son los únicos de su color es fácil ver que la solución existe). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que $\hat{x}_q = 2$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_q, y_{uq} y quizás también en variables $y_{w'q}$ con $w' \neq u, v$, entonces por la Afirmación 1 y la Afirmación 2 tenemos que $\vec{\mu}_{uq} = 0$. Probaremos ahora que $\vec{\mu}_{vq} = 0$. Sea entonces $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (i) con $\hat{x}_q = c$, $\hat{x}_v = c+1$, $\hat{x}_u = c+2$ y tal que el color $c+3$ no se utiliza (esta solución puede obtenerse simplemente reordenando los colores de un coloreo óptimo que no utilice el color $c+3$). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que $\hat{x}_q = c+3$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_q, y_{uq}, y_{vq} y quizás también en variables $y_{w'q}$ con $w' \neq u, v$, entonces por la Afirmación 1 y la Afirmación 2 tenemos que $\vec{\mu}_{uq} + \vec{\mu}_{vq} = 0$, con lo cual $\vec{\mu}_{vq} = 0$. El caso en que $w \in K^v$ es análogo al anterior.

Afirmación 5: $\pi_v = -\pi_u$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (i) con $\hat{x}_v = c$, $\hat{x}_u = c+1$ y talque no hay otros vértices usando $c+1$ y el color $c+2$ no está utilizado (siendo que $|C| \geq \chi(G)+2$, podemos reordenar los colores de un coloreo con $\chi(G)$ colores para obtener esta solución). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que $\hat{x}_v = c+1$ y $\hat{x}_u = c+2$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u y x_v, entonces sabemos que $c\pi_u + (c+1)\pi_v = (c+1)\pi_u + (c+2)\pi_v$. Por lo tanto $\pi_u + \pi_v = 0$.

Afirmación 6: $\vec{\mu}_{uv} = (|C| - |Q|)\pi_u$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) en la que todos los vértices de $K^u \cup K^{uv}$ tienen color menor que u y todos los de K^v tienen color mayor que v (i.e., $\hat{x}_u = |K^u| + |K^{uv}|$ y $\hat{x}_v = |C| - 1 - |K^v|$) y además u es el único vértice en el color $\hat{x}_u$ y el color $\hat{x}_u + 1$ no está utilizado. Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero en la que u pasa al color $|K^u| + |K^{uv}| + 1$ y v al color $|K^u| + |K^{uv}|$; es fácil ver que $\bar{z}$ es una solución de tipo (i) y que la misma está en F. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, x_v, y_{uv} y quizás también en variables y_e con

$\vec{\mu}_e = 0$, entonces tenemos que

$$\vec{\mu}_{uv} + (|K^u| + |K^{uv}|)\pi_u + (|C| - 1 - |K^v|)\pi_v = \\ (|K^u| + |K^{uv}| + 1)\pi_u + (|K^u| + |K^{uv}|)\pi_v,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_{uv} &= \pi_u + (|K^u| + |K^{uv}| - |C| + 1 + |K^v|)\pi_v \\ &= \pi_u + (|Q| - |C|)\pi_v + \pi_v \\ &= (|Q| - |C|)\pi_v && \text{(por Afirmación 5)} \\ &= (|C| - |Q|)\pi_u. && \text{(por Afirmación 5)} \end{aligned}$$

Afirmación 7: $\vec{\mu}_{uw} = \pi_u$, para todo $w \in K^u \cup K^{uv}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_w = 0$ y $\hat{x}_u = 1$ (podemos suponer $\hat{x}_v = |C| - 1$ aunque esto es indiferente). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero invirtiendo las clases de color 0 y 1. Notar que $\hat{z}$ es también de tipo (ii). Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de y_{uw}, x_u, x_w y quizás también en variables con coeficientes nulos, entonces tenemos que $\vec{\mu}_{uw} + \pi_w = \pi_u$ y ya que $\pi_w = 0$, entonces $\vec{\mu}_{uw} = \pi_u$.
Afirmación 8: $\vec{\mu}_{wv} = -\pi_v$, para todo $w \in K^v$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_w = |C| - 2$ y $\hat{x}_v = |C| - 1$ (podemos suponer $\hat{x}_u = 0$ aunque esto es indiferente). Sea $\bar{z}$ igual a $\hat{z}$ pero invirtiendo las clases de color $|C| - 1$ y $|C| - 2$. Notar que $\hat{z}$ es también de tipo (ii). Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de y_{wv}, x_v, x_w y quizás también en variables con coeficientes nulos, entonces tenemos que $\vec{\mu}_{wv} + (|C| - 1)\pi_v + (|C| - 2)\pi_w = (|C| - 2)\pi_v + (|C| - 1)\pi_w$ y ya que $\pi_w = 0$, entonces $\vec{\mu}_{wv} = -\pi_v$.
Afirmación 9: $\vec{\mu}_{vw} = \pi_v$, para todo $w \in K^{vw}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ de tipo (ii) con $\hat{x}_v = |C| - 2$ y $\hat{x}_w = |C| - 1$ (nuevamente suponemos $\hat{x}_u = 0$ aunque esto es indiferente). De nuevo, obtenemos $\bar{z}$ a partir de $\hat{z}$ invirtiendo las clases de color $|C| - 1$ y $|C| - 2$. Notar que $\hat{z}$ es también de tipo (ii). Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de y_{vw}, x_v, x_w y quizás también en variables con coeficientes nulos, entonces tenemos que $\vec{\mu}_{vw} + (|C| - 2)\pi_v + (|C| - 1)\pi_w = (|C| - 1)\pi_v + (|C| - 2)\pi_w$ y ya que $\pi_w = 0$, entonces $\vec{\mu}_{vw} = \pi_v$.

La conjunción de todas estas afirmaciones muestra que $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.9) y por lo tanto esta última define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

Por otro lado, la condición de que todo vértice en $(N(u) \cap N(v)) \setminus K^{uv}$ tenga un no vecino en Q es necesaria para la facetitud, ya que si existe un $k \in (N(u) \cap N(v)) \setminus K^{uv}$ que es vecino de todo Q, entonces toda solución en F cumple también la igualdad $y_{uk} + y_{kv} = 1 + y_{uv}$. Esto sucede porque en cualquier solución de tipo (i) (i.e., cuando $y_{uv} = 0$), el vértice k debe tener un color anterior al de v o posterior al de u (ya que todo color en el rango (x_v, x_u) tiene un vértice de Q) y en toda solución de tipo (ii), donde $y_{uv} = 1$, el vértice

k debe recibir un color posterior al de u y anterior al de v (ya que todo color menor que x_u o mayor que x_v tiene un vértice de Q). □

4.4.1. Desigualdades válidas basadas en caminos

Es un hecho bien conocido que las cliques son estructuras fundamentales para el problema de coloreo de grafos en general. Estas estructuras aparecen recurrentemente asociadas a muchas de las facetas de los poliedros de coloreo. Esto es evidente en las formulaciones analizadas en los capítulos anteriores, llegando en algunos casos a ser las cliques las únicas estructuras necesarias para describir los poliedros asociados (e.g., el modelo estándar en grafos block). Las desigualdades ROI, presentadas en la sección anterior, son otro ejemplo de desigualdades basadas en cliques que definen facetas de poliedros de coloreo. Sin embargo, para el *orientation model* existe otra estructura que parece tener también una fuerte presencia en las facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$: los caminos.

4.4.1.1. *Path inequalities*

Toda solución del *orientation model* define un orden parcial sobre los vértices del grafo. El hecho de que los colores asignados a los vértices de un camino preserven el orden del mismo, implica que la distancia entre los colores del primer y del último vértice debe ser al menos igual a la cantidad de aristas del camino (por transitividad). Esta característica tiene fuertes implicaciones y nos permite deducir muchas familias de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$, comenzando por la que presentamos a continuación.

Teorema 4.4.3 *Dado un camino $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, con $k = |C|$, la* path inequality

$$\sum_{i=0}^{k-1} y_{v_i v_{i+1}} \leq k - 1 \tag{4.10}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. Si $\sum_{i=0}^{k-1} y_{v_i v_{i+1}} = k$, entonces $x_{v_k} - x_{v_0} \geq k = |C|$, lo cual no puede ocurrir porque $x_{v_k}, x_{v_0} \in [0, |C| - 1]$, con lo cual (4.10) es válida. □

Es preciso aclarar que si $k > |C|$, entonces (4.10) es también válida, pero en ese caso no define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Es simple ver que en ese caso, la desigualdad resultante es la suma de la correspondiente (4.10) para las primeras $|C|$ aristas del camino y las desigualdades $y_e \leq 1$ para el resto de las aristas del camino.

Bajo ciertas condiciones, las *path inequalities* (4.10) definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Lamentablemente las condiciones necesarias para que esto ocurra no se pueden caracterizar en términos simples, dado que están fuertemente ligadas a la estructura de G más allá de los vértices de P. A continuación damos condiciones suficientes (aunque no necesarias) bajo las cuales estas desigualdades definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. En el contexto de este capítulo, diremos que $|P|$ es la cantidad de aristas (no de vértices) del camino P. Para simplificar el enunciado del teorema, damos además la siguiente definición.

Definición 4.4.1 *Sea un grafo $G = (V, E)$ y sea P un camino simple de G. Dados dos vértices $u, v \in P$, una* (P, u, v)-alineación *de G es una partición $S_0, \ldots, S_{|P|-1}$ de los vértices de $V \setminus P$, y un etiquetado $w_1, \ldots, w_{|P|-1}$ de los vértices de $P \setminus \{u, v\}$, tales que:*

1. *$S_0 \cup \{u, v\}$ es un conjunto independiente y*
2. *$S_j \cup \{w_j\}$ es un conjunto independiente, para todo $j = 1, \ldots, |P| - 1$.*

Decimos que G es (P, u, v)-alineable *si existe una (P, u, v)-alineación.*

Informalmente, una (P, u, v)-alineación es un coloreo de G en el cual todos los vértices de P reciben colores distintos, salvo por u y v que reciben el mismo color. Claramente, si G es (P, u, v)-*alineable* entonces $\chi(G) \leq |P|$.

Teorema 4.4.4 *Sea un grafo $G = (V, E)$ y un camino $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, con $k = |P| = |C|$. Si $l = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$ y las siguientes son ciertas:*

i. $|C| \geq \chi(G \setminus P) + l + 3$.

ii. *P no tiene cuerdas (i.e., $v_i v_j \notin E$, para todo $i, j \in [0, k]$, con $|i - j| > 1$).*

iii. *Para cada $i \in [0, k-1]$, existe una (P, v_{j_1}, v_{j_2})-alineación de G con $j_1 \leq i < j_2$.*

entonces, la path inequality *(4.10) asociada a P define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.*

Demostración. Sea F la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (4.10) y sea una solución entera $(x, y) \in F$. Como (4.10) se cumple por igualdad, entonces exactamente una de las variables involucradas vale 0 y el resto de las variables valen 1. Es decir, existe un $t \in [1, k]$ tal que:

- $x_{v_0} < x_{v_1} < \ldots < x_{v_{t-1}}$,
- $x_{v_{t-1}} > x_{v_t}$, y
- $x_{v_t} < x_{v_{t+1}} < \ldots < x_{v_k}$.

Así, los vértices de P reciben colores en orden ascendente hasta v_{t-1}, el siguiente color asignado (i.e., el de v_t) es menor que el de v_{t-1} y luego el resto de los colores tienen nuevamente un orden creciente. Vale notar que, como P

cumple la condición *ii* de la hipótesis, los vértices de P pueden acomodarse de esta forma utilizando l colores (recordar que $l = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$), ya que los primeros l vértices del camino se acomodan todos en orden en forma consecutiva en esos colores y luego se hace lo mismo con los vértices que restan, en los mismos colores (o uno menos si $|P|$ es impar) y en orden. Otra observación pertinente es que la condición *i* de la hipótesis implica que si los vértices de P utilizan l colores, entonces el resto del grafo puede ubicarse en los colores restantes incluso dejando hasta 3 colores de C sin utilizar. Esto nos permitirá mostrar que existen en F soluciones particulares que utilizaremos para probar que F es una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$.

Sean $\pi \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veremos a continuación que si $\pi x + \mu y = \alpha$ para todo $(x, y) \in F$, entonces $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.10), y esto implica que esta última define una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$.

Afirmación 1: $\pi_u = 0$, para todo $u \in V \setminus P$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ una solución en la cual todos los vértices de P se ubican en los primeros l colores (i.e., los colores $[0, l-1]$) como explicamos más arriba, y los vértices de $V \setminus P$ se ubican en colores mayores o iguales que $l+1$, siendo $l+1$ el color asignado a u. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u recibe el color l (el cual no se utilizaba en $\hat{z}$). Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_v, entonces $\pi_v = 0$.
Afirmación 2: $\pi_{v_i} = 0$, para todo $v_i \in P$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ una solución en la cual los vértices de $V \setminus P$ se ubican en colores mayores o iguales que $l+1$ y todos los vértices de P se ubican en los primeros $l+1$ colores (i.e., en los colores $[0, l]$), siendo $c \in [0, l-1]$ el color asignado a v_i y $c+1$ un color no utilizado. Notar que esta solución puede obtenerse de la solución $\hat{z}$ de la Afirmación 1, moviendo un color a la derecha a todas las clases de color en el intervalo $[c+1, l)$, dejando así vacía la clase de color $c+1$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que v_i recibe el color $c+1$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_{v_i}, entonces $\pi_{v_i} = 0$.
Afirmación 3: $\vec{\mu}_{uw} = 0$, para todo $u, w \in V \setminus P$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ una solución en la cual todos los vértices de P se ubican en los primeros l colores (i.e., los colores $[0, l-1]$), los vértices u y w utilizan los colores l y $l+1$, respectivamente, y el resto de los vértices de $V \setminus P$ se ubican en colores mayores o iguales que $l+2$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u y w intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en los valores de x_u, x_w, e y_{uw}, entonces por la Afirmación 1, $\vec{\mu}_{uw} = 0$.
Afirmación 4: $\vec{\mu}_{uv_i} = 0$, para todo $u \in V \setminus P, v_i \in P$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ una solución en la cual los vértices de $V \setminus (P \cup \{u\})$, se ubican en colores mayores o iguales que $l+3$, los vértices de $P \setminus \{v_i\}$ se ubican en los colores $[0, l+2]$ salvo por tres colores consecutivos c, $c+1$ y $c+2$, siendo c y $c+1$ los colores asignados a u y a v_i, respectivamente. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u toma ahora el color $c+2$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en los valores de

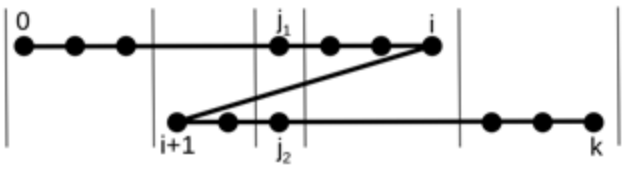

Figura 4.4: Solución para la Afirmación 5.

x_u, e y_{uv_i}, entonces por la Afirmación 1, $\vec{\mu}_{uv_i} = 0$.
Afirmación 5: $\vec{\mu}_{v_{i-1}v_i} = \vec{\mu}_{v_iv_{i+1}}$, para todo $i \in [1, k-1]$. Por la condición *iii* para v_i, existe una (P, v_{j_1}, v_{j_2})-alineación de G con $j_1 \leq i < j_2$. Entonces, es posible armar una solución $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ en la que $\hat{y}_{v_iv_{i+1}} = 0$ simplemente ordenando las clases de color dadas por la alineación de manera tal que $\hat{x}_{v_{i+1}} < \hat{x}_{v_i}$. Para ello, pueden ubicarse:

1. $v_0, \ldots, v_{j_1-1}$ en los colores $0, \ldots, j_1 - 1$,
2. $v_{j_1}, \ldots, v_i$ en los colores $(j_1 + j_2 - (i+1)), \ldots, j_2 - 1$,
3. $v_{i+1}, \ldots, v_{j_2}$ en los colores $j_1, \ldots, (j_1 + j_2 - (i+1))$ y
4. $v_{j_2+1}, \ldots, v_k$ en los colores $j_2, \ldots, k-1$.

La Figura 4.4 muestra una ilustración de esta asignación (los rótulos en la figura hacen referencia al índice en el camino del correspondiente vértice y la alineación horizontal al color asignado a cada uno de ellos). Puede verse que de esta manera, la única arista e de P con $\hat{y}_e = 0$ es v_iv_{i+1}. Nótese que en el caso en que $v_i = v_0$, entonces $j_1 = 0$ y $j_2 > 1$, con lo cual la solución puede construirse igualmente. En forma similar, en caso en que $v_i = v_{k-1}$, entonces $j_2 = k$ y $j_1 < i$, con lo cual también es posible construir la solución correspondiente.
De manera análoga para v_{i-1}, puede construirse una solución $\bar{z} \in F$ en la cual la única arista e de P con $\bar{y}_e = 0$ es $v_{i-1}v_i$. Notar que $\hat{z}$ y $\bar{z}$ pueden diferir en muchas variables, pero por las afirmaciones anteriores, todas estas variables tienen coeficientes nulos en $\pi x + \mu y$ salvo por $y_{v_{i-1}v_i}$ y $y_{v_iv_{i+1}}$ y como ambas soluciones pertenecen a F, podemos deducir que $\vec{\mu}_{v_{i-1}v_i} = \vec{\mu}_{v_iv_{i+1}}$.

La conjunción de todas estas afirmaciones muestran que $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.10) y por lo tanto esta última define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

□

Se puede ver en la demostración que las condiciones suficientes dadas no son en absoluto condiciones necesarias ya que los mismos resultados pueden

obtenerse bajo condiciones muy distintas a las planteadas. Por ejemplo, las condiciones *i* y *ii* se utilizan para poder construir las soluciones correspondientes a las afirmaciones 1 a 4. Sin embargo, soluciones equivalentes a éstas pueden construirse aun cuando la cantidad de colores de C no cumpla la condición *i* o aun cuando existan algunas cuerdas (particulares para cada solución) en P, ya que en la mayoría de los casos, sólo es necesario poder acomodar los vértices del grafo en algunos pocos colores de forma tal de dejar uno o dos libres. Lamentablemente, dar condiciones necesarias para poder construir estas soluciones implicaría dar una enumeración larga de distintas posibilidades para cada vértice y arista de G. Algo similar ocurre con el ítem *iii*, que se utiliza para construir soluciones en las cuales sólo una determinada arista $v_i v_{i+1}$ se oriente hacia atrás. Es fácil ver que para muchas de las aristas de P, es posible construir tal solución sin recurrir a la condición *iii*. Por ejemplo, la solución $\hat{z}$ de la Afirmación 1 es un caso en el cual la arista entre v_{l-1} y v_l es la única del camino orientada hacia atrás y esta misma solución serviría para probar la Afirmación 5 para dicha arista, sin pedir además que exista una (P, v_{j_1}, v_{j_2})-alineación de G con $j_1 \leq l < j_2$, relajando así las condiciones del teorema. Si bien sería posible restringir las hipótesis requeridas, caracterizar exactamente las condiciones necesarias implicaría probablemente largas descripciones de casos para cada vértice y arista del grafo. Estas aclaraciones tienen como objetivo mostrar que las *path inequalities* pueden aparecer como facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ en una gran cantidad de casos, aunque estos casos no admitan una caracterización elegante.

4.4.1.2. *Weighted path inequalities*

Las *path inequalities*, de la Sección 4.4.1.1 dicen que las aristas de un camino no pueden tener todas la misma orientación si $|P| = |C|$ (o si $|P| \geq |C|$ en realidad). Esto sí puede ocurrir, sin embargo, si $|P| < |C|$, aunque en ese caso tiene implicaciones sobre los colores que pueden recibir algunos vértices del camino. Por ejemplo, si $|C| = 6$ y $|P| = 4$, existen soluciones en las que los vértices de P reciben colores en forma creciente pero en estas soluciones el primer vértice de P no puede recibir un color muy alto; en particular puede recibir colores menores a 2. Algo similar ocurre cuando los colores se asignan a P en forma decreciente; en estos casos tenemos una cota inferior para el color asignado al primer vértice del camino. Explotamos estas consecuencias en la siguiente desigualdad válida general.

Teorema 4.4.5 *Dado un camino* $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, *con* $1 \leq k < |C|$, *las* weigh-

ted path inequalities *(WPI)*

$$x_{v_0} \geq k - \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) y_{v_j v_{j+1}} \tag{4.11}$$

$$x_{v_0} \leq (|C|-1) - k + \sum_{j=0}^{k-1} (k-j) y_{v_{j+1} v_j} \tag{4.12}$$

son válidas para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. Nótese que (4.12) es la versión simétrica de (4.11).

Es preciso notar que las *weighted path inequalities* son una generalización de las desigualdades *Drei-Kanten-Pfad* presentadas en [32]. En la Sección 4.4.1.3 presentaremos otra familia de desigualdades válidas que a su vez generaliza a las WPI y demostramos su validez, probando así la validez de (4.11) y (4.12). Aun teniendo esta generalización, presentamos el caso particular de las WPI ya que esta familia presenta condiciones de facetitud menos rigurosas que el caso general, tal como establecemos en el siguiente resultado.

