Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis Doctoral

Estudio de la estructura de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en presencia de campos magnéticos fuertes mediante modelos efectivos

Allen, Pablo Guillermo

2016-12-02

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Allen, Pablo Guillermo. (2016-12-02). Estudio de la estructura de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en presencia de campos magnéticos fuertes mediante modelos efectivos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:
Allen, Pablo Guillermo. "Estudio de la estructura de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en presencia de campos magnéticos fuertes mediante modelos efectivos". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2016-12-02.

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
Departamento de Física

Estudio de la estructura de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en presencia de campos magnéticos fuertes mediante modelos efectivos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área de Ciencias Físicas

por Lic. Pablo Guillermo Allen

Director de Tesis: Norberto Scoccola

Consejero de Estudios: Ana Maria Llois

Lugar de Trabajo: Centro Atómico Constituyentes – Comisión Nacional de Energía Atómica

Buenos Aires, 2016.

Fecha de defensa: 02/12/16

Resumen

Estudio de la estructura de fases de la Cromodinámica Cuántica (QCD) en presencia de campos magnéticos fuertes mediante modelos efectivos

En esta tesis se estudian los efectos de campos magnéticos intensos sobre las propiedades de la materia fuertemente interactuante en el marco de modelos efectivos del tipo Nambu-Jona-Lasinio, haciendo especial énfasis en el análisis de los diagramas de fases y el comportamiento de los parámetros de orden.

En el Cap.1, se realiza una introducción a los temas que se desarrollan en esta tesis, presentándose las motivaciones y los objetivos.

En el Cap.2, se hace una revisión breve de algunos aspectos básicos de la Cromodinámica Cuántica (*QCD*), los cuales son usados como punto de partida para la construcción de los modelos efectivos utilizados. Luego se introducen el modelo de Nambu-Jona-Lasinio y las distintas extensiones a ser estudiadas en este trabajo.

En el Cap.3, se introduce campo magnético en el modelo, prestando especial atención a los diferentes procedimientos de regularización posibles. Se realiza una comparación entre dichos procedimientos y además se comparan estos resultados con los correspondientes de *Lattice QCD* (Cromodinámica cuántica en red).

En el Cap.4, se estudia la estructura de fases del modelo con campo magnético y potencial químico finito. Se realiza además un estudio exhaustivo de la dependencia de los diagramas de fase con la parametrización. Se analiza el comportamiento de los parámetros de orden y se discute el efecto de catálisis magnética inversa.

En el Cap.5, se presentan los resultados correspondientes a una extensión del modelo que incluye interacciones generalizadas. Se tienen en cuenta interacciones de mezcla de sabor y de carácter vectorial. Luego, se imponen condiciones de neutralidad de carga y equilibrio β, relevantes al estudio de estrellas compactas.

En el Cap.6, se analiza el modelo al considerar interacciones efectivas del tipo quark-quark, las cuales reproducen el efecto de superconductividad de color. Se detalla el procedimiento de regularización y se discute el comportamiento del parámetro de orden de simetría quiral y del gap superconductor. Nuevamente, se estudian los diagramas de fase en función de los parámetros del modelo.

En el Cap.7, finalmente, se resume el trabajo realizado y se exponen las conclusiones.

Palabras clave: Cromodinámica cuántica, campos magnéticos, estrellas de neutrones, simetría quiral.

Abstract

Study of the phase structure of Quantum Chromodynamics under intense magnetic fields within effective models

In this thesis we study the effects of intense magnetic fields on the properties of strongly interacting matter within effective models of the Nambu-Jona-Lasinio type, emphasizing on the analysis of the corresponding phase diagrams and the behaviour of the relevant order parameters.

In Chap.1, we briefly introduce the subjects to be developed in this thesis, and present the motivations and objectives.

In Chap.2, we summarize some of the basic aspects of Quantum Chromodynamics (QCD), which are used as a starting point for the construction of the effective models used in this work. Then, we introduce the Nambu-Jona-Lasinio model and the different extensions to be studied.

In Chap.3, we introduce magnetic field in the model, paying special attention to the different possible regularization procedures. We carry out a comparison between such procedures and also compare these results with the corresponding ones from Lattice QCD.

In Chap.4, we study the phase structure of the model under finite magnetic field and chemical potential. We carry out an exhaustive study of the dependence of the phase diagram on the parameter choice. We analyse the behaviour of the dressed mass, order parameter for chiral symmetry breaking, and the density. The effect of inverse magnetic catalysis is also discussed.

In Chap.5, we extend the model to include generalized interactions. We consider flavour mixing effects and vector interaction channels. Afterwards, charge neutrality and β equilibrium conditions are imposed, which are relevant to the study of compact stars.

In Chap.6, we take into consideration effective quark-quark type interactions, which reproduce the effect of color superconductivity. The regularization procedure is shown in detail for this case, and the behaviour of the chiral symmetry breaking order parameter and superconducting gap are presented. Once again, we study the phase diagrams and their dependence on the parameter choice.

In Chap.7, finally, we summarize the results of this work and the conclusions are presented.

Keywords: Quantum chromodynamics, magnetic fields, neutron stars, chiral symmetry.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Formalismo **8**
2.1. Aspectos generales de QCD 8
2.2. Propiedades de las transformaciones en espacio de sabor 11
2.3. Modelo de Nambu Jona-Lasinio 15
2.3.1. Formalismo de bosonización 17
2.3.2. Sector de mesones 22
2.3.3. Procedimientos de regularización 23
2.3.4. Parametrizaciones y comportamiento del modelo en el sector de vacío 26
2.4. Extensiones del modelo Nambu Jona-Lasinio 29
2.4.1. Temperatura y potencial químico finito. 29
2.4.2. Comportamiento a potencial químico finito para distintas parametrizaciones 31
2.4.3. Interacciones generalizadas 35
2.4.4. Neutralidad de carga eléctrica y equilibrio β ante procesos débiles 39
2.4.5. Superconductividad de color 41

3. Campo magnético **43**
3.1. Cálculo del determinante fermiónico 43
3.2. Regularización del vacío 49
3.2.1. Regularización con factores de forma dependientes del campo magnético 49
3.2.2. Regularización independiente del campo magnético 50
3.2.3. Resultados 54

4. Campo magnético y potencial químico finito **58**
4.1. Potencial termodinámico 58
4.2. Resultados para campo magnético finito en el límite quiral 59

4.2.1. Diagramas de fases en el plano $eB - \mu$ 64
4.2.2. Catálisis magnética inversa 67
4.3. Masa corriente de quark finita 70
4.3.1. Diagrama de fases en el plano $eB - \mu$ 73

5. Interacciones generalizadas 78
5.1. Efecto de interacciones con mezcla de sabor variable 78
5.2. Efecto de las interacciones vectoriales 83
5.3. Resultados para materia eléctricamente neutra bajo equilibrio β . . 87

6. Superconductividad de Color 94
6.1. Modelo NJL con superconductividad de color en presencia de campo magnético 94
6.2. Comportamiento del modelo en función de los parámetros 99
6.3. Convergencia de la integral R_2 105

7. Conclusiones 108

Capítulo 1

Introducción

La teoría que describe las interacciones fuertes en el marco del Modelo Estándar es conocida como cromodinámica cuántica (*QCD*, por *Quantum Chromodynamics*, en inglés) y fue establecida como tal hace varias décadas, reconociendo a los quarks como constituyentes primarios de la materia hadrónica y a los gluones como los mediadores de la interacción [1, 2, 3]. En esta formulación, tanto los quarks como los gluones poseen una variable dinámica, conocida como "carga de color", la cual es análoga a la carga eléctrica de la electrodinámica, y que es la responsable de las interacciones fuertes. Uno de los objetivos de *QCD* es describir adecuadamente cómo los quarks y los gluones interactúan para formar los estados ligados que conforman la materia hadrónica, los cuales pueden básicamente clasificarse en bariones y mesones. La experiencia indica que en condiciones ordinarias de temperatura y densidad, se da lugar al fenómeno conocido como confinamiento, en el cual los quarks y los gluones sólo pueden formar tales estados ligados. Este fenómeno es atribuido al hecho de que las variables de color deben necesariamente acomodarse en estados conocidos como "singletes", cuya carga neta de color es nula y que requieren de más de un quark o antiquark para formarse. Sin embargo, poco después del advenimiento de *QCD*, se conjeturó que a temperaturas y/o densidades suficientemente elevadas pueden formarse estados de materia conocidos con el nombre genérico de plasma de quarks y gluones (*QGP*) [4, 5], que se encuentran caracterizados por el deconfinamiento de color. Esto motivó el estudio teórico de las fases posibles de *QCD* en tales condiciones extremas y reveló una estructura de fases potencialmente compleja, tal como puede verse en la fig.1.1 [6], y cuyo estudio continúa presentando hasta el día de hoy un desafío tanto teórico como experimental [7, 8, 9].

Para poder caracterizar apropiadamente las distintas fases posibles, es necesario estudiar las propiedades de simetría ante grupos de transformaciones unitarias que actúan sobre los grados de libertad internos de la teoría. En lo que respecta a la variable de color, *QCD* es por construcción invariante ante el grupo conocido como $SU(3)$. Por otro lado, también son de importancia las propiedades de simetría ante

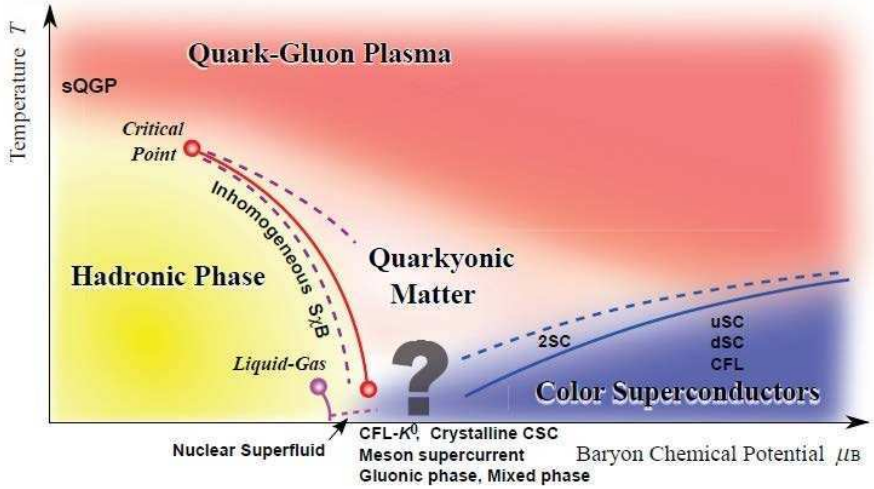

Figura 1.1: Diagrama de fases de QCD.

transformaciones en el espacio de sabor. El Lagrangiano de QCD está construido de manera de ser aproximadamente simétrico ante los grupos $SU(2)$ de isospín y $SU(2)$ axial en el sector de quarks livianos. Sin embargo, en el estado de vacío de QCD, la segunda de estas se rompe debido a las interacciones, pudiendo caracterizarse la fase correspondiente mediante parámetros de orden como el condensado quiral, el cual está relacionado con la generación dinámica de masa. De hecho, la ruptura de simetría axial de QCD es la responsable de la mayor parte de la masa de los nucleones. Estos efectos dinámicos son de importancia en el estudio del diagrama de fases de QCD, ya que existen indicios de que esta simetría se encuentra restaurada en la fase QGP. Además, las evidencias experimentales y teóricas conducen a suponer que las transiciones de fase de deconfinamiento y de restauración de simetría quiral ocurren en forma prácticamente simultánea a densidades bajas, y que el pasaje de una fase a otra es a través de una transición suave del tipo *crossover* [10, 11]. Sin embargo, el mecanismo exacto que da lugar a esta transición simultánea aún no es comprendido en forma cuantitativa.

Es importante destacar que las condiciones extremas en las que se forma el plasma de quarks y gluones son difíciles de producir, dejando así pocas situaciones físicas para su estudio experimental. Uno de los escenarios naturales donde se cree que se realizan fases deconfinadas de QCD se encuentra en los núcleos de las denominadas estrellas compactas [12], que corresponden a la región de altas densidades y bajas temperaturas en el diagrama de fases. Las estrellas compactas son objetos extremadamente estables y densos, que constituyen uno de los posibles escenarios finales en el ciclo de vida de una estrella. Al producirse una supernova, se eyecta al espacio gran parte de la materia que constituye la estrella y su núcleo se

comprime fuertemente. El remanente de dicha explosión puede convertirse en una estrella compacta cuando la masa del objeto se encuentra por debajo del límite de Chandrasekhar. En esta etapa de su ciclo de vida, ya no se producen reacciones de fusión y la fuerza gravitatoria es equilibrada por una presión de origen cuántico debida al principio de exclusión de Pauli. Las estrellas compactas pueden contener una masa de aproximadamente 1.5 M_{solar} en un radio de 10 km, lo cual se corresponde con una densidad de aproximadamente $1-10\ \rho_0$, donde $\rho_0 = 2.5\ 10^{14}\ g\ cm^{-3}$ es la densidad de saturación nuclear, lo suficientemente grande como para formar estados alternativos a la fase hadrónica. De hecho, de acuerdo a cálculos teóricos realizados en el régimen de densidades asintóticamente altas, es posible que exista una familia de fases denominadas "superconductoras de color" [13, 14]. El fenómeno subyacente es similar a aquel que ocurre en la superconductividad ordinaria, en donde el intercambio de fonones entre electrones produce una atracción que favorece la formación de pares de Cooper [15, 16, 17]. En *QCD*, hay canales de interacción atractivos entre gluones que son responsables de la formación de pares de diquarks análogos, los cuales de hecho rompen en forma dinámica la simetría SU(3) de color. Se ha demostrado que debido a efectos no perturbativos, el condensado de diquarks puede ser lo suficientemente grande como para existir hasta temperaturas de aproximadamente $T_c = 60$ MeV, valor crítico que se encuentra por encima del rango de $1-10$ MeV estimado para los núcleos de estrellas compactas [18]. En lo que respecta a la observación de las estrellas para caracterizar las posibles fases en sus interiores, un estudio posible consiste de construir curvas de radio-masa a partir de las ecuaciones de estado y modelos de estructura estelar, para luego contrastar estas con las masas y radios observados [19, 20]. Por otra parte, los períodos de rotación de las estrellas y sus variaciones en el tiempo también pueden brindar información acerca de las propiedades microscópicas de la materia que compone el interior estelar [21], mientras que el estudio de las curvas de enfriamiento también puede relacionarse con propiedades como la emisividad de neutrinos y el calor específico de las fases [22].

Por otro lado, en las últimas décadas se llevó a cabo la construcción de varios aceleradores de iones pesados, en los cuales se realizan experimentos para alcanzar las fases correspondientes a temperaturas altas en el diagrama de fases de *QCD*. Entre estos se encuentran el Colisionador de Iones pesados Relativistas (RHIC), en Brookhaven, EEUU, el Centro para Colisión de Iones Nuclotrón (NICA) en Dubna, Rusia y el Centro para la investigación de antiprotones e iones (FAIR, aún en construcción), en Hesse, Alemania. También, los experimentos, ALICE, ATLAS y CMS son llevados a cabo en el Gran Colisionador de Hadrones del CERN (LHC) en Geneva, Suiza [23]. En este tipo de aceleradores, el objetivo es colisionar iones pesados como plomo, plata u oro a energías de centro de masa del orden de $100-200$ GeV o más. Durante el proceso de colisión se alcanzan temperaturas extremadamente

altas, por encima de la temperatura crítica de deconfinamiento, $T_c \simeq 170$ MeV [24]. Los resultados actuales sugieren que el *QGP* ha logrado formarse [25, 26] durante períodos de tiempo del orden de 10 fm/c, incluso exhibiendo propiedades de equilibrio termodinámico a pesar de su corta duración, además dando evidencias que confirman la hipótesis de que la transición de fase entre las fases hadrónica y *QGP* es del tipo *crossover*. Es importante destacar que las condiciones producidas en aceleradores de iones pesados corresponden esencialmente al eje vertical del diagrama de fases. Si bien en el FAIR se espera que se puedan alcanzar densidades algo mayores, los efectos de densidad finita más relevantes están aún lejos de observarse en este tipo de experimentos, relegando la posibilidad de observar fases densas al estudio de estrellas compactas.

Respecto a la resolución misma de la teoría, es importante destacar que si bien *QCD* se encuentra firmemente establecida como la teoría de las interacciones fuertes, esta presenta serias complicaciones al momento de realizar cálculos en el rango de bajas energías. Esta dificultad se debe al hecho de que la constante de acoplamiento de la teoría se vuelve grande para escalas de energía debajo de 1 GeV [27], imposibilitando el uso de métodos perturbativos como herramienta de estudio. Dado que las energías de ligadura de los hadrones se encuentran por debajo de este umbral, muchos de los problemas que requieren tratar propiedades hadrónicas, entre ellos la estructura de fases de *QCD* y el fenómeno de deconfinamiento, deben estudiarse mediante técnicas no perturbativas. Una de las maneras posibles de encarar el estudio de *QCD* a bajas energías consiste de desarrollar modelos efectivos. Un modelo efectivo es uno que constituye una simplificación de la teoría completa de modo de permitir su resolución, pero a su vez contiene en su formulación ciertos ingredientes básicos de la teoría original que permiten reproducir aspectos específicos y realizar predicciones cuantitativas de interés. Entre los varios modelos posibles se encuentran el *MIT Bag model* [28], el modelo sigma lineal [29] y el que se usará como punto de partida en esta tesis, el modelo de Nambu Jona-Lasinio (NJL). Este fue desarrollado en los años '60 [30] para estudiar las interacciones entre nucleones, con el propósito de explicar en forma unificada las grandes masas de los bariones y las masas intermedias o pequeñas de los mesones a partir de las propiedades de simetría de isospín que exhiben las interacciones nucleares. En la formulación del modelo, el Lagrangiano es invariante ante las transformaciones correspondientes de los grados de libertad de sabor, pero dicha invariancia se rompe debido a los efectos de las interacciones. Este mecanismo produce que los campos fundamentales adquieran masas dinámicas, dando lugar también a bosones de Goldstone, los cuales son identificados con los piones. Ahora bien, este modelo fue dejado de lado poco después de que se desarrolló, cuando los quarks fueron reconocidos como los componentes elementales de la materia en lugar de los protones y neutrones. Sin embargo, varios años después se lo volvió a tener en consideración, reinterpretándolo como

una teoría efectiva para las interacciones entre quarks [31, 32]. En su forma más sencilla, el Lagrangiano del modelo de NJL contiene términos locales de interacción escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial entre quarks, que son los que reproducen la dinámica de ruptura de simetría quiral de *QCD*. Entre los usos del modelo se encuentra el estudio de la respuesta de materia de quarks a efectos de temperatura, potencial químico y campo magnético. Para descripciones más detalladas de la dinámica a bajas energías, el modelo también puede extenderse para incluir interacciones más generales que respetan las simetrías de sabor. El desarrollo de este modelo fue hecho sin tener en cuenta el fenómeno de confinamiento, dado que fue originalmente construido para describir propiedades de nucleones, que no exhiben dicha característica. Por lo tanto, la ausencia de confinamiento es en principio una limitación importante de la teoría. Sin embargo, en tanto se traten cantidades que no son sensibles a las propiedades de confinamiento y se centre la atención sobre las propiedades de simetría quiral, se pueden hacer cálculos confiables dentro de este modelo. Por otra parte, este defecto de la teoría puede remediarse parcialmente introduciendo una variable dinámica conocida como "*loop de Polyakov*" (o lazo de Polyakov) [33, 34, 35], la cual es tratada como un campo de fondo que da cuenta de grados de libertad gluónicos que pueden reproducir la transición de deconfinamiento.

Una técnica alternativa de primeros principios que ha sido desarrollada en las últimas décadas y que ha progresado notablemente es la que se conoce como "*Lattice QCD*" (*LQCD*) o *QCD* en red, en la cual las ecuaciones de *QCD* se resuelven numéricamente en forma explícita en un espacio-tiempo discretizado [36]. Desde el punto de vista del costo computacional, este es un problema formidable que requiere de computadoras extremadamente poderosas, pero en los últimos años se han logrado grandes avances que permitieron el cálculo de masas hadrónicas, constantes de decaimiento, espín y otras cantidades. Estudios de los efectos a temperatura finita también han sido realizados, los cuales nuevamente apoyan la idea de que el *crossover* quiral ocurre junto con la transición de deconfinamiento [10, 11] en el eje vertical del diagrama de fases. Sin embargo, la técnica de *LQCD* se ve envuelta en sus propias dificultades. Una de ellas tiene que ver con que al discretizar la teoría, la cantidad de puntos en la grilla usada no puede ser demasiado alta puesto que el problema se vuelve intratable numéricamente. Por otro lado, todavía resulta dificultoso hacer cálculos confiables usando las masas de quarks livianos, con lo cual se debe trabajar con valores por encima de los considerados realistas para luego extraer conclusiones basadas en la extrapolación, complementando esto con el uso de modelos efectivos. Una limitación más fundamental aparece al intentar estudiar *LQCD* a densidades finitas, debido al hecho de que las funciones de peso usadas para el muestreo estadístico se vuelven imaginarias [37]. Este es llamado el "problema del signo" e impide realizar cálculos para valores grandes de μ/T. Se han desarrollado

varios métodos para tratar de superar esta complicación, pero la región de altas densidades y temperaturas bajas como la que puede esperarse en núcleos estelares, aún está lejos de poder ser analizada con este tipo de técnicas.

En este marco, el objetivo de esta tesis es estudiar el efecto de campos magnéticos intensos sobre el comportamiento de materia fuertemente interactuante a densidad finita. Estudios de este tipo se encuentran motivados por el hecho de que existen indicios claros de que tanto en las colisiones de iones pesados como en los núcleos de estrellas compactas se producen campos magnéticos extremadamente elevados. Por ejemplo, en el RHIC, en una colisión típica, los campos magnéticos pueden alcanzar los 10^{19}G $= 0.06$ GeV^2 [38, 39] en la región central. En estrellas compactas, por otra parte, los campos magnéticos pueden ser tan grandes como 10^{15} G [40] en su superficie, y alcanzar valores en el rango de $10^{18} - 10^{20}$ G en el núcleo [41, 42, 43], aunque las estimaciones para este último son dependientes del modelo utilizado. Por ello, es interesante estudiar cuales podrían ser los efectos de campos magnéticos intensos sobre la materia de quarks, y en particular saber si el diagrama de fases sufre modificaciones considerables. Uno de los efectos más discutidos es el de "catálisis magnética" [44]. En su manifestación más básica, se refiere a la estabilización del condensado quiral en la fase hadrónica al aplicar un campo magnético externo. La interpretación básica del fenómeno es que dicho campo favorece el antialineamiento de los espines del quark y el antiquark que están correlacionados en un condensado. Si bien la realización de este fenómeno en la fase de vacío se encuentra relativamente comprendida, a temperatura finita y densidades bajas existen comportamientos más difíciles de explicar en forma cualitativa. De hecho, existen cálculos realizados mediante *QCD* en red, donde se observa que a temperaturas intermedias, del orden de 150 MeV, el condensado quiral disminuye con el campo, contrariamente a lo esperado. Esto a su vez trae aparejada una disminución de la temperatura crítica en dicha región. Este comportamiento, conocido como "catálisis magnética inversa" [45], es difícil de reproducir mediante modelos efectivos y, en particular, modelos como el de NJL predicen la tendencia exactamente contraria, es decir, un aumento de la temperatura crítica con el campo magnético [44, 46, 47]. A densidad finita y temperaturas bajas, por otro lado, existe otra manifestación del fenómeno de catálisis inversa, el cual está asociado a la disminución del potencial químico crítico como función del campo magnético.