Teorema 4.4.6 *Supongamos que $|C| \geq \chi(G \setminus P) + k + 2$ y que P no tiene cuerdas. Entonces, las WPI (4.11) y (4.12) definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ si y solo si todo vértice en $N(v_0) \setminus P$ tiene un anti-vecino en P.*

Demostración. Debido al Teorema 4.3.2, alcanza con demostrar que (4.11) define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Sea entonces F la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (4.11). Tomemos una solución entera $(x, y) \in F$ y llamemos $t := x_{v_0}$. Claramente, $t \leq k$, ya que si no la solución no podría estar en F. Además, $y_{v_j v_{j+1}} = 0$ para todo $j < t$, ya que de otra forma, (4.11) tampoco se cumpliría por igualdad. Esto implica que $t = x_{v_0} > x_{v_1} > \ldots > x_{v_{t-1}} > x_{v_t}$, con lo cual $x_{v_t} = 0$. Si v_t es el último vértice del camino, entonces $t = k$. Si no, $y_{v_t v_{t+1}} = 1$, pues $x_{v_t} = 0$ y (4.11) se reduce a

$$t \geq k - (k-t) - \sum_{j=t+1}^{k-1} (k-j) y_{v_j v_{j+1}}.$$

Ya que (4.11) se cumple por igualdad, entonces $y_{v_j v_{j+1}} = 0$ para todo $j > t$. Esto prueba que una solución entera (x, y) está en F, si y sólo si

i. $x_{v_0} = t \leq k$,

ii. $y_{v_t v_{t+1}} = 1$ (si existe la arista, i.e., si $t < k$) y

iii. $y_{v_j v_{j+1}} = 0$, para todo $j \neq t$.

Notar que los items *i* y *iii* implican que los primeros t vértices de P después de v_0 ocupan los primeros t colores en orden descendente. Es decir, $x_{v_1} = t - 1$, $x_{v_2} = t - 2, \ldots, x_{v_t} = 0$. No hay restricciones en cuanto a los colores asignados

a los vértices $v_{t+1}, \ldots, v_k$ salvo que los mismos deben estar ordenados en forma decreciente. Podemos ilustrar las soluciones en F con el siguiente diagrama:

v_t	v_{t-1}	$\ldots$	v_1	$\boldsymbol{v_0}$	$\ldots$
$\ldots$	v_k $\ldots$	v_{k-1}	$\ldots$	$\ldots$	v_{t+1} $\ldots$

Sean $\pi \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veremos a continuación que si $\pi x + \mu y = \alpha$ para todo $(x, y) \in F$, entonces $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.11), lo cual implica que esta última define una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$.

Afirmación 1: $\pi_w = 0$, para todo $w \neq v_0$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = 0$ y tal que existe un color c contiguo a $\hat{x}_w$ que no está utilizado en $\hat{z}$. Esta solución puede obtenerse ordenando las clases de color de los vértices $v_1, \ldots, v_k$ en forma decreciente y es posible además dejar libre el color c porque $|C| \geq k + \chi(G \setminus P) + 2$. Vale aclarar que w puede pertenecer a P o no. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que $\bar{x}_w = c$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_w, entonces $\pi_w = 0$.
Afirmación 2: $\vec{\mu}_{uw} = 0$, para todo $uw \in E$ con $u, w \notin P$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = 0$, $\hat{x}_{v_1} = k - 1$, $\hat{x}_u = k$, $\hat{x}_w = k + 1$ y $\hat{x}_q \geq k + 2$, para todo $q \notin (\{u, w\} \cup P)$. Esta solución puede obtenerse acomodando los vértices $v_1, \ldots, v_k$ en orden decreciente en el rango de colores $[0, k-1]$ y utilizando los colores mayores que $k+1$ para colorear $G \setminus (P \cup \{u, w\})$, lo cual es factible ya que $|C| \geq k + 2 + \chi(G \setminus P)$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u y w intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, x_w e y_{uw}, por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{uw} = 0$.
Afirmación 3: $\vec{\mu}_{uv_i} = 0$, para todo $u \notin P$ e $i \in [1, k]$ con $uv_i \in E$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = 0$, $\hat{x}_u = c$, $\hat{x}_{v_i} = c + 1$ y tal que tanto u como v_i son los únicos en sus respectivos colores. Esta solución puede obtenerse ordenando las clases de color de los vértices $v_1, \ldots, v_k$ en forma decreciente y es posible además dejar a u y v_i como únicos vértices en sus respectivos colores (contiguos) ya que $|C| \geq k + \chi(G \setminus P) + 2$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u y v_i intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, x_{v_i} e y_{uv_i}, por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{uv_i} = 0$.
Afirmación 4: $\vec{\mu}_{uv_0} = 0$, para todo $u \in (N(v_0) \setminus P)$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = k$, $\hat{x}_u < k$ y tal que el color $k+1$ está vacío. Esta solución se puede construir ubicando los vértices $v_1, \ldots, v_k$ en forma decreciente en el rango de colores $[0, k-1]$ y coloreando a u con el mismo color que uno de sus no vecinos en $P \setminus \{v_0\}$ (el cual existe por hipótesis). Se utilizan luego los colores mayores que $k+1$ para colorear $G \setminus (P \cup \{u\})$, lo cual es válido porque $|C| \geq \chi(G \setminus P) + k + 2$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u recibe el color $k+1$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, y_{uv_0} e y_{uw} para algunos vértices $w \neq v_0$, entonces por la Afirmación 1, la Afirmación 2 y la

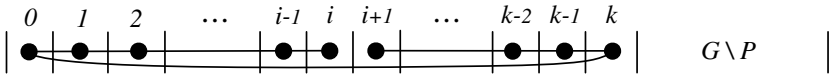

Figura 4.5: Solución utilizada en la Afirmación 6.

Afirmación 3 tenemos que $\vec{\mu}_{uv_0} = 0$.

Afirmación 5: $\vec{\mu}_{v_{k-1}v_k} = \pi_{v_0}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = k$ y por lo tanto $\hat{x}_{v_1} = k-1, \ldots, \hat{x}_{v_k} = 0$. Por hipótesis, el resto del grafo se puede colorear con los $|C| - (k+1)$ colores restantes. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que las clases de color menores o iguales que k se mueven a un color inferior salvo por la clase de color 0 que pasa al color k. Es decir, $\bar{x}_u = \hat{x}_u - 1$ para todo u con $0 < \hat{x}_u \leq k$, y $\bar{x}_u = k$ para todo u con $\hat{x}_u = 0$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_{v_0}, $y_{v_{k-1}v_k}$ y quizás también en otras variables con coeficientes nulos, tenemos que $k\pi_{v_0} = (k-1)\pi_{v_0} + \vec{\mu}_{v_{k-1}v_k}$, con lo cual $\pi_{v_0} = \vec{\mu}_{v_{k-1}v_k}$.

Afirmación 6: $\vec{\mu}_{v_{i-1}v_i} = \vec{\mu}_{v_iv_{i+1}} + \pi_{v_0}$, para todo $i = 1, \ldots, k-1$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_{v_0} = i$ (y por lo tanto $\hat{x}_{v_1} = i-1, \ldots, \hat{x}_{v_i} = 0$) y $\hat{x}_{v_{i+1}} = k$. Esta solución puede obtenerse acomodando por ejemplo los vértices $v_{i+2}, \ldots, v_k$ en orden decreciente en el rango de colores $[i+1, k-1]$ y utilizando los colores mayores que k para colorear el resto del grafo (lo cual es factible pues $|C| \geq \chi(G \setminus P) + k$). La Figura 4.5 ilustra la solución descripta. Nuevamente, sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que las clases de color menores o iguales que k se mueven a un color inferior salvo por la clase de color 0 que pasa al color k. Es decir, $\bar{x}_u = \hat{x}_u - 1$ para todo u con $0 < \hat{x}_u \leq k$, y $\bar{x}_u = k$ para todo u con $\hat{x}_u \leq 0$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_{v_0}, $y_{v_{i-1}v_i}$, $y_{v_iv_{i+1}}$ y quizás también en otras variables con coeficientes nulos, tenemos que $i\pi_{v_0} + \vec{\mu}_{v_iv_{i+1}} = (i-1)\pi_{v_0} + \vec{\mu}_{v_{i-1}v_i}$, con lo cual $\pi_{v_0} + \vec{\mu}_{v_iv_{i+1}} = \vec{\mu}_{v_{i-1}v_i}$.

La conjunción de todas estas afirmaciones muestran que $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.11) y por lo tanto esta última define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

Por otro lado, si existe $w \in N(v_0) \setminus P$ tal que $wv \in E$, para todo $v \in P$, entonces en cualquier solución entera en F, el vértice w no puede tener un color anterior a v_0 ya que todos están ocupados por vértices de P (e.g., los vértices de P_t, siendo t el valor de x_v en tal solución) y entonces $y_{v_0w} = 1$ para toda solución en F. Al ser $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ un poliedro de dimensión completa, esto contradice la facetitud de F.

□

Vale aclarar que la condición $|C| \geq \chi(G \setminus P) + k + 2$ es suficiente (junto a otras) para la facetitud de (4.11) pero no es necesaria en general. Lamentablemente, esta cota inferior para $|C|$ depende fuertemente de la estructura

de G y no parece ser sencillo caracterizarla en el caso general. Por ejemplo, siendo G un camino de 4 vértices y usando $|C| = 4$, sabemos que aparecen facetas de tipo WPI con un camino P de 3 vértices (i.e., $k = 2$), y en este caso $|C| = 4 < 1 + 2 + 2 = \chi(G \setminus P) + k + 2$. Asimismo, la condición de que P no tenga cuerdas no es tampoco una condición necesaria, y es posible que (4.11) defina facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ aun aceptando ciertas aristas entre los vértices de P. Igualmente, pareciera ser difícil obtener una caracterización completa a este respecto para los casos en que (4.11) define facetas. El siguiente resultado da condiciones suficientes para que (4.11) no defina facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ y lo presentamos para dar una idea de la dificultad de esta caracterización.

Proposición 4.4.1 *La desigualdad (4.11) no define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ si alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

i) $|C| \leq k$.

ii) *existe* $w \in N(v_0) \setminus P$ *tal que* $wv \in E$, *para todo* $v \in P$.

iii) $|C| > \chi(G)$ *y existe una cuerda* $v_i v_j \in E, i < j$, *tal que* $k - j \geq j - i - 1$.

iv) $|C| > \chi(G)$ *y existen cuerdas* $v_i v_j, v_{i-1} v_j \in E$ *con* $i < j - 1$.

Demostración. Sea F la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por (4.11).

i) En toda solución entera $(x, y) \in F$, vale que $t := x_{v_0} < k$. Entonces $y_{v_t v_{t+1}} = 1$ y $y_{v_j v_{j+1}} = 0$, para todo $j \neq t$. Con lo cual, F queda contenida en el hiperplano definido por $\sum_{i=0}^{k-1} y_{v_i v_{i+1}} = 1$, contradiciendo así su facetitud.

ii) Es fácil ver que en cualquier solución entera en F, el vértice w no puede tener un color anterior a v_0 (ya que todos están ocupados por vértices de P) y entonces $y_{v_0 w} = 1$ para toda solución en F. Dada la simetría de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, sabemos que existen puntos del poliedro que no satisfacen la igualdad $y_{v_0 w} = 1$ (si $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ no es vacío), lo cual implica que F no puede ser una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

iii) Supongamos que existe una cuerda $v_i v_j \in E, i < j$, tal que $k - j \geq j - i - 1$. Veremos entonces que en este caso, toda solución entera en F cumple

$$\sum_{l=i}^{j-1} y_{v_l, v_{l+1}} = y_{v_i v_j}, \tag{4.13}$$

lo cual contradice la facetitud de F, pues $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ tiene dimensión completa cuando $|C| > \chi(G)$. Sea una solución entera $z = (x, y) \in F$ y llamemos $t := x_{v_0}$. Claramente, $t \leq k$, ya que si no la solución no podría estar en F. Además, $y_{v_j v_{j+1}} = 0$ para todo $j < t$, ya que de otra forma, (4.11) no se

cumpliría por igualdad. Esto implica que $t = x_{v_0} > x_{v_1} > \ldots > x_{v_{t-1}} > x_{v_t}$, con lo cual $x_{v_t} = 0$. Si v_t es el último vértice del camino, entonces $t = k$. Si no, $y_{v_t v_{t+1}} = 1$, pues $x_{v_t} = 0$ y (4.11) se reduce a

$$t \geq k - (k - t) - \sum_{j=t+1}^{k-1} (k - j) y_{v_j v_{j+1}}.$$

Ya que (4.11) se cumple por igualdad, entonces $y_{v_j v_{j+1}} = 0$ para todo $j > t$. Esto muestra que una solución en F puede tener $y_{v_j v_{j+1}} = 1$ para a lo sumo un valor de $j \in [0, \ldots, k-1]$ y en tal caso dicho valor es t (es decir, $y_{v_t v_{t+1}} = 1$).

Si $\sum_{l=i}^{j-1} y_{v_l, v_{l+1}} = 0$, entonces $x_{v_i} > x_{v_{i+1}} > \ldots > x_{v_j}$, con lo cual $y_{v_i v_j} = 0$ y (4.13) se cumple trivialmente. En caso contrario, $\sum_{l=i}^{j-1} y_{v_l, v_{l+1}} = 1$, pues como vimos arriba, a lo sumo un valor $l \in [i, \ldots, j-1]$, es tal que $y_{v_l v_{l+1}} = 1$. En particular, sabemos que $l = t$ (i.e., $y_{v_t v_{t+1}} = 1$) y que entonces $x_{v_t} = 0$, $x_{v_{t-1}} = 1$, $x_{v_{t-2}} = 2$, $\ldots$, $x_{v_{t-(t-i)}} = x_{v_i} = t - i \leq (j-1) - i$.

Por otro lado sabemos que $\sum_{l=j}^{k-1} y_{v_l, v_{l+1}} = 0$ (pues $y_{v_t v_{t+1}} = 1$), entonces $x_{v_j} > x_{v_{j+1}} > \ldots > x_{v_k} \geq 0$, con lo cual $x_{v_j} \geq k - j$. Así, por hipótesis, $x_{v_j} \geq j - i - 1 \geq x_{v_i}$. Entonces, $y_{v_i v_j} = 1$, con lo cual se cumple (4.13).

iv) Supongamos que existen las cuerdas $v_i v_j, v_{i-1} v_j \in E$ con $i < j - 1$. Veremos que en este caso, toda solución entera en F cumple

$$y_{v_{i-1}, v_j} - y_{v_i v_j} = y_{v_{i-1}, v_i}, \tag{4.14}$$

lo cual contradice la facetitud de F, pues $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ tiene dimensión completa cuando $|C| > \chi(G)$. Dada una solución entera $(x, y) \in F$, sea $t := x_{v_0}$. Si $i < t + 1$, entonces $y_{v_{i-1}, v_i} = 0$ y v_i y v_{i-1} reciben colores contiguos y por lo tanto $y_{v_{i-1}, v_j} = y_{v_i v_j}$, con lo cual se cumple (4.14). Si $i = t + 1$, entonces $y_{v_{i-1}, v_i} = 1$, $y_{v_i, v_j} = 0$ y $x_{v_{i-1}} = 0$ lo que implica que $y_{v_{i-1}, v_j} = 1$, con lo cual se cumple (4.14). Por último, si $i > t + 1$, entonces $x_{v_j} < x_{v_i} < x_{v_{i-1}}$, con lo cual todas las variables de (4.14) valen 0.

□

4.4.1.3. *Spiral inequalities*

Las WPI presentadas en la sección anterior utilizan como estructura soporte un camino a partir de un cierto vértice del grafo. Siguiendo una idea similar, presentamos en esta sección una generalización de esta familia que utiliza varios caminos de longitudes incrementales a partir de un mismo vértice. Para

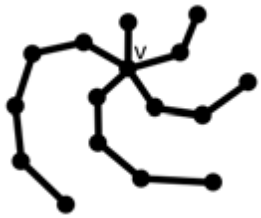

Figura 4.6: *Spiral inequalities* (sin intersección de caminos).

mayor claridad en la notación de estas desigualdades (y de las presentadas en las siguientes secciones), dado un camino $P = \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$, definimos

$$\overrightarrow{Y}(P) = \sum_{i=0}^{k-1} y_{v_i v_{i+1}}, \qquad \overleftarrow{Y}(P) = \sum_{i=0}^{k-1} y_{v_{i+1} v_i}.$$

Teorema 4.4.7 *Sea $v \in V$ y $k \in [1, |C| - 1]$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, sea $P_i = \{w_0^i, w_1^i, \ldots, w_i^i\}$ un camino a partir de v, es decir, $w_0^i = v$ (ver Figura 4.6). Con estas definiciones, las* spiral inequalities *(SI)*

$$x_v \geq k - \sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{Y}(P_i) \tag{4.15}$$

$$x_v \leq (|C| - 1 - k) + \sum_{i=1}^{k} \overleftarrow{Y}(P_i) \tag{4.16}$$

son válidas para $P_{col}^{o}(G)$. Nótese que (4.15) es la versión simétrica de (4.16).

Demostración. Debido al Teorema 4.3.2, alcanza con demostrar que (4.16) es válida para $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$. Sea (x, y) una solución factible. Si $x_v \leq |C| - 1 - k$ entonces no hay nada que probar, pues la sumatoria en el lado derecho es no negativa. Por otro lado, si $x_v = |C| - 1$, entonces $y_{w_1^i w_0^i} = 1$, para todo $i = 1, \ldots, k$ (pues $w_0^i = v$), y por lo tanto vale la desigualdad. Supongamos entonces que $x_v = |C| - 1 - t$, con $1 \leq t < k$ y analicemos el valor de la suma

$$\sum_{j=1}^{t+1} y_{w_j^i w_{j-1}^i}, \tag{4.17}$$

para cada uno de los caminos P_i con $i > t$ (vale aclarar que w_{t+1}^i existe porque $i > t$). Si existe algún $j \in [1, t]$, tal que $y_{w_j^i w_{j-1}^i} = 1$, entonces (4.17) es mayor o igual que 1. Supongamos entonces que no existe tal j y por lo tanto las aristas de P_i involucradas en (4.17) son un camino simple (ya que de contener

un ciclo, debería existir tal j por simple transitividad). Esto significa que $x_{w_0^i} < x_{w_1^i} < \ldots < x_{w_t^i}$ y como $x_{w_0^i} = x_v = |C| - 1 - t$, entonces $x_{w_t^i} = |C| - 1$. Esto implica que $y_{w_{t+1}^i w_t^i} = 1$. En cualquier caso, (4.17) es mayor o igual que 1. Por lo tanto, como existen $k - t$ caminos P_i con $i > t$, la desigualdad (4.16) se cumple.

□

La Figura 4.6 muestra un ejemplo del grafo soporte de una *spiral inequality* en el cual los caminos considerados son disjuntos dos a dos, es decir, no comparten vértices ni aristas entre sí. Sin embargo, esto no es un requisito para la validez de estas desigualdades y las mismas son válidas aun cuando diferentes caminos tienen vértices y/o aristas en común. Un caso particular se da cuando todos los caminos son subcaminos de un mismo camino. Es decir, cuando cada P_i se compone de las primeras i aristas del camino P_k. Este caso resulta interesante porque la desigualdad resultante es justamente la *weighted path inequality* presentada en la Sección 4.4.1.2. Esta observación implica que las *spiral inequalities* definen facetas de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$ al menos en estos casos en particular (y bajo las condiciones del Teorema 4.4.6). Igualmente, describimos a continuación otras condiciones en las que estas desigualdades definen también facetas.

Teorema 4.4.8 *Sea $\mathcal{P} = \{v\} \cup \bigcup_{i=1}^{k} P_i$, donde v y $P_1, \ldots, P_k$ son el vértice y los caminos asociados a un par de desigualdades (4.15) y (4.16). Supongamos que $|C| \geq \chi(G \setminus \mathcal{P}) + k + 2$, que $P_i \cap P_j = \{v\}$ si $i \neq j$ y que las únicas aristas de $G[\mathcal{P}]$ son las de los caminos P_i, con $i \in [1, k]$. Entonces, tales desigualdades (4.15) y (4.16) definen facetas de $P^{\text{o}}_{col}(G)$ si y solo si todo vértice en $N(v) \setminus \mathcal{P}$ tiene un anti-vecino en $\mathcal{P}$.*

Demostración. Para mayor claridad, definimos $P_i' = P_i \setminus \{v\}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Debido al Teorema 4.3.2, alcanza con demostrar que (4.15) define una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$. Sea F la cara de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$ definida por (4.15). Tomemos una solución entera $(x, y) \in F$ y llamemos $t := x_v$. Claramente, $t \leq k$, ya que en caso contrario (4.15) no podría cumplirse por igualdad. Para un camino P_i, notemos que si $\overrightarrow{Y}(P_i) = 0$, entonces los i vértices de P_i' reciben colores menores que t en forma decreciente, pues $t = x_v = x_{w_0^i} < x_{w_1^i} < \ldots < x_{w_i^i}$. Así, para cada $i > t$, deducimos que $\overrightarrow{Y}(P_i) \geq 1$, ya que no hay suficientes colores menores que t para que pueda darse el caso en que $\overrightarrow{Y}(P_i) = 0$. Entonces, $\sum_{i=t+1}^{k} \overrightarrow{Y}(P_i) \geq k - t$, con lo cual la única forma de que (x, y) cumpla por igualdad (4.15) es que $\overrightarrow{Y}(P_i) = 0$, para todo $i \leq t$ y que $\overrightarrow{Y}(P_i) = 1$, para todo $i > t$. Esto implica que una solución entera (x, y) está en F, si y sólo si

i. $x_v = t \leq k$,

ii. $\overrightarrow{Y}(P_i) = 0$, para todo $i \leq t$ y

iii. $\overrightarrow{Y}(P_i) = 1$, para todo $i > t$.

Notar que el ítem *ii* implica que el único vértice de P'_1 se ubica en alguno de los primeros t colores (i.e., los colores de 0 a $t-1$), si $t \geq 1$. Lo mismo ocurre con los dos vértices de P'_2, si $t \geq 2$, y además éstos se ordenan en orden inverso. Y así ocurre con todos los P'_i con $i \leq t$, es decir, los i vértices de P'_i se ubican, en orden inverso, en i de los primeros t colores. En particular, los t vértices de P'_t ocupan, en orden inverso, todos los colores entre 0 y $t-1$, inclusive. Esto implica que sea cual sea el valor de t, siempre hay un camino (i.e., P'_t) que utiliza todos los colores menores que t. Así, si existiera un vértice $u \in N(v) \setminus \mathcal{P}$ que es vecino de todos los vértices de $\mathcal{P}$, entonces u nunca podría recibir un color menor que v, con lo cual $y_{uv} = 0$ para toda solución en F, contradiciendo la facetitud de la misma. Esto prueba que F es una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$ sólo si todo vértice en $N(v) \setminus \mathcal{P}$ tiene un anti-vecino en $\mathcal{P}$. Veremos ahora la implicación inversa.

Sean $\pi \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}^m$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Veremos a continuación que si $\pi x + \mu y = \alpha$ para todo $(x, y) \in F$, entonces $\pi x + \mu y = \alpha$ es en realidad un múltiplo de (4.15) implicando que esta última define una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$.

Afirmación 1: $\pi_w = 0$, para todo $w \neq v$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = 0$ y tal que existe un color c contiguo a $\hat{x}_w$ que no está utilizado en $\hat{z}$. Esta solución puede obtenerse acomodando todos los vértices de $\mathcal{P}$ en $k+1$ colores (pues las únicas aristas de $\mathcal{P}$ son las de los caminos P_i) y coloreando el resto del grafo con el resto de los colores dejando incluso un color sin usar, ya que $|C| \geq \chi(G \setminus \mathcal{P}) + k + 2$. Vale aclarar que w puede pertenecer a $\mathcal{P}$ o no. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que w recibe el color c. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_w, entonces $\pi_w = 0$.
Afirmación 2: $\vec{\mu}_{uw} = 0$, para todo $uw \in E$ con $u, w \notin \mathcal{P}$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = 0$, $\hat{x}_{v'} \leq k-1$ para $v' \in \mathcal{P}$, $\hat{x}_u = k$, $\hat{x}_w = k+1$ y $\hat{x}_q \geq k+2$, para todo $q \notin (\{u, w\} \cup P)$. Esta solución puede obtenerse acomodando los vértices de $\mathcal{P}$ (en orden decreciente para cada P_i) en el rango de colores $[0, k-1]$ y utilizando los colores mayores que $k+1$ para colorear $G \setminus (P \cup \{u, w\})$, lo cual es factible ya que $|C| \geq k + 2 + \chi(G \setminus P)$. La Figura 4.7 (*a*) ilustra esta construcción en la cual cada columna representa un color. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u y w intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, x_w e y_{uw}, por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{uw} = 0$.
Afirmación 3: $\vec{\mu}_{uw^i_j} = 0$, para todo $u \notin \mathcal{P}$, $i \in [1, k]$, $j \in [1, i]$ con $uw^i_j \in E$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = 0$, $\hat{x}_{w^i_j} = c$, $\hat{x}_u = c+1$ y tal que tanto u como w^i_j son los únicos en sus respectivos colores. Notar que esta solución puede construirse en forma similar a la de la Figura 4.7 (*a*) intercalando la clase de color de u entre los colores asignados a los vértices de $\mathcal{P}$ y utilizando un color extra (el que usaba w en tal solución) para w^i_j. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero

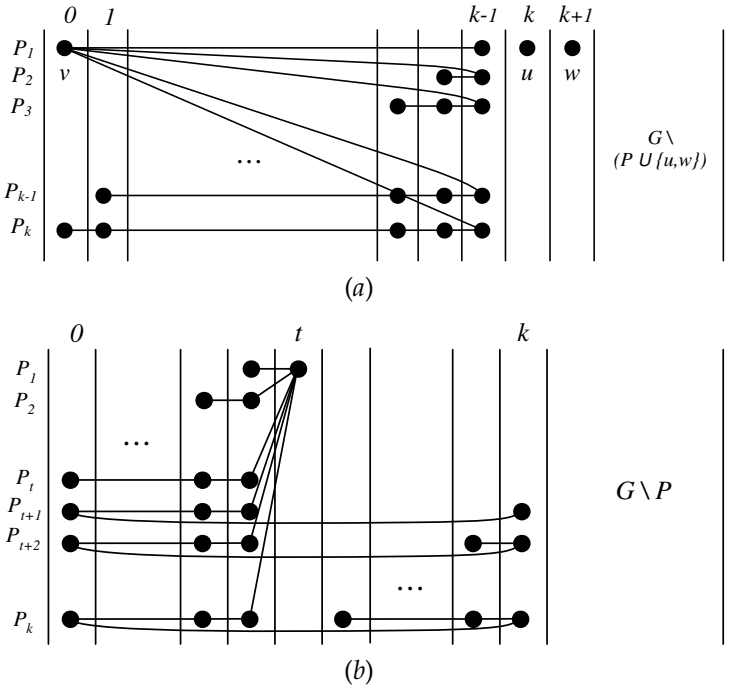

Figura 4.7: Soluciones utilizadas en la Afirmación 2 (*a*) y la Afirmación 5 (*b*).

en la que u y w_j^i intercambian sus colores. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, $x_{w_j^i}$ e $y_{uw_j^i}$, por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{uw_j^i} = 0$.

Afirmación 4: $\vec{\mu}_{uv} = 0$, para todo $uv \in E$ con $u \notin \mathcal{P}$. Sea $w_j^i \in P_i$ un vértice no adyacente a u y sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = i$, $\hat{x}_u = \hat{x}_{w_j^i} = i - j$ y tal que el color $k+1$ no está utilizado (la solución existe ya que $uw_j^i \notin E$ y $|C| \geq \chi(G \setminus \mathcal{P}) + k + 1$). Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que u recibe el color $k+1$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_u, y_{uv} e y_{uw} para algunos vértices $w \neq v$, entonces por la Afirmación 1, la Afirmación 2 y la Afirmación 3 tenemos que $\vec{\mu}_{uv_0} = 0$.

Afirmación 5: $\vec{\mu}_{w_{t-1}^t w_t^t} = \pi_v$, para todo $t \in [1, k]$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = t$ y $\hat{x}_{w_i^i} = t - i$ para todo $i \leq t$. La Figura 4.7 (*b*) muestra una ilustración de esta solución en la cual cada columna representa un color (tres rótulos distinguen los colores 0, t y k en la misma). Se puede ver que la solución es factible ya que $|C| \geq \chi(G \setminus \mathcal{P}) + k + 1$. Notar que $\hat{x}_{w_t^t} = 0$. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que las clases de color menores o iguales que t se mueven a un color inferior salvo por la clase de color 0 que pasa al color t. Es decir, $\bar{x}_u = \hat{x}_u - 1$ para todo u con $0 < \hat{x}_u \leq t$, y $\bar{x}_u = t$ para todo u con $\hat{x}_u = 0$.

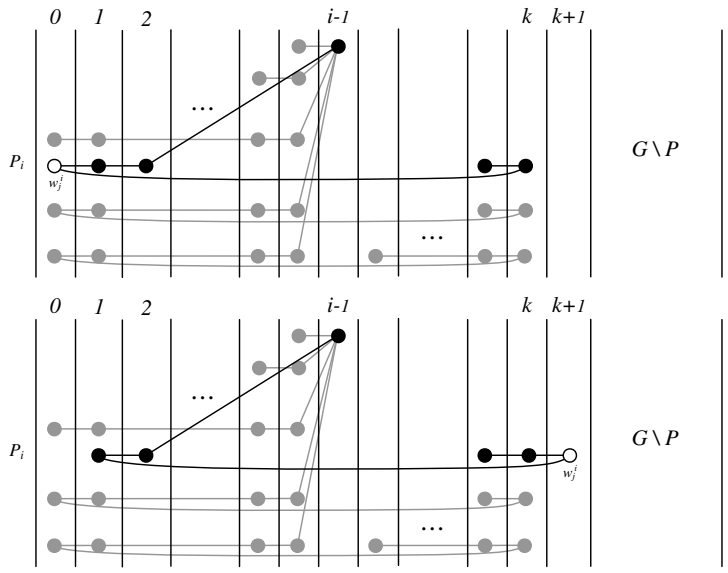

Figura 4.8: Soluciones utilizadas en la Afirmación 6 (caso de ejemplo con $j = 3$).

Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de x_v, $y_{w^t_{t-1}w^t_t}$ y quizás también en otras variables con coeficientes nulos, tenemos que $t\pi_v = (t-1)\pi_v + \vec{\mu}_{w^t_{t-1}w^t_t}$, con lo cual $\pi_v = \vec{\mu}_{w^t_{t-1}w^t_t}$.

Afirmación 6: $\vec{\mu}_{w^i_{j-1}w^i_j} = \vec{\mu}_{w^i_j w^i_{j+1}}$, para todo $i \in [1,k]$, $j \in [1, i-1]$. Sea $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in F$ con $\hat{x}_v = i-1$ en la cual $\hat{x}_{w^i_{j'}} = j - j'$, para todo $j' \leq j$ y $\hat{x}_{w^i_{j+1}} = k$. Es decir, $\hat{x}_{w^i_j} = 0$, $\hat{x}_{w^i_{j-1}} = 1$, …, $\hat{x}_{w^i_1} = j-1$. Notar que en esta solución $\hat{y}_{w^i_{j-1}w^i_j} = 0$ y $\hat{y}_{w^i_j w^i_{j+1}} = 1$. Pedimos además que el color $k+1$ no esté utilizado en esta solución. Sea $\bar{z}$ una solución igual a $\hat{z}$ pero en la que w^i_j recibe el color $k+1$. La Figura 4.8 ilustra estas dos soluciones en el caso en que $j = 3$ (notar que estas soluciones son factibles ya que $|C| \geq \chi(G \setminus \mathcal{P}) + k + 2$). Nótese que en esta nueva solución $\hat{y}_{w^i_{j-1}w^i_j} = 1$ y $\hat{y}_{w^i_j w^i_{j+1}} = 0$. Como $\hat{z}, \bar{z} \in F$ y sólo difieren en el valor de $x_{w^i_j}$, $y_{w^i_{j-1}w^i_j}$, $y_{w^i_j w^i_{j+1}}$ y quizás también en otras variables y_{uw} con coeficientes nulos (por las afirmaciones anteriores), entonces por la Afirmación 1 tenemos que $\vec{\mu}_{w^i_{j-1}w^i_j} = \vec{\mu}_{w^i_j w^i_{j+1}}$.

La conjunción de todas estas afirmaciones muestran que $\pi x + \mu y = \alpha$ es un múltiplo de (4.15) y por lo tanto esta última define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

□

Proposición 4.4.2 *El problema de separación asociado a las* spiral inequalities *(4.15) puede resolverse en tiempo polinomial.*

Demostración. Dada una solución $(\hat{x}, \hat{y})$, sea H un digrafo pesado con vértices V y arcos $A = \{uw : uw \in E \vee wu \in E\}$ con peso $\omega_{uw} = \hat{y}_{uw}$ para todo arco $uw \in A$ (si $w < u$ entonces $\omega_{uw} = 1 - \hat{y}_{wu}$). Dado un vértice $v \in V$ y un valor $k \in \mathbb{Z}_+$, es fácil ver que el valor de

$$\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{Y}(P_i) \tag{4.18}$$

con P_i un camino de i aristas a partir de v, se minimiza cuando cada P_i es un camino dirigido de peso mínimo en H de i arcos a partir de v, para todo $i = 1, \ldots, k$. Esto es así, ya que estos caminos son independientes entre sí (i.e., si hubiese un P_i' mejor para algún $i \in [1, k]$ se lo puede usar independientemente del resto de los caminos). De esta forma, dados v y k, el problema de separación sobre (4.15) consiste en verificar si el valor mínimo para (4.18) es menor que $k - \hat{x}_v$, con lo cual para terminar la demostración alcanza con que demos un algoritmo polinomial para encontrar un camino dirigido de peso mínimo de longitud fija t en un digrafo, ya que luego sería cuestión de aplicar este algoritmo para cada vértice $v \in V$, cada valor $k \in [0, |C| - 1]$ y cada $t \in [1, k]$.

El problema de hallar los caminos dirigidos de peso mínimo de longitud fija t entre cualquier par de vértices de H puede resolverse en forma sencilla por medio de un algoritmo de programación dinámica utilizando la siguiente definición recursiva:

$$D_1[v, w] = \begin{cases} \omega_{vw}, & \text{si } vw \in E \\ +\infty, & \text{si } vw \notin E \end{cases}$$

$$D_{i+1}[v, w] = \min_{\substack{u \in V \\ u \neq v, w}} (D_i[v, u] + D_1[u, w]), \text{ para } i = 1, \ldots, t - 1.$$

En este caso, $D_i[v, w]$ guarda el peso de un camino de peso mínimo desde v hasta w, de longitud i. Vale aclarar que este camino no es necesariamente un camino simple, pero eso no es un requerimiento de las *spiral inequalities*.

□

4.4.1.4. *Double spiral inequalities*

Dado un camino P entre dos vértices u y v, es sencillo ver que si todas las aristas de P se orientan en dirección de v a u, entonces debe ocurrir que $x_u - x_v \geq |P|$. Este hecho permite deducir que la siguiente desigualdad es válida para $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$

$$x_u - x_v \geq |P| - (|P| + |C| - 1)\,\overrightarrow{Y}(P), \tag{4.19}$$

Figura 4.9: *Double spiral inequalities* (sin intersección de caminos).

ya que en caso de que alguna de las aristas no tenga la orientación mencionada la desigualdad se cumple trivialmente sin imponer condiciones sobre $x_u - x_v$. Si $|P| = 1$, entonces (4.19) es la desigualdad del modelo (4.1), con lo cual esta familia generaliza a estas últimas. Presentaremos en esta sección una familia de desigualdades que a su vez generaliza a (4.19).

Tomando k_u caminos a partir de u de longitudes incrementales y aplicando *la spiral inequality* (4.16) a ellos, obtenemos una cota inferior para x_u. Análogamente para v y ciertos k_v caminos de longitudes incrementales, aplicando en este caso (4.15), obtenemos una cota inferior para x_v. Estas cotas pueden utilizarse junto con (4.19) para obtener la siguiente generalización de estas últimas.

Teorema 4.4.9 *Sean $u, v \in V$ y un camino P de u a v. Sean $k_u, k_v \in \mathbb{Z}_+$ con $k_u + k_v \leq |C| + |P| - 1$. Para cada $i = 1, \ldots, k_u$, sea P_i^u un camino a partir de u con $|P_i^u| = i$ y para cada $i = 1, \ldots, k_v$, sea P_i^v un camino a partir de v con $|P_i^v| = i$ (ver Figura 4.9). Con estas definiciones, la* double spiral inequality *(2SI)*

$$x_u - x_v \geq |P| - (|P| + |C| - 1 - k_u - k_v)\overrightarrow{Y}(P) - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v) \tag{4.20}$$

es válida para $P_{col}^{\mathrm{O}}(G)$.

Demostración. Sea $P = \{u = w_0, w_1, \ldots, w_p = v\}$ y sea (x, y) una solución factible. Si $\overrightarrow{Y}(P) = 0$, entonces $x_v < x_{w_{p-1}} < \ldots < x_{w_1} < x_u$ y (4.20) se reduce a

$$x_u - x_v \geq |P| - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v)$$

con lo cual no hay nada que probar ya que está claro que $x_u - x_v \geq |P|$ y las sumatorias del lado derecho son no negativas. Por el contrario, si $\overrightarrow{Y}(P) \geq 1$,

entonces

$$|P| - (|P| + |C| - 1 - k_u - k_v)\overrightarrow{Y}(P) - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v)$$
$$\leq 1 - |C| + k_u + k_v - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v),$$

ya que sabemos que $|P| + |C| - 1 - k_u - k_v \geq 0$. Por lo tanto, alcanza con probar que

$$x_u - x_v \geq 1 - |C| + k_u + k_v - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v). \tag{4.21}$$

Aplicando la *spiral inequality* (4.16) a x_v con sus k_v caminos sabemos que

$$-x_v \geq 1 - |C| + k_v - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v) \tag{4.22}$$

Por otro lado, aplicando la *spiral inequality* (4.15) a x_u con sus k_u caminos sabemos que

$$x_u \geq k_u - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) \tag{4.23}$$

Finalmente, como (4.21) es la suma de (4.22) y (4.23), entonces es válida.

□

Es posible probar que las *double spiral inequalities* (4.20) definen facetas de $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$ en ciertas circunstancias. Omitimos esta demostración en este capítulo y veremos este hecho como un corolario de los resultados del Capítulo 5.

4.4.1.5. *Triple spiral inequalities*

Las *double spiral inequalities* (4.20) se basan en dos desigualdades válidas (de tipo *spiral inequalities*) a partir de dos vértices y un camino que une a estos vértices. Conceptualmente, podemos pensar que estas desigualdades (una para cada vértice) imponen una cota superior al color de un vértice y una inferior al color del otro, y el camino impone cotas a la diferencia entre estos colores. La adecuada combinación de estos tres elementos da como resultado la *double spiral inequality* de la sección anterior.

Siguiendo un razonamiento similar, tomamos nuevamente dos desigualdades válidas pero en este caso una de ellas será una *double spiral inequality* asociada a dos vértices u y v, y la otra será una *spiral inequality* para un vértice w. El camino utilizado en este caso conecta los vértices v y w (tal como se ilustra en la Figura 4.10).

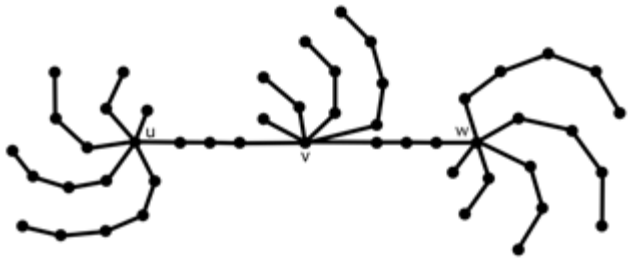

Figura 4.10: *Triple spiral inequalities* (sin intersección de caminos).

Teorema 4.4.10 *Sean $u, v, w \in V$ con un camino P_{uv} de u a v y un camino P_{vw} de v a w. Sean $k_u, k_v, k_w \in \mathbb{Z}_+$ con $k_u + k_v \leq |C| + |P_{uv}| - 1$ y $k_u + |P_{vw}| > k_w + |P_{uv}|$. Para cada $i = 1, \ldots, k_u$ (resp. $j = 1, \ldots, k_v$ y $t = 1, \ldots, k_w$) sea P_i^u (resp. P_j^v y P_t^w) un camino a partir de u con $|P_i^u| = i$ (resp. de v con $|P_j^v| = j$ y de w con $|P_t^w| = t$). Con estas definiciones, la* triple spiral inequality *(3SI)*

$$x_u - x_v + x_w \geq |P_{uv}| + k_w + 1 - (|P_{uv}| + |C| - 1 - k_u - k_v)\overrightarrow{Y}(P_{uv}) - \overleftarrow{Y}(P_{vw}) - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v) - \sum_{i=1}^{k_w} \overrightarrow{Y}(P_i^w) \tag{4.24}$$

es válida para $P_{col}^{\mathrm{o}}(G)$. La Figura 4.10 ilustra la estructura soporte de esta desigualdad.

Demostración. Sea (x, y) una solución factible. Es fácil ver que (4.24) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_u - x_v + x_w &\geq 1 - \overleftarrow{Y}(P_{vw}) \\ &+ \left[|P_{uv}| - (|P_{uv}| + |C| - 1 - k_u - k_v)\overrightarrow{Y}(P_{uv}) - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v) \right] \\ &+ \left[k_w - \sum_{i=1}^{k_w} \overrightarrow{Y}(P_i^w) \right] \end{aligned} \tag{4.25}$$

Aplicando la *double spiral inequality* (4.20) a P_{uv} con los k_u y k_v caminos correspondientes, sabemos que $x_u - x_v$ es mayor o igual que el primer corchete (segundo renglón) de (4.25). De manera similar, pero aplicando la *spiral inequality* (4.15) a w con los k_w caminos correspondientes, sabemos que x_w es mayor o igual que el segundo corchete (tercer renglón) de (4.25). Así, si $\overleftarrow{Y}(P_{vw}) \geq 1$, entonces (4.25) es válida, pues está dominada por la suma de las desigualdades mencionadas.

Supongamos entonces que $\overleftarrow{Y}(P_{vw}) = 0$, con lo cual las aristas de P_{vw} se orientan todas en dirección de v a w y por lo tanto $x_w - x_v \geq |P_{vw}|$. Por otro lado, aplicando la *spiral inequality* (4.15) a u con los k_u caminos correspondientes,

tenemos que

$$x_u \geq k_u - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u).$$

De la suma de estas dos últimas desigualdades sabemos que

$$\begin{aligned} x_w - x_v + x_u &\geq |P_{vw}| + k_u - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) \\ &\geq |P_{uv}| + k_w + 1 - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) \\ &\geq |P_{uv}| + k_w + 1 - \sum_{i=1}^{k_u} \overrightarrow{Y}(P_i^u) - \sum_{i=1}^{k_v} \overleftarrow{Y}(P_i^v) - \sum_{i=1}^{k_w} \overrightarrow{Y}(P_i^w) \\ &\quad - \overleftarrow{Y}(P_{vw}) - (|P_{uv}| + |C| - 1 - k_u - k_v)\overrightarrow{Y}(P_{uv}). \end{aligned}$$

Lo cual prueba la validez de (4.24).

□

La experimentación realizada mediante el software PORTA fue en un principio la base que nos permitió identificar las familias de desigualdades 2SI y 3SI, ya que las mismas aparecen como facetas de $\mathcal{P}_{col}^{\mathrm{o}}$, aun en pequeñas instancias de caminos. Está claro, por otro lado, que ambas familias siguen una misma idea. Es decir, ambas familias surgen de tomar dos desigualdades asociadas a los vértices en los extremos de un camino y conseguir de alguna manera una nueva desigualdad válida operando con estos elementos. Se podría seguir aplicando este razonamiento con distintas desigualdades para obtener así nuevas familias de desigualdades válidas para $\mathcal{P}_{col}^{\mathrm{o}}$, pero una idea más interesante es tratar de generalizar este procedimiento para obtener nuevas desigualdades válidas a partir de desigualdades válidas cualesquiera de $\mathcal{P}_{col}^{\mathrm{o}}$. En el Capítulo 5 presentamos resultados a este respecto. En particular, éstos contemplan resultados de facetitud que se aplican en consecuencia a las *triple spiral inequalities*, por ende omitimos dar estos resultados en este capítulo.