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera: En el capítulo 2, se discutirán las propiedades básicas de *QCD* relevantes a la construcción de los modelos efectivos que serán utilizados. Se presentará el modelo de Nambu Jona-Lasinio en su versión básica, detallando el cálculo del parámetro de orden y propiedades mesónicas, para luego realizar las extensiones correspondientes del modelo para su estudio a densidades finitas y con interacciones generalizadas. El capítulo 3 se concentra en la extensión que se debe realizar al modelo para incluir campos magnéticos. En

una primera instancia, se incorpora dicho campo al Lagrangiano NJL, para después realizar el cálculo del determinante fermiónico correspondiente a la acción en la aproximación de campo medio. Luego, se discutirán distintas alternativas para regularizar el modelo NJL, donde compararemos los resultados de prescripciones existentes en la literatura con aquellos obtenidos mediante la llamada "Regularización independiente del campo magnético" que introduciremos en este trabajo. En el capítulo 4, se presentarán los resultados correspondientes al modelo NJL a campo magnético y potencial químico finito, donde se hará un estudio exhaustivo del comportamiento del modelo en función de los parámetros. En el capítulo 5, se presentan los resultados correspondientes a interacciones generalizadas, donde se tienen en cuenta canales de interacción con mezcla de sabor y también de naturaleza vectorial. Además, se tendrán en consideración las condiciones de equilibrio β y neutralidad de carga relevantes al estudio de estrellas compactas. En el capítulo 6, se realizarán los estudios correspondientes al fenómeno de superconductividad de color bajo efectos de campos magnéticos y en el capítulo 7, finalmente, se presentarán las conclusiones de estos estudios.

Capítulo 2

Formalismo

En este capítulo se presentará el formalismo necesario para el estudio del diagrama de fases de materia de quarks a densidad finita, en el marco de modelos del tipo Nambu-Jona-Lasinio (NJL). Las propiedades de transformación del Lagrangiano de *QCD* ante el grupo unitario de sabor son la base de estos modelos, los cuales se construyen con el objetivo de reproducir ciertas características esenciales de la cromodinámica cuántica, en particular el efecto de ruptura de simetría quiral. Por lo tanto, es necesario realizar una breve descripción de los aspectos más generales de esta teoría, haciendo especial énfasis en la descripción de dichas propiedades. Luego introduciremos el modelo de NJL, detallando en particular los efectos dinámicos que conducen al mecanismo de ruptura de simetría quiral y su subsiguiente restauración en diferentes condiciones posibles. Finalmente, presentaremos las extensiones necesarias para estudiar propiedades termodinámicas y para describir efectos dinámicos más generales.

2.1. Aspectos generales de QCD

A nivel fundamental, la cromodinámica cuántica se formula en términos de campos de fermiones que representan a los quarks y campos de bosones de *gauge* para los gluones. El Lagrangiano que describe la dinámica de estos campos junto con sus interacciones es [3]:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_g, \tag{2.1}$$

donde cada uno de estos términos está dado por:

$$\mathcal{L}_q = \bar{\psi}\ i\gamma_\mu D^\mu\ \psi \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_m = -\bar{\psi}\ \hat{m}\ \psi \tag{2.3}$$

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{4}\ G_a^{\mu\nu} G^a_{\mu\nu}, \tag{2.4}$$

donde hemos definido la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + i\ g\ \lambda^a A^a_\mu, \tag{2.5}$$

y además

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\ f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{2.6}$$

El campo ψ representa los estados de quarks, el cual incluye los correspondientes grados de libertad internos de color y de sabor. Los 3 estados de color (denominados *r, g* y *b*) y los estados de sabor, que son 6 en la teoría completa de *QCD* (*u, d, s, c, b* y *t*), se introducen mediante un producto tensorial, resultando en 18 espinores. La matriz de masas en el espacio de sabor está dada por $\hat{m} = diag(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t)$, con $m_u \simeq m_d$. Mientras tanto, g es la constante de acoplamiento de *QCD*, A^μ_a, con $a = 1, ..., 8$, es el conjunto de campos vectoriales no masivos asociados a los gluones y λ_a es el conjunto de matrices de Gell-Mann, que satisfacen las siguientes relaciones:

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \tag{2.7}$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura completamente antisimétricas de $SU(3)$ y

$$tr(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}. \tag{2.8}$$

La parte del Lagrangiano dada por los términos

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - \hat{m})\psi \tag{2.9}$$

corresponde al Lagrangiano de Dirac y, en ausencia de los demás términos, describe la propagación de quarks libres. Este término es invariante ante el grupo $SU(3)_c$, dado por el conjunto de matrices unitarias de determinante 1 que actúan en el espacio de color. Los estados de quarks transforman de acuerdo a la representación fundamental de este grupo, la cual es de dimensión 3. En dicha representación, los generadores son las matrices de Gell-Mann, en términos de las cuales podemos escribir una transformación arbitraria del grupo de la siguiente manera:

$$U = \exp\left(i\lambda_a \theta_a\right), \tag{2.10}$$

donde los θ_a son los correspondientes parámetros asociados a los generadores. Ahora bien, el Lagrangiano completo de QCD se construye partiendo del Lagrangiano de Dirac y requiriendo que el mismo sea invariante ante transformaciones locales de $SU(3)_c$ en lugar de globales. Es decir, en cada punto del espacio se efectúa una transformación independiente, convirtiéndose los parámetros θ_a en funciones de las coordenadas. Dado que la derivada en $\mathcal{L}_D$ también actúa sobre dichas funciones, este término no será invariante ante estas transformaciones más generales, por lo que es necesario introducir en la teoría un conjunto de campos que transformen

adecuadamente de modo de cancelar los términos adicionales que se producen. Esto puede lograrse reemplazando la derivada parcial por la derivada covariante definida en (2.5), con lo que se obtiene el término $\mathcal{L}_q$ en (2.1). Se debe incorporar un campo por cada generador del grupo de simetría, resultando en los 8 estados de gluones, que pertenecen a la representación regular de $SU(3)_c$. De esta forma, también se introduce el acoplamiento entre el sector de gluones y el de quarks. A su vez, al realizar una transformación sobre los campos de quarks, los A_a^μ deben transformar conjuntamente de acuerdo a:

$$A_\mu^a \longrightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g}\,\partial_\mu\theta_a - f_{abc}\;\theta_b\;A_\mu^c, \tag{2.11}$$

con lo cual el término

$$\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi \tag{2.12}$$

resulta invariante. Finalmente, también debe introducirse un término de gauge puro que describa la dinámica propia de los campos de gluones en ausencia de quarks. El término $\mathcal{L}_g$ se incorpora construyendo un invariante ante los grupos de Lorentz y de color a partir del tensor de campo $G_{\mu\nu}^a$, lo cual se realiza en forma similar al caso de *QED*. Sin embargo, las propiedades de transformación de los campos $A_{\mu\nu}^a$ ante el grupo $SU(3)_c$ local conducen a que también deba incluirse el término $gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$ en (2.6) para que $\mathcal{L}_g$ resulte invariante. Por lo tanto, este contiene, además del término de propagación (correspondiente al producto de los primeros dos términos en $G_{\mu\nu}^a$ y análogos al caso de electromagnetismo), dos términos más que acoplan a los gluones entre sí a través de vértices de tres y de cuatro líneas.

Una de las principales consecuencias de la presencia de los términos de autointeracción en $\mathcal{L}_g$ refiere al comportamiento de la constante de acoplamiento en función del impulso transferido Q. Es sabido que al estudiar un proceso cualquiera en una teoría de Gauge renormalizable, la inclusión de sucesivos diagramas de Feynman que se presentan en un desarrollo en serie puede reestructurarse de modo de expresar el resultado final en términos de una constante de acoplamiento "vestida" que depende de Q. Como consecuencia, la interacción tendrá comportamientos distintos según la escala de energía que se estudie, donde la dependencia funcional exacta estará determinada por los detalles de las interacciones en consideración. En el caso particular de *QCD*, la constante de acoplamiento está dada, a un lazo, por:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{g^2(Q^2)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - \frac{2}{3}N_f)\ln\left(Q^2/\Lambda_{QCD}^2\right)}, \tag{2.13}$$

donde N_f es el número de sabores tenidos en cuenta y Λ_{QCD} es el parámetro de escala de la teoría, que puede determinarse ajustando a datos experimentales para Q^2 grande, dando un valor alrededor de $\Lambda_{QCD} \simeq 200$ MeV. Como puede verse

a partir de esta expresión, la constante de acoplamiento tiende a cero cuando el impulso transferido tiende a infinito. Esta propiedad, conocida con el nombre de libertad asintótica, permite estudiar procesos de altas energías mediante teoría de perturbaciones. Por otro lado, para impulsos transferidos pequeños, y en particular por debajo de Λ_{QCD}, la constante de acoplamiento es mayor que uno, por lo cual no es útil como parámetro de expansión en un desarrollo en serie. Ahora bien, dado que las escalas de energía de ligadura de los hadrones se encuentran por debajo de este umbral, el estudio de la mayoría de las propiedades hadrónicas debe tratarse mediante métodos alternativos de naturaleza no perturbativa. El propio mecanismo de confinamiento es una de estas propiedades, para el cual no existe aún una explicación cuantitativa satisfactoria. Entre los métodos a los que se puede recurrir para el estudio de la cromodinámica cuántica a bajas energías, se encuentra el desarrollo de modelos efectivos que se tratarán en este trabajo.

También es importante tener en consideración que, como consecuencia del fenómeno de confinamiento en la fase de vacío, las masas de los quarks no son observables físicos. Por esta razón, cuando las masas corrientes de los quarks son usadas como parámetros de entrada, sus valores están sujetos a un margen de variabilidad debido a que dependen de la escala de renormalización de la teoría. La determinación de las masas corrientes de los quarks con cierto grado de precisión puede de hecho realizarse mediante modelos efectivos resultando en cantidades dependientes de la escala. A partir de estos, se concluye que los quarks u, d y s son sabores livianos, encontrándose sus masas muy por debajo de Λ_{QCD}. Este subespacio de estados es el relevante para las aplicaciones que trataremos en esta tesis, dado que los diagramas de fases para materia fuertemente interactuante suelen limitarse a rangos de temperatura y potencial químico por debajo de 500 MeV.

2.2. Propiedades de las transformaciones en espacio de sabor

En esta sección estudiamos las propiedades del Lagrangiano de QCD ante transformaciones en el espacio de sabor de los quarks, haciendo especial énfasis en el grupos de matrices unitarias especiales conocido como $SU(N_f)$, donde N_f es la cantidad de sabores en consideración. En lo que respecta a la acción de dichas transformaciones sobre el Lagrangiano de QCD dado en (2.1), se tiene que el término $\mathcal{L}_q$ es invariante, mientras que $\mathcal{L}_g$ no se ve modificado, dado que las transformaciones globales no actúan sobre los campos de gluones. El único término que puede no ser invariante es $\mathcal{L}_m$, cuyo grado de simetría está determinado por la elección de los componentes de $\hat{m}$. Este término no es invariante ante transformaciones unitarias arbitrarias en el espacio completo de sabor, en virtud de las grandes diferencias

entre las masas de las distintas especies de quarks. Sin embargo, si nos restringimos al subespacio de sabores livianos existen ciertas simetrías que se satisfacen en forma aproximada. Además, dado que en el rango de potenciales químicos de interés los efectos del quark s pueden tratarse como correcciones, en este trabajo nos concentraremos solamente en el subespacio de sabores u y d, cuyas masas se encuentran en el rango $4-10$ MeV, aunque las propiedades de simetría aquí discutidas pueden generalizarse al caso de tres sabores también.

En el sector de quarks livianos, se suele usar el límite quiral como punto de partida para el estudio de las simetrías de sabor. Dicho límite consiste de tomar $\hat{m}=0$, resultando en el caso más simétrico posible. En este caso, podemos reescribir el Lagrangiano en términos de campos de quarks con quiralidad bien definida, los cuales se pueden construir adecuadamente si escribimos:

$$\psi_L = \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\ \psi \qquad \psi_R = \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\ \psi, \tag{2.14}$$

donde γ_5 es el operador de quiralidad. En esta base, el Lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\hat{m}=0} = \bar{\psi}_L\gamma^\mu D_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma^\mu D_\mu\psi_R + \mathcal{L}_{gauge} \tag{2.15}$$

donde, como vemos, $\mathcal{L}_q$ en (2.2) se descompone en dos subespacios ortogonales $left$ y $right$, que además se encuentran desacoplados entre sí. El Lagrangiano resulta entonces invariante ante el grupo producto de transformaciones $U(2)_R \otimes U(2)_L$ dado por:

$$U(2)_R : \psi_R \longrightarrow \exp(i\theta_a^R\tau_a)\ \psi_R \qquad U(2)_L : \psi_L \longrightarrow \exp(i\theta_a^L\tau_a)\ \psi_L, \tag{2.16}$$

donde cada una de estas actúa independientemente sobre el subespacio correspondiente, rotando los estados en el espacio de isospín. Aquí, τ_0 es la matriz identidad en espacio de sabor, mientras que τ_k, con $k=1,2,3$, es el conjunto de matrices de Pauli y $\theta_a^{L,R}$ son los ángulos que parametrizan dicha transformación. En virtud del teorema de Noether, la invariancia del Lagrangiano ante estas transformaciones conduce a las siguientes corrientes conservadas:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_{R,a}^\mu &= 0 \qquad & j_{R,a}^\mu &= \bar{\psi}_R(x)\gamma^\mu\tau_a\psi_R(x), \\ \partial_\mu j_{L,a}^\mu &= 0 \qquad & j_{L,a}^\mu &= \bar{\psi}_L(x)\gamma^\mu\tau_a\psi_L(x), \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde los correspondientes operadores de carga se obtienen integrando el componente $\mu=0$ de la corriente en las coordenadas espaciales:

$$Q_a^R = \int d^3x\ \psi_R^+(x)\tau_a\psi_R(x) \qquad Q_a^L = \int d^3x\ \psi_L^+(x)\tau_a\psi_L(x). \tag{2.18}$$

Al ser operadores de simetría, los mismos conmutan con el Hamiltoniano, por lo cual existe una base de autoestados con número de ocupación de estados de quiralidad bien definida. Los operadores de carga satisfacen las mismas relaciones de

conmutación que los generadores del grupo y actúan como generadores de las transformaciones.

Por otro lado, si consideramos una matriz arbitraria perteneciente a alguna de las transformaciones de (2.16) notamos que, como el generador τ_0 conmuta con los restantes generadores, podemos escribir

$$\exp(i\theta_a\tau_a) = \exp(i\theta_0\tau_0)\exp(i\theta_k\tau_k). \tag{2.19}$$

Dado que los generadores τ_k son de traza nula, el segundo factor tiene determinante 1, correspondiendo este al grupo $SU(2)$, mientras que el término asociado a $a = 0$ corresponde a $U(1)$, que es proporcional a la identidad y por lo tanto multiplica a los estados u y d por la misma fase. Por lo tanto, podemos escribir:

$$U(2)_L \otimes U(2)_R = U(1)_L \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_R \otimes SU(2)_R. \tag{2.20}$$

Teniendo en cuenta esto, pasamos a considerar el caso algo más realista en el que $m_u = m_d = m_c \neq 0$, donde el término $\mathcal{L}_m$ es distinto de cero y toma la forma:

$$\mathcal{L}_m = -m_c\bar{\psi}\psi = -m_c(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \tag{2.21}$$

Por lo tanto, los subespacios $left$ y $right$ quedan acoplados mediante el término de masas, con lo cual no se pueden realizar sobre ellos transformaciones independientes que sean simétricas. Sin embargo, este término continúa siendo simétrico ante una transformación conjunta en la cual los estados $left$ y $right$ son rotados en el mismo ángulo, la cual corresponde al grupo $SU(2)_V$. De hecho, podemos escribir:

$$SU(2)_L \otimes SU(2)_R = SU(2)_V \otimes SU(2)_A, \tag{2.22}$$

donde

$$SU(2)_V : \psi \longrightarrow \exp(i\theta_a^V\tau_a)\psi \qquad SU(2)_A : \psi \longrightarrow \exp(i\theta_a^A\gamma_5\tau_a)\psi. \tag{2.23}$$

El primer grupo corresponde a transformaciones de carácter vectorial en el espacio de isospín, mientras que el segundo grupo corresponde a transformaciones axiales, las cuales alteran la paridad de un estado dado. Las corrientes asociadas, en términos de las corrientes $left$ y $right$, son:

$$V_a^\mu = j_{R,a}^\mu + j_{L,a}^\mu \qquad A_a^\mu = j_{R,a}^\mu - j_{L,a}^\mu. \tag{2.24}$$

La introducción del término de masa reduce la simetría de la siguiente manera:

$$SU(2)_V \otimes SU(2)_A \longrightarrow SU(2)_V, \tag{2.25}$$

por lo cual la corriente vectorial se encontrará conservada:

$$\partial_\mu V_a^\mu = 0 \qquad V_a^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\tau_a\psi(x), \tag{2.26}$$

mientras que la corriente axial tendrá una cuadridivergencia no nula dada por:

$$\partial_\mu A_a^\mu = 2i\bar{\psi}(x)\{\hat{m}, \tau_a\}\gamma_5\psi(x) \qquad A_a^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\tau_a\psi(x), \tag{2.27}$$

donde la ruptura de simetría es pequeña en virtud de las masas corrientes pequeñas y, por supuesto, la conservación de esta corriente se recupera tomando el límite quiral. Es importante notar que tomando $m_u \neq m_d$ se dará lugar a una ruptura explícita del grupo $SU(2)_V$ también. Las masas del quark u y d suelen tomarse iguales a pesar de que existen estimaciones según las cuales estas cantidades son diferentes [48]. En este trabajo tomaremos siempre $m_u = m_d$. Sin embargo, la inclusión de campo magnético o potencial químico rompe la simetría de manera explícita.

Finalmente, las transformaciones de los grupos $U(1)_V$ y $U(1)_A$ están dadas por:

$$U(1)_V = \exp(i\theta) \qquad U(1)_A = \exp(i\gamma_5\theta). \tag{2.28}$$

La primera de estas está asociada a la conservación del número bariónico, mientras que la segunda, si bien es una simetría del Lagrangiano clásico, no se mantiene al cuantizar la teoría, dado que la medida de integración en la integral de caminos correspondiente no es invariante ante dicha transformación. Este fenómeno es conocido como anomalía axial [49].

Cuando se considera una simetría exacta del Lagrangiano, como ocurre en el límite quiral de QCD, existen distintas realizaciones posibles en lo que respecta al espectro de estados. En el modo de Wigner-Weyl, la simetría del estado de vacío es la misma que la del Lagrangiano. En este caso, el vacío no se encuentra degenerado y de hecho transforma de acuerdo a la representación trivial del grupo, por lo que el mismo es aniquilado por los operadores de carga asociados a la simetría. Por otro lado, en la realización de Goldstone, el estado fundamental se ve modificado por las interacciones, de modo que la simetría se mantiene ante a lo sumo un subconjunto de los operadores del grupo original. Los restantes generadores ya no aniquilan el vacío, sino que crean excitaciones no masivas que se encuentran degeneradas con el fundamental, y son conocidas como bosones de Goldstone.

Ahora bien, en el caso de QCD, las masas corrientes de los quarks u y d se encuentran en el orden de la decena del MeV y son aproximadamente iguales, por lo cual es de esperar en principio que la simetría quiral $SU(2)_A \otimes SU(2)_V$ se encuentre aproximadamente conservada. En lo que respecta al grupo $SU(2)_V$, la simetría efectivamente se realiza a un grado bueno de aproximación, lo cual es evidenciado por la degeneración en las masas de los multipletes de isospín bariónicos y mesónicos y la existencia de corrientes conservadas aproximadas en procesos dominados por la interacción fuerte. Por otra parte, la evidencia experimental y teórica indica que la simetría $SU(2)_A$ se realiza en el modo de Goldstone. Dado que el operador de carga Q_A cambia la paridad de los estados, la realización de esta simetría en

el modo de Wigner-Weyl implicaría por cada multiplete de isospín la existencia de otro multiplete degenerado con paridad opuesta, lo cual no es observado en la naturaleza. Además, las masas hadrónicas se encuentran muy por encima de las masas corrientes de los quarks livianos, sugiriendo la existencia de un mecanismo dinámico de generación de masa, lo cual a su vez genera la ruptura de la simetría. Estas observaciones sugieren que una formulación adecuada de QCD se obtiene partiendo de un Lagrangiano aproximadamente simétrico ante $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$, donde la simetría axial se rompe en forma dinámica. En este marco, los operadores Q_A de la simetría rota crean un triplete de isospín de bosones de Goldstone, por lo cual pueden identificarse con los piones. Además, dado que los mismos son no masivos, el hecho de que los componentes del triplete piónico tengan masa excepcionalmente baja en relación a otros hadrones ($m_\pi/m_N \simeq 0.15$) sostiene la idea de que los piones son bosones de Goldstone, cuya masa no nula se origina en la leve ruptura explícita de simetría producida por las masas corrientes.

La ruptura de simetría del estado de vacío de QCD y la subsiguiente generación de masa dinámica se encuentra estrechamente relacionada con la existencia de condensados no nulos formados a partir de productos bilineales de campos de quarks y de gluones. Entre ellos se encuentra el condensado quiral, definido como el valor de expectación en el vacío $<\bar{\psi}\psi>$, el cual puede expresarse como:

$$<\bar{\psi}\psi>= -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr S(p), \tag{2.29}$$

donde $S(p)$ es el propagador de quarks del Lagrangiano completo de QCD, y la traza se toma en espacio de color, sabor y Dirac. El operador $\bar{\psi}\psi$ no es invariante ante transformaciones $SU(2)_A$, por lo cual un valor medio no nulo del mismo indica que el vacío de QCD se realiza en el modo de Goldstone de dicha simetría. Las estimaciones teóricas presentes para el condensado quiral sugieren que esto es efectivamente así. Por ejemplo, según cálculos basados en el álgebra de corrientes y las reglas de suma de QCD se tiene que $| < \bar{f}f > |^{1/3} = 190 - 260$ MeV [50], donde f representa al sabor u o al d. Mientras tanto, cálculos típicos realizados en $LQCD$ dan valores alrededor de $| < \bar{f}f > |^{1/3} = 231 \pm 8 \pm 6$ MeV [51]. En una teoría efectiva formulada en términos de grados de libertad de quarks, también pueden ser relevantes otros condensados asociados a operadores bilineales más generales, de la forma $< \bar{\psi}\hat{\mathcal{O}}\psi >$. En particular, para $\mathcal{O} = i\vec{\tau}\gamma_5$, el valor medio no nulo de esta cantidad puede relacionarse con la presencia de piones.