CAPÍTULO 5

El *orientation model* II: procedimientos generadores de facetas

En el capítulo anterior presentamos una serie de familias de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{o}_{col}$. Las últimas de estas familias, concretamente las *double* y *triple spiral inequalities*, comparten una característica interesante. Se puede ver que ambas familias toman como base un camino P y dos desigualdades válidas asociadas a los vértices en los extremos de P; una que impone una cota superior para el color asignado a un extremo de P y otra que impone una cota inferior para el color del otro extremo. Sabemos además que si todas las aristas de P se orientan para el mismo lado, entonces la diferencia entre los colores asignados a los extremos del camino debe ser al menos igual a la cantidad de aristas del mismo. Combinando adecuadamente todos estos elementos, se obtienen las desigualdades 2SI y 3SI.

En este capítulo exploramos estas ideas y como resultado principal presentamos procedimientos generadores de facetas para los poliedros asociados a esta formulación, a los que denominamos procedimientos de *path lifting*. Basados en dos desigualdades válidas genéricas y un camino entre dos vertices particulares, estos procedimientos generan una nueva desigualdad válida combinando estos elementos. Presentamos primero dos versiones distintas de estos procedimientos y mostramos que algunas de las desigualdades presentadas en el Capítulo 4 pueden ser generadas por medio de éstos; las 2SI, las 3SI y las ROI. Presentamos luego una generalización de los dos primeros procedimientos que

genera una familia infinita de desigualdades válidas para el poliedro asociado. Es preciso notar que si bien esta es una familia infinita, sólo algunas de sus desigualdades podrían definir facetas del poliedro. En efecto, mostramos luego que estos procedimientos pueden generar facetas del poliedro de coloreo asociado y damos condiciones suficientes para que esto ocurra. Finalmente, presentamos una nueva familia de desigualdades válidas para el poliedro asociado que surge de una aplicación iterativa de los procedimientos mencionados.

5.1. Procedimientos de *path lifting*

Dados dos vértices $v, w \in V$, supongamos que las siguientes desigualdades son válidas para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$

$$x_w + \mu y \geq \alpha \tag{5.1}$$
$$-x_v + \mu' y \geq \alpha'. \tag{5.2}$$

Sabemos entonces que la suma de estas desigualdades

$$x_w - x_v + (\mu + \mu')y \geq \alpha + \alpha' \tag{5.3}$$

también es válida. Supongamos ahora que existe un camino P de v a w. Sabemos que si en una solución factible ocurre que $\overleftarrow{Y}(P) = 0$ (i.e., las aristas de P se orientan todas en sentido a w) entonces $x_w - x_v \geq |P|$. Esta observación nos permite deducir que la siguiente desigualdad es válida también:

$$x_w - x_v + (\mu + \mu')y \geq |P| - (|P| - \alpha - \alpha')\overleftarrow{Y}(P), \tag{5.4}$$

siempre que $\mu, \mu' \geq \mathbf{0}$ y $|P| \geq \alpha + \alpha'$, ya que si $\overleftarrow{Y}(P) \geq 1$, entonces la desigualdad queda dominada por, o es igual a, (5.3) (pues $|P| - \alpha - \alpha' \geq 0$), y el caso en que $\overleftarrow{Y}(P) = 0$ es el que explicamos más arriba (considerando que $\mu, \mu' \geq \mathbf{0}$, aunque veremos más adelante que estas hipótesis pueden reemplazarse por otras algo más débiles). Se puede ver que si (5.1) y (5.2) son *spiral inequalities*, entonces la resultante (5.4) es la *double spiral inequality* (4.20) presentada en la Sección 4.4.1.4.

En las siguientes secciones formalizamos el procedimiento arriba ilustrado y presentamos algunas variantes del mismo. Dado que estos procedimientos consisten en la incorporación de nuevas variables (las de las aristas de P) a una desigualdad válida existente, los hemos denominado procedimientos de *path lifting*. Es preciso aclarar, sin embargo, que no se trata de procedimientos clásicos de lifting de variables en desigualdades válidas. La Figura 5.1 muestra un esquema general de la estructura utilizada por los procedimientos presentados en este capítulo.

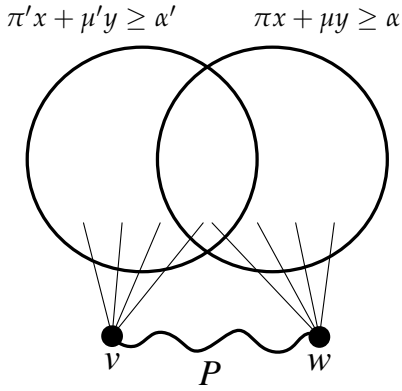

Figura 5.1: Esquema de la estructura para el procedimiento de *path lifting*.

5.1.1. Primer procedimiento

En la explicación anterior utilizamos desigualdades que involucran sólo variables de color para los vértices v y w (i.e., x_v y x_w) y esto limita en cierta forma el potencial del procedimiento. Con algunas consideraciones adicionales formalizamos a continuación una generalización del procedimiento anteriormente descripto, que se aplica a desigualdades generales que utilizan variables x_u, con $u \neq v, w$, además de x_v y x_w.

Teorema 5.1.1 *Sean $v, w \in V$. Sea $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^2 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2) y \geq (\alpha_1 + \alpha_2) \tag{5.5}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. En forma similar, sea $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4) y \geq (\alpha_3 + \alpha_4) \tag{5.6}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. Finalmente, sea P un camino de v a w. Si $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 0$ y $|P| \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 =: \alpha$, entonces la desigualdad

$$\pi x + \mu y + (x_w - x_v) \geq |P| - (|P| - \alpha) \overleftarrow{Y}(P) \tag{5.7}$$

con $\pi = \pi^1 + \pi^3$ y $\mu = \mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4$, es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. Sea (x, y) una solución factible. Si $\overleftarrow{Y}(P) = 0$, entonces $x_w - x_v \geq |P|$, y como sabemos que $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ y $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi x + \mu y + (x_w - x_v) &= (\pi^1 + \pi^3)x + (\mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4)y + (x_w - x_v) \\
&= (\pi^1 x + \mu^1 y) + (\pi^3 x + \mu^3 y) + (\mu^2 + \mu^4)y + (x_w - x_v) \\
&\geq \alpha_1 + \alpha_3 + (\mu^2 + \mu^4)y + |P| \qquad (*) \\
&\geq |P|,
\end{aligned}$$

con lo cual la desigualdad se cumple. Por otro lado, si $\overleftarrow{Y}(P) = k \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
|P| - (|P| - \alpha)\overleftarrow{Y}(P) &= |P| - (|P| - \alpha)k \\
&\leq |P| - (|P| - \alpha) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\
&\leq (\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2)y) + (\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4)y) \\
&= \pi x + \mu y + (x_w - x_v)
\end{aligned}$$

y eso prueba la validez de la desigualdad.

□

Si bien las hipótesis del Teorema 5.1.1 requieren que los coeficientes de μ^2 y μ^4 sean no negativos, esto no es estrictamente necesario para el procedimiento. En caso de existir un coeficiente negativo $\mu_{u_1u_2}$ para alguna arista $u_1u_2 \in E$, es viable reemplazar la variable $y_{u_1u_2}$ por $1 - y_{u_2u_1}$ y aplicar el procedimiento a esta redefinición de la desigualdad. Obviamente, esto altera el valor de α y la aplicación sólo será factible si este nuevo valor cumple con el resto de las hipótesis. Una manera alternativa de enunciar el teorema es la siguiente: en lugar de requerir $\mu^2, \mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 0$, alcanzaría con que $\alpha_1 + \alpha_3 - (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}^4)\mathbf{1} \geq 0$, donde $\bar{\mu}_e = \min\{\mu_e, 0\}$. Estas hipótesis permiten realizar el paso marcado con $(*)$ en la demostración del teorema. Por motivos de claridad, omitimos estos argumentos en el enunciado del teorema.

Como mencionamos anteriormente, las *double spiral inequalities* se obtienen aplicando el procedimiento anterior con desigualdades de tipo *spiral inequalities*. Por otro lado, mediante este procedimiento es posible obtener también las *reinforced orientation inequalities* (ROI) de la Sección 4.4. Recordemos que una ROI utiliza una arista $uv \in E$ y tres cliques $K^u \subseteq N(u) \setminus N(v)$, $K^v \subseteq N(v) \setminus N(u)$ y $K^{uv} \subseteq N(u) \cap N(v)$ tales que $K^u \cup K^{uv}$ y $K^v \cup K^{uv}$ son también cliques (ver Figura 4.2). Con estas estructuras, llamando $Q = K^u \cup K^v \cup K^{uv}$, la desigualdad asociada es

$$x_u - x_v \geq 1 - (|C| - |Q|)y_{uv} - \sum_{w \in K^u} y_{uw} - \sum_{w \in K^v} y_{wv} - \sum_{w \in K^{uv}} (y_{uw} - y_{vw}). \quad (5.8)$$

Llamemos $K_1 = K^u \cup K^{uv}$ y $K_2 = K^v \cup K^{uv}$. Notemos que aplicando la desigualdad clique (4.6) de la Sección 4.3 a u y a K_1 obtenemos

$$x_u \geq \sum_{w \in K_1} y_{wu} = |K^u + K^{uv}| - \sum_{w \in K^u} y_{uw} - \sum_{w \in K^{uv}} y_{uw}. \tag{5.9}$$

Por otro lado, aplicando la versión simétrica de la desigualdad clique (4.8) a v y a K_2 obtenemos

$$-x_v \geq 1 - |C| + \sum_{w \in K_2} y_{vw} = 1 - |C| + \left(|K^v| - \sum_{w \in K^v} y_{wv} \right) + \sum_{w \in K^{uv}} y_{vw}. \tag{5.10}$$

Aplicaremos el procedimiento tomando (5.9) en el lugar de (5.5) y (5.10) como (5.6). Esto deja $\pi^1 = \pi^3 = \mathbf{0}$, $\mu^1 = \mu^3 = \mathbf{0}$ y $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ por un lado y $\alpha_2 = |K^u \cup K^{uv}|$ y $\alpha_4 = 1 - |C| + |K^v|$ por otro, y por lo tanto $1 - \alpha = |C| - |Q|$. Así, usando la arista uv como P, la desigualdad obtenida en (5.7) es la ROI asociada a uv, K^u, K^v y K^{uv}.

Observación 5.1.1 *Las* reinforced orientation inequalities *asociadas a dos vértices u y v pueden obtenerse mediante un procedimiento de* path lifting *utilizando dos desigualdades clique y el camino dado por la arista uv.*

En vistas de la facetitud de las ROI (Teorema 4.4.2), la Observación 5.1.1 implica que existen casos en los que el procedimiento de *path lifting* genera desigualdades que definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Más aun, esta observación muestra que la desigualdad generada por el procedimiento puede definir una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ aun cuando las desigualdades utilizadas como base para el mismo no lo hagan. Esto se evidencia con el hecho de que las desigualdades clique definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ sólo si se utilizan cliques maximales sin embargo, esto no es un requisito para la facetitud de las ROI. Esto último da una idea del potencial del procedimiento de *path lifting* con respecto a la facetitud de las desigualdades generadas. Más adelante profundizaremos en este tema y daremos condiciones suficientes para que la desigualdad obtenida por el procedimiento defina una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

Es preciso notar que las ROI utilizan sólo una arista para conectar los vértices distinguidos v y w (llamados u y v en la Sección 4.4). Sin embargo, en el caso de estas desigualdades, es fácil ver que las hipótesis del procedimiento son válidas aun cuando el camino P contiene más de una arista. Esto da lugar a una nueva familia de desigualdades que generaliza las ROI, utilizando un camino arbitrario P entre los vértices u y v de la misma.

Observación 5.1.2 *La arista uv de las desigualdades ROI puede sustituirse por un camino P entre u y v dando lugar a una generalización de esta familia de desigualdades válidas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$.*

5.1.2. Segundo procedimiento

Como mostramos, el procedimiento presentado en la sección anterior puede utilizarse para obtener las *double spiral inequalities* (2SI). Si bien las *triple spiral inequalities* (3SI) comparten una estructura similar a las 2SI, éstas no se adaptan adecuadamente al mencionado procedimiento de *path lifting*. A continuación presentamos una variante de este procedimiento cuya idea surge de la estructura de las 3SI.

Teorema 5.1.2 *Sean $v, w \in V$. Sea $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^2 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2) y \geq (\alpha_1 + \alpha_2) \tag{5.11}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. En forma similar, sea $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4) y \geq (\alpha_3 + \alpha_4) \tag{5.12}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. Finalmente, sea P un camino de v a w. Si $|P| \geq \alpha_2 + \alpha_4 + 1$, entonces la desigualdad

$$\pi x + \mu y + (x_w - x_v) \geq \alpha + 1 - \overleftarrow{Y}(P) \tag{5.13}$$

con $\mu = \mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4$, $\pi = \pi^1 + \pi^3$ y $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. Si $\overleftarrow{Y}(P) \geq 1$, entonces la desigualdad está dominada por (o es igual a) la suma de (5.11) y (5.12). Supongamos entonces que $\overleftarrow{Y}(P) = 0$. Eso implica que todas las aristas de P se orientan hacia w y por lo tanto $x_w - x_v \geq |P|$. Sabemos además que $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ y $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$, con lo cual

$$\begin{aligned}
\pi x + \mu y + (x_w - x_v) &= (\pi^1 + \pi^3) x + (\mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4) y + (x_w - x_v) \\
&= (\pi^1 x + \mu^1 y) + (\pi^3 x + \mu^3 y) + (\mu^2 + \mu^4) y + (x_w - x_v) \\
&\geq \alpha_1 + \alpha_3 + (\mu^2 + \mu^4) y + |P| \qquad (*) \\
&\geq \alpha + 1,
\end{aligned}$$

y eso prueba la validez de la desigualdad. □

Al igual que con el primer procedimiento, es preciso notar que la restricción de no negatividad sobre μ^2 y μ^4 no es estrictamente necesaria. En lugar de requerir $\mu^2, \mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $|P| \geq \alpha_2 + \alpha_4 + 1$, se puede probar que el procedimiento es válido cuando $|P| \geq \alpha_2 + \alpha_4 + 1 - (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}^4)\mathbf{1}$, donde $\bar{\mu}_e = \min\{\mu_e, 0\}$. Esto

permite realizar el paso marcado con $(*)$ en la demostración del teorema. Al igual que antes, preferimos omitir estos argumentos en el teorema por motivos de claridad.

Una observación interesante es que las condiciones requeridas para este segundo procedimiento son más flexibles que las primeras ya que no se requiere que $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 0$ y la restricción sobre la cantidad de aristas de P es también más débil. Vale notar también que cuando $|P| = \alpha + 1$, las desigualdades generadas por ambos procedimientos coinciden. De todas maneras, este segundo procedimiento no es siempre un caso particular del primero, ya que se lo puede utilizar con caminos P arbitrarios generando desigualdades válidas que no podrían generarse con el primero.

Finalmente, notemos que las *triple spiral inequalities* presentadas en la Sección 4.4.1.5 se pueden obtener con este segundo procedimiento de *path lifting* utilizando una *double spiral inequality* y una *spiral inequality*.

5.1.3. Generalización: el procedimiento de *path θ-lifting*

Tanto el primer procedimiento de *path lifting* como el segundo surgieron a raíz de las desigualdades 2SI y 3SI, identificadas en principio por medio del uso de PORTA en instancias pequeñas. Sin embargo, habiendo desarrollado estos dos procedimientos encontramos que bajo hipótesis muy similares a las de los mismos, se pueden deducir otras desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$. Por ejemplo, utilizando las desigualdades y el camino del Teorema 5.1.2 y con la condición de que $|P| \geq \alpha_2 + \alpha_4$, es posible probar que la desigualdad

$$\pi x + \mu y + (x_w - x_v) \geq \alpha_1 + \alpha_3 + |P| - (|P| - \alpha_2 - \alpha_4)\overleftarrow{Y}(P) \tag{5.14}$$

con $\pi = \pi^1 + \pi^3$ y $\mu = \mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4$, es válida para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Omitimos la demostración de este resultado ya que el mismo es un caso particular del resultado a continuación.

Es inevitable en este punto deducir que existe una generalización para los procedimientos de *path lifting*. En el siguiente resultado, proponemos un procedimiento que generaliza los procedimientos ya mencionados de *path lifting* y genera familias infinitas de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$.

Teorema 5.1.3 *Sean $v, w \in V$. Sea $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^2 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2) y \geq (\alpha_1 + \alpha_2) \tag{5.15}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. En forma similar, sea $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$ una desigualdad válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ y sean $\mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4) y \geq (\alpha_3 + \alpha_4) \tag{5.16}$$

es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$. *Finalmente, sea* P *un camino de* v *a* w *y sea* $\theta \in \mathbb{R}_+$. *Si* $|P| \geq \theta + \alpha_2 + \alpha_4$, *entonces la desigualdad*

$$\pi x + \mu y + (x_w - x_v) \geq \alpha + \theta - \theta \overleftarrow{Y}(P) \tag{5.17}$$

con $\mu = \mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4, \pi = \pi^1 + \pi^3$ *y* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, *es válida para* $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. Si $\overleftarrow{Y}(P) = 0$, entonces $x_w - x_v \geq |P|$, y como sabemos que $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ y $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$, entonces

$$\begin{aligned}
\pi x + \mu y + (x_w - x_v) &= (\pi^1 + \pi^3)x + (\mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4)y + (x_w - x_v) \\
&= (\pi^1 x + \mu^1 y) + (\pi^3 x + \mu^3 y) + (\mu^2 + \mu^4)y + (x_w - x_v) \\
&\geq \alpha_1 + \alpha_3 + (\mu^2 + \mu^4)y + |P| \qquad (*) \\
&\geq \alpha_1 + \alpha_3 + |P| \\
&\geq \alpha + \theta,
\end{aligned}$$

con lo cual la desigualdad se cumple. Por otro lado, si $\overleftarrow{Y}(P) = k > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha + \theta - \theta \overleftarrow{Y}(P) &= \alpha + \theta - \theta k \\
&\leq \alpha + \theta - \theta \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) \\
&\leq (\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2)y) + (\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4)y) \\
&= \pi x + \mu y + (x_w - x_v)
\end{aligned}$$

y eso prueba la validez de la desigualdad. □

Al igual que en los procedimientos anteriores, las hipótesis $\mu^2, \mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $|P| \geq \theta + \alpha_2 + \alpha_4$, se pueden reemplazar por $|P| \geq \theta + \alpha_2 + \alpha_4 - (\bar{\mu}^2 + \bar{\mu}^4)\mathbf{1}$, donde $\bar{\mu}_e = \min\{\mu_e, 0\}$ ya que eso permite realizar el paso marcado con $(*)$ en la demostración del teorema. Omitimos nuevamente estos argumentos en el teorema para mayor claridad en su enunciado.

Es fácil ver que este nuevo procedimiento generaliza a los dos primeros y también al mencionado en la desigualdad (5.14), ya que éstos se obtienen como casos particulares utilizando $\theta = 1$, $\theta = |P| - \alpha$ y $\theta = |P| - \alpha_2 - \alpha_4$, respectivamente. Nos referiremos a esta generalización como procedimiento de *path θ-lifting* o *path lifting continuo*. Dado que $\theta \in \mathbb{R}_+$, este procedimiento permite generar una familia infinita de desigualdades válidas para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, que definen un convexo no poliedral que contiene a este poliedro. Obviamente, sólo un conjunto finito de desigualdades de esta familia definirá facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Sin embargo, es fácil ver que no siempre existe un valor de θ que domine al

resto, es decir, un valor tal que la desigualdad obtenida usando dicho valor sea más fuerte que las obtenidas usando otros. Esto es evidente ya que el lado izquierdo de la desigualdad no depende de θ y el derecho es $\alpha + \theta(1 - \overleftarrow{Y}(P))$, donde $1 - \overleftarrow{Y}(P)$ puede ser tanto positivo como negativo, según la solución analizada.

5.1.4. Facetas provenientes de *path liftings*

Durante la experimentación con PORTA sobre caminos pequeños (de hasta 7 vértices), pudimos detectar muchas facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ correspondientes a las familias 2SI y 3SI, probando así que bajo ciertas condiciones, estas familias de desigualdades definen facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$. Esto implica a su vez, que los procedimientos de *path lifting* (en sus dos primeras versiones) producen facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$. Otro ejemplo de esto está dado por las desigualdades ROI, que son también generadas por estos procedimientos, tal como se indica en la Observación 5.1.1.

Resulta difícil caracterizar por completo las situaciones en las cuales la desigualdad obtenida define una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, más aun en el caso del procedimiento de *path lifting* continuo ya que éste genera una familia infinita de desigualdades válidas. En esta sección damos una caracterización parcial (i.e., condiciones suficientes pero no necesarias) para algunos casos en los que el procedimiento de *path θ-lifting* genera una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. Tratamos un caso particular en el cual el camino P está compuesto por una única arista. Damos antes algunas definiciones útiles.

Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que el conjunto de *vértices soporte* de una desigualdad $\pi x + \mu y \geq \alpha$ es $V(\pi, \mu) = \{u \in V : \pi_u \neq 0\} \cup \{u \in V : \mu_{uv} \neq 0,$ para algún $uv \in E\}$. Definimos además $V(\pi) = \{u \in V : \pi_u \neq 0\}$ y $E(\mu) = \{uv \in E : \mu_{uv} \neq 0\}$. Por otro lado, decimos que una arista $vw \in E$ es una *arista de corte* de G si el único camino entre v y w es dicha arista.

Teorema 5.1.4 *Sea $vw \in E$ una arista de corte de un grafo G y las desigualdades $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$, $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$,*

$$\pi^1 x - x_v + (\mu^1 + \mu^2) y \geq \alpha_1 + \alpha_2, \tag{5.18}$$

$$\pi^3 x + x_w + (\mu^3 + \mu^4) y \geq \alpha_3 + \alpha_4. \tag{5.19}$$

válidas para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ con $\mu^2, \mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 < -\alpha_2$ y tales que los conjuntos de vértices soporte de (5.18) y (5.19) son disjuntos. Sean F_1 y F_2 las caras de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ definidas por las desigualdades (5.18) y (5.19), respectivamente. Sea $\theta = 1 - \alpha_2 - \alpha_4$ y sean $z^a = (x^a, y^a)$ y $z^b = (x^b, y^b)$ dos soluciones en $F_1 \cap F_2$ con $x^a_v = x^b_v = -\alpha_2$, $x^a_w = x^b_w = \alpha_4$ y tales que

- *para todo* $u \in N(w)$, $x^a_u \neq \alpha_4 + \theta$ *y si* $\mu^3_{uw} \neq 0$ *o* $\mu^4_{uw} \neq 0$, *entonces o bien* $x^a_u < \alpha_4$ *o bien* $x^a_u > \alpha_4 + \theta$, *y*
- *para todo* $u \in N(v)$, $x^b_u \neq -\alpha_2 - \theta$ *y si* $\mu^1_{uv} \neq 0$ *o* $\mu^2_{uv} \neq 0$, *entonces o bien* $x^b_u < -\alpha_2 - \theta$ *o bien* $x^b_u > -\alpha_2$.

Si (5.18) y (5.19) definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$ *entonces la desigualdad obtenida por medio del procedimiento de* path θ-lifting *sobre (5.18) y (5.19), y tomando* $P = \{v, w\}$, *es decir,*

$$(\pi^1 + \pi^3)x + x_w - x_v + \mu y \geq \alpha + \theta - \theta y_{wv} \tag{5.20}$$

con $\mu = \mu^1 + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4$ *y* $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, *define una faceta de* $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. La desigualdad (5.20) es válida para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ ya que se cumplen las condiciones para aplicar el procedimiento, pues $|P| = 1 \geq \theta + \alpha_2 + \alpha_4$. Probaremos entonces la facetitud de la desigualdad.

Como $\mu^2 \geq \mathbf{0}$, entonces $\pi^1 x + (\mu^1 + \mu^2)y \geq \alpha_1$, y por lo tanto se puede ver que toda solución en F_1 cumple que $-x_v \leq \alpha_2$, pues de lo contrario la igualdad de (5.18) no se cumpliría. Análogamente, como $\mu^4 \geq \mathbf{0}$, entonces $\pi^3 x + (\mu^3 + \mu^4)y \geq \alpha_3$, y así toda solución en F_2 cumple que $x_w \leq \alpha_4$. Entonces, como $\alpha_4 < -\alpha_2$, toda solución en $F_1 \cap F_2$ cumple $x_w < x_v$ y por lo tanto $y_{wv} = 1$. Por otro lado, si $y_{wv} = 1$ entonces (5.20) es la suma de (5.18) y (5.19), con lo cual (5.20) se cumple por igualdad si estas dos también lo hacen. Por lo tanto, siendo F la cara de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ definida por la desigualdad (5.20), tenemos que $F_1 \cap F_2 \subseteq F$.

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos subgrafos disjuntos de G, separados por la arista de corte wv, tales que $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{wv\})$ y sea $d = \dim(P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)) + 1$. Dado que F_1 es una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, existen puntos $z^1, \ldots, z^d \in F_1$ afínmente independientes. Para $i = 1, \ldots, d$, sea $\bar{z}^i = (\bar{x}^i, \bar{y}^i)$ un punto igual a z^i pero con $\bar{y}^i_e = 0$ para todo $e \in (E_2 \cup \{wv\})$ y $\bar{x}^i_u = 0$ para todo $u \in V_2$. Se puede ver que en el conjunto $\{\bar{z}_i : i = 1, \ldots, d\}$ debe haber un subconjunto de puntos afínmente independientes de tamaño $d_1 := d - |E_2 \cup \{wv\}| - |V_2|$. Sin pérdida de generalidad, podemos decir que este subconjunto es $D_1 = \{\bar{z}_i : i = 1, \ldots, d_1\}$. De la misma forma, al ser F_2 una faceta de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, es posible armar $|E_2| + |V_2|$ puntos afínmente independientes $\hat{z}^i = (\hat{x}^i, \hat{y}^i)$, con $\hat{y}^i_e = 0$ para todo $e \notin E_2$ y $\hat{x}^i_u = 0$ para todo $u \notin V_2$, utilizando un conjunto de d puntos afínmente independientes de F_2. Sin pérdida de generalidad, llamemos a este subconjunto $D_2 = \{\hat{z}_i : i = 1, \ldots, d_2\}$, con $d_2 = |E_2| + |V_2|$. Consideremos el siguiente conjunto de puntos:

$$D = \{\bar{z}^i + \hat{z}^1 + e_{wv} : i = 1, \ldots, d_1\} \cup \{\bar{z}^1 + \hat{z}^i + e_{wv} : i = 2, \ldots, d_2\},$$

donde e_{wv} es el vector que tiene un 1 en la posición correspondiente a la variable y_{wv} y un 0 en el resto de las posiciones. Como G_1 y G_2 son subgrafos

disjuntos de G, se puede verificar que los puntos de D son soluciones factibles de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ ya que las variables $\bar{z}_i$ y $\hat{z}_i$ representan partes de soluciones en F_1 y F_2 respectivamente y, como vimos más arriba, en toda solución en $F_1 \cap F_2$ se cumple que $y_{wv} = 1$. Así también, $D \subseteq F_1 \cap F_2 \subseteq F$. Por otro lado, podemos ver que $|D| = d_1 + d_2 - 1 = d - 2$ y que todos estos puntos son afínmente independientes. Adicionalmente, esto implica que $\dim(F_1 \cap F_2) = d - 1$, ya que este poliedro tiene al menos dos dimensiones menos que $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$.

Consideremos ahora la solución z^a de la hipótesis en la cual $x^a_v = -\alpha_2$ y $x^a_w = \alpha_4$ y por lo tanto $y^a_{wv} = 1$. Como $z^a \in F_1 \cap F_2 \subseteq F$, entonces $(\pi^1 + \pi^3)x^a + x^a_w - x^a_v + \mu y^a = \alpha$. Construimos $\hat{z}^a$ igual a z^a pero moviendo el vértice w hacia adelante θ colores, es decir, con $\hat{x}^a_w = x^a_w + \theta$. Vale notar que esta solución es factible por las condiciones de la hipótesis. Como la distancia entre los colores de v y w en z^a era de $x^a_v - x^a_w = -\alpha_2 - \alpha_4 = \theta - 1$, entonces en la nueva solución se cumple que $\hat{y}^a_{wv} = 0$. Notemos además que la diferencia entre z^a y $\hat{z}^a$ se da solamente en las variables x^a_w, y^a_{wv} y quizás también en otras variables con coeficiente nulo en (5.20). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(\pi^1 + \pi^3)\hat{x}^a + \hat{x}^a_w - \hat{x}^a_v + \mu\hat{y}^a &= (\pi^1 + \pi^3)x^a + (x^a_w + \theta) - x^a_v + \mu y^a \\ &= \alpha + \theta \\ &= \alpha + \theta + \theta\hat{y}^a_{wv},\end{aligned}$$

y así, $\hat{z}^a \in F$. Como las únicas variables cambiadas en $\hat{z}^a$ tienen coeficientes nulos en (5.18), entonces $\hat{z}^a \in F_1$ y por otro lado es fácil ver que $\hat{z}^a \notin F_2$, ya que $\hat{z}^a$ no cumple (5.19) por igualdad (pues $\hat{x}^a_w > \alpha_4$). Recordemos que $D \subseteq F_1 \cap F_2$, con lo cual los $d - 2$ puntos (afínmente independientes) de D están incluídos en el hiperplano definido por (5.19) y como $\hat{z}^a$ no lo está, entonces $D \cup \{\hat{z}^a\}$ es un conjunto de $d - 1$ puntos afínmente independientes.

Consideremos ahora la solución z^b de la hipótesis en la cual $x^b_v = -\alpha_2$, $x^b_w = \alpha_4$ y por lo tanto $y^a_{wv} = 1$. Al igual que antes, como $z^b \in F_1 \cap F_2$, entonces $(\pi^1 + \pi^3)x^b + x^b_w - x^b_v + \mu y^b = \alpha$. Análogamente, construimos $\hat{z}^b$ igual a z^b pero moviendo el vértice v hacia atrás θ colores, es decir, con $\hat{x}^b_v = x^b_v - \theta$. Vale notar que esta solución es factible por las condiciones de la hipótesis. Nuevamente, como la distancia entre los colores de v y w en z^b era de $x^b_v - x^b_w = -\alpha_2 - \alpha_4 = \theta - 1$, entonces en la nueva solución se cumple que $\hat{y}^b_{wv} = 0$. Notemos además que la diferencia entre z^b y $\hat{z}^b$ se da solamente en las variables x^b_v, y^b_{wv} y eventualmente en otras variables con coeficiente nulo en (5.20). Por lo tanto

$$\begin{aligned}(\pi^1 + \pi^3)\hat{x}^b + \hat{x}^b_w - \hat{x}^b_v + \mu\hat{y}^b &= (\pi^1 + \pi^3)x^b + x^b_w - (x^b_v - \theta) + \mu y^b \\ &= \alpha + \theta \\ &= \alpha + \theta - \theta\hat{y}^b_{wv},\end{aligned}$$

con lo cual, $\hat{z}^b \in F$. Nuevamente, como las únicas variables cambiadas en $\hat{z}^b$ tienen coeficientes nulos en (5.19), entonces $\hat{z}^b \in F_2$ y por otro lado es fácil

ver que $\hat{z}^b \notin F_1$, ya que $\hat{z}^b$ no cumple (5.18) por igualdad (pues $\hat{x}^b_v < -\alpha_2$). Recordemos que $D \cup \{\hat{z}^a\} \subseteq F_1$, con lo cual los $d-1$ puntos (afínmente independientes) de este conjunto están incluídos en el hiperplano definido por (5.18) y como $\hat{z}^b$ no lo está, entonces $D \cup \{\hat{z}^a, \hat{z}^b\}$ son d puntos afínmente independientes y todos ellos pertenecen a F, probando así la facetitud de esta cara.

□

Es preciso notar que el lado izquierdo de la desigualdad obtenida por el procedimiento no depende de θ y el derecho es $\alpha + \theta(1 - \overleftarrow{Y}(P))$. En el caso analizado, en el que $|P| = 1$, el valor de $1 - \overleftarrow{Y}(P)$ es siempre no negativo y por lo tanto la desigualdad obtenida por el procedimiento será más fuerte a mayor valor de θ. Por otro lado, el Teorema 5.1.3, que establece la validez de la desigualdad, requiere que $\theta \leq |P| - \alpha_2 - \alpha_4$. Por estos motivos, es coherente que una de las condiciones para que la desigualdad defina una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$, cuando $|P| = 1$, sea que $\theta = 1 - \alpha_2 - \alpha_4$. No queda claro a simple vista que esta situación se repita cuando $|P| > 1$, ya que en tal caso no existe un valor de θ que genere desigualdades dominantes, con respecto a otros valores del mismo parámetro. En retrospectiva, esto mismo ocurre en el caso de las desigualdades ROI, las cuales ya habíamos observado como casos particulares del procedimiento de *path lifting* (Observación 5.1.1). Dado que en estas desigualdades el camino utilizado tiene longitud 1, entonces el valor de θ debería ser el máximo posible (de lo contrario la desigualdad no sería una faceta). Esto se evidencia pues $\theta = |C| - |Q| = 1 - |K^u \cup K^{uv}| - (1 - |C| + |K^v|) = |P| - \alpha_2 - \alpha_4$.

Otro ejemplo interesante es el de las desigualdades 3SI cuando se utiliza un camino de longitud 1. Es fácil ver que esta desigualdad, tal como está planteada, es un *path θ-lifting* con $\theta = 1$, y profundizando un poco en esta desigualdad, es posible deducir que $\alpha_2 = 1 - |C| + k_v$ y $\alpha_4 = k_w$. Entonces, cuando $|P| = 1$, la desigualdad quedaría más fuerte si se usara $\theta = |P| - \alpha_2 - \alpha_4 = |C| - k_v - k_w$, en lugar de $\theta = 1$, ya que en este último caso la misma no define una faceta de $P^{\text{o}}_{\text{col}}(G)$.

5.2. *Alternating spiral path inequalities*

Los procedimientos descriptos en la sección anterior pueden utilizarse para construir una amplia gama de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\text{o}}_{col}$. Por ejemplo, dado un camino P entre dos vértices u y v, es posible tomar una *spiral inequality* (4.15) para u y una *clique inequality* (4.6) para v y obtener (bajo ciertas hipótesis) una nueva desigualdad válida. Luego, es posible tomar esta desigualdad válida y otra desigualdad que involucre a un nuevo vértice w desde el cual exista un camino hacia v y construir (nuevamente bajo ciertas hipótesis) una tercera

desigualdad válida mediante otro *path lifting*. Siguiendo esta idea, describimos a continuación una familia infinita de desigualdades válidas que surge de aplicar el procedimiento de *path θ-lifting* utilizando *spiral inequalities*, alternando entre (4.16) y (4.15). Para mayor simplicidad en la explicación, dado un camino P y un entero $j \in \mathbb{Z}$, definimos

$$Y_j(P) = \begin{cases} \overrightarrow{Y}(P) & \text{si } j \text{ es par,} \\ \overleftarrow{Y}(P) & \text{si } j \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así, la *spiral inequality* (4.15) asociada a un vértice v_0 y a k_0 caminos $P_1^0, \ldots, P_{k_0}^0$, puede escribirse como

$$x_{v_0} + \sum_{i=1}^{k_0} Y_0(P_i^0) \geq k_0. \tag{5.21}$$

A su vez, dado un vértice v_1, la *spiral inequality* (4.16) asociada a v_1 y a k_1 caminos $P_1^1, \ldots, P_{k_1}^1$, puede escribirse como

$$-x_{v_1} + \sum_{i=1}^{k_1} Y_1(P_i^1) \geq 1 - |C| + k_1. \tag{5.22}$$

Dado $\theta_0 \in \mathbb{R}_+$ y un camino $P_{v_0v_1}$ de v_0 a v_1, con $|P_{v_0v_1}| + |C| \geq \theta_0 + 1 + k_0 + k_1$, utilizando el procedimiento de *path lifting* con (5.21) y (5.22) obtenemos:

$$x_{v_0} - x_{v_1} + \sum_{j=0}^{1} \sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq (1 - |C| + k_0 + k_1) + \theta_0 - \theta_0 \overrightarrow{Y}(P_{v_0v_1}). \tag{5.23}$$

ya que en este caso $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1 - |C| + k_1$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 = k_0$. Sea un vértice v_2 para el cual existe un camino $P_{v_1v_2}$ desde v_1 hacia v_2. Tomemos $\theta_1 \in \mathbb{R}_+$ y una *spiral inequality* (4.15) asociada a v_2 y a k_2 caminos $P_1^2, \ldots, P_{k_2}^2$. Aplicando un *path lifting* con θ_1 a esta desigualdad junto con (5.23), obtenemos:

$$x_{v_0} - x_{v_1} + x_{v_2} + \sum_{j=0}^{2} \sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq (1 - |C| + k_0 + k_1 + k_2) + \sum_{j=0}^{1} (\theta_j - \theta_j Y_j(P_{v_j v_{j+1}})). \tag{5.24}$$

ya que en este caso $\alpha_1 = k_0$, $\alpha_2 = \theta_0 + 1 - |C| + k_1$, $\alpha_3 = 0$ y $\alpha_4 = k_2$. Sabemos que si $|P_{v_1v_2}| + |C| \geq \theta_1 + \theta_0 + 1 + k_1 + k_2$, entonces (5.24) es válida para $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$.

Sea ahora un vértice v_3 para el cual existe un camino $P_{v_2v_3}$ desde v_2 hacia v_3 y tomemos una *spiral inequality* (4.16) asociada a v_3 y a k_3 caminos $P_1^3, \ldots, P_{k_3}^3$. Nuevamente, aplicando *path lifting* a esta desigualdad junto con

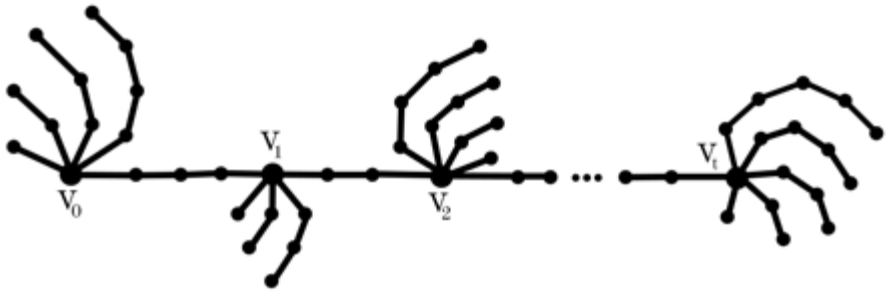

Figura 5.2: Ejemplo de estructura utilizada en las desigualdades ASPI.

(5.24) y utilizando un $\theta_2 \in \mathbb{R}_+$ obtenemos:

$$x_{v_0} - x_{v_1} + x_{v_2} - x_{v_3} + \sum_{j=0}^{3}\sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq \left[2(1-|C|) + \sum_{j=0}^{3} k_j\right] + \sum_{j=0}^{2}(\theta_j - \theta_j Y_j(P_{v_j v_{j+1}})) \tag{5.25}$$

ya que en este caso $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1 - |C| + k_3$, $\alpha_3 = 1 - |C| + k_0 + k_1 + \theta_0$ y $\alpha_4 = k_2 + \theta_1$. Al igual que antes, (5.25) es válida si $|P_{v_2 v_3}| + |C| \geq \theta_2 + \theta_1 + 1 + k_2 + k_3$. Siguiendo este procedimiento, usando en forma alternada desigualdades SWI (4.16) y (4.15), se puede obtener la siguiente familia de desigualdades válidas para $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ (cuya estructura se ilustra en la Figura 5.2).

Proposición 5.2.1 *Sea $v_0, \ldots, v_t$ una secuencia de vértices tal que existe un camino $P_{v_j v_{j+1}}$ desde v_j hasta v_{j+1} para todo $j = 0, \ldots, t-1$. Sean $P_1^j, \ldots, P_{k_j}^j$, k_j caminos desde v_j tales que $|P_i^j| = i$, para todo $i = 1, \ldots, k_j$, con $j = 0, \ldots, t$ (ver Figura 5.2). Dados $\theta_0, \ldots, \theta_{t-1} \in \mathbb{R}_+$, si $|P_{v_0 v_1}| + |C| \geq \theta_0 + k_0 + k_1 + 1$ y $|P_{v_j v_{j+1}}| + |C| \geq \theta_j + \theta_{j-1} + k_j + k_{j+1} + 1$ para todo $j = 1, \ldots, t-1$, entonces la* alternating spiral path inequality (ASPI)

$$\sum_{j=0}^{t}(-1)^j x_{v_j} + \sum_{j=0}^{t}\sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq \sum_{j=0}^{t}\lambda_j + \sum_{j=0}^{t-1}(\theta_j - \theta_j Y_j(P_{v_j v_{j+1}})) \tag{5.26}$$

donde $\lambda_j = k_j$ si j es par y $\lambda_j = 1 - |C| + k_j$ si j es par, es válida para $P^{\mathrm{o}}_{col}(G)$.

Demostración. La demostración es por inducción en t. Si $t = 0$, entonces (5.26) es una *spiral inequality* de tipo (4.15) para v_0 y los k_0 caminos asociados a v_0 (i.e., es la desigualdad (5.21)). Si $t = 1$, entonces (5.26) es la desigualdad (5.23), la cual es válida ya que se obtiene por medio del *path lifting* bajo condiciones válidas (pues $|P_{v_0 v_1}| \geq \theta_0 + 1 - |C| + k_0 + k_1 = \theta_0 + \alpha_2 + \alpha_4$).
Supongamos entonces que $t \geq 2$. Por hipótesis inductiva, sabemos que las

ASPI correspondientes a los primeros $t-1$ y $t-2$ vértices de la secuencia son válidas y son, respectivamente,

$$\sum_{j=0}^{t-1}(-1)^j x_{v_j} + \sum_{j=0}^{t-1}\sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq \sum_{j=0}^{t-1}\lambda_j + \sum_{j=0}^{t-2}(\theta_j - \theta_j Y_j(P_{v_j v_{j+1}})). \tag{5.27}$$

$$\sum_{j=0}^{t-2}(-1)^j x_{v_j} + \sum_{j=0}^{t-2}\sum_{i=1}^{k_j} Y_j(P_i^j) \geq \sum_{j=0}^{t-2}\lambda_j + \sum_{j=0}^{t-3}(\theta_j - \theta_j Y_j(P_{v_j v_{j+1}})), \tag{5.28}$$

Veremos que (5.26) se obtiene mediante un *path lifting* con θ_{t-1} utilizando (5.28) y una *spiral inequality* asociada al vértice v_t (la cual puede ser (4.16) o (4.15) dependiendo de la paridad de t). Es fácil ver que la diferencia entre (5.27) y (5.28) es

$$(-1)^{t-1}x_{v_{t-1}} + \sum_{i=1}^{k_{t-1}} Y_{t-1}(P_i^{t-1}) \geq \lambda_{t-1} + \theta_{t-2} - \theta_{t-2}Y_{t-2}(P_{v_{t-2}v_{t-1}})$$

Así, si t es impar, es posible utilizar (5.28) como $\pi^3 x + \mu^3 y \geq \alpha_3$ y (5.27) como (5.6), con lo cual $\mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 = \lambda_{t-1} + \theta_{t-2} = k_{t-1} + \theta_{t-2}$. Entonces, usando la siguiente *spiral inequality*

$$-x_{v_t} + \sum_{i=1}^{k_t} \overleftarrow{Y}(P_i^t) \geq 1 - |C| + k_t$$

en el papel de (5.5) tenemos $\mu^2 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 = 1 - |C| + k_t = \lambda_t$. Como $|P_{v_{t-1}v_t}| \geq \theta_{t-1} + \theta_{t-2} + 1 - |C| + k_t + k_{t-1} = \theta_{t-1} + \alpha_2 + \alpha_4$, entonces la desigualdad resultante del procedimiento de *path lifting* es válida para $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$, y ésta no es otra que la ASPI (5.26). En caso que t sea par, utilizando (5.28) como $\pi^1 x + \mu^1 y \geq \alpha_1$ y (5.27) como (5.5), se ve que $\mu^2 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_2 = \lambda_{t-1} + \theta_{t-2} = 1 - |C| + k_{t-1} + \theta_{t-2}$, y usando la siguiente *spiral inequality*

$$x_{v_t} + \sum_{i=1}^{k_t} \overrightarrow{Y}(P_i^t) \geq k_t$$

en el papel de (5.6) tenemos $\mu^4 \geq \mathbf{0}$ y $\alpha_4 = k_t = \lambda_t$. Nuevamente, como $|P_{v_{t-1}v_t}| \geq \theta_{t-1} + \theta_{t-2} + 1 - |C| + k_t + k_{t-1} = \theta_{t-1} + \alpha_2 + \alpha_4$, entonces la desigualdad resultante del procedimiento de *path lifting* es válida para $P_{\text{col}}^{\text{o}}(G)$, y ésta es exactamente la ASPI (5.26), lo cual prueba su validez.