2.3. Modelo de Nambu Jona-Lasinio

En esta tesis utilizaremos modelos efectivos del tipo Nambu Jona-Lasinio (NJL). En su forma más simple, dicho modelo se construye en base a un Lagrangiano cuya

forma para el caso de dos sabores en espacio euclídeo es:

$$\mathcal{L}_E(\psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int}, \tag{2.30}$$

donde

$$\mathcal{L}_{free} = \bar{\psi}(x)\left(-i\partial\!\!\!/ + m_c\right)\psi(x) \qquad \text{con} \qquad \psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

y

$$\mathcal{L}_{int} = -G\Big(j_S(x)j_S(x) + \vec{j}_P(x)\cdot\vec{j}_P(x)\Big), \tag{2.32}$$

con las corrientes definidas como

$$j_S(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad \text{y} \quad \vec{j}_P(x) = \bar{\psi}(x)i\vec{\tau}\gamma_5\psi(x). \tag{2.33}$$

En las ecs.(2.31,2.32), $\partial\!\!\!/ = \gamma_4\partial_4 + \vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}$, con $\gamma_4 = i\gamma_0$. Por otra parte, G es la constante de acoplamiento y m_c es la masa corriente de los quarks, parámetros que deberán ser ajustados utilizando observables físicos. En esta tesis asumiremos que ambos sabores tienen la misma masa corriente m_c, y se considerará tanto el caso de masa nula (límite quiral) como el más realista en que m_c es finito pero pequeño, provocando así una leve ruptura explícita de la simetría $SU(2)_A$. Debe notarse que $\mathcal{L}_{int}$ reemplaza las interacciones mediadas por gluones, los cuales se asume han sido removidos de la teoría mediante integración. Modelar las interacciones a través de vértices puntuales como hacemos aquí es equivalente a despreciar el rango de alcance de los gluones y considerar que las interacciones son de contacto. La corriente $j_S(x)$ es del tipo escalar-isoescalar (invariante de Lorentz e isospín), mientras que la $\vec{j}_P(x)$ es del tipo pseudoescalar-isovectorial. Los dos términos de interacción que se construyen a partir de las mismas son invariantes por separado ante transformaciones $SU(2)_V$. Sin embargo, esto no ocurre para el grupo $SU(2)_A$, ante el cual las corrientes transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} j_S &\longrightarrow j_S\cos\theta - \hat{j}_P\cdot\hat{\theta}\ \sin\theta \\ \vec{j}_P &\longrightarrow \vec{j}_P + j_S\sin\theta\ \hat{\theta} - \vec{j}_P\cdot\hat{\theta}\ (1-\cos\theta)\ \hat{\theta}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde $\vec{\theta} = \theta\ \hat{\theta}$ es el vector que determina la dirección y ángulo de rotación en el espacio de isospín. Si bien vemos que los términos no son invariantes por separado, la suma $j_S(x)j_S(x) + \vec{j}_P(x)\cdot\vec{j}_P(x)$ sí permanece invariante. De hecho, esta es la combinación más simple posible de términos de interacción que respeta simultáneamente las simetrías $SU(2)_V$ y $SU(2)_A$ de *QCD*. Más adelante se considerarán interacciones adicionales que dan lugar a una descripción más detallada de la dinámica a bajas energías y que siguen siendo invariantes ante transformaciones de sabor.

2.3.1. Formalismo de bosonización

Para tratar el modelo recurriremos en lo que sigue al formalismo de bosonización. El mismo permite reemplazar los grados de libertad de quarks, que no son observados a bajas energías, por campos mesónicos que representan las excitaciones físicas en dicho régimen. El punto de partida es la función generatriz asociada al Lagrangiano de NJL:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; e^{-\Gamma_E(\psi,\bar{\psi})}, \tag{2.35}$$

donde hemos definido la acción euclídea de la siguiente manera:

$$\Gamma_E(\psi,\bar{\psi}) = \int d^4x \; \mathcal{L}_E(\psi,\bar{\psi}). \tag{2.36}$$

Ahora bien, los términos de interacción definidos en (2.32) pueden reescribirse en términos de campos bosónicos que representarán los mesones escalares y pseudoescalares, $\sigma(x)$ y $\vec{\pi}(x)$, respectivamente. El tratamiento para cada término en $\mathcal{L}_{int}$ es equivalente por lo que sólo detallaremos el correspondiente al caso escalar. Usando la igualdad

$$f\Big(j_S(x)\Big) = \int \mathcal{D}S \; \delta\Big(S(x) - j_S(x)\Big) \; f\Big(S(x)\Big), \tag{2.37}$$

reescribimos dicho término de la siguiente manera:

$$\exp\left[G\int d^4x \; j_S(x)j_S(x)\right] = \int \mathcal{D}S \; \delta\Big(S(x)-j_S(x)\Big) \; \exp\left[G\int d^4x \, S(x)S(x)\right], \tag{2.38}$$

donde $S(x)$ es un campo auxiliar que luego será removido mediante integración. Luego, usando que:

$$\delta\Big(S(x) - j_S(x)\Big) = N_S \int \mathcal{D}\sigma \exp\left[\int d^4x \; \sigma(x)\Big(S(x) - j_S(x)\Big)\right], \tag{2.39}$$

la contribución a la acción del término de interacción escalar se reexpresa como:

$$\exp\left[G\int d^4x \; j_S(x)j_S(x)\right] = N_S \int \mathcal{D}S\mathcal{D}\sigma \exp\int d^4x \left[\sigma(x)\Big(S(x)-j_S(x)\Big)+G \; S(x)^2\right], \tag{2.40}$$

donde N_S es un factor de normalización. Repitiendo este procedimiento para el campo pseudoescalar se introduce un vector de campos $\vec{P}(x)$ análogo a $S(x)$, y la función de partición resulta:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} = {} & N_S N_P \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \; \exp\left[-\int d^4x \mathcal{L}_{free}\right] \\ & \times \int \mathcal{D}S\mathcal{D}\sigma \; \exp\left[\int d^4x \left(\sigma(x)\Big[S(x) - j_s(x)\Big] + G \; S(x)S(x)\right)\right] \\ & \times \int \mathcal{D}\vec{P}\mathcal{D}\vec{\pi} \; \exp\left[\int d^4x \left(\vec{\pi}(x) \cdot \Big[\vec{P}(x) - \vec{j}_P(x)\Big] + G \; \vec{P}(x) \cdot \vec{P}(x)\right)\right].\end{aligned} \tag{2.41}$$

A continuación, evaluaremos las integrales sobre $S(x)$, $\vec{P}(x)$, $\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$, dejando la acción expresada en términos de los grados de libertad $\sigma(x)$ y $\vec{\pi}(x)$. Para ello, los términos en (2.41) deben reordenarse de modo de poder factorizar dichas integrales. Primero, reescribiremos de la siguiente manera los términos que contienen $S(x)$:

$$\sigma(x)S(x) + G\ S(x)S(x) = G\left[S(x) + \frac{\sigma(x)}{2G}\right]^2 - \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{4G}. \tag{2.42}$$

Reemplazando esta expresión en (2.41), podemos factorizar la integral sobre $S(x)$ y calcularla explícitamente:

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}S\mathcal{D}\sigma\ \exp\left[\int d^4x\left(G\left[S(x)+\frac{\sigma(x)}{2G}\right]^2 - \frac{\sigma(x)\sigma(x)}{4G} - \sigma(x)j_S(x)\right)\right] \qquad (2.43)\\
=\ &\int \mathcal{D}\sigma \exp\left[-\int d^4x\left(\frac{\sigma(x)\sigma(x)}{4G} + \sigma(x)j_S(x)\right)\right]\int \mathcal{D}S \exp\left[G\int d^4x\left(S(x)+\frac{\sigma(x)}{2G}\right)^2\right]\\
=\ &N'_S\int \mathcal{D}\sigma \exp\left[-\int d^4x\left(\frac{\sigma(x)\sigma(x)}{4G} + \sigma(x)j_S(x)\right)\right],
\end{aligned}$$

donde, como vemos, la integral sobre $S(x)$ es independiente de $\sigma(x)$ y contribuye solamente al factor de normalización N'_S. Repitiendo este cálculo para $\vec{P}(x)$, obtenemos la expresión análoga:

$$N'_P\int \mathcal{D}\vec{\pi} \exp\left[-\int d^4x\left(\frac{\vec{\pi}(x)\cdot\vec{\pi}(x)}{4G} + \vec{\pi}(x)\cdot\vec{j}_P(x)\right)\right]. \tag{2.44}$$

Por otro lado, también podemos agrupar en un único término todas aquellas contribuciones a (2.41) que contienen campos fermiónicos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{fer} &= \int d^4x\left[\bar{\psi}(x)(-i\partial\!\!\!/ + m_c)\psi(x) + \sigma(x)j_s(x) + \vec{\pi}(x)\cdot\vec{j}_P(x)\right]\\
&= \int d^4x d^4x'\ \bar{\psi}(x)\ \mathcal{A}(x,x')\ \psi(x'), \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

donde hemos definido el operador fermiónico $\mathcal{A}$, que en espacio de coordenadas toma la forma

$$\mathcal{A}(x,x') = \delta(x-x')\Big[-i\partial\!\!\!/ + m_c + \Phi(\bar{x})\Big], \tag{2.46}$$

con $\Phi(x) = \sigma(x) + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}(x)$ y $\bar{x} = (x+x')/2$. Por lo tanto, la función generatriz resulta:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\pi}\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[-\Gamma_{fer}\right]\ \exp\left[-\int d^4x\left(\frac{\sigma(x)^2}{4G} + \frac{\vec{\pi}(x)^2}{4G}\right)\right], \tag{2.47}$$

donde hemos omitido ya los cuatro factores de normalización N_S, N_P, N'_S y N'_P. A continuación, podemos reescribir el determinante fermiónico de una forma más conveniente usando que [52]:

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[-\Gamma_{fer}\right] = \det \mathcal{A} = \exp\Big(\ln\det \mathcal{A}\Big) = \exp\Big(\mathrm{Tr}\ln \mathcal{A}\Big), \tag{2.48}$$

con lo cual llegamos a la siguiente forma para la función de generatriz:

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\vec{\pi} \exp\Big(-\Gamma_{bos}(\sigma,\vec{\pi})\Big), \tag{2.49}$$

donde la acción bosonizada es:

$$\Gamma_{bos}(\sigma,\vec{\pi}) = -\mathrm{Tr}\ \ln\mathcal{A} + \int d^4x \left(\frac{\sigma(x)^2}{4G} + \frac{\vec{\pi}(x)^2}{4G}\right). \tag{2.50}$$

La expresión (2.49) es completamente equivalente a (2.35). Naturalmente, las extensiones del modelo conducirán a una modificación de la acción correspondiente, y en particular la incorporación de interacciones más generales hará que se deban incluir campos bosónicos adicionales, mientras que la introducción de temperatura, potencial químico y campo magnético modificará el operador $\mathcal{A}$.

Ahora bien, en modelos en los cuales ocurre la ruptura espontánea de simetría, los campos mesónicos pueden, en general, desarrollar valores promedio no nulos. Por este motivo es conveniente escribir los mismos en términos de dicho valor y las fluctuaciones alrededor del mismo:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \bar{\sigma} + \delta\sigma(x) \\ \vec{\pi}(x) &= \delta\vec{\pi}(x), \end{aligned} \tag{2.51}$$

donde hemos tenido en cuenta que, como consecuencia de la invariancia traslacional, debe satisfacerse que $\bar{\sigma} = cte$ mientras que, debido a la invariancia ante paridad del vacío, el valor medio de los campos piónicos es cero. De esta manera, la acción puede desarrollarse en potencias de fluctuaciones de los campos:

$$\Gamma_{bos} = \Gamma_{MFA} + \Gamma_{quad} + ... \tag{2.52}$$

En este punto, retener el término Γ_{MFA} corresponde a realizar la aproximación de campo medio, en la cual se desprecian todas estas fluctuaciones. En dicho caso, la función $\Phi(x)$ toma una forma particularmente simple: $\Phi(x) = \bar{\sigma}$, y por lo tanto

$$\mathcal{A}_{MFA}(x,x') = \delta(x-x')(-i\partial\!\!\!/ + m_c + \bar{\sigma}). \tag{2.53}$$

A partir de esta ecuación podemos definir la masa vestida de los quarks

$$M = m_c + \bar{\sigma}, \tag{2.54}$$

donde vemos que la generación dinámica del campo medio $\bar{\sigma}$ es responsable de la ruptura de simetría quiral.

Para evaluar en forma explícita el determinante del operador fermiónico, es conveniente notar que la parte real del mismo se puede reescribir como:

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{Tr}\ln\mathcal{A} = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{Tr}\ln\mathcal{A} + \mathrm{Tr}\ln\mathcal{A}^{+}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ln\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}, \tag{2.55}$$

donde el producto de operadores $\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}(x,x')$ está definido en espacio de coordenadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}(x,x') = \int d^4x''\mathcal{A}^{+}(x,x'')\mathcal{A}(x'',x'). \tag{2.56}$$

Además, dado que el operador $\mathcal{A}_{MFA}$ es diagonal en el espacio de momentos, introducimos su transformada de Fourier:

$$\mathcal{A}_{MFA}(p,p') = \delta(p-p')\left(\not{p} + M\right), \tag{2.57}$$

que además expresamos en términos de M. Usando (2.56) y (2.57), podemos escribir:

$$\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}(x,x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ e^{ip(x-x')}\ (p^2+M^2), \tag{2.58}$$

donde $p^2 = p_4^2 + \vec{p}^2$. Finalmente, evaluando explícitamente la traza en los espacios de Dirac, sabor, color y coordenadas, obtenemos:

$$\frac{1}{2}Tr\ln\mathcal{A}^{+}\mathcal{A} = 2N_cN_f\ V^{(4)}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left(p^2+M^2\right), \tag{2.59}$$

donde $V^{(4)}$ es el cuadrivolumen de integración. Por otro lado, la integral espacial sobre los campos bosónicos en (2.50) se evalúa fácilmente, ya que en esta aproximación los campos son constantes, resultando en una cantidad también proporcional a $V^{(4)}$. De esta manera, llegamos a que la expresión final para la acción por unidad de volumen, denotada Ω_{MFA}, es:

$$\Omega_{MFA}(M) = \frac{\Gamma_{MFA}}{V^{(4)}} = \frac{(M-m_c)^2}{4G} - 2N_cN_f\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln\left(p^2+M^2\right). \tag{2.60}$$

El valor de M que se realiza efectivamente es el que minimiza Ω_{MFA}. La llamada "ecuación de gap" se obtiene precisamente igualando a cero la derivada del potencial termodinámico respecto de esta variable. Es decir, si definimos

$$\mathcal{F} = \frac{\partial\Omega_{MFA}}{\partial M} = \frac{M-m_c}{2G} - 4N_cN_f\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{M}{p^2+M^2}, \tag{2.61}$$

obtenemos la ecuación de gap imponiendo

$$\mathcal{F} = 0. \tag{2.62}$$

En general, el valor de expectación del campo bosónico $\bar{\sigma}$ suele ser usado como parámetro de orden para determinar en qué fase se encuentra el sistema. Sin embargo, optaremos por utilizar la masa vestida en este trabajo, ya que en los modelos que estudiaremos las dos cantidades difieren en una constante aditiva y son, por lo tanto, equivalentes.

Vale la pena destacar que existen maneras alternativas de llegar a la ecuación de gap. Una prescripción más directa consiste en linearizar los términos cuadráticos en $\mathcal{L}_{int}$ en (2.32). De esta manera,

$$\begin{aligned} j_S\, j_S &= (\bar{\psi}\psi)^2 \longrightarrow 2 < \bar{\psi}\psi > \bar{\psi}\psi \\ \vec{j}_P \cdot \vec{j}_P &= (\bar{\psi} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi)^2 \longrightarrow 2 < \bar{\psi} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi > \bar{\psi} i \vec{\tau} \gamma_5 \psi. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Esencialmente, lo que se hace es reemplazar la interacción cuártica por una corriente fermiónica $\bar{\psi}\hat{O}_i\psi$ acoplada al campo de fondo, dado por el condensado $<\bar{\psi}\hat{O}_i\psi>$. De esta forma, y tomando el condensado pseudoescalar igual a cero, se llega nuevamente a una expresión para la acción de campo medio:

$$\Gamma_{MFA} = \int d^4x \, \left[\bar{\psi}(-i\partial\!\!\!/ + m_c)\psi - 2G < \bar{\psi}\psi > \bar{\psi}\psi\right], \tag{2.64}$$

esta vez expresada en términos de campos fermiónicos. Esta acción puede interpretarse nuevamente como la correspondiente a una partícula libre con una masa vestida que resulta de la interacción con el campo promedio generado por las restantes partículas, y cuya expresión en términos del condensado es: $M = m_c - 2G < \bar{\psi}\psi >$. Comparando con la definición de M dada por (2.54), notamos la equivalencia entre ambos procedimientos si hacemos la identificación $\bar{\sigma} = -2G < \bar{\psi}\psi >$. Podemos determinar la masa vestida notando que, a este nivel de aproximación, el propagador fermiónico debe mantener la estructura correspondiente a la del propagador de partícula libre, adquiriendo una corrección en la masa debido a las interacciones. Por lo tanto, usando la definición del condensado dada por (2.29), la cual reescribimos en espacio euclídeo, tenemos:

$$\frac{M - m_0}{2G} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, \mathrm{Tr}\, S(p), \tag{2.65}$$

mientras que si exigimos la condición de autoconsistencia, el propagador debe tener la forma

$$S(p) = \frac{-p\!\!\!/ + M}{p^2 + M^2}, \tag{2.66}$$

con lo cual se llega nuevamente a la ecuación (2.61).

2.3.2. Sector de mesones

Para obtener una descripción de la fenomenología de los mesones, es necesario estudiar la teoría reteniendo las fluctuaciones $\delta\sigma(x)$ y $\delta\vec{\pi}(x)$ a orden cuadrático. Para ello, comenzamos escribiendo el operador fermiónico en términos de su expresión de campo medio y las fluctuaciones correspondientes:

$$\mathcal{A}(x,x') = \mathcal{A}_{MFA}(x,x') + \delta\mathcal{A}(x,x'), \tag{2.67}$$

donde

$$\delta\mathcal{A}(x,x') = \Big(\delta\sigma(\bar{x}) + i\gamma_5\vec{\tau}\cdot\delta\vec{\pi}(\bar{x})\Big)\delta(x-x'), \tag{2.68}$$

con lo cual reescribimos el determinante fermiónico de la siguiente manera:

$$\mathrm{Tr}\ln\Big(\mathcal{A}_{MFA} + \delta\mathcal{A}\Big) = \mathrm{Tr}\ln\mathcal{A}_{MFA} + \mathrm{Tr}\ln\Big(1 + \mathcal{A}_{MFA}^{-1}\delta\mathcal{A}\Big). \tag{2.69}$$

La inversa del operador $\mathcal{A}_{MFA}$ es simplemente el propagador fermiónico S_{MFA} para una partícula libre con masa vestida M. A continuación, desarrollamos el logaritmo en torno de fluctuaciones pequeñas en $\delta\mathcal{A}$:

$$Tr\ln\Big(1 + S_{MFA}\delta\mathcal{A}\Big) \simeq Tr\left(S_{MFA}\delta\mathcal{A}\right) - \frac{1}{2}Tr\Big[(S_{MFA}\delta\mathcal{A})^2\Big], \tag{2.70}$$

donde el segundo término es, explícitamente:

$$\mathrm{Tr}\Big[\Big(S_{MFA}\delta\mathcal{A}\Big)^2\Big] = -4N_cN_f\int\frac{d^4kd^4k'}{(2\pi)^8}\frac{(k\cdot k'-M^2)\delta\sigma^2+(k\cdot k'+M^2)\delta\vec{\pi}^2}{(k^2+M^2)(k'^2+M^2)}, \tag{2.71}$$

donde $\delta\sigma^2 = \delta\sigma(k-k')\delta\sigma(k'-k)$ y $\delta\vec{\pi}^2 = \delta\vec{\pi}(k-k')\cdot\delta\vec{\pi}(k'-k)$, y donde también se calculó explícitamente el producto de los operadores S_{MFA} y δA y se tomó la traza en espacio de Dirac, color y sabor. A continuación, haciendo el cambio de variables:

$$k = p + \frac{q}{2} \qquad k' = p - \frac{q}{2} \tag{2.72}$$

y siguiendo los pasos dados, por ejemplo, en [31], obtenemos para este término:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big[\Big(S_{MFA}\delta\mathcal{A}\Big)^2\Big] &= \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\delta\sigma(q)\delta\sigma(-q)\Big[\frac{1}{2G}\Big(1-\frac{m_c}{M}\Big) - \frac{1}{2}(q^2-4M)I(q^2)\Big] \\ &+ \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\delta\vec{\pi}(q)\cdot\delta\vec{\pi}(-q)\Big[\frac{1}{2G}\Big(1-\frac{m_c}{M}\Big) - \frac{q^2}{2}I(q^2)\Big],\end{aligned} \tag{2.73}$$

donde hemos definido

$$I(q^2) = 4N_cN_f\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\Big((p+q/2)^2+M^2\Big)\Big((p-q/2)^2+M^2\Big)}. \tag{2.74}$$

Finalmente, agrupando estos términos con los correspondientes en la ecuación (2.50) y teniendo en cuenta que los términos lineales en los campos se anulan al evaluar el potencial en el mínimo, tenemos que la contribución siguiente al orden cero es:

$$\Gamma_{quad} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big[G_\sigma(q^2)\delta\sigma(q)\delta\sigma(-q) + G_\pi(q^2)\delta\vec{\pi}(q)\cdot\delta\vec{\pi}(-q)\Big], \tag{2.75}$$

donde hemos definido las funciones

$$\begin{aligned} G_\sigma(q^2) &= \frac{m_c}{GM} + \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4} - M^2\right) I(q^2) \\ G_\pi(q^2) &= \frac{m_c}{GM} + \frac{q^2}{2} I(q^2). \end{aligned} \tag{2.76}$$

La ecuación para las masas de los mesones se obtiene requiriendo que

$$G_\sigma(-m_\sigma^2) = 0 \ ; \qquad G_\pi(-m_\pi^2) = 0. \tag{2.77}$$

Por otro lado, la constante de decaimiento del pión puede obtenerse a partir del elemento de matriz de la corriente axial entre el vacío y los estados de un pión:

$$iq_\mu f_\pi \delta^{ab} =< 0|A_\mu(0)^a|\pi^b(q) >, \tag{2.78}$$

donde el cuadrivector de impulso debe ser evaluado en la masa del pión. Escribiendo el elemento de matriz explícitamente, tenemos

$$f_\pi q_\mu \delta^{ab} = g_{\pi qq} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr\left[\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}S\left(p+\frac{q}{2}\right)\gamma_5\tau^b S\left(p-\frac{q}{2}\right)\right], \tag{2.79}$$

donde $g_{\pi qq}$ es la constante de acoplamiento pión-quark-quark, que se calcula como el residuo de $G_\pi(-m_\pi^2)$. Calculando explícitamente la traza en espacios de sabor, color y Dirac, podemos expresar la constante de decaimiento en términos de $I(-m_\pi^2)$:

$$f_\pi = \frac{1}{2}\ g_{\pi qq}\ M\ I(-m_\pi^2). \tag{2.80}$$

2.3.3. Procedimientos de regularización

Como consecuencia del carácter local de las interacciones, las integrales cuadridimensionales que aparecen en las ecs. (2.60, 2.61) son divergentes, por lo cual debe implementarse algún tipo de prescripción que las regularice para obtener resultados con significado físico. Existen varias alternativas para este procedimiento y la elección del mismo completa la definición del modelo.