□

Una observación inmediata con respecto a esta familia de desigualdades es que la misma es una generalización de las *double* y *triple spiral inequalities* (usando $t = 2$ y $t = 3$, respectivamente, y valores adecuados para los correspondientes θ).

Siendo las ASPI el producto de sucesivas aplicaciones de procedimientos de *path lifting*, el Teorema 5.1.4 sugiere que bajo ciertas condiciones algunas desigualdades de esta familia definen facetas de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$. A este respecto, sería posible enunciar estas condiciones para las ASPI, sin embargo, omitimos hacerlo ya que sería prácticamente copiar las condiciones del Teorema 5.1.4 pidiendo que se cumplan para cada uno de los *path liftings* aplicados en la desigualdad ASPI.

Vale mencionar que en la experimentación con PORTA sobre caminos de hasta 7 vértices, pudimos encontrar facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{o}}_{col}$ pertenecientes a la familia de las ASPI (más allá de las 2SI y las 3SI). En algunos casos, la desigualdad era una ASPI con $t = 4$, es decir, una cadena de 4 caminos consecutivos. Más aun, prácticamente todas las facetas de las instancias analizadas parecen provenir de *path liftings* y más específicamente, de la familia de las ASPI. Esto deja abierta entonces la conjetura de si efectivamente la familia de las ASPI da una caracterización completa de $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$, cuando G es un camino. O tal vez, siendo un poco más conservadores, quizás $P^{\mathrm{o}}_{\mathrm{col}}(G)$ se pueda describir por medio de facetas generadas por *path liftings*, siendo éstas desigualdades ASPI o no. Lamentablemente, no tenemos una demostración para estas conjeturas, con lo cual las dejamos como problemas abiertos.

CAPÍTULO 6

Breves notas sobre la formulación por conjuntos independientes

Una de las formulaciones de programación lineal entera más antiguas para el problema de coloreo es la bien conocida *formulación por conjuntos independientes*. Esta formulación utiliza una variable por cada conjunto independiente del grafo. Si bien esta formulación es una de las más conocidas, la enorme cantidad de variables hizo que la misma no tenga demasiada atención desde el principio. Sin embargo, en 1996, Mehrotra y Trick presentaron un esquema de *generación de columnas* para esta formulación que les permitió desarrollar un algoritmo utilizable en la práctica que en ese momento resultó ser robusto y competitivo.

En este capítulo presentamos un breve estudio sobre algunos poliedros de coloreo que surgen de la formulación por conjuntos independientes. En primera instancia presentamos en detalle la formulación y discutimos sobre la cantidad de variables de la misma, presentando también una versión de este modelo que utiliza solamente conjuntos independientes maximales. Damos luego descripciones completas de los poliedros de coloreo asociados a tres familias conocidas de grafos: los grafos bipartitos completos, los grafos *split* y los complementos de grafos de intervalos. Si bien el estudio de esta formulación puede ser más extenso, los resultados presentados en este capítulo pretenden simplemente dar una idea de los resultados que se pueden obtener sobre la misma.

6.1. La formulación

Recordemos que un conjunto independiente en un grafo es un conjunto de vértices disjuntos dos a dos, es decir, tal que no existe ninguna arista del grafo que conecte dos vértices del conjunto y que hallar un coloreo de vértices en un grafo es equivalente a particionar su conjunto de vértices en conjuntos independientes. Con este objetivo, se utiliza una variable binaria x_S para cada conjunto independiente $S \subseteq V$, la cual indica si el conjunto S representa o no una de las clases de color definidas por el coloreo. Llamando $\mathcal{I}_G$ al conjunto de todos los conjuntos independientes del grafo $G = (V, E)$, un coloreo válido de G es un vector que cumple con las siguientes restricciones:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{I}_G \\ v \in S}} x_S = 1 \qquad \forall v \in V \tag{6.1}$$

$$x_S \in \{0, 1\} \qquad \forall S \in \mathcal{I}_G \tag{6.2}$$

Para hallar un coloreo óptimo, basta con minimizar la cantidad de conjuntos utilizados para particionar el grafo, es decir, minimizar la suma $\sum_{S \in \mathcal{I}_G} x_S$.

La cantidad de conjuntos independientes de un grafo es en general un número muy grande y por lo tanto esta formulación será claramente inmanejable en la práctica. A este respecto, Mehrotra y Trick consideran en [46] utilizar solamente aquellas variables x_S en las que S es un conjunto independiente *maximal*. Si bien la cantidad de conjuntos independientes maximales de un grafo es potencialmente muy grande, es también muy inferior a la cantidad de conjuntos independientes totales. De hecho, en algunas clases de grafos, esta cantidad puede llegar a ser polinomial en función del tamaño del grafo. Por otro lado, es sencillo ver que no todo coloreo de un grafo puede ser construido con conjuntos independientes maximales, con lo cual en esta formulación alternativa es preciso relajar las restricciones (6.1) reemplazando dicha igualdad por una desigualdad por mayor o igual. Esto hace que la formulación pase de ser un modelo de *set partitioning* a ser un modelo de *set covering* (ver [22] para más detalles sobre estos tipos de modelos). Llamando $\mathcal{S}_G$ al conjunto de todos los conjuntos independientes maximales de un grafo $G = (V, E)$, la formulación por conjuntos independientes propuesta en [46] es:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_G \\ v \in S}} x_S \geq 1 \qquad \forall v \in V \tag{6.3}$$

$$x_S \in \{0, 1\} \qquad \forall S \in \mathcal{S}_G \tag{6.4}$$

Es preciso notar que, en esta formulación, un vértice puede quedar asignado a más de una clase de color. Es sencillo ver que este problema se resuelve eligiendo cualquiera de estas clases para tal vértice (siendo cualquiera de estas soluciones equivalentes en cuanto a la función objetivo). Finalmente, un

hecho interesante es que la formulación dada por (6.3)-(6.4) puede obtenerse por medio de un adecuado esquema de descomposición a partir del modelo estándar del Capítulo 2 de esta tesis, como se explica en [40, 45] en el contexto de programas enteros mixtos generales. En este capítulo, llamaremos $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$ a la cápsula convexa de los puntos $x \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_G|}$ que satisfacen las restricciones (6.3)-(6.4). Además, si $\mathcal{G}$ es una familia de grafos, entonces $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G})$ denota la correspondiente familia de polítopos. Llamamos $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$ a la familia de poliedros $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$ con G un grafo cualquiera.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es la de hallar caracterizaciones "elegantes" para diferentes poliedros de coloreo de vértices. Si bien este es un concepto un poco ambiguo, el mismo está de alguna manera ligado a la resolución de estos problemas en tiempo polinomial. Es decir, una caracterización elegante es aquella que permita, por ejemplo, resolver el problema de separación en tiempo polinomial; esto permite a su vez resolver el problema de optimización asociado en forma eficiente. Los poliedros asociados a la formulación por conjuntos independientes traen de por sí aparejado el problema de tener una cantidad de variables enorme. Aun si la separación sobre estos poliedros para ciertas familias de grafos fuese "fácil", la descripción obtenida será ya de por sí intratable y por ende, "poco elegante".

Este hecho hace que la formulación por conjuntos independientes resulte al menos problemática para el objetivo de esta tesis. Sin embargo, existen familias de grafos en las cuales la cantidad de conjuntos independientes maximales es baja y a veces hasta acotada por algún polinomio en función del tamaño del grafo. Teniendo en cuenta el enfoque de esta tesis y lo mencionado más arriba, estas familias de grafos son el punto de partida ideal para nuestro estudio de la formulación por conjuntos independientes. Lamentablemente, la cantidad de familias de grafos con estas características no resulta ser muy grande.

Para las tres formulaciones de PLE analizadas en los capítulos anteriores de esta tesis, presentamos resultados importantes que nos permitieron definir en cierta forma el "potencial" de estas formulaciones, con respecto a la búsqueda de caracterizaciones elegantes de los poliedros asociados. Estos resultados son el Teorema 2.1.2 para el modelo estándar, el Teorema 3.1.2 para la formulación por representantes y el Teorema 4.1.1 para el *orientation model*. En síntesis, éstos indican que cuando ciertas generalizaciones del problema clásico de coloreo son problemas NP-difíciles sobre alguna familia de grafos $\mathcal{G}$, entonces el problema de optimización/separación sobre $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G})$ es también NP-difícil, donde $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(\mathcal{G})$ es la correspondiente familia de poliedros, según la formulación. Estos resultados son importantes para nuestro objetivo, no solo por definir el "potencial" de la formulación, sino también porque guían la elección de las familias de grafos a estudiar para cada formulación y, en este sentido,

resultaría muy beneficioso contar con un resultado similar para la formulación por conjuntos independientes. Lamentablemente, esto no parece ser una tarea sencilla. Como mencionamos más arriba, en una solución del modelo (6.3)-(6.4), es posible que un vértice quede asignado a dos clases de color distintas y esto hace que una solución se corresponda con más de un coloreo del grafo. En cuanto al problema clásico, estos coloreos son equivalentes en el sentido de que todos utilizan la misma cantidad de colores, pero en cuanto a otras variantes de este problema, esto genera problemas.

Si bien muchas de las variantes de coloreo pueden modelarse alterando algunos aspectos de la formulación por conjuntos independientes (6.3)-(6.4), estas alteraciones incluyen la utilización de conjuntos independientes particulares y no necesariamente maximales. En esta formulación, esto significa agregar y/o quitar variables del modelo y por lo tanto los poliedros resultantes resultan prácticamente incomparables con el poliedro original, al menos en el sentido en que se comparan en los teoremas mencionados en el párrafo anterior.

6.2. Caracterizaciones simples de $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$

En esta sección damos una caracterización completa de $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$ en tres familias simples de grafos, en las cuales el problema clásico de coloreo tiene resolución polinomial, pues son subclases de grafos perfectos.

6.2.1. Grafos bipartitos completos

Un grafo $G = (V, E)$ se dice *bipartito* si se puede particionar a V en dos conjuntos independientes V_1 y V_2. En tal caso, decimos que V_1 y V_2 dan la *bipartición* del grafo. El grafo es *bipartito completo* si es bipartito y tiene una cantidad máxima de aristas, es decir, si existe una arista entre cada par de vértices $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$. Siendo estos grafos una subclase de los grafos perfectos, sabemos que el problema clásico de coloreo tiene en ellos resolución polinomial [33]. Claramente, los únicos conjuntos independientes maximales de un grafo bipartito completo son aquellos que dan la bipartición de V, y así $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$ es un poliedro muy particular.

Proposición 6.2.1 *Un grafo G es bipartito completo si y solo si* $P^{\mathrm{I}}_{col}(G) = \{(1, 1)\}$.

Demostración. Para la implicación hacia la derecha, sea V_1 y V_2 la bipartición de G. Como existe una arista entre cada par de vértices $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$, entonces V_1 y V_2 son los únicos conjuntos independientes maximales de G, y por lo tanto las únicas variables de la formulación son x_{V_1} y x_{V_2}. La restricción (6.3) asociada a cada vértice de V_1 es, para cualquiera de ellos, $x_{V_1} \geq 1$. La cual implica $x_{V_1} = 1$, pues x_{V_1} es la única variable en la misma. Análogamente, la misma restricción para los vértices de V_2 implica que $x_{V_2} = 1$. Así,

$P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G) = \{(1,1)\}$.

Veremos ahora la implicación hacia la izquierda. Si $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G) = \{(1,1)\}$, entonces G tiene solo dos conjuntos independientes maximales. Llamemos S_1 y S_2 a estos conjuntos. Supongamos que $S_1 \cup S_2 \neq V$, con lo cual existe un vértice $w \in V \setminus (S_1 \cup S_2)$ y como S_1 y S_2 son maximales, w tiene al menos un vecino $v_1 \in S_1$ y otro $v_2 \in S_2$. Sea S un conjunto independiente maximal que contiene a w (en el caso extremo $S = \{w\}$). Está claro que $v_1 \notin S$ y $v_2 \notin S$, y por lo tanto $S \neq S_1$ y $S \neq S_2$, lo cual es una contradicción, porque éstos eran los únicos independientes maximales de G. Entonces, $S_1 \cup S_2 = V$, con lo cual G es bipartito. Supongamos que G no es bipartito completo y por lo tanto existen vértices $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$ tales que $v_1v_2 \notin E$. Sea S un conjunto independiente maximal que contiene a v_1 y a v_2. Nuevamente, $S \neq S_1$ y $S \neq S_2$, la misma contradicción que antes. Entonces, G es bipartito completo.

□

6.2.2. Grafos *split*

Un grafo $G = (V, E)$ es un grafo *split* si V puede ser particionado en un conjunto independiente S y una clique K. Estos grafos son una subclase de los grafos perfectos, con lo cual sabemos que el problema clásico de coloreo tiene en ellos resolución polinomial [33]. Es sencillo ver que en estos grafos, cada vértice de la clique K pertenece a un único conjunto independiente maximal (i.e., el vértice y todos sus no vecinos en el conjunto independiente S) y eventualmente el conjunto S puede o no ser un independiente maximal. Así, la cantidad de conjuntos independientes maximales en un grafo split es lineal en el tamaño del grafo (profundizamos en estos hechos en la demostración del siguiente teorema).

Teorema 6.2.1 *Si $G = (V, E)$ es un grafo split, entonces $P^{\mathrm{I}}_{col}(G)$ es o bien el punto $(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_G|}$ o bien el segmento $\{(1, \ldots, 1, \lambda) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_G|} : \lambda \in [0, 1]\}$.*

Demostración. Sean K y S una partición de V en una clique y un conjunto independiente, respectivamente, tal que S es maximal. Dado un vértice $v \in V$ y un conjunto $W \subseteq V$, definimos $\bar{N}_W(v) = \{w \in W : vw \notin E\}$ como la no-vecindad de v en W. Para cada $v \in K$ podemos ver que $S_v := \{v\} \cup \bar{N}_S(v)$ es un conjunto independiente maximal. De hecho, es el único independiente maximal que contiene a v, ya que el resto de los vértices del grafo son vecinos de éste. Por lo tanto, los conjuntos independientes maximales de G que contienen vértices de K son exactamente $\mathcal{S}(K) := \{S_v : v \in K\}$. Y como S es a su vez maximal, entonces $\mathcal{S}_G = \mathcal{S}(K) \cup \{S\}$. Notemos además que $S_v \neq S_w$, para

todo par $v, w \in K$, y éstos a su vez son distintos de S, con lo cual $|\mathcal{S}_G| = |K| + 1$.

La restricción (6.3) asociada a cada vértice de $v \in K$ es $x_{S_v} \geq 1$, ya que como dijimos S_v es el único independiente maximal que contiene a v. Esto implica que $x_{S_v} = 1$ para todo punto de $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$. Por otro lado, la restricción (6.3) asociada a cada vértice $w \in S$ es

$$x_S + \sum_{v \in \bar{N}_K(w)} x_{S_v} \geq 1$$

y por lo que dijimos antes, esta desigualdad se reduce a $x_S + |\bar{N}_K(w)| \geq 1$, para todo punto en $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$. Si K no es una clique maximal, entonces existe un $w \in S$ con $|\bar{N}_K(w)| = 0$, y así la restricción (6.3) asociada a w implica que $x_S = 1$ para todo punto de $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$, con lo cual $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G) = \{(1, \ldots, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_G|}$. Por el contrario, si K es una clique maximal, entonces toda restricción (6.3) asociada a vértices de S es redundante y por lo tanto x_S puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 1]$. Así, $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G) = \{(1, \ldots, 1, \lambda) \in \mathbb{R}^{|\mathcal{S}_G|} : \lambda \in [0, 1]\}$.

□

6.2.3. Grafos co-intervalos

Recordemos que un *grafo de intervalos* es el grafo de intersección de un conjunto de intervalos sobre una recta. Es decir, cada vértice del grafo representa un intervalo en la recta y dos vértices son adyacentes si los intervalos representados se intersecan. La Figura 4.1, del Capítulo 4, muestra un ejemplo de esta clase de grafos. Dado que los grafos de intervalos son perfectos, está claro que el problema clásico de coloreo es polinomial sobre esta familia. Se puede dar una demostración alternativa de este hecho modelando el problema como un problema de flujo en redes. Para ello se construye una red que utiliza un par de nodos v_i, v_f y un arco (v_i, v_f) por cada intervalo v del grafo original. Además se agrega un arco (v_f, w_i) por cada par de intervalos v y w tal que el final de v sea anterior al inicio de w. Finalmente, se agrega un nodo fuente s y un nodo sumidero t y los arcos (s, v_i) y (v_f, t) para todo intervalo v del grafo original. Todos los arcos de la red tienen capacidad máxima igual a 1 y los arcos (v_i, v_f) para todo intervalo v, tienen también capacidad mínima igual a 1 (i.e., se requiere en ellos un flujo de valor igual a 1). Si pensamos el flujo de la red como unidades discretas de flujo, es fácil ver que una unidad de flujo de s a t pasa necesariamente por un conjunto de intervalos disjuntos, i.e., un conjunto independiente del grafo original, con lo cual tal flujo puede asociarse al color asignado a los intervalos por los que pasa, ya que por cada intervalo pasa exactamente una unidad de flujo. Así, la red admite un flujo de valor k si y solo si el grafo original puede colorearse utilizando k colores. Asociando un costo fijo a los arcos que salen de s, se puede obtener el número cromático del

grafo resolviendo un problema de costo mínimo en esta red. Siendo enteros todos los coeficientes involucrados en el modelo, tal problema puede resolverse en tiempo polinomial (e.g., por medio de programación lineal).

Es fácil ver que cada clique maximal de un grafo de intervalos puede identificarse con un extremo de alguno de los intervalos representados y por lo tanto la cantidad de cliques maximales de un grafo de esta clase es a lo sumo el doble de la cantidad de vértices del mismo. Decimos que un grafo es *co-intervalo* si su complemento es un grafo de intervalos. Claramente, la cantidad de conjuntos independientes maximales de un grafo co-intervalo es a lo sumo el doble de la cantidad de vértices del mismo.

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es *totalmente unimodular* si toda submatriz cuadrada de A tiene determinante 0, 1 o -1. El siguiente es un resultado bien conocido para este tipo de matrices. Este resultado es la parte "fácil" del conocido teorema de Hoffman y Kruskal [36].

Teorema 6.2.2 *[50] Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz totalmente unimodular y $b \in \mathbb{Z}^m$ un vector entero. El poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ es entero (i.e., tiene todos los vértices enteros).*

Debido a este resultado, las matrices totalmente unimodulares resultan especialmente interesantes para la programación lineal entera ya que si la matriz asociada a un modelo de PLE es totalmente unimodular, entonces el poliedro que ésta defina será un poliedro entero, siempre que el vector b sea entero. Existen distintas caracterizaciones de matrices TU en la literatura como por ejemplo el trabajo de Padberg [54] en el cual se presenta una caracterización de estas matrices en términos de submatrices prohibidas. El concepto de TU fue a su vez extendido (para el caso de matrices con coeficientes 0 y 1) a la clase de matrices *balanceadas* [3] y matrices *perfectas* [53].

Una matriz A con coeficientes 0 o 1 cumple la *propiedad de unos consecutivos* si existe alguna permutación de sus columnas tal que cada fila de la matriz obtenida tiene todos sus coeficientes 1 en columnas consecutivas. Las matrices con esta característica son matrices totalmente unimodulares (este bien conocido hecho se deduce de los resultados de [50]). Esto permite dar una caracterización de $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$ cuando G es un grafo co-intervalo.

Teorema 6.2.3 *Si $G = (V, E)$ es un grafo co-intervalo, entonces $P^{\mathrm{I}}_{col}(G) = \{x \in [0,1]^{|\mathcal{S}_G|} : x$ satisface (6.3) $\}$.*

Demostración. Sea $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ un conjunto de intervalos de la recta real que representa a $\overline{G}$, y llamemos s_j y t_j al comienzo y al final, respectivamente, del intervalo i_j, para $j = 1, \ldots, n$. Dado $h \in \mathbb{R}$, definimos $I(h) = \{i_j \in I : s_j \leq h \leq t_j\}$.

Es claro que $I(h)$ es una clique de $\overline{G}$, para cualquier $h \in \mathbb{R}$ y es sencillo ver también que cualquier clique de $\overline{G}$ está contenida en (o es igual a) una de las cliques $I(s_k)$ o $I(t_k)$, para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$. Con lo cual $\mathcal{S}_G \subseteq \{I(s_k), I(t_k) : k \in \{1, \ldots, n\}\}$.