En NJL, la regularización más simple consiste de incorporar al integrando divergente una función de corte $f_\Lambda(p)$ dependiente del impulso, que tiende a cero lo

suficientemente rápido para valores grandes, de modo que la integral resulte finita. Esta función reproduce cualitativamente la libertad asintótica de QCD, en el sentido de que la intensidad de interacción quark-antiquark disminuye con el impulso, haciendo que los estados con más energía contribuyan en menor medida al término de vacío. Esta función debe contener un valor de corte Λ con dimensiones de energía que determina la escala a partir de la cual la interacción se hace despreciable. Λ es tratado como un parámetro de entrada y se lo suele tomar entre 0.5 y 1 GeV. Junto con m_c y G, forma el conjunto de parámetros del modelo en su forma más básica (recordemos sin embargo que para modelos con interacciones más generales van a aparecer constantes de acoplamiento adicionales).

El método de regularización no covariante que será utilizado en esta tesis consiste de introducir una función de corte que sólo depende de los componentes espaciales del impulso. En este caso, la integral del componente temporal, que corre sobre todo el eje real, puede calcularse explícitamente para luego aplicar el regulador sólo sobre la parte espacial. A continuación regularizaremos la función $\mathcal{F}(M)$, para luego recuperar el potencial termodinámico mediante integración respecto de M. Partiendo de (2.61), separamos la parte temporal de la integral y la calculamos explícitamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \frac{M}{p_4^2 + \vec{p}^2 + M^2} = \frac{M}{2E_p}, \tag{2.81}$$

donde hemos definido $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}$. De esta manera, $\mathcal{F}(M)$ resulta:

$$\mathcal{F}(M) = \frac{M - m_c}{2G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p}. \tag{2.82}$$

Integrando esta expresión respecto de M, recuperamos el potencial termodinámico:

$$\Omega_{MFA}(M) = \frac{(M - m_0)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p, \tag{2.83}$$

donde notamos que al escribir esta expresión hemos despreciado una constante aditiva irrelevante. En este trabajo, adoptaremos en general la elección más sencilla posible para el regulador, que es la función escalón dada por $f_\Lambda(p) = \Theta(\Lambda - p)$, para la cual todos los estados de quarks con impulso $|p| < \Lambda$ contribuyen por igual a la energía de vacío, mientras que por encima de este valor de corte no contribuyen. En este caso, la integral puede calcularse explícitamente en forma analítica. Si definimos:

$$\Omega_{VAC}(M) = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\ E_p\ \Theta(\Lambda - |p|) \tag{2.84}$$

como la contribución de vacío proveniente del término cinético de un quark en un estado de sabor y color dado, entonces tenemos:

$$\Omega_{VAC}(M) = -\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\Lambda} dp\ p^2 E_p = -\frac{\Lambda^4}{8\pi^2}\ h\left(\frac{M}{\Lambda}\right), \tag{2.85}$$

donde también hemos definido

$$h(x) = x^4 \ln\left(\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\right) + (2+x^2)\sqrt{1+x^2}. \tag{2.86}$$

De esta manera, la expresión del potencial termodinámico regularizado se puede expresar en forma compacta de la siguiente manera:

$$\Omega_{MFA}(M) = \frac{(M-m_0)^2}{4G} + N_c N_f\ \Omega_{VAC}(M). \tag{2.87}$$

Como ya se dijo, este procedimiento no trata las coordenadas espaciales y temporal en pie de igualdad. Si bien es posible implementar un tratamiento covariante aplicando un regulador que depende de los cuatro componentes del impulso, en nuestro caso no trae mayores ventajas preservar la invariancia de Lorentz de la integral, ya que el potencial químico a ser considerado más adelante rompe dicha invariancia de por sí y no se pierde generalidad al elegir un sistema de referencia privilegiado respecto del cual medir el impulso de los quarks.

Al realizar un tratamiento del modelo más allá de campo medio, se encuentra que las integrales $I(q^2)$ que aparecen en (2.76) para el cálculo de los observables m_π y f_π también son divergentes. Para este caso, puede implementarse un procedimiento de regularización similar al realizado para las ecuaciones de gap. Sin embargo, este introduce ambigüedades adicionales. Básicamente, el cambio de variables (2.72) puede realizarse sin problemas solamente si las integrales se hacen entre $-\infty$ y $+\infty$, pero una vez implementada la función escalón, dicha integral no es invariante y debe elegirse en forma arbitraria el origen de coordenadas para la variable q.

Más adelante se discutirán algunos resultados correspondientes a funciones reguladoras suaves. Desde el punto de vista fenomenológico, esta elección es más realista en el sentido de que se reproduce el hecho de que la constante de acoplamiento de *QCD* no disminuye abruptamente como función del impulso. Esta función suele parametrizarse de modo de poder controlar la suavidad con que tiende a cero para impulsos altos y en particular se la puede hacer tender al caso de la función escalón. Además de los procedimientos basados en la implementación de una función de corte, existen alternativas como el formalismo de tiempo propio y el de Pauli-Villars [31]. Por otra parte, existe una generalización del modelo en la que estas divergencias se evitan de una forma más natural. Si las interacciones en el Lagrangiano son reemplazadas por términos de interacción no local, es decir, donde la interacción

depende del valor de los campos en todo el espacio y es modulada por un factor de forma adecuado, entonces al realizar la aproximación de campo medio dichos factores quedan naturalmente incorporados en las integrales de vacío, actuando como reguladores. Este procedimiento da como resultado una masa efectiva dependiente del impulso, lo cual reproduce de manera más precisa el fenómeno de generación de masa dinámica en *QCD* [53]. Dado que en este caso la masa es una cantidad variable, es preferible usar el condensado como parámetro de orden para caracterizar las fases del modelo.

2.3.4. Parametrizaciones y comportamiento del modelo en el sector de vacío

El que se realice la ruptura dinámica de la simetría quiral en el modelo NJL depende principalmente de la intensidad de la interacción, a su vez determinada por el parámetro adimensional $g = G\Lambda^2$. Al aumentar este parámetro por encima de cierto valor crítico g_c, la masa aumenta de manera sostenida. Dicho comportamiento puede verse en la fig.2.1, donde presentamos el comportamiento de la masa vestida para los casos $m_c = 0$ y m_c finito. Para $g > g_c$, el comportamiento de estos dos casos no difiere significativamente, ya que en esta región el efecto de la masa corriente es pequeña. Por otro lado, para $g < g_c$, tenemos en el caso quiral que la masa vestida es nula, por lo que la simetría $SU(2)_A$ se restaura en forma exacta. Además, la transición entre las dos fases es de segundo orden, y el valor crítico puede calcularse explícitamente, dando $g_c = \pi/6$. Es interesante notar que la solución trivial $M = 0$ existe siempre en el caso quiral, como puede verse poniendo $m_c = 0$ en (2.61). Sin embargo, la solución de simetría rota es, siempre que existe, el mínimo global en el vacío. Mientras tanto, en el caso de m_c finito, la simetría no se restaura completamente para valores bajos de g en virtud de la ruptura explícita de la simetría $SU(2)_A$. En este caso, el valor de M permanece levemente por encima de m_c. Además, el pasaje de una fase a otra ocurre de manera suave, en lo que es conocido como una transición del tipo *crossover*. Es importante destacar que esta no es una transición de fase en el sentido estricto de la palabra, ya que no existe un punto donde el parámetro de orden o alguna de sus derivadas sean discontinuos. A grandes rasgos, puede decirse que esta transición ocurre donde la derivada de M respecto de g es máxima, aunque más adelante se discutirán criterios más precisos para definir y localizar la separación entre distintas fases cuando ocurren transiciones de este tipo. Como ya se dijo, G, Λ y m_c deben ser convenientemente fijados para terminar de definir el modelo. Típicamente, estos parámetros se ajustan usando los observables mesónicos m_π y f_π como valores de referencia, los cuales pueden ser calculados, como hemos visto, considerando las fluctuaciones de los campos a orden cuadrático. La cantidad restante que suele ser usada es la masa

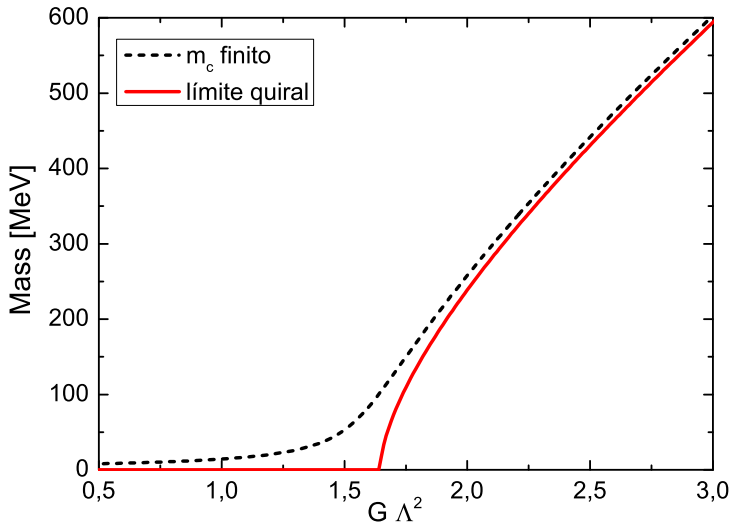

Figura 2.1: Comportamiento de la masa vestida M en vacío como función del parámetro adimensional $g = G\Lambda^2$. Casos quiral y no quiral.

dinámica en vacío, la cual denotaremos como M_0 cuando la usemos para referirnos al conjunto de parámetros asociado. De esta manera, los tres parámetros pueden obtenerse escogiendo valores para m_π, f_π y M_0 e invirtiendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0(G, \Lambda, m_c) \\ m_\pi &= m_\pi(G, \Lambda, m_c) \\ f_\pi &= f_\pi(G, \Lambda, m_c). \end{aligned} \tag{2.88}$$

Teniendo en cuenta que la masa M_N de los nucleones se encuentra alrededor de los 940 MeV y que los mismos están formados por tres quarks, se puede estimar la masa del quark en $M_N/3$, sugiriendo el valor aproximado $M_0 \simeq 310$ MeV. Sin embargo, este valor está sujeto a cierto grado de incertidumbre, por lo cual existe un margen de libertad para modificar los parámetros según el valor exacto que se escoja para M_0. Alternativamente, usando como referencia las estimaciones para el condensado quiral mencionadas en la sec.2.2, se pueden escoger valores compatibles de M_0 en el rango de $300 - 500$ MeV. Para explorar en forma sistemática el comportamiento del modelo en el espacio de parámetros, se fijarán valores para los observables mesónicos, y se barrerá sobre M_0 en el rango mencionado, siempre obteniendo los parámetros a partir de (2.88). De esta manera, se encontrará que existen distintos comportamientos posibles según el valor de M_0 que se escoja, y en particular se verá

que al introducir campo magnético, la estructura de fases adquiere una dependencia compleja con la parametrización. En la tabla 2.1 se presentan los parámetros correspondientes a algunos valores representativos de M_0 que serán usados en este trabajo. En el caso no quiral, se obtienen al tomar $m_\pi = 138$ MeV y $f_\pi = 92.4$ MeV, valores que resultan de promediar los tres componentes del triplete piónico. Los parámetros correspondientes al caso quiral se encuentran entre paréntesis. Dado que la masa del pión es nula en este caso, sólo se deben determinar las cantidades G y Λ a partir de f_π y M_0. También se estudiará el comportamiento del modelo barriendo sobre M_0 para un valor fijo de la constante de decaimiento del pión, donde en este caso escogemos $f_\pi^{ch} = 90$ MeV. Esta elección surge de considerar que el valor fenomenológico puede obtenerse partiendo del modelo en el límite quiral y tratando la contribución a f_π proveniente de la masa corriente como una corrección. Ahora bien, también es interesante notar que como la única cantidad dimensional y no nula del caso quiral es f_π, entonces cualquier cantidad con dimensiones (expresada en unidades naturales) tiene que ser el producto de cierta constante independiente de f_π multiplicado por alguna potencia de esta variable. De esta forma, todos los resultados correspondientes a ese caso pueden hacerse universales, en el sentido de que son independientes del valor elegido para f_π^{ch}. Por supuesto, puede aún existir una dependencia adicional del procedimiento de regularización para las divergencias en las integrales de vacío.

M_0	m_c	$g = G\Lambda^2$	Λ	$-<\bar{f}f>^{1/3}$
MeV	MeV		MeV	MeV
300	5.175	2.062 (2.128)	664.4 (636.5)	250.8 (242.6)
320	5.419	2.136 (2.206)	639.5 (614.5)	246.9 (239.3)
340	5.595	2.212 (2.284)	620.9 (589.1)	244.3 (237.0)
360	5.716	2.288 (2.362)	606.8 (585.7)	242.5 (235.6)
380	5.792	2.364 (2.439)	596.1 (576.3)	241.4 (234.7)
400	5.833	2.440 (2.516)	587.9 (569.2)	240.9 (234.4)
500	5.714	2.813 (2.894)	569.3 (553.8)	242.4 (236.6)

Cuadro 2.1: Conjuntos de parámetros que ajustan a distintos valores de M_0 para los casos quiral y no quiral. Los valores correspondientes a $m_c = 0$ se encuentran entre paréntesis.

2.4. Extensiones del modelo Nambu Jona-Lasinio

2.4.1. Temperatura y potencial químico finito.

Para estudiar el comportamiento de la materia de quarks a temperatura y densidad finita, hace falta recurrir a un tratamiento mecánico-estadístico. En una teoría de campos dada se puede definir la matriz densidad $\hat{\rho}$ en términos del correspondiente Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ de la siguiente manera:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}}-\mu\hat{\mathcal{N}})}, \tag{2.89}$$

donde $\beta = (kT)^{-1}$ y $\hat{\mathcal{N}}$ es el operador de número. El valor de expectación $<\phi_a|\hat{\rho}|\phi_a>$ tomado sobre un estado genérico $|\phi_a>$ nos da la probabilidad de que el sistema se encuentre en dicho estado para los valores correspondientes de T y μ. El potencial químico determina el costo energético de absorber o eliminar partículas, es decir, puede considerarse como un parámetro que regula la densidad del sistema. El mismo es incorporado como un multiplicador de Lagrange, en virtud de la conservación del número medio de partículas y antipartículas. A su vez, la función de partición termodinámica se define como:

$$\mathcal{Z} = Tr\hat{\rho} = \int \mathcal{D}\phi_a <\phi_a|e^{-\beta(\hat{\mathcal{H}}-\mu\hat{\mathcal{N}})}|\phi_a>, \tag{2.90}$$

donde la traza de $\hat{\rho}$ se realiza sumando sobre una base completa de autoestados. Para establecer la relación entre esta definición, apropiada para un tratamiento termodinámico, y aquella de la función generatriz dada en (2.35), debemos interpretar el elemento de matriz en el integrando de (2.90) como el correspondiente a una amplitud de transición. Para ello, consideramos el operador de evolución temporal $\mathcal{U}(t_f, 0) = e^{-i\hat{H}t_f}$ actuando sobre un estado arbitrario $|\phi_a>$. Luego, siguiendo los pasos dados en [54], podemos escribir la amplitud de probabilidad asociada a que el sistema se encuentre en el mismo estado luego de un tiempo t_f:

$$<\phi_a|e^{-i\hat{H}t_f}|\phi_a>= \int \mathcal{D}\Pi \int_{\phi_a(0,x_f)=\phi_a}^{\phi_a(t,x_f)=\phi_a} \mathcal{D}\phi \exp\left[i\int_0^{t_f} dt \int d^3x\ \mathcal{L}\right], \tag{2.91}$$

donde el campo conjugado está dado por

$$\Pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\mathcal{L}/\partial t)}, \tag{2.92}$$

y donde la integral funcional se realiza sobre todas las configuraciones de campo posibles que satisfacen $\phi(t, x_f) = \phi(0, x_f)$, mientras que la integral sobre $\Pi(x)$ es irrestricta. Si a continuación tomamos la extensión analítica a tiempo imaginario del operador de evolución temporal, definiendo $\beta = it$, entonces podemos identificar la amplitud de transición con el elemento de matriz $<\phi_a|\hat{\rho}|\phi_a>$.

Volviendo al modelo de Nambu-Jona-Lasinio, la incorporación de temperatura y densidad finita en el modelo puede realizarse partiendo de la función de partición dada en (2.49), donde para evaluar el determinante fermiónico (2.48) se debe tener en cuenta que a temperatura finita la integral en la coordenada temporal ya no se realiza sobre todo el eje real, sino entre $\tau = 0$ y $\tau = \beta$. Por lo tanto, en el espacio de momentos, dicha integral se convertirá en una suma sobre modos conocidos como frecuencias de Matsubara. Las condiciones de contorno para campos periódicos en el tiempo serán distintas dependiendo de si los mismos son bosónicos o fermiónicos, dando lugar a distintas frecuencias:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{2n\pi}{\beta} \qquad \text{(bosones)} \\ \omega_n &= \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \qquad \text{(fermiones).} \end{aligned} \tag{2.93}$$

Dado que en la aproximación de campo medio el operador Tr ln $\mathcal{A}$ conserva la estructura correspondiente al caso de partículas no interactuantes, el cálculo puede hacerse en forma sencilla siguiendo el procedimiento dado en [54], en el cual la suma sobre modos de Matsubara se hace en forma explícita. El potencial termodinámico resultante es:

$$\Omega_{MFA}(\mu, T, M) = \frac{(M - m_c)^2}{4G} + N_f N_c\, \Omega_{VAC}(M) + N_f N_c\, \Omega_{MED}(\mu, T, M), \tag{2.94}$$

donde $\Omega_{VAC}(M)$ fue definida en (2.84), mientras que

$$\Omega_{MED}(\mu, T, M) = -2T \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\ln\left(1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{T}}\right) + \ln\left(1 + e^{-\frac{E_p + \mu}{T}}\right) \right]. \tag{2.95}$$

A diferencia de $\Omega_{VAC}(M)$, el cual debe regularizarse como se discutió en la sección 2.2.4, el término $\Omega_{MED}(\mu, T, M)$ es finito, dado que el integrando tiende a cero para impulsos altos, lo cual es consecuencia de que la población de quarks a temperatura finita tiene una dependencia exponencial con el impulso.

Al derivar esta expresión respecto de M obtenemos la ecuación de gap a T y μ finito:

$$M = m_c + 4N_f N_c G \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{M}{E_p} \Big(1 - n_p(\mu, T) - \bar{n}_p(\mu, T)\Big), \tag{2.96}$$

la cual hemos expresado en términos de $n_p(\mu, T)$ y $\bar{n}_p(\mu, T)$, las distribuciones de Fermi para partículas y antipartículas respectivamente:

$$n_p = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_p - \mu}{T}\right)} \qquad \bar{n}_p = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_p + \mu}{T}\right)}. \tag{2.97}$$

Tanto en (2.95) como en (2.96) vemos que los términos correspondientes al medio resultan en una contribución negativa respecto a la energía de vacío, facilitando la restauración de la simetría. Esto ocurre porque las excitaciones a temperatura y densidad finita bloquean parcialmente los estados permitidos para las excitaciones virtuales, de esta manera disminuyendo el espacio de fases disponible que corresponde a la integral de vacío y así reduciendo el grado de acoplamiento al mar de Fermi.

Por otra parte, es conveniente definir la densidad de quarks del sistema en términos de las distribuciones $n_p(\mu, T)$ y $\bar{n}_p(\mu, T)$:

$$\rho = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = 2N_c N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big(n_p(\mu, T) - \bar{n}_p(\mu, T) \Big) \tag{2.98}$$

La ecuación de estado para el gas de quarks puede obtenerse invirtiendo esta relación de modo de obtener $\mu = \mu(\rho, T)$ y reemplazando la expresión resultante en el potencial termodinámico, que se relaciona con la presión P de la siguiente manera: $P = -\Omega(\mu, T)$.

En este trabajo nos concentraremos en el caso de temperatura cero. Tomando dicho límite para $\Omega_{MED}(\mu, T, M)$ en la ecuación (2.95), vemos que el término correspondiente a población de partículas tiende a $(\mu - E_p)\Theta(\mu - E_p)$, mientras que el término correspondiente a antipartículas se anula. De esta manera, la contribución $\Omega_{MED}(\mu, T = 0, M)$ al potencial toma la siguiente forma:

$$\Omega_{MED}(\mu, M) = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\mu - E_p)\Theta(\mu - E_p) \tag{2.99}$$

Evaluando explícitamente este término, tenemos que:

$$\Omega_{MED}(\mu, M) = -\frac{1}{\pi^2}\Theta(\mu - M)\left[\frac{\mu(\mu^2 - M^2)^{3/2}}{3} - \frac{(\mu^2 - M^2)^2}{8} h\left(\frac{M}{\sqrt{\mu^2 - M^2}}\right)\right], \tag{2.100}$$

donde hemos usado la función $h(x)$ ya definida en (2.86). Notemos que para $T = 0$, $n_p = \Theta(\mu - M)$, por lo que la integral en espacio de impulsos se calcula sobre una esfera de radio $p = \sqrt{\mu^2 - M^2}$. En el caso en que $\mu < M$, Ω_{MED} será nulo y no habrá población de quarks en el sistema. Cuando el potencial químico, por otra parte, supere el valor de la masa constituyente, este término será distinto de cero, la densidad de quarks será finita y el valor de μ determinará el impulso máximo de los estados ocupados.

2.4.2. Comportamiento a potencial químico finito para distintas parametrizaciones

A continuación se hará una revisión exhaustiva del comportamiento del parámetro de orden y las posibles fases en presencia de potencial químico, para M_0 variable

y m_π y f_π fijos. Estos resultados serán usados como punto de partida para el estudio de los efectos de campo magnético, donde se verá que algunas de las características de las fases aquí discutidas de hecho se preservan. Los diagramas de fases en el plano $M_0 - \mu$ están presentados en la fig.2.2, tanto para el caso quiral (panel izquierdo) como el de masa corriente finita (panel derecho). Notemos que cada valor de M_0 en el eje horizontal corresponde a una parametrización diferente. En general, a potenciales químicos menores que M_0, el sistema se encuentra en una fase de vacío y simetría rota, la cual denotaremos como fase B. Si bien el potencial químico es finito, no es lo suficientemente grande como para excitar estados de quarks, por lo que esta fase es precisamente aquella que se describió en la sección 2.3.4. A potenciales químicos mayores, por otro lado, la simetría se encuentra restaurada y la densidad de quarks es finita, dando lugar a una fase que llamaremos del tipo A. Ahora bien, para las parametrizaciones correspondientes a los valores más altos de M_0, la estructura de fases es particularmente simple, habiendo una única transición de primer orden que conecta estas dos fases. Por otro lado, por debajo de cierto valor crítico $M_0(a)$ existe a μ intermedio una fase que llamaremos del tipo C. Los valores críticos correspondientes son $M_0^q(a) = 361.5$ MeV y $M_0^{nq}(a) = 334.45$ MeV, para el caso quiral y el no quiral, respectivamente. En ambos casos, esta fase es alcanzada desde la fase B por

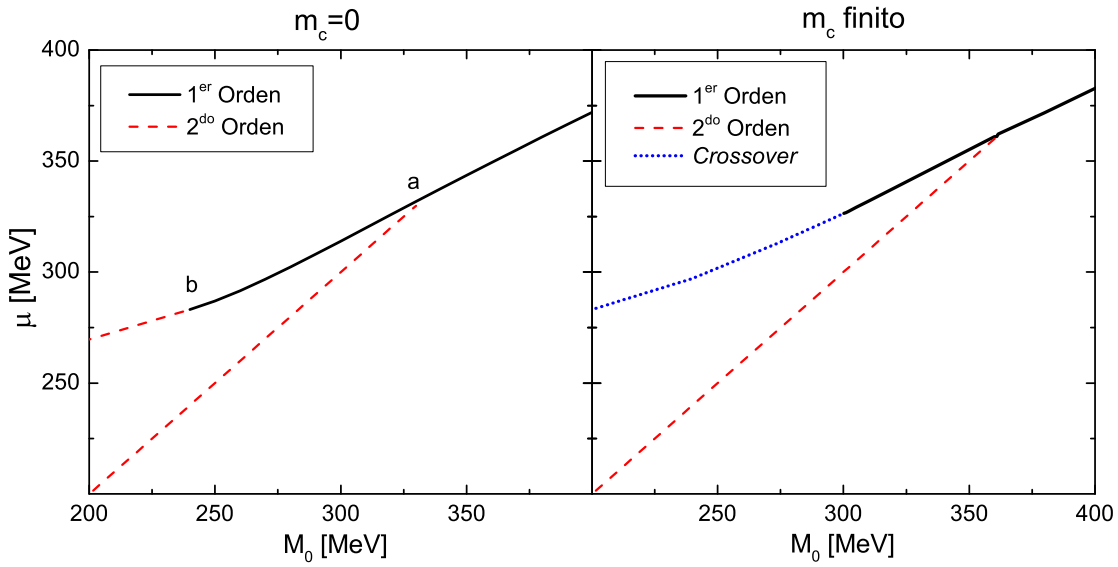

Figura 2.2: Potenciales químicos críticos como función de la parametrización del modelo (dado por el valor de M_0). Panel izquierdo: Caso quiral. Panel derecho: caso no quiral.

una transición de segundo orden. La misma ocurre cuando el potencial químico es lo suficientemente grande como para permitir la población de quarks masivos, es decir, cuando $\mu = M_0$, con lo cual la pendiente de esta transición en el diagrama es igual a

1. Para $M_0 < M_0(a)$, a su vez, tenemos dos regiones. Apenas por debajo de $M_0(a)$, las fases C y A se conectan entre sí mediante una transición de primer orden. Sin embargo, existe un segundo punto crítico $M_0(b)$, debajo del cual la masa decrece en forma continua en función del potencial químico. La transición correspondiente es de segundo orden en el caso quiral y del tipo *crossover* en el caso no quiral, y los valores críticos son $M_0^q(b) = 300.1$ MeV y $M_0^{nq}(b) = 239.64$ MeV. También, recordemos que si bien hemos tomado $f_\pi^{ch} = 90$ MeV para el límite quiral, estas cantidades pueden ser escritas en forma "universal" si las expresamos en términos de f_π^{ch}. Obtenemos:

$$M_0(a) = 3.716\ f_\pi^{ch} \qquad ; \qquad M_0(b) = 2.663\ f_\pi^{ch}. \tag{2.101}$$

En general vemos que para valores mayores de M_0 (correspondientes a acoplamiento más fuerte) se requiere un potencial químico mayor para restaurar la simetría del sistema. Cuando se modifican los parámetros de modo de disminuir el M_0, por otro lado, no solo los potenciales químicos críticos tienden a disminuir, sino que además se debilitan las transiciones de fase.

En la fig.2.3 graficamos la masa y la densidad como función del potencial químico para tres valores representativos de M_0, nuevamente para los casos quiral y no quiral. En general, la masa es constante en la fase B, dado que el potencial termodinámico es independiente de μ. Por otro lado, el comportamiento en la fase tipo A dependerá de si m_c es nulo o finito. En el primer caso, la restauración de simetría es exacta, mientras que en el otro, la masa constituyente suele encontrarse levemente por encima de la masa corriente, y además disminuye lentamente con μ. Para $M_0 =$ 360 MeV, valor que yace por encima de $M_0(a)$, las dos fases se conectan mediante una transición de primer orden. Además, en dicha transición, la densidad salta desde cero a un valor finito, para luego aumentar en forma sostenida. Por otro lado, en el caso $M_0 = 300$ MeV, vemos que la masa es continua en la transición de fase de B a C, estando la posición de la misma señalada por una discontinuidad en $d^2M/d\mu^2$, a partir de la cual M disminuye lentamente como función de μ. La densidad en esta fase es mucho menor que en la fase A, dado que el potencial químico apenas supera la energía en reposo de los quarks, dejando poco espacio de fases disponible para la excitación de estados con impulso finito. Si bien la fase C existe en una región angosta de potenciales químicos para el caso particular $M_0 = 300$ MeV, la misma se ensancha para menores valores de M_0, dando lugar a menores valores de M y mayores densidades. Es interesante notar que un ensanchamiento similar ocurrirá bajo el efecto de campos magnéticos. Para la última curva, correspondiente al caso $M_0 = 210$ MeV, la transición a la fase A es diferente según se esté en el caso quiral o no quiral. En el primer caso, la masa disminuye a cero en forma continua, y la transición está indicada por la discontinuidad en $dM/d\mu$, mientras que en el otro caso, la transición es del tipo *crossover* y su posición debe definirse mediante otros criterios, que se discutirán en detalle más adelante.

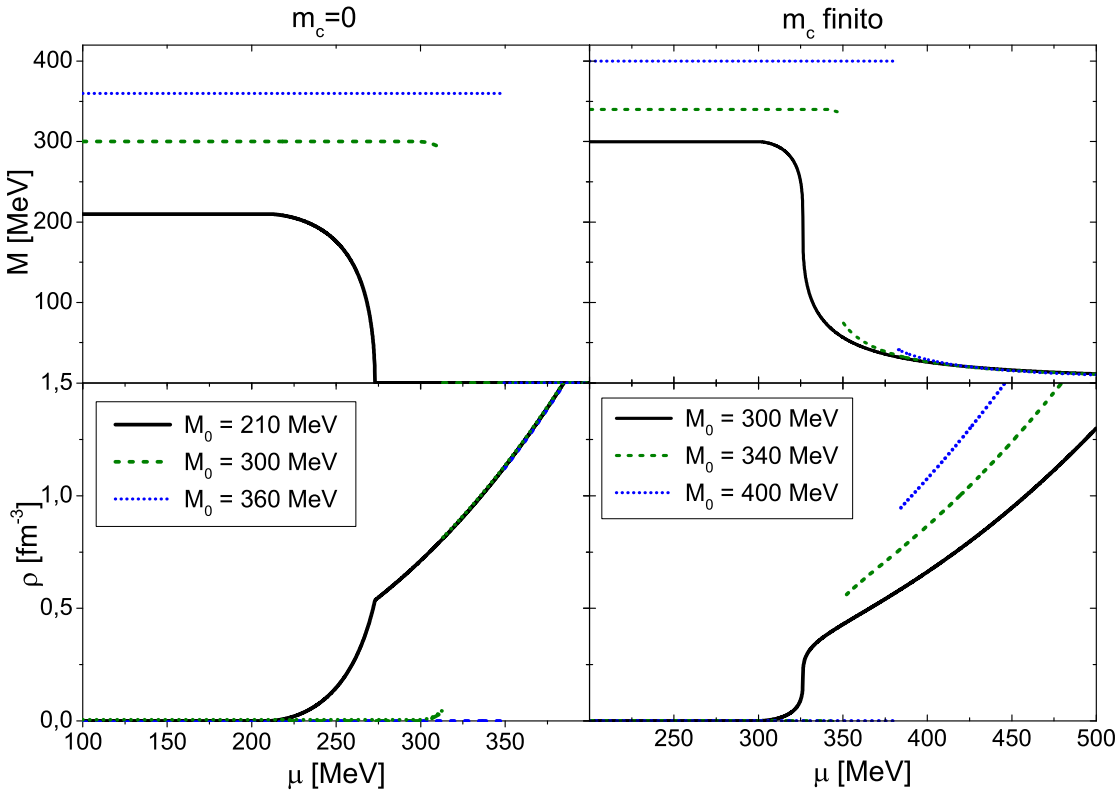

Figura 2.3: Comportamiento de la masa vestida M (panel superior) y la densidad de quarks ρ (panel inferior) como función del potencial químico μ, para varios conjuntos parámetros representativos del modelo, especificados por el valor de M_0, para los casos quiral (izquierda) y no quiral (derecha).

En la fig.2.4 presentamos el potencial termodinámico en función de la masa en el caso $m_c \neq 0$, para $M_0 = 340$ MeV. Aquí vemos la estructura de mínimos del sistema, y como compiten entre sí a medida que modificamos el potencial químico. Para $\mu = 320$ MeV, el único mínimo existente corresponde a una solución masiva, y ocurre en $M = 340$ MeV. Sin embargo, al aumentar μ, se crea un par máximo-mínimo a una masa menor. El valor de potencial asociado al nuevo mínimo disminuye hasta convertirse en el mínimo global del sistema, lo cual corresponde a la transición a la fase A. Para valores aún mayores de μ, el mínimo de mayor masa se fusiona con el máximo, desapareciendo ambos y dejando solamente la solución de simetría restaurada. También podemos ver que la solución de masa grande se encuentra fija para $\mu < M_0$, pero se desplaza levemente hacia masas menores a partir de $\mu = M_0$, siendo este el potencial químico crítico correspondiente al pasaje de la fase B a la fase C. En cambio, los valores de μ_c correspondientes a las transiciones de primer orden a la fase A no son simples de determinar, ya que dependen de la competencia

entre los mínimos de las distintas fases. Además, notemos que la fase C existirá si la solución de simetría restaurada se convierte en mínimo global para $\mu > M_0$. En el caso contrario, dicha fase no se realiza puesto que la fase A es siempre más estable que la fase C.

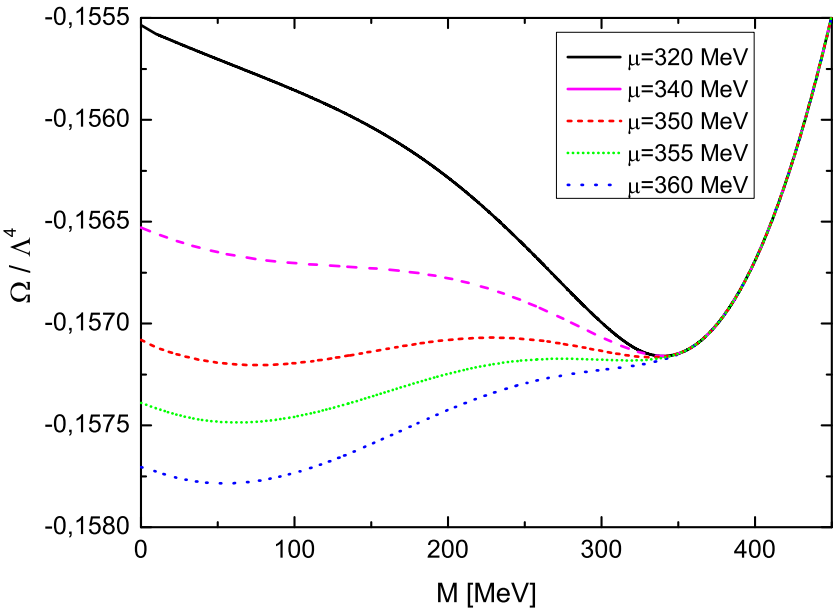

Figura 2.4: Potenciales termodinámicos en función de M para diferentes valores de μ, para el Set de parámetros correspondientes a $M_0 = 340$ MeV. El valor de masa que se realiza en el sistema es el que minimiza globalmente el potencial.

2.4.3. Interacciones generalizadas

Para obtener una descripción más precisa de la fenomenología a baja energía es necesario generalizar el Lagrangiano introducido en la ecuación (2.32), por lo cual proponemos [32]:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_{free} + \mathcal{L}'_{int}, \tag{2.102}$$

con

$$\mathcal{L}'_{free} = \bar{\psi}(x)\left(-i\partial\!\!\!/ + m_c + \gamma_0\hat{\mu}\right)\psi(x) \tag{2.103}$$

y

$$\mathcal{L}'_{int} = G_1 \sum_{a=0}^{3} \Big[j_a^S(x) j_a^S(x) + j_a^P(x) j_a^P(x) \Big] + G_2 \sum_{a=0}^{3} \Big[j_{\mu,a}^V(x) j_{\mu,a}^V(x) + j_{\mu,a}^A(x) j_{\mu,a}^A(x) \Big]$$
$$+ G_3 \Big[j_\mu^V(x) j_\mu^V(x) + j_\mu^A(x) j_\mu^A(x) \Big] + G_4 \Big[j_\mu^V(x) j_\mu^V(x) - j_\mu^A(x) j_\mu^A(x) \Big] + 2G_D \Big(d_+ + d_- \Big), \tag{2.104}$$

donde participan las siguientes corrientes:

$$\begin{aligned} j_a^S(x) &= \bar{\psi}\tau_a\psi & j_a^P(x) &= \bar{\psi} i\gamma_5\tau_a\psi \\ j_{\mu,a}^V(x) &= \bar{\psi}\gamma_\mu\tau_a\psi & j_{\mu,a}^A(x) &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\tau_a\psi \\ j_\mu^V(x) &= \bar{\psi}\gamma_\mu\psi & j_\mu^A(x) &= \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Excepto por posibles términos tensoriales que dependen de $\sigma_{\mu\nu}$, $\mathcal{L}'_{int}$ tiene, a nivel cuadrático en las corrientes, la forma más general posible que respeta las simetrías $SU(2)_V \otimes SU(2)_A$. Dichas corrientes son del tipo escalar, pseudoescalar, vectorial y pseudovectorial ante transformaciones de Lorentz, e isoescalar e isovectorial ante transformaciones de sabor. Por otro lado, también hemos incluido un determinante de 't Hooft [55, 56] de la forma:

$$d_\pm = \begin{vmatrix} \bar{u}(1 \pm \gamma_5)u & \bar{u}(1 \pm \gamma_5)d \\ \bar{d}(1 \pm \gamma_5)u & \bar{d}(1 \pm \gamma_5)d \end{vmatrix}, \tag{2.106}$$

el cual da cuenta de la anomalía axial de QCD, estando el grado de ruptura de $\mathcal{L}'_{int}$ ante $U_A(1)$ fijado por el coeficiente G_D. En el caso particular en que $G_D = 0$, el Lagrangiano de interacción es simétrico ante este grupo, y por lo tanto el grupo de simetría se agranda a $U(1)_V \otimes U(1)_A \otimes SU(2)_V \otimes SU(2)_A$. Por otra parte, G_D regula el grado de mezcla entre los dos sabores, donde el caso de máxima mezcla está dado por $G_1 = G_D$. También hemos incluido el potencial químico en $\mathcal{L}'_{free}$, donde por conveniencia hemos introducido la matriz $\hat{\mu} = diag(\mu_u, \mu_d)$. Si bien en una primera instancia estudiaremos materia simétrica, donde ambos potenciales químicos son iguales, posteriormente consideraremos condiciones de neutralidad de carga y equilibrio β, para las cuales $\mu_u \neq \mu_d$.

Al llevar a cabo el correspondiente procedimiento de bosonización se deben incluir, además de los campos σ y $\vec{\pi}$ ya presentados, los campos vectoriales $(\omega_\mu, \vec{\rho}_\mu)$ y los campos axiales $(a_\mu^0, \vec{a}_\mu)$ asociados a los nuevos términos de interacción. Sin embargo, en la aproximación de campo medio, solamente algunos de estos darán contribuciones al potencial termodinámico: por un lado, los campos asociados a términos pseudoescalares y pseudovectoriales tendrán valores medios nulos, nuevamente debido a la invariancia ante paridad del vacío. Por otro lado, para las

corrientes vectoriales sólo contribuirán los términos j_0^S y $j_{0,a}^V$, asociados a componentes temporales, ya que los que tienen índice espacial son nulos en virtud de la invariancia ante rotaciones. Finalmente, respecto a las corrientes con índice isovectorial, sólo puede haber contribuciones de parte de aquellas asociadas a τ_0 y τ_3, ya que las restantes no conservan los números cuánticos de sabor separadamente. Por lo tanto, los campos bosónicos cuyos valores medios son no nulos serán σ_0, σ_3, ω_0 y ω_3, en términos de los cuales podemos escribir los campos correspondientes asociados a los quarks u y d:

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= -2\Big[(G_1+G_D)\ \sigma_0 + (G_1-G_D)\ \sigma_3\Big] \\
\sigma_d &= -2\Big[(G_1+G_D)\ \sigma_0 + (G_1-G_D)\ \sigma_3\Big] \\
\omega_u &= -2\Big[G_2\ \omega_3 + (G_2+G_3+G_4)\ \omega_0\Big] \\
\omega_d &= \ \ 2\Big[G_2\ \omega_3 - (G_2+G_3+G_4)\ \omega_0\Big].
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Una vez llevado a cabo el procedimiento de bosonización y la aproximación de campo medio, la acción en términos de estos campos resulta:

$$\frac{\Gamma_{MFA}}{V^{(4)}} = -\mathrm{Tr}\ \ln \mathcal{A} + \frac{G_1(\bar{\sigma}_u^2 + \bar{\sigma}_d^2) - 2G_D\bar{\sigma}_u\bar{\sigma}_d}{8(G_1^2 - G_D^2)} + \frac{2G_2(\bar{\omega}_u^2 + \bar{\omega}_d^2) + (G_3+G_4)(\bar{\omega}_u - \bar{\omega}_d)^2}{16G_2(G_2+G_3+G_4)},$$

donde

$$\mathrm{Tr}\ \ln \mathcal{A} = N_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ tr \ln\left[-\not{p} + \hat{M} + \gamma_0\hat{\mu}\right], \tag{2.108}$$

donde hemos introducido $\hat{M} = diag(M_u, M_d)$, teniendo en cuenta que, como el grado de mezcla no es necesariamente máximo, los sabores pueden desarrollar campos medios diferentes, dando lugar a masas dinámicas distintas: $M_f = m_c + \bar{\sigma}_f$. Por otra parte, si tomamos el límite en que $G_1 = G_D$, para evitar que el segundo término en (2.108) resulte divergente estamos forzados a elegir $\bar{\sigma}_u = \bar{\sigma}_d$. Debe notarse que si además escogemos $G_2 = G_3 = G_4 = 0$, recuperamos el término de interacción en (2.32), correspondiente al modelo NJL en su versión elemental. En cuanto a las interacciones vectoriales, notamos que escogiendo $G_2 = 0$ y G_3 y G_4 no nulos, entonces solamente participan los términos de interacción isoescalar, caso en el cual los sabores se acoplan de forma máxima y existirá, por lo tanto, un único condensado $\bar{\omega} = \bar{\omega}_u = \bar{\omega}_d$. Por otro lado, si $G_3 = G_4 = 0$ sólo tendremos interacciones corriente-corriente asociadas a $j_{\mu,a}^V$. En este caso, no habrá canales de interacción que resulten en un acoplamiento directo entre los campos ω_f, aunque, como veremos más adelante, pueden estar acoplados entre sí a través de los campos σ_f. Cuando las interacciones vectoriales son tenidas en cuenta, la presencia del campo ω produce la siguiente modificación del potencial químico:

$$\tilde{\mu}_f = \mu_f - \omega_f, \tag{2.109}$$

donde, para simplificar la notación, hemos escrito simplemente ω_f para denotar el valor medio de dicho campo.

Dado que $\mathcal{L}'_{int}$ es simétrico, el mínimo del potencial se encuentra degenerado y el conjunto de mínimos forma un subespacio invariante ante $SU(2)_V$. Sin embargo, esta simetría puede romperse explícitamente escogiendo $m_u \neq m_d$, $\mu_u \neq \mu_d$ o incorporando campo magnético al modelo, donde las cargas q_u y q_d se acoplan con distinta intensidad al campo (notar, sin embargo, que en el caso de mezcla máxima de sabor, existe un único condensado incluso si la simetría se rompe explícitamente). En tal caso, el Lagrangiano no es invariante ante transformaciones que mezclen estados u y d, por lo que $SU(2)_V$ se reduce al grupo de simetría $U(1)_f$ generado por τ_3. De esta manera, $SU(2)_V \otimes U(1)_V$ se reduce a la combinación $U(1)_f \otimes U(1)_V$, que corresponde a multiplicar independientemente a cada sabor por una fase, y por ende está asociado simplemente a la conservación de los valores medios de cada sabor.

Ahora bien, si redefinimos las constantes de interacción como:

$$\begin{aligned} g_s &= G_1 + G_D \qquad g_v = 2(G_2 + G_3 + G_4) \\ c_s &= \frac{G_D}{G_1 + G_D} \qquad c_v = \frac{G_3 + G_4}{2(G_2 + G_3 + G_4)}, \end{aligned} \tag{2.110}$$

podemos reescribir el término de interacción del vacío en función de las masas vestidas:

$$\begin{aligned} \Omega_{INT}(M_u, M_d, \omega_u, \omega_d) = &\frac{(1-c_s)(M_u-m_c)^2}{8g_s(1-2c_s)} + \frac{(1-c_s)(M_d-m_c)^2}{8g_s(1-2c_s)} \\ &- \frac{c_s(M_u-m_c)(M_d-m_c)}{4g_s(1-2c_s)} - \frac{(1-c_v)(\omega_u^2+\omega_d^2)-2c_v\omega_u\omega_d}{8g_v(1-2c_v)}. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Evaluando el determinante fermiónico, llegamos a una expresión para los términos de materia y de vacío análoga al caso de potencial químico finito, de modo que el potencial termodinámico resultante es:

$$\Omega_{MFA} = \Omega_{INT}(M_u, M_d, \omega_u, \omega_d) + N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{VAC}(M_f) + N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{MAT}(\tilde{\mu}_f, M_f), \tag{2.112}$$

donde hemos tenido en cuenta que la contribución al potencial de cada sabor puede ser distinta y que los términos de materia se evalúan en el potencial químico modificado dado por (2.109). En este caso, la solución se obtiene derivando respecto de todos los campos involucrados:

$$\frac{\partial \Omega_{MFA}}{\partial M_u} = \frac{\partial \Omega_{MFA}}{\partial M_d} = \frac{\partial \Omega_{MFA}}{\partial \omega_u} = \frac{\partial \Omega_{MFA}}{\partial \omega_d} = 0. \tag{2.113}$$

Como en el caso sin interacción vectorial, el potencial termodinámico será un mínimo respecto de M_f, mientras que las derivadas respecto de ω_f constituyen una condición de consistencia y el potencial no será un mínimo respecto de esta variable.