Esto permite dar un orden a los elementos del conjunto $\mathcal{S}_G$ asociando, por ejemplo, a cada $S \in \mathcal{S}_G$ con el menor valor h, tal que $S = I(h)$. Por otro lado, por definición, $i_j \in I(h)$ si y solo si $s_j \leq h \leq t_j$, con lo cual cada vértice de G pertenece a conjuntos independientes consecutivos según el orden planteado para $\mathcal{S}_G$. Esto implica que la matriz de coeficientes de las restricciones (6.3) cumple con la propiedad de unos consecutivos y por lo tanto es totalmente unimodular. Así, el poliedro definido por las restricciones mencionadas es un poliedro entero, con lo cual coincide con $P^{\mathrm{I}}_{\mathrm{col}}(G)$.

□

CAPÍTULO 7

Comentarios finales y problemas abiertos

El principal objetivo de este trabajo fue el estudio de los poliedros asociados a distintas formulaciones de problemas de coloreo de vértices, en familias particulares de grafos. Para aquellos casos donde estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial, se pretendía hallar caracterizaciones completas para los poliedros asociados a alguna formulación. Como objetivo adicional, se pretendía extender los resultados con el fin de hallar tales caracterizaciones para poliedros asociados a problemas abiertos, demostrando de esta forma que tales problemas de coloreo pueden ser resueltos en tiempo polinomial. Se esperaba también que de este tipo de estudios surgieran resultados intermedios, como por ejemplo, nuevas familias de desigualdades válidas para formulaciones conocidas.

En este último capítulo presentamos un breve resumen del trabajo desarrollado en esta tesis junto con algunos comentarios y observaciones sobre su contenido. A su vez, enumeramos a lo largo del capítulo, algunos interrogantes surgidos del trabajo que quedan como problemas abiertos.

7.1. Resultados generales

Para cada uno de los modelos de PLE analizados en esta tesis, presentamos como resultados iniciales adaptaciones de los mismos para diversas variantes del problema de coloreo de grafos. Es preciso aclarar que pueden realizarse muchas adaptaciones más para éstas y otras variantes de coloreo sin demasiada

dificultad, sin embargo, las adaptaciones presentadas en esta tesis tienen un carácter especial ya que los poliedros resultantes de ellas son "comparables" con los poliedros para el problema clásico, en cuanto a los problemas de optimización y separación. Es así que estos resultados nos permitieron definir el "potencial" de las formulaciones, con respecto a la búsqueda de caracterizaciones elegantes de los poliedros asociados. En particular, los resultados del Teorema 2.1.2 para el modelo estándar, el Teorema 3.1.2 para la formulación por representantes y el Teorema 4.1.1 para el *orientation model*, indican que cuando ciertas generalizaciones del problema clásico de coloreo son problemas NP-difíciles sobre alguna familia de grafos $\mathcal{G}$, entonces el problema de optimización/separación sobre $P_{\text{col}}(\mathcal{G})$ es también NP-difícil (donde $P_{\text{col}}(\mathcal{G})$ es $P^{\text{S}}_{\text{col}}(\mathcal{G})$, $P^{\text{R}}_{\text{col}}(\mathcal{G})$ o $P^{\text{O}}_{\text{col}}(\mathcal{G})$, según la formulación). Es preciso aclarar que estos resultados no solo definen el "potencial" de estas formulaciones, sino que también permiten hallar algoritmos polinomiales para generalizaciones del problema clásico de coloreo, por medio de resoluciones polinomiales para este último (ejemplos de esto son el Teorema 3.3.2 y el Corolario 3.3.3). A su vez, estos resultados guían la elección de las familias de grafos a estudiar para cada formulación.

En cuanto a la formulación por conjuntos independientes presentada en el Capítulo 6, no parece sencillo deducir resultados equivalentes a los mencionados para las demás formulaciones, pues las adaptaciones parecen incluir la utilización de conjuntos independientes particulares y no necesariamente maximales. Esto modifica el conjunto de variables del modelo y por lo tanto los poliedros resultantes resultan prácticamente incomparables con el poliedro clásico, al menos en el sentido en que se comparan en los teoremas mencionados en el párrafo anterior.

Problema 7.1 *¿Es posible adaptar la formulación por conjuntos independientes a alguna generalización del problema clásico de coloreo de manera tal que los poliedros resultantes sean comparables con los originales, en cuanto a los problemas de optimización y separación? Es decir, de la cual se puedan deducir resultados equivalentes a los del Teorema 2.1.2 para el modelo estándar, el Teorema 3.1.2 para la formulación por representantes y el Teorema 4.1.1 para el* orientation model*.*

El Teorema 2.1.3 plantea, para el modelo estándar, una forma de obtener la caracterización de $P^{\text{S}}_{\text{col}}(G)$, cuando G es la identificación en un vértice de otros dos grafos. En una forma similar para la formulación por representantes, la Proposición 3.3.2 caracteriza $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G)$ cuando G es un join completo de otros dos grafos. Estos resultados pueden utilizarse para caracterizar familias de grafos que se construyan por medio de estas operaciones, con lo cual resulta interesante contar con este tipo de resultados para una formulación.

Problema 7.2 *Dado un cierto operador $F : \mathcal{G} \times \cdots \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, donde $\mathcal{G}$ es el conjunto de todos los grafos, ¿es posible para alguna formulación de coloreo des-*

cribir $P_{col}(G)$, para un grafo $G = F(G_1, \ldots, G_k)$, a partir de las descripciones de $P_{col}(G_1), \ldots, P_{col}(G_k)$?

Un aspecto muy interesante de los poliedros de coloreo es su fuerte relación con los poliedros asociados a problemas de conjuntos independientes de un grafo. En el contexto del modelo estándar, mostramos que $P^{\text{S}}_{\text{col}}(G)$ es la cara de $STAB(\mathcal{S}^{\text{C}}_G)$ definida por las desigualdades (2.9) y en el contexto de la formulación por representantes asimétrica vimos que $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G) = STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$. Estos resultados permiten utilizar todo el conocimiento de $STAB$ para entender mejor $\mathcal{P}^{\text{S}}_{col}$ y $\mathcal{P}^{\text{R}}_{col}$. En particular, cualquier desigualdad válida para el poliedro de conjuntos independientes puede trasladarse en forma directa a $\mathcal{P}^{\text{S}}_{col}$ y a $\mathcal{P}^{\text{R}}_{col}$, dando así nuevas familias de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{\text{S}}_{col}$ y a $\mathcal{P}^{\text{R}}_{col}$. Un ejemplo de esto es el caso de las stable cycle inequalities, presentadas en el Teorema 2.3.1, que provienen de las conocidas desigualdades de agujero impar para el poliedro de conjuntos independientes. Si bien mostramos en la Sección 2.3.3 que algunas otras familias de desigualdades conocidas para $STAB(\mathcal{S}^{\text{C}}_G)$ no producen nuevas desigualdades para $\mathcal{P}^{\text{S}}_{col}$, existen muchas otras desigualdades que podrían hacerlo.

Problema 7.3 *En el contexto del modelo estándar (resp. de la formulación por representantes asimétrica), ¿es posible* transportar *a $P^{\text{S}}_{col}(G)$ (resp. $P^{\text{R}}_{col}(G)$) otras desigualdades de $STAB(\mathcal{S}^{\text{C}}_G)$ (resp. $STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G)$) encontrando así nuevas familias para los poliedros de coloreo?*

En la Sección 2.3.4 del Capítulo 2 estudiamos la perfección del grafo $\mathcal{S}^{\text{C}}_G$ y vimos que en ciertas situaciones $\mathcal{S}^{\text{C}}_G$ es un grafo perfecto si y solo si G es un grafo block (ver Corolario 2.3.2). El concepto de perfección en grafos fue extendido en varios aspectos. Un ejemplo es el de los grafos t-perfectos definidos por Chvátal [19, 34] como aquellos grafos G para los cuales las desigualdades de agujero impar describen por completo $STAB(G)$.

Problema 7.4 *El Corolario 2.3.2 indica que, en ciertos casos, el grafo $\mathcal{S}^{\text{C}}_G$ es perfecto si y solo si G es un grafo block. ¿Es posible deducir resultados análogos para otros tipos de perfección? ¿Por ejemplo, para los grafos t-perfectos [19, 34]?*

7.2. Descripciones completas de $\mathcal{P}_{col}$

El principal objetivo de este trabajo fue la búsqueda de descripciones completas para poliedros de coloreo, en familias particulares de grafos. Comenzando con el modelo estándar, mostramos en el Teorema 2.2.1 que si G es un árbol entonces $P^{\text{S}}_{\text{col}}(G)$ se describe con las restricciones orginales del modelo (2.1) y (2.2). Luego, el Teorema 2.2.3 prueba que agregando las desigualdades clique (2.6) a este modelo alcanza para describir $P^{\text{S}}_{\text{col}}(G)$, cuando G es un grafo block. De la relación entre $\mathcal{P}^{\text{S}}_{col}$ y el stable set polytope detallada en la

Sección 2.3, surgen las stable cycle inequalities y luego de realizar una extensa experimentación con estas desigualdades en ciclos y grafos cactus, llegamos a la conjetura de que las mismas, agregadas al modelo original, describen por completo $P^{\text{S}}_{\text{col}}(G)$ en estos casos. La Proposición 2.3.2 prueba que si la conjetura es cierta para ciclos, entonces también lo es para cactus, pero lamentablemente, no logramos una demostración formal de este hecho con lo cual la conjetura queda abierta.

Problema 7.5 *¿Es cierta la conjetura planteada en la Sección 2.3.2 que dice que las stable cycle inequalities (junto a las restricciones originales del modelo estándar) alcanzan para describir $P^{\text{S}}_{col}(G)$, cuando G es un grafo cactus?*

En el Capítulo 3 presentamos descripciones completas de los poliedros asociados a la formulación por representantes asimétrica para una serie de familias de grafos. Comenzando por los grafos G con $\alpha(G) \leq 2$, la Proposición 3.3.1 muestra que $\mathcal{R}^{\prec}_G = L(\overline{G})$ y por lo tanto, gracias al Teorema 3.2.1 tenemos que $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G) = STAB(\mathcal{R}^{\prec}_G) = MATCH(L(\overline{G}))$. Así, obtenemos la caracterización de $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G)$ gracias a que el poliedro de los matchings de un grafo tiene una descripción conocida [27]. De este resultado se desprende también el Teorema 3.3.2, que demuestra que los problemas *μ-coloring* y *max-coloring* pueden ser resueltos en tiempo polinomial para esta clase de grafos.

Los grafos G con $\alpha(G) \leq 2$ son aquellos cuyo complemento no contiene triángulos. Una superclase de estos grafos son aquellos cuyo complemento no contiene paws, es decir, la clase de grafos co-$\{K_4$, diamond, paw$\}$-free analizada en la Sección 3.3.2. La caracterización estructural de esta familia presentada en la Proposición 3.3.3 nos permitió dar una descripción completa de $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G)$ para estos casos. De este resultado se desprende el Corolario 3.3.3, que demuestra que los problemas de *precoloring extension* y *max-coloring* pueden ser resueltos en tiempo polinomial, sobre los grafos co-$\{K_4$, diamond, paw$\}$-free. Moviéndonos nuevamente a una superclase de esta familia, estudiamos en la Sección 3.3.3 la clase de grafos cuyo complemento no contienen un kite, y pudimos deducir para esta clase una descripción de $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G)$ basada en la descripción conocida del stable set polytope para los grafos quasi-line [28].

Las descripciones de $P^{\text{R}}_{\text{col}}(G)$ obtenidas no imponen condiciones sobre el orden $\prec$, utilizado en el conjunto de vértices del grafo G. En general, estos resultados muestran que si $G \in \mathcal{G}$, para alguna familia de grafos $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{R}^{\prec}_G \in \mathcal{G}'$, para otra familia de grafos $\mathcal{G}'$ y para cualquier orden $\prec$ sobre el conjunto de vértices. Es preciso aclarar que estas caracterizaciones serían aun valiosas si se impusieran condiciones sobre $\prec$, con lo cual queda abierto este estudio para el futuro.

Problema 7.6 *Los resultados obtenidos en el Capítulo 3 muestran que si $G \in \mathcal{G}$, para alguna familia de grafos $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{R}^{\prec}_G \in \mathcal{G}'$, para otra familia de grafos $\mathcal{G}'$,*

para cualquier orden $\prec$ sobre el conjunto de vértices. ¿Se pueden obtener resultados similares dejando libre la elección del ordenamiento de los vértices?

En el Capítulo 6, en el contexto de la formulación por conjuntos independientes, presentamos descripciones completas de $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$ para algunas familias de grafos simples: los grafos bipartitos completos en la Sección 6.2.1, los grafos split en la Sección 6.2.2 y los complementos de grafos de intervalos Sección 6.2.3. En cuanto a esta formulación, queda claro que las familias a analizar deberían ser familias en las cuales la cantidad de conjuntos independientes maximales de un grafo sea acotada por algún polinomio en función del tamaño del mismo. Los estudios sobre esta formulación presentados en esta tesis están lejos de ser exhaustivos y pretenden simplemente dar un punto de inicio para la búsqueda de resultados en este contexto, dejando abierta la exploración para futuros trabajos.

Problema 7.7 *¿Para qué otras clases de grafos se pueden hallar descripciones completas de $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{col}$ en el contexto de la formulación por conjuntos independientes? ¿Grafos G con $\alpha(G)$ acotado, por ejemplo?*

7.3. Nuevas facetas y procedimientos

Como objetivo adicional de este trabajo de tesis, se esperaba que de los estudios poliedrales llevados a cabo surgieran resultados intermedios, como por ejemplo nuevas familias de desigualdades válidas para formulaciones conocidas. Como ejemplo de estos resultados, mencionamos ya las *stable cycle inequalities* para el modelo estándar, presentadas en el Teorema 2.3.1. Sin embargo, la mayor cantidad de resultados en este tópico fueron dados en el contexto del *orientation model*.

En primera instancia, presentamos las *reinforced orentation inequalities* (ROI), que representan una generalización de las desigualdades double covering clique de [44], y dimos condiciones suficientes y necesarias para que estas desigualdades definan facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{O}}_{col}$ (ver Teorema 4.4.2). A continuación, guiados por la experimentación con PORTA, investigamos una serie de desigualdades válidas que utilizan como soporte los caminos de un grafo. De este análisis surgieron las *path inequalities* (4.10), las *weighted path inequalities* (4.11) y (4.12), y las *spiral inequalities* (4.15) y (4.16). Con respecto a la facetitud de estas nuevas familias de desigualdades, si bien demostramos que en muchos casos las mismas definen facetas de $\mathcal{P}^{\mathrm{O}}_{col}$, no fue posible dar una caracterización completa de estos casos. La Proposición 4.4.1 identifica casos en los cuales las *weighted path inequalities* no definen facetas, dando una idea de la dificultad de obtener esta caracterización, pero de todas maneras queda abierta la posibilidad de ampliar las condiciones suficientes para que esto ocurra, en las mencionadas familias de desigualdades.

Problema 7.8 *El Teorema 4.4.4, el Teorema 4.4.6 y el Teorema 4.4.8 dan condiciones suficientes para que las* path inequalities*, las* weighted path inequalities *y las* spiral inequalities*, respectivamente, definan facetas de $\mathcal{P}^{o}_{col}$. ¿Es posible ampliar los casos en los que esto ocurre?*

Tomando un camino entre dos vértices u y v del grafo y una *spiral inequality* asociada a cada uno de ellos, presentamos en la Sección 4.4.1.4 la familia de las *double spiral path inequalities* (2SI). Agregando a esta estructura un camino de v a otro vértice w y otra *spiral inequality* para w, obtuvimos en la Sección 4.4.1.5 las *triple spiral inequalities*. Por la Proposición 4.4.2, sabemos que el problema de separación sobre las *spiral inequalities* puede resolverse en tiempo polinomial, aunque no queda claro si lo mismo ocurre con las 2SI y las 3SI.

Problema 7.9 *¿Es posible dar algún resultado de complejidad para el problema de separación asociado a las desigualdades 2SI y/o 3SI?*

Las desigualdades 2SI y 3SI comparten una característica interesante ya que ambas familias toman como base un camino P y dos desigualdades válidas asociadas a los vértices en los extremos de P. En el Capítulo 5, exploramos este hecho y presentamos procedimientos generadores de facetas para los poliedros asociados a esta formulación, a los que denominamos procedimientos de *path lifting*. Basados en dos desigualdades válidas genéricas y un camino entre dos vertices particulares, estos procedimientos generan una nueva desigualdad válida combinando estos elementos. Presentamos primero dos versiones de estos procedimientos y mostramos que algunas de las desigualdades presentadas en el Capítulo 4 pueden ser generadas por medio de éstos; las 2SI, las 3SI y las ROI. En la Sección 5.1.3, presentamos una generalización de los dos primeros procedimientos, denominada *path θ-lifting*, que genera una familia infinita de desigualdades válidas para el poliedro asociado. Finalizando el estudio sobre el *orientation model*, la Sección 5.2 presenta una nueva familia de desigualdades válidas para $\mathcal{P}^{o}_{col}$ que surge de una aplicación iterativa de los procedimientos mencionados; las *alternating spiral path inequalities* (ASPI). Cerrando el Capítulo 5 planteamos la siguiente conjetura surgida de la experimentación con PORTA sobre grafos de la familia de los caminos.

Problema 7.10 *¿Es cierta la conjetura planteada en la Sección 5.2 que dice que las desigualdades ASPI alcanzan para describir $P^{o}_{col}(G)$, cuando G es un camino? Alternativamente, ¿es cierta la conjetura más conservadora que dice que $P^{o}_{col}(G)$ se puede describir por medio de facetas generadas por* path liftings*?*

En el Teorema 5.1.4 mostramos que los procedimientos de *path lifting* generan facetas del poliedro asociado y damos condiciones suficientes para que esto ocurra. Sin embargo, el caso analizado es un caso muy particular en el cual el camino utilizado es simplemente una arista. En la experimentación con PORTA identificamos facetas surgidas de *path liftings* con caminos de mayor longitud

pero queda abierta una identificación formal de los casos en los que éstas aparecen.

Problema 7.11 *¿Se puede ampliar el conjunto de casos en los que los procedimientos de* path lifting *generan facetas de $\mathcal{P}^{o}_{col}$? Es decir, ¿se pueden relajar las condiciones del Teorema 5.1.4 en algún sentido?*

Los procedimientos de *path lifting* presentados tienen una importancia teórica relevante ya que sirven para entender mejor la estructura de $\mathcal{P}^{o}_{col}$, en el contexto del *orientation model*. Por otro lado, no queda claro en principio cuán efectivas pueden ser las desigualdades generadas en la práctica, en el contexto por ejemplo de un algoritmo de planos de corte. En este sentido, sería interesante conocer más acerca de potenciales procedimientos de separación que se puedan implementar para estas desigualdades, ya que el problema de separación en este caso es probablemente dependiente de los problemas de separación para las desigualdades utilizadas por el procedimiento.

Problema 7.12 *¿Cómo puede resolverse el problema de separación asociado a los procedimientos de* path lifting*? ¿Cómo depende este problema de los problemas de separación para las desigualdades utilizadas por el procedimiento? ¿Se puede dar algún resultado de complejidad para la separación de las desigualdades generadas por* path lifting*, probablemente en función de la complejidad de la separación de las desigualdades utilizadas?*

Como muestran los resultados presentados en los capítulos 4 y 5, los caminos de un grafo resultan estructuras cruciales para $\mathcal{P}^{o}_{col}$, en el contexto del *orientation model*. Es posible entonces que existan otros procedimientos, similares al *path lifting*, que permitan generar desigualdades válidas para estos poliedros a partir de una adecuada combinación de otras desigualdades junto con caminos de un grafo.

Problema 7.13 *¿Existen otros procedimientos, similares al procedimiento de* path lifting*, que permitan generar desigualdades válidas a partir de una adecuada combinación de otras desigualdades junto con caminos de un grafo?*

7.4. Otras formulaciones

Como mencionamos en el Capítulo 4, el *orientation model* puede extenderse utilizando una variable z que acota superiormente el color asignado a cada vértice. De esta manera, minimizando dicha variable se obtiene el número cromático del grafo. La versión analizada en esta tesis no contempla el uso de esta variable extra.

Problema 7.14 *¿Se pueden extender los resultados obtenidos para el* orientation model *a la versión extendida del mismo que utiliza la variable z para hallar el número*

cromático del grafo en cuestión? ¿Cómo se incorpora esta variable a las facetas obtenidas en el Capítulo 4 y/o a los procedimientos de path lifting *presentados en el Capítulo 5?*

A su vez, la versión extendida del modelo estándar utiliza variables binarias w_c para indicar si el color c fue asignado o no a algún vértice del grafo. Así, minimizando la suma de estas variables es posible encontrar el número cromático del grafo. Por otro lado, es posible agregar a este modelo una serie de desigualdades para eliminar la simetría que presenta el mismo. Estas desigualdades no son válidas para el poliedro original, pero preservan al menos una solución por cada coloreo posible. En esta tesis estudiamos los poliedros asociados a la versión del modelo estándar que no incluye estas variables y no queda claro si los resultados obtenidos pueden extenderse fácilmente a las versiones extendidas de este modelo.

Problema 7.15 *¿Se pueden extender los resultados obtenidos para el modelo estándar a la versión extendida del mismo que utiliza las variables w_c? ¿Se pueden extender a la versión con desigualdades que evitan las soluciones simétricas?*

En el Capítulo 1 mencionamos el distance model, que utiliza una variable entera x_{vw} para cada par de vértices $v, w \in V$ que indica la distancia entre los colores asignados a v y a w, i.e., $x_{vw} = c(v) - c(w)$, donde $c : V \to \mathbb{N}$ es el coloreo representado. Este modelo está fuertemente ligado al *orientation model*, ya que las variables del primero pueden escribirse en función de las variables del segundo (comparten incluso la variable de orientación y_e para cada arista e del grafo). Si bien no representan el mismo poliedro, el mencionado hecho sugiere que muchas de las desigualdades válidas de un modelo podrían trasladarse al otro.