En términos de los parámetros definidos en (2.110), el grado de mezcla de sabor inducido por la interacción de 't Hooft está determinado por el parámetro c_s. Una estimación de su valor puede obtenerse en el modelo NJL de tres sabores a partir del valor empírico conocido de la separación entre las masas de los dos mesones η y η', en cuyo caso el resultado es $c_s \simeq 0.2$ [55, 56]. Aquí, estudiaremos la dependencia del comportamiento del modelo con este parámetro, variándolo entre $c_s = 0$, valor en el cual los sabores de quarks están completamente desacoplados, y 0.5 en el cual los quarks están acoplados de modo que la mezcla de sabor sea máxima.

Respecto al término de acoplamiento vectorial, es importante tener en cuenta que los términos proporcionales a G_2 pueden obtenerse a partir de una interacción corriente-corriente y haciendo una transformación de Fierz. Por otro lado, el valor de g_v no puede obtenerse en forma precisa a partir de experimentos o de $LQCD$, por lo cual se lo suele tomar como un parámetro libre. Haremos variar el cociente g_v/g_s entre 0 y 0.5. Vale la pena mencionar que debido a la mezcla entre los términos pseudosescalar y longitudinal axial, las propiedades de los mesones pseudoescalares dependen de G_2, aunque en el rango de parámetros en el que trabajamos las variaciones están en el orden del 10 % [57] y por lo tanto las ignoraremos. Por otro lado, el parámetro c_v, que regula el cociente entre los términos singlete y triplete de la interacción vector-vector axial, lo tomaremos entre 0 y 0.5 también.

2.4.4. Neutralidad de carga eléctrica y equilibrio β ante procesos débiles

En esta breve sección describiremos las modificaciones que deben realizarse a las ecuaciones al imponer condiciones de neutralidad de carga y de equilibrio β. En el proceso de colapso que conduce a la formación de una estrella compacta, ocurren procesos débiles mediante los cuales una gran parte de los protones se convierten en neutrones. Una vez transcurrida esta etapa, la composición de su interior se encuentra sujeta a la condición de equilibrio β, la cual impondrá una relación entre los potenciales químicos de las distintas especies de partículas y, en particular, dará lugar a la presencia de leptones. A diferencia del caso de materia de quarks simétrica que se trató en secciones anteriores, los potenciales químicos de los sabores u y d serán diferentes entre sí, dando lugar a la ruptura explícita de la simetría $SU(2)_V$, y las densidades serán también diferentes a menos que el sistema se encuentre en la fase de vacío. Por otra parte, se sabe que una vez que transcurrieron los primeros segundos posteriores al nacimiento de la estrella, el camino libre medio de los neutrinos en su interior es lo suficientemente grande como para permitir que

los mismos escapen del sistema, por lo cual se puede tomar $\mu_\nu = 0$. La contribución del leptón τ también puede ser despreciada, dado que su masa es mucho mayor que los potenciales químicos en consideración. Mientras tanto, la presencia de electrones y muones debe ser tenida en cuenta, y además suele tomarse que $\mu_e = \mu_\mu$. De esta manera, los potenciales químicos correspondientes satisfacen la siguiente relación:

$$\mu_d = \mu_u + \mu_e. \tag{2.114}$$

Para tratar el problema, la contribución de los leptones debe ser incorporada al potencial termodinámico del sistema completo. Las interacciones electromagnéticas son despreciables, por lo que solamente es necesario incluir un término de medio asociado a los leptones (sin embargo, sí se tendrá en cuenta la interacción de los leptones con el campo magnético de fondo, cuando tratemos este problema más adelante). Mientras tanto, los efectos de la interacción débil son tenidos en cuenta al imponer la condición de equilibrio β, fijando así la relación entre los potenciales químicos a través de la ec.(2.114). Por lo tanto, el potencial termodinámico puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Omega_{MFA} &= \Omega_{INT}(M_u, M_d, \omega_u, \omega_d) + N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{VAC}(M_f) \\ &+ N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{MED}(\tilde{\mu}_f, M_f) + \sum_{l=e,\mu} \Omega_{MED}(\mu_e, m_l),\end{aligned} \tag{2.115}$$

donde, por conveniencia, hemos usado como punto de partida el potencial termodinámico incluyendo interacciones generalizadas. La forma del término $\Omega_{MED}(\mu_e, m_l)$ es la correspondiente a un gas de partículas no interactuantes a temperatura cero. Debe notarse que, a diferencia del término análogo de los quarks, las masas leptónicas toman valores fijos $m_e = 0.511$ MeV y $m_\mu = 105.66$ MeV. Los tres potenciales químicos presentes en el problema son tenidos en cuenta en esta expresión del potencial. Sin embargo, es conveniente reexpresar dichas cantidades de la siguiente manera:

$$\mu_u = \mu - \frac{2}{3}\mu_e \qquad \mu_d = \mu + \frac{1}{3}\mu_e, \tag{2.116}$$

y tratar el potencial químico de número de quarks μ como una variable independiente. Mientras tanto, el potencial químico electrónico juega el rol de una incógnita adicional, la cual debe ser hallada resolviendo las ecuaciones del sistema. Esta regula la densidad de electrones y muones del sistema, y debe adoptar el valor necesario para que se satisfaga la condición de neutralidad de carga del sistema completo. Por lo tanto, el potencial termodinámico debe minimizarse respecto de los parámetros de orden habituales, sujeto a dicha restricción:

$$\rho_e + \rho_\mu = \frac{1}{3}(2\rho_u - \rho_d), \tag{2.117}$$

donde las densidades de cada especie de partícula están dadas por (2.98).

2.4.5. Superconductividad de color

Por último, presentamos una extensión del modelo que describe el fenómeno de superconductividad de color. En el modelo NJL, estas interacciones pueden modelarse de forma simplificada mediante el siguiente término [58]:

$$\mathcal{L}_{pair} = H j_D^+(x) j_D(x). \tag{2.118}$$

Las corrientes que participan de la interacción son del tipo quark-quark, y tienen la forma:

$$j_D^+(x) = i\bar{\psi}^C \sigma_2 \lambda_A \gamma_5 \psi, \tag{2.119}$$

donde $\bar{\psi}^C = \psi^T C$, con $C = i\gamma_2\gamma_0$, σ_2 es la matriz de Pauli y λ_A son las matrices de Gell-Mann, con $A = 2, 5, 7$. Mientras que σ_2 actúa en espacio de sabor, acoplando los sabores u y d entre sí, las matrices λ_A corresponden al acoplamiento de quarks rg, rb y bg, respectivamente. Por lo tanto, esto puede dar lugar en principio a un conjunto de condensados quark-quark que denotamos $(\Delta_2, \Delta_5, \Delta_7)$, cada uno de los cuales se corresponde con un apareamiento posible de colores. Sin embargo, se puede escoger un único canal de interacción, lo cual puede realizarse sin pérdida de generalidad en virtud de la simetría ante $SU(3)_c$ del problema. Es habitual considerar $A = 2$, de modo de acoplar los estados r y g, mientras que el quark b permanece desacoplado, aunque puede todavía estar sujeto a otras interacciones presentes en el modelo. Naturalmente, se debe introducir un parámetro adicional H que corresponde a la intensidad del acoplamiento quark-quark. De acuerdo a cálculos basados en el modelo de intercambio de un gluón, la elección más plausible para este parámetro es tal que $H/G = 0.75$ [58]. Sin embargo, este valor está sujeto a cierto grado de incerteza, con lo cual es interesante estudiar el comportamiento del modelo en un rango razonablemente amplio de valores.

En este trabajo se considerarán, por simplicidad, las interacciones quark-quark en conjunto con las del tipo quark-antiquark dadas en (2.30), mientras que las interacciones vectoriales y de mezcla de sabor no serán consideradas, resultando en el siguiente Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{2SC} = \mathcal{L}_{free} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{pair}. \tag{2.120}$$

Procedemos entonces con el formalismo de bosonización, en el cual introducimos el campo bosónico de diquarks Δ asociado a la condensación de pares rg, y llegamos a la siguiente expresión para el potencial termodinámico [59]:

$$\Omega_{MFA}(\mu, M, \Delta) = \frac{(M - m_0)^2}{4G} + \frac{\Delta^2}{4H} + N_f\ \Omega^b(\mu, M) + N_f\ \Omega^{rg}(\mu, M, \Delta), \tag{2.121}$$

donde acá hemos separado las contribuciones al potencial para los distintos colores

de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Omega^b(\mu, M) &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(|\epsilon^+| + |\epsilon^-|\Big) \\ \Omega^{rg}(\mu, M, \Delta) &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(2E^+ + 2E^-\Big),\end{aligned} \tag{2.122}$$

donde $\epsilon^\pm = E_p \pm \mu$ y $E^\pm = \sqrt{(E_p \pm \mu)^2 + \Delta^2}$. El término Ω^b se puede escribir en la forma usual:

$$\Omega^b(\mu, M) = -2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big[E_p + (\mu - E_p)\Theta(\mu - E_p)\Big] = \Omega^b_{VAC}(M) + \Omega^b_{MED}(\mu, M), \tag{2.123}$$

el cual hemos separado en una parte de vacío que se regulariza mediante una función de corte y una parte de materia que es finita nuevamente.

El término restante Ω^{rg} corresponde a los términos de vacío y de materia de los estados de color r y g. En presencia del campo Δ, que modifica la relación de dispersión para estas especies de quarks, dichas contribuciones no pueden aislarse en términos separados. Por lo tanto, la parte de materia no puede separarse en un término que sea regularizado naturalmente por una función tipo escalón proveniente del potencial químico, y se deberá implementar una regularización que actúa tanto sobre vacío como la contribución de materia. Notemos sin embargo que si $\Delta = 0$, entonces la integral en (2.122) se puede separar en una parte de vacío y de materia al igual que con el quark b, con un factor 2 en Ω^{rg} respecto a Ω^b proveniente de la degeneración de los colores r y g.

En presencia de un gap superconductor finito en una dirección arbitraria del espacio de color, el grupo de simetría $SU(2)_f \otimes SU(3)_c$ del Lagrangiano se reduce a $SU(2)_{cf} \otimes SU(2)_\Delta \otimes U(1)$, donde $SU(2)_{cf}$ corresponde a una rotación conjunta de los estados de quarks en los espacios de color y sabor. Mientras tanto, la simetría ante $SU(2)_\Delta$ corresponde a rotaciones del conjunto de campos $(\Delta_2, \Delta_5, \Delta_7)$ en espacio de color, la cual se aprovecha para alinear el vector $\vec{\Delta}$ en la dirección $A = 2$ como hemos hecho aquí. En lo que respecta a los parámetros, la constante de acoplamiento quark-antiquark G tiene asociado un valor crítico para la formación del condensado quiral en vacío. Mientras tanto, en el caso del condensado de diquarks tal valor crítico no existe. Esto ocurre porque la esfera de Fermi es inestable ante interacciones atractivas, por lo que existirá gap superconductor para valores arbitrariamente pequeños de H/G para un valor de potencial químico lo suficientemente grande.

Capítulo 3

Campo magnético

En este capítulo trataremos la inclusión de campo magnético en el modelo de Nambu Jona-Lasinio. Primero, calcularemos el determinante fermiónico en la acción bosonizada, en cuyo procedimiento también obtendremos las funciones de onda y la relación de dispersión modificada de los quarks. Luego, presentaremos diferentes esquemas posibles de regularización para el término de vacío. En particular, se discutirá una clase de procedimientos existentes en la literatura, que en principio aparentan ser una extensión natural de la regularización a campo magnético nulo, pero que introducen dependencias espurias del campo y dificultan la interpretación de los resultados. A continuación de eso, presentaremos un esquema alternativo que está desprovisto de dichas complicaciones, para finalmente comparar estos métodos entre sí y con los resultados obtenidos en *Lattice QCD*.

3.1. Cálculo del determinante fermiónico

Para incorporar campo magnético al modelo, recurrimos a la prescripción usual de acoplamiento mínimo que consiste de reemplazar en el término cinético del Lagrangiano en (2.31) el operador ∂_μ por la derivada covariante:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu - i\hat{q}A_\mu, \tag{3.1}$$

de modo de acoplar los campos de quarks a un campo electromagnético arbitrario. Aquí, $\hat{q} = diag(2e/3, -e/3)$ es la matriz de carga eléctrica que actúa en el espacio de sabor y e es la carga eléctrica elemental. Naturalmente, al implementar el procedimiento de bosonización, deberemos tener en cuenta la correspondiente modificación del operador $\mathcal{A}(x, x')$ en el determinante fermiónico:

$$\mathcal{A}(x, x') = \delta(x - x')\Big(- i\not{D} + m_c + \Phi(\bar{x})\Big) = \delta(x - x')\Big(\Pi + m_c + \Phi(\bar{x})\Big), \tag{3.2}$$

con $\Pi = -i(\not{\partial} - i\hat{q}\not{A})$. En presencia de campo electromagnético, el operador $\mathcal{A}(x, x')$ puede tener en general una parte real y una parte imaginaria. La primera de estas tiene la forma dada en (2.55), mientras que el componente imaginario está relacionado con procesos anómalos y no será de interés para nosotros. Nuevamente realizando la aproximación de campo medio, en la que trabajaremos de aquí en más, escribimos $\Phi(\bar{x}) = \bar{\sigma}$ y $M = m_c + \bar{\sigma}$. Por lo tanto, el operador resultante corresponde al de una partícula independiente con masa efectiva M en un campo electromagnético arbitrario, cuya forma explícita es

$$\mathcal{A}(x, x') = \delta(x - x')\Big(\Pi + M\Big), \tag{3.3}$$

mientras que

$$\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}(x, x') = \delta(x - x')\Big(-\Pi^2 + M^2\Big), \tag{3.4}$$

donde se tuvo en cuenta que $\Pi^{+} = -\Pi$. Para llevar adelante el cálculo de la traza en (2.55), debemos encontrar la forma diagonal del operador $\mathcal{A}^{+}\mathcal{A}$, para lo cual debemos resolver la siguiente ecuación de autovalores:

$$\Pi^2\ \mathcal{E}_p(x) = \epsilon_p\ \mathcal{E}_p(x), \tag{3.5}$$

donde el índice p representa el conjunto de números cuánticos necesarios para etiquetar las autofunciones. Dado que nos enfocaremos en el caso de un campo magnético constante y homogéneo en la dirección $\hat{x}_3$, podemos escoger la siguiente forma para el potencial vector:

$$A_\mu = (\vec{A}, A_4) = (0, Bx_1, 0, 0), \tag{3.6}$$

el cual se encuentra en el *gauge* de Landau. Además, trabajaremos en la representación de Weyl, donde las matrices γ_μ son:

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_4 = i\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

En esta representación, por lo tanto:

$$\Pi = -i\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{\partial} + i\partial_4 - iq_f Bx_1\sigma_2 \\ -\vec{\sigma}\cdot\vec{\partial} + i\partial_4 + iq_f Bx_1\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

mientras que

$$\Pi^2 = \partial_1^2 + (\partial_2 - iq_f Bx_1)^2 + \partial_3^2 + \partial_4^2 + q_f B\Sigma_3, \tag{3.9}$$

donde Σ_3 es el operador de espín en la dirección espacial $\hat{x}_3$:

$$\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Como podemos ver, Π^2 es diagonal en espacio de Dirac, pero aún debe ser diagonalizado en espacio de coordenadas. Para ello, teniendo en cuenta que el operador Π^2 es independiente de x_2, x_3 y x_4, proponemos una solución factorizada:

$$\mathcal{E}_p(x) = e^{i(p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)} \begin{pmatrix} \mathcal{M}_k(x_1) & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_k(x_1), \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

donde de aquí en más identificamos $p = (k, p_2, p_3, p_4)$, y donde k es un número entero que, como veremos más adelante, está asociado a la cuantización en niveles de Landau. Las $\mathcal{M}_k(x_1)$ son matrices de 2×2 que deben satisfacer la ecuación:

$$\left[\partial_1^2 + (p_2 - iq_fBx_1)^2 - p_3^2 - p_4^2 + q_fB\sigma_3\right]\mathcal{M}_k(x_1) = \epsilon_p\mathcal{M}_k(x_1), \tag{3.12}$$

tanto para el bloque superior como el inferior. A su vez, (3.12) consiste de dos ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas, correspondientes a los dos estados de espín. Teniendo esto en cuenta, y además realizando el siguiente cambio de variables,

$$\rho = \sqrt{2|q_fB|}\left(x_1 - \frac{p_2}{q_fB}\right), \tag{3.13}$$

podemos descomponer $\mathcal{M}_k(x_1)$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{M}_k(x_1) = \begin{pmatrix} F_{n(k,1)}(x_1) & 0 \\ 0 & F_{n(k,-1)}(x_1) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

y reescribir (3.12) para cada componente:

$$\left(-\partial_\rho^2 + \frac{\rho^2}{4}\right) F_{n(k,\sigma)}(\rho) = -\frac{\epsilon_p + p_4^2 + p_3^2 + q_fB\sigma}{2|q_fB|} F_{n(k,\sigma)}(\rho), \tag{3.15}$$

donde $\sigma = \pm 1$. En (3.14) hemos introducido la función $n(k, \sigma)$, cuya forma explícita obtendremos en lo que sigue. La misma tiene en cuenta que debido a la dependencia del espín, el índice n no será el mismo para los componentes superior e inferior. La ecuación (3.15) tiene la forma de la ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico unidimensional:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\Phi_n(x) = E_n\Phi_n(x), \tag{3.16}$$

cuyos autovalores y autofunciones son

$$\begin{aligned} E_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \\ \Phi_n(x) &= \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2} \exp\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{x^2}{2}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Comparando (3.15) con (3.16) vemos que en nuestro caso $\hbar/2m = 1$ y $m\omega^2/2 = 1/4$, lo que implica $\hbar\omega = 1/4$. Teniendo en cuenta estas identificaciones y considerando los posibles valores de $s = sg(q_f B)$, obtenemos entonces:

$$\epsilon_p = -(p_3^2 + p_4^2 + 2k|q_f B|). \tag{3.18}$$

El índice entero k introducido en (3.11) y definido a continuación, agrupa en un único índice la dependencia del autovalor ϵ_p de los niveles de Landau y el espín:

$$k = n + \frac{1}{2} - \frac{s\sigma}{2}. \tag{3.19}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación (3.5) tienen la forma:

$$\mathcal{E}_p = \sum_\sigma E_{p\sigma}(x)\Delta^\sigma, \tag{3.20}$$

donde

$$\Delta^+ = \mathrm{diag}(1,0,1,0) \qquad \Delta^- = \mathrm{diag}(0,1,0,1), \tag{3.21}$$

y

$$E_{p\sigma} = N_n e^{i(p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4)} D_n(\rho)\Big(1 - \delta_{k,\frac{1-s\sigma}{2}}\Big). \tag{3.22}$$

Aquí, hemos introducido las funciones cilíndricas parabólicas definidas por:

$$D_n(\rho) = 2^{-n/2} e^{-x^2/4} H_n(x/\sqrt{2}), \tag{3.23}$$

donde las funciones $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite. El factor de normalización N_n en (3.22) está dado por:

$$N_n = \frac{4\pi|q_f B|}{\sqrt{n!}}. \tag{3.24}$$

Las funciones $\mathcal{E}_p(x)$ satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad:

$$\int d^4x\ \bar{\mathcal{E}}_p(x)\mathcal{E}_{p'}(x) = (2\pi)^4\delta^{(3)}(p-p')\delta_{k,k'}P_k^s \tag{3.25}$$

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_p \bar{\mathcal{E}}_p(x)\mathcal{E}_p(x') = \delta^{(4)}(x-x'), \tag{3.26}$$

donde $\bar{\mathcal{E}}_p = \gamma_0\mathcal{E}_p^+\gamma_0$ y $P_k^s = \mathcal{I}(1-\delta_{k0}) + \Delta^s\delta_{k0}$. Este último operador satisface que $P_k^s = (P_k^s)^2$. Además, en (3.26), hemos introducido el símbolo

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_p = \int \frac{dp_2dp_3dp_4}{(2\pi)^4}\sum_k. \tag{3.27}$$

Como es de esperar, la función de onda preserva la forma de la solución de partícula libre a lo largo de la dirección del campo magnético, y está etiquetada por el índice

continuo p_3 correspondiente al componente del impulso lineal en dicha dirección. Mientras tanto, los números cuánticos en el plano $x_1 - x_2$ dependen del *gauge* utilizado para escribir el potencial vector A_μ. En la presente elección, encontramos que los estados posibles asociados a la dirección $\hat{x}_1$ se encuentran cuantizados, identificándose el índice entero n con los niveles de Landau. Por último, en la dirección x_2 la función onda mantiene la forma de la solución de partícula libre, pero dichos estados se encuentran degenerados puesto que la relación de dispersión no depende de p_2.