Problema 7.16 *¿Es posible trasladar al distance model las nuevas desigualdades propuestas para el* orientation model *del Capítulo 4? ¿Es posible trasladar los procedimientos de* path lifting *presentados en el Capítulo 5?*

Mencionamos también en el Capítulo 1 la formulación supernodal, en la cual se construye un grafo $G' = (Q, E')$ contrayendo ciertos vértices particulares del grafo G de forma tal que cada coloreo de G corresponde a algún multicoloreo de G'. El modelo planteado luego para resolver el problema de multicoloreo es prácticamente el mismo que el modelo estándar, con la salvedad de que a cada supernodo q de G' se debe asignar una cantidad d_q de colores, en lugar de 1. Es decir, el modelo es el mismo que el modelo estándar, reemplazando el 1 en el lado derecho de las restricciones (2.1) por el valor d_q. Esto sugiere en cierta forma que los poliedros asociados podrían ser muy similares y que tal vez los resultados obtenidos para el modelo estándar puedan extenderse a la formulación supernodal.

Problema 7.17 *¿Es posible extender los resultados obtenidos para el modelo estándar del Capítulo 2 a la formulación supernodal?*

Bibliografía

[1] Bandelt, H., y Mulder, H. Distance-hereditary graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B 41*, 2 (1986), 182–208.

[2] Beineke, L. Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory 9*, 2 (1970), 129–135.

[3] Berge, C. Balanced matrices. *Mathematical Programming 2*, 1 (1972), 19–31.

[4] Biro, M., Hujter, M., y Tuza, Z. Precoloring extension. I. interval graphs. *Discrete Mathematics 100*, 1–3 (1992), 267–279.

[5] Bonomo, F., y Cecowski, M. Between coloring and list-coloring: μ-coloring. *Electronic Notes in Discrete Mathematics 19* (2005), 117–123.

[6] Bonomo, F., Durán, G., y Marenco, J. Exploring the complexity boundary between coloring and list-coloring. *Annals of Operations Research 169*, 1 (2009), 3–16.

[7] Bonomo, F., Faenza, Y., y Oriolo, G. On coloring problems with local constraints. *Discrete Mathematics 312*, 12–13 (2012), 2027–2039.

[8] Bonomo, F., Giandomenico, M., y Rossi, F. A note on the cornaz-jost transformation to solve the graph coloring problem. *Information Processing Letters 113* (2013), 649–652.

[9] Borndörfer, R., Eisenblätter, A., Grötschel, M., y Martin, A. The orientation model for frequency assignment problems. ZIB-report 98-01, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Berlin, Germany, 1998.

[10] Burke, E., Marecek, J., Parkes, A., y Rudová, H. A supernodal formulation of vertex colouring with applications in course timetabling. *Annals of Operations Research 179*, 1 (2010), 105–130.

[11] Campêlo, M., y Campos, V. Comunicación personal, 2013.

[12] Campêlo, M., Campos, V., y Corrêa, R. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics 156*, 7 (2008), 1097–1111.

[13] Campêlo, M., Corrêa, R., y Frota, Y. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters 89*, 4 (2004), 159–164.

[14] Cheng, E., y Cunningham, W. *Integer Programming and Combinatorial Optimization: 4th International IPCO Conference Copenhagen, Denmark, May 29–31, 1995 Proceedings*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1995, ch. Separation problems for the stable set polytope, pp. 65–79.

[15] Cheng, E., y de Vries, S. Antiweb-wheel inequalities and their separation problems over the stable set polytopes. *Mathematical Programming 92*, 1 (2002), 153–175.

[16] Christof, T., y Löbel, A. *PORTA: Polyhedron representation transformation algorithm*, 1997.

[17] Chudnovsky, M., Robertson, N., Seymour, P., y R.Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics 164* (2006), 51–229.

[18] Chudnovsky, M., y Seymour, P. Claw-free graphs vii. the structure of quasi-line graphs. Unpublished manuscript, 2004.

[19] Chvátal, V. On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory (B) 18* (1975), 138–154.

[20] Coll, P., Marenco, J., Méndez-Díaz, I., y Zabala, P. Facets of the graph coloring polytope. *Annals of Operations Research 116*, 12 (2002), 79–90.

[21] Cornaz, D., y Jost, V. A one-to-one correspondence between colorings and stable sets. *Operations Research Letters 36* (2008), 673–676.

[22] Cornuéjols, G. *Combinatorial Optimization: Packing and Covering*. CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[23] de Werra, D. An introduction to timetabling. *European Journal of Operations Research 19* (1985), 151–162.

[24] Delle Donne, D. Un algoritmo branch & cut para un problema de asignación de frecuencias en redes de telefonía celular. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2009.

[25] Delle Donne, D., y Marenco, J. A branch & cut algorithm for the minimum-adjacency vertex coloring problem. *Discrete Optimization 8*, 4 (2011), 540–554.

[26] Demange, M., de Werra, D., Monnot, J., y Paschos, V. Weighted node coloring: When stable sets are expensive. *Lecture Notes In Computer Science 2573* (2002), 114–125.

[27] Edmonds, J. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards 69* (1965), 125–130.

[28] Eisenbrand, F., Oriolo, G., Stauffer, G., y Ventura, P. The stable set polytope of quasi-line graphs. *Combinatorica 28*, 1 (2008), 45–67.

[29] Erdös, P., Rubin, A., y Taylor, H. Choosability in graphs. *Proceedings of the West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congressus Numerantium XXVI* (1979), 125–157.

[30] Fekete, P., y Marenco, J. A complete description of the minimum-adjacency vertex coloring polytope for trees. Unpublished manuscript, 2015.

[31] Garey, M., y Johnson, D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman, 1979.

[32] Gerhardt, A. Polyedrische untersuchungen von zwei-maschinen-scheduling-problem mit antiparallelitätsbedingungen. Master thesis, Technische Universität Berlin, Germany, 1999.

[33] Golumbic, M. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. North Holland, 2004.

[34] Gröschel, M., Lovász, L., y Schrijver, A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Springer-Verlag, 1988.

[35] Gröschel, M., y Wagler, A. Scheduling polytopes coming from the bandwidth allocation in point-to-multipoint radio access systems. Unpublished manuscript, 2000.

[36] Hoffman, A., y Kruskal, J. *Linear Inequalities and Related Systems (Kuhn and Tucker, eds)*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1958, ch. Integral boundary points of convex polyhedra, pp. 223–246.

[37] Jansen, K. The optimum cost chromatic partition problem. *Lecture Notes in Computer Science 1203*, 12 (1997), 25–36.

[38] Jansen, K., y Scheffler, P. Generalized coloring for tree-like graphs. *Discrete Applied Mathematics 75*, 2 (1997), 135–155.

[39] Jensen, T., y Toft, B. *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, 1995.

[40] Johnson, E. *Algorithms and Model Formulations in Mathematical Programming*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1989, ch. Modeling and Strong Linear Programs for Mixed Integer Programming, pp. 1–43.

[41] Kral, D., Kratochvil, J., Tuza, Z., y Woeginger, G. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs. *Proceedings of the 27th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, LNCS 2204* (2001), 254–262.

[42] Kubicka, E. The chromatic sum of graphs. Doctoral Thesis, Western Michigan University, USA, 1989.

[43] Kubicka, E., y Schwenk, A. An introduction to chromatic sums. *Proceedings of the 17th ACM Annual Computer Science Conference* (1989).

[44] Marenco, J. Chromatic scheduling polytopes coming from the bandwith allocation problem in point-to-multipoint radio access systems. Doctoral Thesis, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 2005.

[45] Mehrotra, A. *Constrained Graph Partitioning: Decomposition, Polyhedral Structure and Algorithms*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA, USA, 1992. UMI Order No. GAX93-15899.

[46] Mehrotra, A., y Trick, M. A column generation approach for graph coloring. *INFORMS Journal On Computing 8*, 4 (1996), 344–354.

[47] Méndez-Díaz, I., y Zabala, P. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics 154*, 5 (2006), 826–847.

[48] Méndez-Díaz, I., y Zabala, P. A cutting plane algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics 156*, 2 (2008), 159–179.

[49] Nemhauser, G., y Trotter, L. Properties of vertex packing and independence system polyhedra. *Mathematical Programming 6*, 1 (1974), 48–61.

[50] Nemhauser, G., y Wolsey, L. *Integer and combinatorial optimization*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1988.

[51] Oriolo, G. Clique family inequalities for the stable set polytope for quasi-line graphs. *Discrete Applied Mathematics 132*, 3 (2003), 185–201.

[52] Padberg, M. W. On the facial structure of set packing polyhedra. *Mathematical Programming 5*, 1 (1973), 199–215.

[53] Padberg, M. W. Perfect zero–one matrices. *Mathematical Programming 6*, 1 (1974), 180–196.

[54] Padberg, M. W. A note on the total unimodularity of matrices. *Discrete Mathematics 14*, 3 (1976), 273 – 278.

[55] Pemmaraju, S., Raman, R., y Varadarajan, K. Buffer minimization using max-coloring. *Proceedings of the XV annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA* (2004), 562–571.

[56] Pulleyblank, W., y Edmonds, J. Facets of 1-matching polyhedra. *Lecture Notes in Mathematics 411* (1974), 214–242.

[57] Schrijver, A. *Combinatorial Optimization - Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag, 2003.

[58] Trotter, L. A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra. *Discrete Mathematics 12*, 4 (1975), 373 – 388.

[59] Tuza, Z. Graph colorings with local constraints - a survey. *Discussiones Mathematicae – Graph Theory 17* (1997), 161–228.

[60] Vizing, V. Coloring the vertices of a graph in prescribed colors (in russian). *Diskret. Analiz. 29* (1976), 3–10.

[61] Winston, W. L. *Operations Research. Applications and Algorithms*, 4th ed. Brooks/Cole, 2004.

APÉNDICE A

Conceptos básicos de teoría de grafos y optimización combinatoria

En este apéndice presentamos una serie de conceptos básicos relacionados a la teoría de grafos, a la teoría poliedral y a la optimización combinatoria en general.

A.1. Teoría de grafos

Un *grafo* $G = (V, E)$ consiste en un conjunto V de *vértices*, finito y no vacío, y un conjunto E finito de pares no ordenados de vértices distintos de V, llamados *aristas*. Si $e = \{v, w\} \in E$ es una arista, decimos que e une los vértices v y w, y lo escribimos en forma resumida $e = vw$. Dos vértices que están unidos por una arista se llaman *adyacentes* o *vecinos*. La *vecindad* de un vértice $v \in V$ es el conjunto $N_G(v) = \{w \in V : vw \in E\}$. Si no hay riesgo de confusión, simplemente llamamos $N(v)$ a este conjunto. Dado $W \subseteq V$, definimos a la *vecindad de* W como $N(W) = \{v \in V : vw \in E \text{ para algún } w \in W\}$. También definimos el conjunto de aristas $E(W) = \{vw \in E : v \in A \text{ y } w \in A\}$. Un grafo $G' = (V', E')$ es un *subgrafo de* $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. El subgrafo de G *inducido* por el conjunto de vértices $W \subseteq V$ es $G[W] = (W, E')$, con $E' = E(W)$. Este grafo se denomina un *subgrafo inducido* de G. El *grafo complemento* $\overline{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ es un grafo cuyo conjunto de vértices es V y cuyo conjunto de aristas es $\overline{E} = \{vw : v, w \in V \text{ y } vw \notin E\}$.

Una secuencia de vértices distintos $v_1, \ldots, v_k$ es un *camino* en G si $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \ldots, k-1$. El número k es la *longitud* del camino. Una secuencia de vértices distintos $v_1, \ldots, v_k$ es un *ciclo* en G si $v_i v_{i+1} \in E$ para $i = 1, \ldots, k-1$ y $v_1 v_k \in E$. El número k es la *longitud* del ciclo. Un ciclo de longitud 3 se llama *triángulo*. Un ciclo es *impar* resp. *par* si su longitud es impar resp. par. Toda arista $v_i v_j$ en el subgrafo de G inducido por los vértices $v_1, \ldots, v_k$ con $1 < |j - i| < k - 1$ es una *cuerda* del ciclo. Un ciclo sin cuerdas se llama *ciclo inducido* o *agujero*, si su longitud es al menos 4. Para $n \geq 1$, denotamos $C_n = (V, E)$ al grafo de n vértices tal que $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_i, v_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$.

Un grafo se dice *completo* si todo par de vértices está unido por una arista. Una *clique* en un grafo G es un conjunto de vértices que inducen un subgrafo completo de G. Según la literatura que se consulte una clique es a veces definida como un subgrafo completo *maximal*. En este trabajo nos referimos a una clique simplemente como un subgrafo completo, es decir, no necesariamente maximal. Un *conjunto independiente* (o *conjunto estable*) es un conjunto de vértices que no son adyacentes dos a dos, es decir, tal que no existe ninguna arista del grafo que conecte dos vértices del conjunto. Un *coloreo* de G es una partición de V en conjuntos independientes disjuntos. Denotamos $\chi(G)$ al *mínimo número* de conjuntos independientes necesarios para esa partición de V. Este parámetro se denomina el *número cromático* de G.

Un *grafo dirigido* (o *digrafo*) $D = (V, A)$ consiste en un conjunto finito no vacío de vértices V y un conjunto finito de pares ordenados de vértices distintos de V, llamados *arcos*. Si $e = (v, w) \in E$ es un arco de D, lo escribimos en forma resumida $e = vw$ y llamamos *cola*, resp. *cabeza* a v, resp. w. El arco vw es un arco *saliente* de v y *entrante* de w. Un *ciclo dirigido* es una secuencia de vértices $v_1, \ldots, v_k$ tales que $v_i v_{i+1} \in A$ para $i = 1, \ldots, k-1$ y $v_k v_1 \in A$. Un digrafo que no tiene ciclos dirigidos se denomina *acíclico*. Una *orientación* de un grafo $G = (V, E)$ es un digrafo $D = (V, A)$ tal que A contiene exactamente un arco (v, w) por cada arista $\{v, w\}$ de G.

A.2. Teoría poliedral

Un conjunto de vectores K es *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in K$ también contiene el segmento $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ que los une. Para cualquier conjunto de vectores K, la *cápsula convexa* de K, denotada por $\text{conv}(K)$, es el menor (en el sentido de la inclusión de conjuntos) conjunto convexo que contiene a K, i.e., $\text{conv}(K) = \cap\{K' \subseteq \mathbb{R}^n : K \subseteq K' \text{ y } K' \text{ es convexo}\}$. Si $K = \{x_1, \ldots, x_k\}$ es finito, podemos escribir $\text{conv}(K)$ como el conjunto de

todas las combinaciones convexas de sus elementos:

$$\text{conv}(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} = 1 \Big\}.$$

Un *cono* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío de vectores tal que para cualquier conjunto finito de vectores de C, el conjunto C también contiene todas sus combinaciones lineales con coeficientes no negativos. Para un subconjunto arbitrario $W \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos su *cápsula cónica* $\text{cone}(W)$, como la intersección de todos los conos en $\mathbb{R}^n$ que contienen a W. Si $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ es finito, podemos escribir:

$$\text{cone}(W) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda \geq 0 \Big\}.$$

La *suma de Minkowski* de dos conjuntos $P, Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como $P + Q = \{x + y : x \in P, y \in Q\}$. Un *poliedro* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es la intersección de un número finito de semiespacios, i.e., $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$. Equivalentemente, los poliedros se pueden describir por la suma de Minkowski de una cápsula convexa y una cápsula cónica generadas finitamente, i.e., $P = \text{conv}(K) + \text{cone}(W)$ para dos conjuntos de vectores finitos $K, W \in \mathbb{R}^n$. Un *politopo* es un poliedro acotado. Un politopo P puede describirse usando sólo la cápsula convexa de un conjunto finito de vectores, i.e., $P = \text{conv}(K)$ para un conjunto finito $K \in \mathbb{R}^n$.

Los vectores $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ son *afínmente independientes* si el hecho de que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$ implica que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, k$. Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un poliedro y $\{x_0, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subconjunto maximal de vectores afínmente independientes de P, entonces decimos que P tiene *dimensión* k, y lo denotamos $dim(P) = k$. Si $dim(P) = n$, decimos que P tiene *dimensión completa*. El politopo P tiene dimensión k si y solo si un sistema minimal de ecuaciones lineales para P tiene exactamente $n - k$ ecuaciones linealmente independientes.

Una desigualdad lineal $\pi x \leq \pi_0$ es *válida* para un poliedro P si la satisfacen todos los vectores $x \in P$. Una *cara* de P es cualquier conjunto de la forma $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \pi x = \pi_0\}$, donde $\pi x = \pi_0$ es una desigualdad válida para P. Una cara F se llama *propia* si $F \neq \emptyset$ y $F \neq P$. Las caras de dimensión 0, 1 y $dim(P) - 1$ se llamam *puntos extremos*, *aristas* y *facetas* de P, respectivamente. En particular, los puntos extremos son las caras propias minimales y las facetas son las caras propias maximales. El conjunto de los puntos extremos de P se denota $\text{vert}(P)$. Todo politopo es la cápsula convexa de sus vértices y si $P = \text{conv}(K)$ entonces $vert(P) \subseteq K$.

A.3. Complejidad computacional

Un *problema de decisión* Π consiste en un conjunto D_Π de *instancias* y un subconjunto $Y_\Pi \subseteq D_\Pi$ de *instancias afirmativas*. El conjunto de instancias es generalmente descripto por una definición general de todos sus parámetros, y las instancias afirmativas son definidas por una pregunta, cuya respuesta es "sí" o "no", en función de los parámetros del problema. En este marco, una instancia del problema se obtiene especificando valores particulares para todos los parámetros del problema. Suponemos que cada problema tiene un *esquema de codificación*, que representa instancias del problema en cadenas finitas de un alfabeto dado. La *longitud de la entrada* de una instancia $I \in D_\Pi$ está definida por la cantidad de símbolos en la descripción obtenida a partir del esquema de codificación para el problema, y se denota Length(I). La función de longitud Length: $D_\Pi \to \mathbb{Z}_+$ es utilizada como la medida formal del tamaño de la instancia.

La *función de complejidad computacional* $T_A : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ de un algoritmo A expresa sus requerimientos de tiempo dando, para cada posible longitud de la entrada, la mayor cantidad de operaciones elementales del algoritmo para resolver un problema de ese tamaño. Un algoritmo A se llama *algoritmo de tiempo polinomial* si existe una función polinómica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $T_A(n) \leq p(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. La clase de problemas P está formada por aquellos problemas que pueden resolverse por medio de un algoritmo de tiempo polinomial.

Un *algoritmo no determinístico* es un algoritmo formado por una *etapa de predicción* y una *etapa de verificación*. Dada una instancia del problema, la etapa de predicción genera una estructura de manera no determinística. Luego se ingresa esta estructura a la etapa de verificación, que computa de manera determinística normal y termina con una respuesta de "sí" o "no". Un algoritmo no determinístico *resuelve* un problema de decisión si existe alguna estructura predicha tal que en la etapa de verificación responde "sí" si y solo si la instancia es afirmativa. Un algoritmo no determinístico se dice que *opera en tiempo polinomial* si para toda instancia afirmativa hay alguna estructura predicha que conduce a la etapa de verificación a una respuesta afirmativa en un tiempo acotado por una función polinómica en el tamaño de entrada. La case de problemas NP está formada por aquellos problemas de decisión que pueden resolverse por medio de un algoritmo no determinístico en tiempo polinomial. Claramente $P \subset NP$, pero no se sabe aun si esta inclusión es estricta o no.

Una *transformación polinomial* de un problema de decisión Π a un problema de decisión Π' es una función $f : D_\Pi \to D_{\Pi'}$ tal que f es calculada por un algoritmo determinístico en tiempo polinomial y, para todo $I \in D_\Pi$, vale que

$I \in Y_\Pi$ si y solo si $f(I) \in Y_{\Pi'}$. Si existe una transformación polinomial de Π a Π', escribimos $\Pi \propto \Pi'$. Es fácil verificar que la relación inducida por $\propto$ es transitiva y reflexiva. Un problema de decisión Π se define como *NP-completo* si $\Pi \in NP$ y $\Pi' \propto \Pi$ para todo $\Pi' \in NP$. Para demostrar que un determinado problema de decisión Π es NP-completo, es suficiente demostrar que $\Pi \in NP$ y que $\Pi' \propto \Pi$ para algún problema NP-completo Π'. Si Π es NP-completo, entonces existe un algoritmo de tiempo polinomial que resuelve Π si y solo si $P = NP$.

Un *problema de búsqueda* Π consiste en un conjunto D_Π de instancias y, para cada instancia $I \in D_\Pi$, un conjunto $S_\Pi(I)$ de soluciones. Decimos que un algoritmo *resuelve* un problema de búsqueda Π si, dada cualquier isntancia $I \in D_\Pi$ como entrada, devuelve alguna solución perteneciente a $S_\Pi(I)$ siempre que este conjunto no sea vacío. Una *reducción de tiempo polinomial* de un problema de búsqueda Π a un problema de búsqueda Π' es un algoritmo A que resuelve Π utilizando una subrutina hipotética S para resolver Π' tal que, si S es un algoritmo de tiempo polinomial para Π' entonces A es un algoritmo de tiempo polinomial para Π. Si existe una reducción de tiempo polinomial de Π a Π' , escribimos $\Pi \propto_R \Pi'$. Un problema de búsqueda Π es *NP-difícil* si existe algún problema NP-completo Π' tal que $\Pi' \propto_R \Pi$. Un problema de búsqueda NP-difícil no puede ser resuelto en tiempo polinomial a menos que $P = NP$.