Ahora bien, a continuación retornamos al cálculo de la traza del operador $\mathcal{A}^+\mathcal{A}$, donde es preciso pasar primero a la base diagonal, y donde la traza se calculará integrando los componentes del impulso y sumando sobre los niveles de Landau y en los espacios de Dirac, sabor y color. El cambio de base se implementa mediante la transformada de Ritus, la cual definimos como:

$$\psi(x) \;=\; \sum\!\!\!\!\!\!\int_p \mathcal{E}_p(x)\;\psi_p \qquad \bar{\psi}(x) = \sum\!\!\!\!\!\!\int_p \bar{\psi}_p\;\bar{\mathcal{E}}_p(x), \tag{3.28}$$

junto con sus correspondientes inversas:

$$\psi_p \;=\; \int d^4x\;P_k^s\;\bar{\mathcal{E}}_p(x)\;\psi(x) \qquad \bar{\psi}_p = \int d^4x\;\bar{\psi}(x)\;\mathcal{E}_p(x)\;P_k^s. \tag{3.29}$$

En términos de las mismas, vemos que las transformadas de un operador arbitrario $\mathcal{O}$ satisfacen

$$\mathcal{O}(x,x') \;=\; \sum\!\!\!\!\!\!\int_{p,p'} \mathcal{E}_p(x)\;P_k^s\;\mathcal{O}(p,p')\;P_{k'}^s\;\bar{\mathcal{E}}_{p'}(x') \tag{3.30}$$

$$\mathcal{O}(p,p') \;=\; \int d^4x\;d^4x'\;\bar{\mathcal{E}}_p(x)\;\mathcal{O}(x,x')\;\mathcal{E}_{p'}(x'). \tag{3.31}$$

Utilizando esta última expresión, obtenemos:

$$\mathcal{A}^+\mathcal{A}(p,p') = \int d^4x\;d^4x'\;\bar{\mathcal{E}}_p(x)\;[-\Pi^2 + M^2]\;\mathcal{E}_p(x'), \tag{3.32}$$

de donde

$$\ln \mathcal{A}^+\mathcal{A}(p,p') = (2\pi)^4\delta^{(3)}(p-p')\;\delta_{k,k'}\;P_k^s\;\ln\Big[p_3^2 + p_4^2 + M^2 + 2|q_f B|k\Big], \tag{3.33}$$

donde hemos utilizado (3.5) y (3.18). A continuación, aplicando la igualdad (3.30) a $\mathcal{A}^+\mathcal{A}$, tomando la traza y evaluando las δ's, tenemos:

$$Tr\ln\mathcal{A}^+\mathcal{A} = \int d^4x\;\sum\!\!\!\!\!\!\int_p tr\;\mathcal{E}_p(x)P_k^s\ln\Big[p_3^2+p_4^2+M^2+2|q_f B|k\Big]\bar{\mathcal{E}}_p(x), \tag{3.34}$$

donde tr refiere a la traza en espacio de Dirac, sabor y color. Ahora bien, dado que la expresión entre corchetes no depende de la coordenada p_2, podemos realizar la integral correspondiente sobre dicha variable:

$$\int \frac{dp_2}{2\pi}\mathcal{E}_p(x)\bar{\mathcal{E}}_p(x) = N_n^2 \int \frac{dp_2}{2\pi} D_n(\rho)D_n(\rho)P_k^s = 2\pi|q_f B|P_k^s. \tag{3.35}$$

Como vemos, la dependencia en las coordenadas espaciales se elimina al realizar este cálculo, por lo cual la integral espacial contribuye solamente en un factor de volumen $V^{(4)}$. Finalmente, evaluando la traza en espacio de Dirac y usando que:

$$tr_D\ P_s^k = 2\alpha_k, \tag{3.36}$$

donde $\alpha_k = 2 - \delta_{k0}$, llegamos finalmente a:

$$Tr \ln \mathcal{A}^{+}\mathcal{A} = V^{(4)} \sum_k \frac{|q_f B|}{2\pi}\alpha_k \int \frac{dp_3}{2\pi}\frac{dp_4}{2\pi}\ \ln\left(p_4^2+p_3^2+2k|q_f B|+M^2\right). \tag{3.37}$$

Reemplazando entonces esta expresión en (2.50), el potencial termodinámico resulta:

$$\Omega_{MFA}(eB,M) = \frac{(M-m_0)^2}{4G} - N_c \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_4}{2\pi}\sum_{k,f}\alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_3}{2\pi}\frac{|q_f B|}{2\pi}\ln\left(p_4^2+E(p_3,k)^2\right), \tag{3.38}$$

donde hemos definido la relación de dispersión modificada en presencia de campo magnético como:

$$E(p_3,k) = \sqrt{p_3^2 + 2k|q_f B| + M^2}. \tag{3.39}$$

Es útil tener en cuenta que este resultado puede resumirse en la siguiente prescripción aplicada sobre la integral de vacío en la ecuación (2.60):

$$N_f \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \longrightarrow \sum_{k,f}\frac{|q_f B|}{2\pi}\alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_3}{2\pi}, \tag{3.40}$$

donde la integral triple en las coordenadas espaciales se convierte en una integral en p_3 junto con una suma de niveles de Landau. El índice correspondiente al espín se ha juntado con n en un único índice k. Por otro lado, también es conveniente contar con la expresión que resulta de integrar el componente p_4 del potencial termodinámico, que se obtiene en forma análoga a la ecuación (2.83) correspondiente a $eB = 0$:

$$\Omega_{MFA}(eB,M) = \frac{(M-m_0)^2}{4G} - N_c \sum_{k,f}\alpha_k \frac{|q_f B|}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_3}{2\pi}E(p_3,k). \tag{3.41}$$

3.2. Regularización del vacío

En la expresión (3.38) del potencial termodinámico, la integral en p_3 y la suma sobre niveles de Landau son divergentes. A continuación discutiremos diferentes alternativas para regularizar dicha divergencia.

3.2.1. Regularización con factores de forma dependientes del campo magnético

El punto de partida de este esquema de regularización es la expresión (3.41), en la cual ya se realizó la integral del componente temporal. A continuación, se introducen funciones reguladoras de la forma $h_\Lambda(Q)$, donde $Q = \sqrt{p_3^2 + 2k|q_f B|}$. A diferencia del caso $eB = 0$, donde hay una única integral divergente, ahora debemos aplicar un regulador sobre cada nivel de Landau para cada estado de sabor, con lo cual existirá una dependencia tanto en p_3 como en el índice k. Si bien es natural que el regulador dependa de la energía a través de estos números cuánticos, ahora además existe una dependencia del valor de campo magnético, de modo que un NL dado contribuirá menos a la integral para mayores campos. Como veremos más adelante, dicha dependencia se manifiesta en oscilaciones en los parámetros de orden, lo cual dificulta la interpretación de los resultados. En este trabajo se consideraron diferentes elecciones de las funciones reguladoras, demostrándose que dichas oscilaciones en general persisten independientemente de la forma específica del regulador elegido. Las funciones utilizadas fueron:

$$\begin{aligned} h_\Lambda(Q) &= \Theta(\Lambda - Q) && \text{Función escalón (FE)} \\ h_\Lambda(Q) &= \frac{1}{1 + (Q/\Lambda)^{2N}} && \text{Lorentziano (Lor)} \\ h_\Lambda(Q) &= \frac{1}{1 + \exp(\frac{Q/\Lambda - 1}{a})} && \text{Woods-Saxon (WS),} \end{aligned} \tag{3.42}$$

las cuales se aplican a cada integrando en la ecuación (3.41). El primer caso corresponde a integrar hasta un valor de p_3 que satisface que $\Lambda = \sqrt{p_3^2 + 2k|q_f B|}$, es decir, se incluyen solamente los estados cuya energía es inferior al valor de corte. Una consecuencia de esto es la existencia de un k_{max}, ya que debe satisfacerse que $k < \Lambda^2/(2|q_f B|)$. Dado que esto introduce una dependencia en el campo magnético particularmente fuerte, en la literatura se ha optado por el uso de funciones reguladoras suaves [60, 61, 62], donde la contribución al vacío de un NL dado disminuye suavemente al aumentar el campo magnético en lugar de pasar a cero en forma abrupta. Las dos alternativas restantes presentadas corresponden a este caso, en las cuales las constantes a y N determinan la suavidad del regulador. Generalmente uno se encuentra limitado por el hecho de que una función de corte muy brusca

presenta oscilaciones grandes, mientras que una función demasiado suave da, en el límite de campo magnético cero, valores de condensado en vacío demasiado grandes. En este trabajo, los valores considerados para estas constantes fueron $N = 5 - 10$ para el regulador Lorentziano y $a = 0.05 - 0.1$ para el regulador tipo Woods-Saxon.

3.2.2. Regularización independiente del campo magnético

En esta sección presentaremos un procedimiento alternativo que llamaremos "Regularización independiente del campo magnético" (RIC), el cual será usado para estudiar en detalle distintas extensiones del modelo NJL. Este consiste de hacer la suma completa sobre los niveles de Landau, a la cual se le sustrae un término de vacío divergente de la forma dada en (2.60), de manera que el resultado sea finito. Es decir, demostraremos que, si bien estos dos términos son divergentes por separado, las divergencias se cancelan entre sí al hacer la sustracción. Para hacer este cálculo es conveniente partir de (3.38) y regularizar la función $\mathcal{F}(M)$, que resulta de derivar la misma respecto de la masa. Obtenemos así:

$$\mathcal{F} = \frac{M - m_0}{2G} - 2MN_c \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_4}{2\pi} \sum_{k,f} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_3}{2\pi} \frac{|q_f B|}{2\pi} \frac{1}{p_4^2 + p_3^2 + 2k|q_f B| + M^2} \right]. \tag{3.43}$$

Dentro del corchete sumamos y restamos el siguiente término

$$I_1 = 4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + M^2}, \tag{3.44}$$

donde el factor 4 corresponde a la multiplicidad en el espacio de espín y de sabor. De esta manera:

$$\mathcal{F} = \frac{M - m_0}{2G} - 2MN_c \left[\sum_f I_f + I_1 \right], \tag{3.45}$$

con

$$I_f = \int \frac{dp_3 dp_4}{(2\pi)^2} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{|q_f B|}{2\pi} \frac{1}{p_4^2 + p_3^2 + 2k|q_f B| + M^2} - 2 \int \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + M^2} \right]. \tag{3.46}$$

El término I_1, que es divergente, puede regularizarse de la manera usual ya que tiene la forma del caso $eB = 0$. Mientras tanto, demostraremos que el término I_f, convenientemente evaluado, resulta finito. Para ello, es necesario primero restar los términos en el integrando de (3.46), para luego integrar en las variables p_3 y p_4, ya que la integral de cada uno de estos términos por separado es divergente. Realizamos el siguiente cambio de variables en el segundo término:

$$p_1 = \sqrt{2|q_f B| w} \cos\theta \qquad p_2 = \sqrt{2|q_f B| w} \sin\theta \tag{3.47}$$

y evaluamos la integral en la coordenada polar, obteniendo así:

$$4\int \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi)^2}\frac{1}{p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+M^2} = 2\sum_{f=u,d}\frac{|q_f B|}{4\pi}\int dw \frac{1}{z+w+x_f}, \tag{3.48}$$

donde

$$z = \frac{p_4^2+p_3^2}{2|q_f B|} \qquad y \qquad x_f = \frac{M^2}{2|q_f B|}. \tag{3.49}$$

En la suma sobre niveles de Landau, por otro lado, hacemos un reacomodamiento similar de la expresión:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|q_f B|}{2\pi}\frac{\alpha_k}{p_4^2+p_3^2+2k|q_f B|+M^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{\alpha_k}{z+k+x_f}. \tag{3.50}$$

De esta manera, si definimos

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{z+k+x_f} - 2\int_0^{\infty}\frac{dw}{z+w+x_f}, \tag{3.51}$$

podemos escribir:

$$I_f = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dp_4 dp_3}{(2\pi)^2} F\left(\frac{p_3^2+p_4^2}{2|q_f B|}\right), \tag{3.52}$$

que depende solamente de $p_3^2+p_4^2$. Por lo tanto, si hacemos un segundo cambio de variables de la forma:

$$p_3 = \sqrt{2|q_f B|z}\cos\theta \qquad p_4 = \sqrt{2|q_f B|z}\sin\theta \tag{3.53}$$

y evaluamos la integral en la coordenada θ, tenemos:

$$I_f = \frac{|q_f B|}{8\pi^2}\int_0^{\infty} dz\ F(z). \tag{3.54}$$

A continuación, reescribimos la función $F(z)$ de una forma más conveniente. Primero, separamos el término con $k=0$, sumamos y restamos un término de la forma $2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ y evaluamos la integral en w. Resulta así,

$$F(z) = \frac{1}{x_f+z} + 2\ln(z+x_f) + 2\lim_{L\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{L}\left(\frac{1}{k+x_f+z}-\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k}-\ln(z+x_f+L)\right], \tag{3.55}$$

donde hemos llamado L al límite superior de las sumas y las integrales, el cual tiende a infinito. Ahora bien, la primera suma en el corchete puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\lim_{L\to+\infty}\sum_{k=1}^{L}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x_f+z}\right) = \psi_0(x_f+z) + \frac{1}{z+x_f} + \gamma_E, \tag{3.56}$$

donde se usó la definición (8.362) dada en [63]. En esta expresión, γ_E es la constante gamma de Euler y $\psi_0(u)$ es la función digamma de Euler. Por otro lado, tenemos para la otra suma en (3.55) que:

$$\lim_{L\to\infty}\left(-\ln(L+x_f+z)+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k}\right)=\lim_{L\to\infty}\left(-\ln L+\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{k}\right)=\gamma_E, \tag{3.57}$$

en la cual se usó la definición de γ_E (8.367) también dada en [63]. Por lo tanto, esta contribución se cancela exactamente con la γ_E en (3.56) y llegamos a:

$$F(z)=-\frac{1}{x_f+z}-2\psi_0(x_f+z)+2\ln(x_f+z). \tag{3.58}$$

Ahora bien, si integramos esta función respecto de z, tenemos que:

$$I_f=\frac{1}{4\pi}\sum_f\frac{|q_fB|}{2\pi}\Big[\ln(z+x_f)+2(z+x_f)\left[\ln(z+x_f)-1\right]-2\ln\Gamma(z+x_f)\Big]_0^\infty. \tag{3.59}$$

El límite superior de este término puede calcularse desarrollando la función $\ln\Gamma(z)$ en su límite asintótico para z grande:

$$\ln\,\Gamma(z)\simeq\frac{1}{2z}-z-\frac{\ln z}{2}+z\ln z+\frac{\ln(2\pi)}{2}. \tag{3.60}$$

El primer término tiende a cero para valores altos de z, mientras que los restantes términos dependientes de z se cancelan con los correspondientes en (3.59), con lo cual:

$$I_f=-\frac{|q_fB|}{8\pi^2}\Big[\ln x_f-2x_f(\ln x_f-1)+2\ln\Gamma(x_f)-\ln(2\pi)\Big], \tag{3.61}$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(M)=&\frac{M-m_0}{2G}-4MN_cN_f\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2+M^2}\\&+2MN_c\sum_f\frac{|q_fB|}{8\pi^2}\Big[\ln x_f-2x_f(\ln x_f-1)+2\ln\Gamma(x_f)-\ln(2\pi)\Big].\end{aligned} \tag{3.62}$$

A continuación recuperamos la expresión del potencial termodinámico integrando respecto de M. Los términos independientes del campo se pueden escribir volviendo directamente a (3.38). Por otro lado, para obtener la contribución magnética definimos:

$$\Omega_{MAG}(M,q_fB)=\int dM\;2MI_f. \tag{3.63}$$

Luego, reescribimos el integrando de la siguiente manera,

$$2MI_f=\frac{|q_fB|}{8\pi^2}\left[\frac{M}{6x_f}-M\int_0^\infty\frac{dy}{y^2}e^{-2x_fy}\left(y\coth y-1-\frac{y^2}{3}\right)\right], \tag{3.64}$$

donde hemos usado [63]:

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^2} e^{-2\beta y}\left(y\coth y - 1 - \frac{y^2}{3}\right) = \ln\beta - 2\beta(\ln\beta - 1) + 2\ln\Gamma(\beta) - \ln 2\pi - \frac{1}{6\beta}. \quad (3.65)$$

Integrando la expresión (3.64) respecto de M, tenemos entonces que:

$$\int dM\ 2MI_f = \frac{|q_f B|}{6} - \frac{|q_f B|}{2}\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} e^{-2x_f y}\left(y\coth y - 1 - \frac{y^2}{3}\right). \quad (3.66)$$

A continuación, utilizando la siguiente igualdad, relacionada con (3.65):

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y^3} e^{-2\beta y}\left(y\coth y - 1 - \frac{y^2}{3}\right) = -4\zeta'(-1,\beta) - \beta^2 + \left(2\beta(\beta-1) + \frac{1}{3}\right)\ln\beta + \frac{1}{3}, \quad (3.67)$$

obtenemos finalmente que:

$$\Omega_{MAG}(q_f B, M) = -\frac{|q_f B|^2}{2\pi^2}\left[\zeta'(-1,x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{1}{2}(x_f^2 - x_f)\ln x_f\right]. \quad (3.68)$$

Por lo tanto, la expresión para el potencial termodinámico es:

$$\Omega_{MFA}(eB, M) = \frac{(M-m_0)^2}{4G} - 2N_c N_f \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\ln(p^2 + M^2) + N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{MAG}(q_f B, M). \quad (3.69)$$

De esta manera, la contribución del campo magnético a la energía de vacío se ha aislado en un único término que es finito, mientras que el término divergente no depende explícitamente del campo magnético y puede regularizarse eligiendo alguna de las formas discutidas en la sección II.C. El hecho de que la regularización sea independiente del campo magnético es ventajoso respecto a los otros esquemas propuestos, ya que así no se introducen dependencias artificiales. Regularizando entonces el término de vacío, obtenemos para el potencial termodinámico:

$$\Omega_{MFA}(eB, M) = \frac{(M-m_c)^2}{4G} + N_c N_f\ \Omega_{VAC}(M) + N_c \sum_{f=u,d} \Omega_{MAG}(q_f B, M). \quad (3.70)$$

Es útil tener en consideración que, partiendo de (3.41), este resultado puede resumirse en la siguiente prescripción, que consiste de hacer el siguiente reemplazo:

$$\sum_{k,f} \alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_3}{2\pi}\frac{|q_f B|}{2\pi}\sqrt{p_3^2 + 2k|q_f B| + M^2} \longrightarrow$$
$$N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p + \sum_{f=u,d} \frac{|q_f B|^2}{2\pi^2}\left[\zeta'(-1,x_f) + \frac{x_f^2}{4} - \frac{x_f(x_f-1)}{2}\ln x_f\right]. \quad (3.71)$$

3.2.3. Resultados

A continuación discutiremos el comportamiento del parámetro de orden como función de eB a densidad nula, para los diferentes tipos de regularización que hemos introducido, y discutiremos las diferentes dependencias posibles del campo magnético, como se puede ver en la fig.3.1. El conjunto de parámetros escogido es el que ajusta a $M_0 = 400$ MeV para $eB = 0$ en el caso de regularización independiente del campo magnético. En el caso correspondiente a la función escalón, (línea punteada), vemos que la masa presenta oscilaciones fuertes en función del campo en el rango $0.01 - 0.5$ GeV^2. A valores pequeños de eB las mismas no son visibles en la escala del gráfico, pero para $eB > 0.05$ GeV^2 comienzan a aumentar en amplitud. Como hemos dicho, estas oscilaciones provienen de la dependencia de eB en los reguladores. En el caso de la función escalón, esta dependencia es particularmente fuerte pues, al aumentar el campo, la contribución de un nivel de Landau k-ésimo dado pasa de un valor finito a cero cuando se satisface que $\Lambda = 2k|q_f B|$. Es decir, cada vez que se cumple esta condición, el potencial termodinámico tiene una no analicidad, la cual se manifiesta en una discontinuidad en la primera derivada del parámetro de orden. Sin embargo, como esta singularidad se origina en un artificio introducido por el esquema de regularización, no se la puede interpretar como una transición de fase. En la literatura se ha intentado remediar esta dificultad usando reguladores suaves como los presentados en (3.42). El resultado correspondiente en la figura (línea rayada) corresponde al regulador Lorentziano con $N = 10$. En este

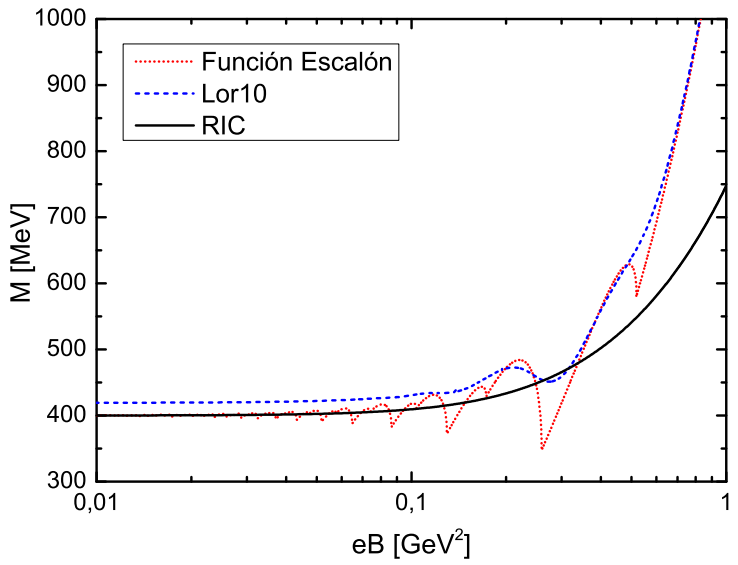

Figura 3.1: Masa en vacío en función de campo magnético para distintos tipos de regularización.

caso, el peso del regulador disminuye lentamente como función de eB y no produce modificaciones tan bruscas en el potencial termodinámico. Por lo tanto, la amplitud de las oscilaciones se reduce, así como el rango en que las mismas son visibles. Sin embargo, es importante notar que no pueden removerse por completo para elecciones razonables del parámetro N. Por otro lado, también se observó que el uso del regulador tipo WS con $a = 0.05$ produce resultados cuantitativamente similares. La raíz del problema es el uso de una regularización cuya escala de corte es distinta para cada nivel de Landau, lo cual resalta la importancia de proponer un esquema enteramente distinto para evitar este problema.

Finalmente, el caso con regularización independiente del campo magnético (línea llena) está desprovisto de dichas oscilaciones, lo cual, según hemos discutido, ocurre porque en esta prescripción la divergencia se aísla en un término cuya escala de corte es independiente del campo. Para campos magnéticos a partir de $eB \sim 0.1$ GeV^2, se observa un aumento de la masa, en concordancia con el efecto usual de catálisis magnética [44]. Este efecto ocurre porque el campo magnético favorece el antialineamiento de espines entre quarks y antiquarks, cuya interacción en el modelo de NJL es atractiva, así favoreciendo la generación del condensado. Mientras que en el caso de la regularización independiente del campo magnético dicho aumento ocurre en forma sostenida, este efecto no es tan evidente en las otras prescripciones, debido a los artificios introducidos por la regularización. En el límite de campo pequeño los comportamientos de las tres regularizaciones son similares. En el caso del regulador suave la masa es levemente mayor que en el caso de la función escalón, puesto que las integrales de vacío de cada término tienen una "cola" para valores altos de impulso que dan lugar a una contribución mayor a la energía de vacío.

A continuación, discutimos el comportamiento en el límite de campo alto. Para la función escalón, a partir de $eB \simeq 0.5$ GeV^2 solamente contribuye el nivel $k = 0$. Por otro lado, si bien en el caso del regulador suave todos los niveles de Landau están presentes, a este valor de campo se atenúan todos los términos de la suma excepto $k = 0$, por lo cual el comportamiento de estos dos esquemas es esencialmente el mismo. Mientras tanto, el RIC exhibe un comportamiento diferente, donde la curva yace por debajo de las otras dos, y en particular la pendiente correspondiente es bastante menor. Es interesante comparar cuantitativamente estos resultados con aquellos obtenidos mediante $LQCD$ (Fig.3.2 y fig.3.3). Recordemos que si bien en nuestro modelo el condensado quiral es equivalente a la masa vestida como parámetro de orden, en $LQCD$ suele trabajarse con la primera de estas cantidades. Usando como referencia los resultados presentados en [64], definimos el valor promedio de los condensados u y d, a los cuales se les sustraen sus propios valores correspondientes a $eB = 0$:

$$\Delta\bar{\Sigma} = \frac{\Delta\Sigma_u + \Delta\Sigma_d}{2}, \tag{3.72}$$

donde

$$\Delta\Sigma^f = \Sigma^f(eB) - \Sigma^f(eB = 0) \tag{3.73}$$

y a su vez

$$\Sigma^f(eB) = \frac{2m_c}{D^4} < \bar{f}f > \qquad f = u, d. \tag{3.74}$$

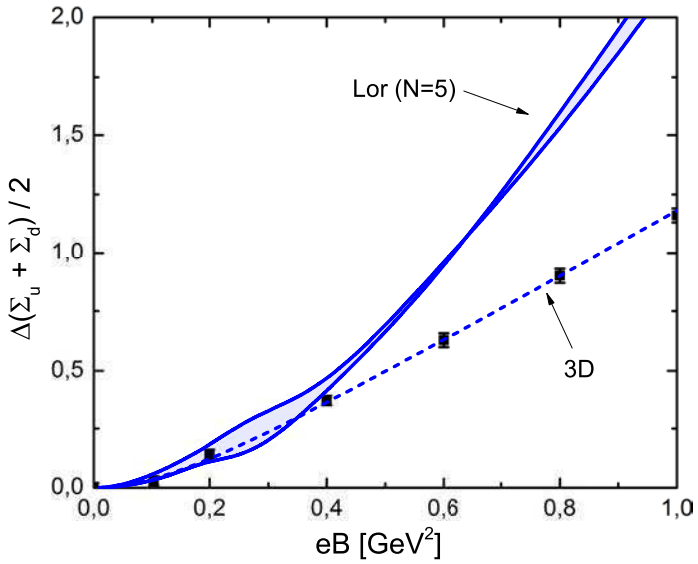

Figura 3.2: Condensado quiral en función del campo magnético para $LQCD$ (línea punteada) y para parametrizaciones tales que 300 MeV$< M_0 <$ 500 MeV con el regulador Lorentziano (N=5) (franja gris).

En esta última definición, se ha agregado un factor multiplicativo de modo de que $\Sigma^f(eB)$ resulte adimensional. Aquí, la constante D está dada por $\sqrt{135 \times 86}$ MeV, donde los valores numéricos tenidos en consideración son la constante de decaimiento del pión calculada en el límite quiral y la masa del mismo, aunque es importante destacar que la elección de estas magnitudes en la definición de D es relativamente arbitraria.

En la fig.3.2, comparamos el resultado correspondiente al regulador Lorentziano con $N = 5$ con el de $LQCD$. La franja graficada se obtiene al variar M_0 en el rango típico de 300 MeV a 500 MeV. En el límite de campo magnético alto, dicho rango da para las pendientes $3.55 - 3.65$ GeV^{-2}, lo cual se encuentra considerablemente alejado del valor $\simeq 1.32$ GeV^{-2} obtenido en $LQCD$. Además, vemos que la variación de pendiente con M_0 es pequeña, por lo que es difícil que un ajuste mejor pueda obtenerse para valores razonables de M_0 con elecciones realistas de m_π y f_π. Nuevamente, notamos que utilizando el regulador WS con $a = 0.1$ obtenemos resultados

que no difieren cuantitativamente. Por otro lado, en la fig.3.3 vemos que para la regularización independiente del campo magnético se obtiene un rango de pendientes de $1.38 - 1.49$ GeV^{-2}, el cual se encuentra mucho más cercano al valor de $LQCD$. El límite superior de la franja corresponde a $-(<\bar{f}f>)^{1/3} = 260$ MeV y su límite inferior a $-(<\bar{f}f>)^{1/3} = 241$ MeV, y además notamos que en la totalidad del rango de eB estudiado la curva de $LQCD$ está contenida dentro de dicha franja. En particular, notamos que para la parametrización que conduce a $-(<\bar{f}f>)^{1/3} = 243$ MeV (indicado por líneas rayadas-punteadas) los resultados están en excelente acuerdo con los puntos de $LQCD$ hasta valores cerca de $eB = 1$ GeV^2.

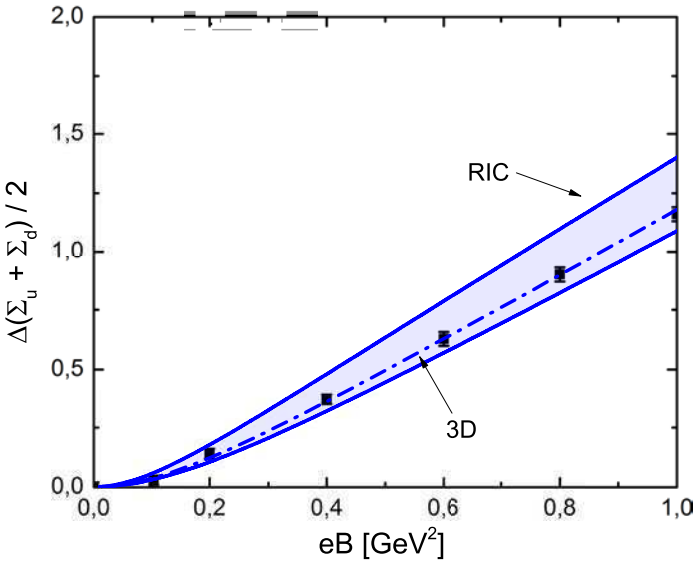

Figura 3.3: Condensado quiral en función del campo magnético para $LQCD$ (línea punteada) y para parametrizaciones tales que 300 MeV$< M_0 <$ 500 MeV con la regularización independiente del campo magnético (franja gris).

Capítulo 4

Campo magnético y potencial químico finito

En este capítulo estudiamos la estructura de fases de materia de quarks en presencia de campo magnético a potencial químico finito. Partiendo de la expresión del potencial termodinámico correspondiente, caracterizamos las diferentes fases del modelo y realizamos un estudio exhaustivo de la dependencia con la parametrización. Discutimos el comportamiento del parámetro de orden y la densidad, así como los diferentes diagramas de fases posibles y el efecto de catálisis inversa.

4.1. Potencial termodinámico

Para considerar simultáneamente los efectos de campo magnético y potencial químico partimos de la expresión (2.94) a $T = 0$. La modificación al potencial termodinámico debida al campo magnético se puede obtener implementando la prescripción dada en (3.40) sobre las integrales en $\Omega_{VAC}(M)$ y $\Omega_{MED}(\mu, M)$. El término de vacío es regularizado mediante el procedimiento discutido en el capítulo anterior, que resulta en efectuar el reemplazo dado por (3.71). Mientras tanto, el término del medio toma la siguiente forma, cuya integral evaluamos explícitamente:

$$\begin{aligned}\Omega_{MED}(\mu, q_f B, M) &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{k_{max}} \frac{|q_f B|}{2\pi}\alpha_k \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z\,(\mu - E_{p_z,k})\,\theta(\mu - E_{p_z,k}) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{k_{max}} \alpha_k \frac{|q_f B|}{2\pi}\left[\mu\sqrt{\mu^2 - s_{k_f}^2} - s_{k_f}^2 \ln\left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - s_{k_f}^2}}{s_{k_f}}\right)\right],\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $s_{k_f} = \sqrt{M^2 + 2k|q_f B|}$ y $k_{max} = Floor[(\mu^2 - M^2)/2k|q_f B|]$. El potencial resultante es:

$$\Omega^{\mathrm{MFA}}(\mu, eB, M) = \Omega_{INT}(M) + N_c N_f\ \Omega_{VAC}(M) + N_c \sum_{f=u,d} \Big[\Omega_{MAG}(q_f B, M) + \Omega_{MED}(\mu, q_f B, M)\Big]. \tag{4.2}$$

Como consecuencia de la cuantización en niveles de Landau, la ecuación de gap puede tener varias soluciones con distintos valores de k para un valor dado de eB y de μ, lo cual resultará en una estructura de fases relativamente compleja y fuertemente dependiente de la parametrización, con discontinuidades en los parámetros de orden asociados a cambios de población en los niveles de Landau. Construiremos los diagramas de fase correspondientes encontrando para cada punto en el plano $eB - \mu$ todas las soluciones para la ecuación de gap y determinando cual de todas ellas es el mínimo global.

4.2. Resultados para campo magnético finito en el límite quiral

En esta sección estudiaremos los efectos del campo magnético sobre el diagrama de fases en el caso quiral, usando los diagramas de la fig.2.2 en el plano $\mu - M_0$ como punto de partida. En la fig.4.1 presentamos los correspondientes diagramas para distintos valores de campo. Vemos que se mantienen algunas características generales respecto al caso $eB = 0$, como la existencia de la fase B para potenciales químicos bajos y, a valores grandes, un conjunto de fases "tipo A", análogas a las de simetría restaurada y densidad finita del caso $eB = 0$. Además, continúa existiendo un valor crítico $M_0(a)$ por encima del cual una única transición separa las fases B y A, mientras que para $M_0 < M_0(a)$, la situación es más complicada, alcanzándose la fase restaurada después de una serie de transiciones que pueden ser de primer o de segundo orden y cuya forma exacta depende sensiblemente del valor de los parámetros y del campo magnético.

Es interesante analizar el caso $M_0 < M_0(a)$ en cierto detalle. Contrario a lo que ocurre para $eB = 0$, donde el menor μ crítico corresponde a una transición de segundo orden, aquí notamos que dicha transición se convierte en primer orden tan pronto se active un campo externo. Por otro lado, la región que hemos llamado de tipo C para $eB = 0$ se descompone en un conjunto de fases separadas por transiciones que también son de primer orden. El efecto de estas transiciones sobre la masa y la densidad al aumentar potencial químico puede verse en la fig.4.2, donde se ve que cada salto se corresponde con una de estas transiciones. Al aumentar el potencial químico, aumenta la cantidad de niveles de Landau poblados, sumándose los términos correspondientes en $\Omega_{MED}(M, q_f B)$ para $f = u, d$ en (4.1). Dado que

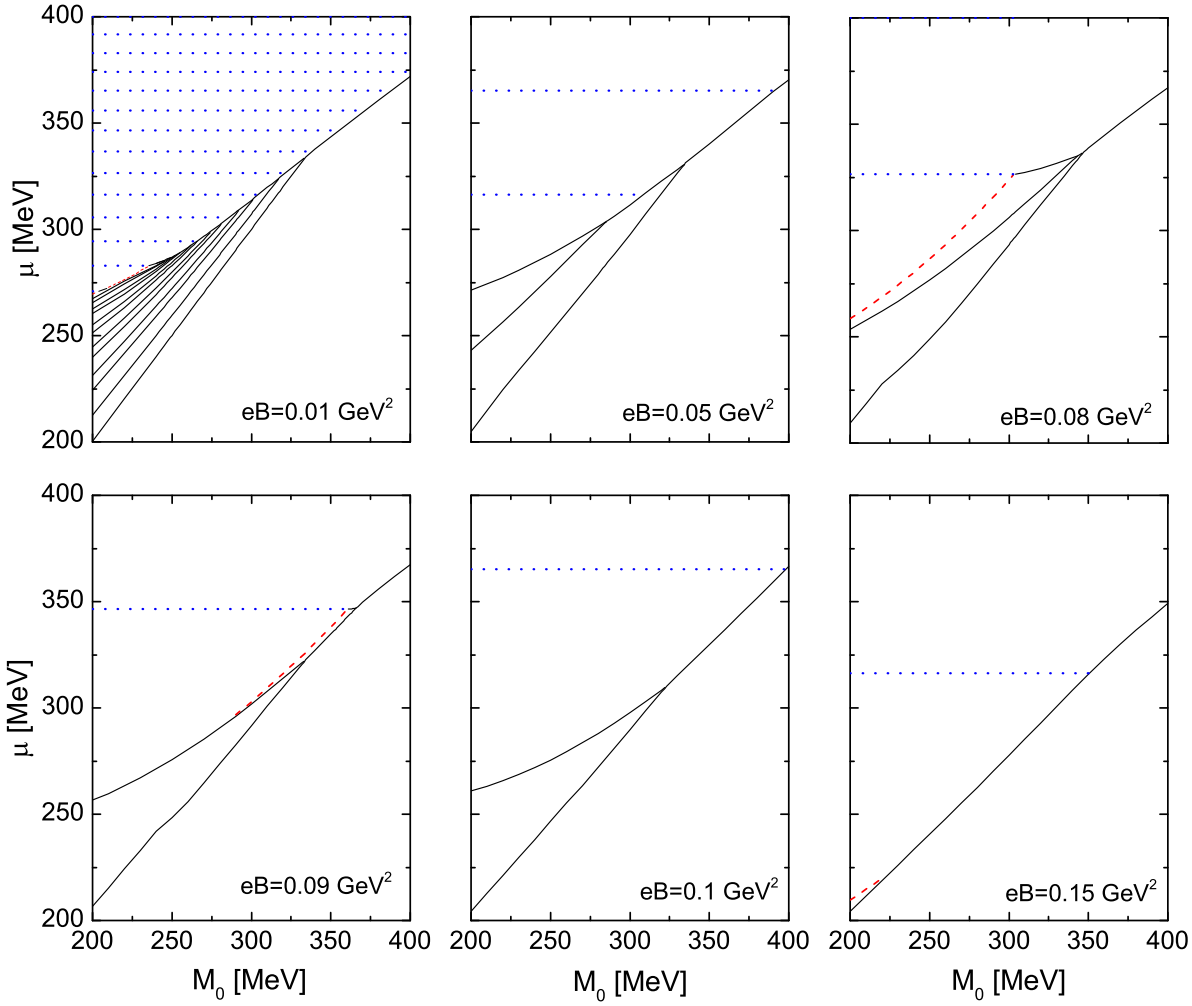

Figura 4.1: Potenciales químicos críticos en función de los parámetros del modelo, para varios valores representativos del campo magnético. Las líneas llenas representan transiciones de primer orden, las líneas guionadas rojas representan transiciones de segundo orden que conectan a fases de simetría restauradas y las líneas punteadas azules representan transiciones de segundo orden del tipo vA-dH.

la diferencia de energía entre niveles de Landau aumenta con eB, estas transiciones se van separando también, y la estructura de fases se simplifica hasta llegar a una única transición conectando las fases B y A. Por otro lado, es posible verificar que si uno parte de un campo magnético chico, por ejemplo $eB = 0.01$ GeV^2, y

analiza el comportamiento para un valor fijo de M_0 menor que $M_0(a)$, el número de transiciones de primer orden presentes en la región C aumenta al disminuir eB, mientras que su extensión vertical permanece aproximadamente constante. En el límite de eB tendiendo a cero, el número de transiciones tiende a infinito y las mismas se van acercando hasta formar un continuo. En cuanto al comportamiento de la masa, la magnitud de cada salto en las transiciones correspondientes disminuye hasta que las curvas de M y ρ tienden a la curva suave mostrada en la fig.2.2. En

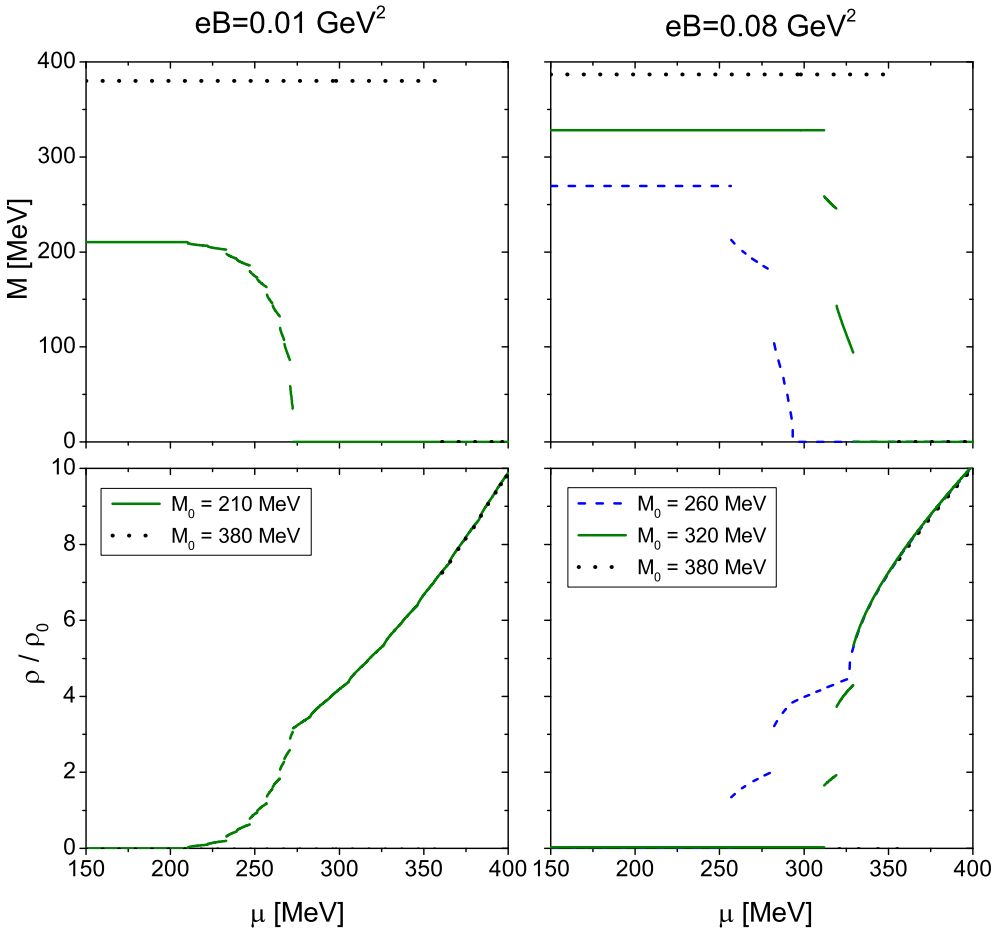

Figura 4.2: Comportamiento de la masa vestida M (paneles superiores) y la densidad de quarks ρ (paneles inferiores) para dos valores elegidos de eB y varios casos representativos de parámetros, especificados por el valor de M_0. La densidad ha sido normalizada respecto a la densidad de saturación nuclear ($\rho_0 \simeq 0.17 fm^{-3}$).

la región A, por otro lado, las líneas punteadas horizontales indican transiciones de segundo orden, conocidas como transiciones de "van Alphen-de Haas" (vA-dH)

[46]. Al igual que las transiciones que ocurren en la fase C, estas se originan en la cuantización del espectro de energía en niveles de Landau. Sin embargo, la relación que obedecen es más sencilla dado que, como $M = 0$, la transición para un k dado ocurre simplemente cuando el potencial químico alcanza la energía asociada al nivel de Landau correspondiente, es decir, cuando:

$$\mu_c = \sqrt{2k|q_f B|} \tag{4.3}$$

para alguno de los dos sabores. Además, como $M = 0$ en la fase A, las transiciones no generan ningún cambio en el parámetro de orden y la expresión para el μ_c es independiente de los parámetros. En este caso, otras cantidades presentan discontinuidades en los puntos críticos, como las derivadas de la densidad de quarks. Esto puede observarse, por ejemplo, en el comportamiento de la densidad como función de μ para el caso $M_0 = 210$ MeV, el cual presentamos en el panel inferior izquierdo de la fig.4.2. Nuevamente, al aumentar el campo magnético dichas transiciones se separan, y para campos magnéticos a partir de 0.08 GeV^2 solamente se puede ver la primera de estas transiciones en la fig.4.1, que corresponde al pasaje de $k_u = k_d = 0$ a $k_u = 0$ y $k_d = 1$. Por otro lado, y al igual que en la región C, en el límite de eB tendiendo a cero estas transiciones se juntan hasta formar un continuo.

A continuación discutimos el comportamiento de la última transición antes de la fase no masiva. Este es particularmente complicado ya que puede ser de primer orden o segundo orden dependiendo de los valores de M_0 y eB. Esto no es evidente para los dos paneles correspondientes a menor campo magnético, pero para $eB = 0.08$ GeV^2 la fase restaurada es alcanzada a través de una transición de fase de segundo orden cuando $M_0 < 300$ MeV, la cual termina en un punto de encuentro con una transición vA-dH y otra de primer orden. Para $eB = 0.09$ GeV^2, la línea de segundo orden se acorta, y ya desapareció completamente para $eB = 0.10$ GeV^2. En la fig.4.3, donde presentamos el comportamiento del punto crítico $M_0(a)$ en función de eB, vemos que al desaparecer la transición de segundo orden, el valor $M_0(a)$ disminuye súbitamente. También podemos ver que la creación y subsiguiente desaparición de una transición de segundo orden se repite a un valor más alto de campo magnético, lo cual conduce a una dependencia complicada para $M_0(a)$ como función de eB. Notemos que para el caso de $eB = 0.15$ GeV^2, la nueva línea de segundo orden ocurre sólo para parametrizaciones correspondientes a valores debajo de $M_0 < 220$ MeV, y por lo tanto está alejada de la región de interés físico en la que nos concentraremos más adelante. También es interesante observar que si bien la posición del punto crítico $M_0(a)$ exhibe un comportamiento complejo, el mismo está acotado superior e inferiormente. Expresado en forma universal, el máximo más alto (hm) es

$$M_0(a)^{hm} = 4.127\ f_\pi^{ch} \qquad \text{con} \qquad eB^{hm} = 11.35\ (f_\pi^{ch})^2. \tag{4.4}$$

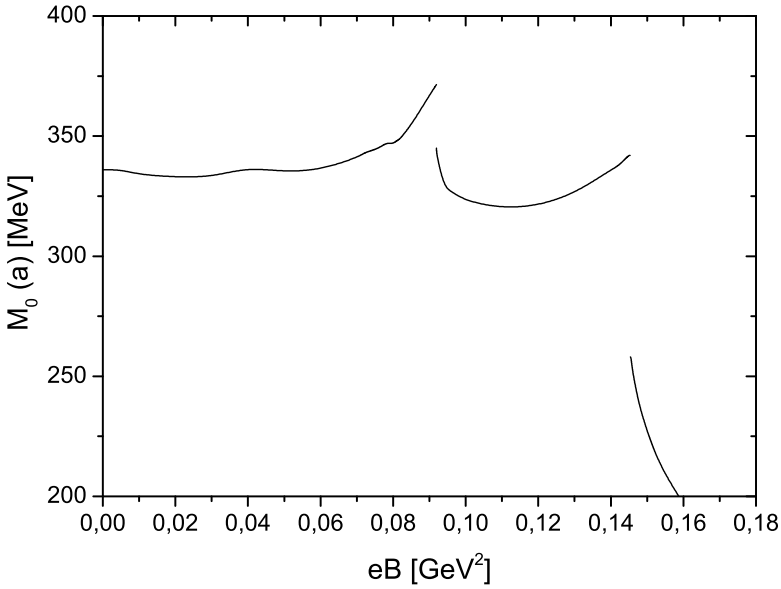

Figura 4.3: Posición del punto crítico $M_0(a)$ como función de eB en el caso quiral. Notar que para las parametrizaciones con $M_0 > M_0(a)$, una única transición conecta la fase de vacío con las fases quiralmente restauradas.

Este valor crítico es de importancia ya que, para parametrizaciones con $M_0 > M_0(a)^{hm}$, el diagrama de fases en el plano $eB - \mu$ tiene la característica de exhibir una única transición de primer orden para todos los valores de campo magnético. Por otro lado, el máximo inferior (lm) corresponde a

$$M_0(a)^{lm} = 3.798\ f_\pi^{ch} \qquad \text{con} \qquad eB^{lm} = 17.95\ (f_\pi^{ch})^2. \tag{4.5}$$

Para el valor elegido de $f_\pi^{ch} = 90$ MeV, estas relaciones conducen a los valores críticos $M_0(a)^{hm} = 371.46$ MeV y $M_0(b)^{lm} = 341.80$ MeV. Es interesante notar que el intervalo $M_0(a)_{eB=0} < M_0 < M_0(a)^{hm}$ es el mencionado en la nota al pie de página número 9 de Ref.[65] para el cual gotas de quarks estables son formadas por quarks masivos. Notar sin embargo, que ningún valor preciso de $M_0(a)^{hm}$ fue dado en esa referencia. A partir de este análisis, está claro que la presencia del campo magnético induce una rica y diversa estructura de fases para las distintas parametrizaciones posibles que yacen en el rango físico $300 \lesssim M_0 \lesssim 400$ MeV aunque, como hemos discutido, la misma se simplifica considerablemente al aumentar M_0. A su vez, aumentar el campo magnético también produce una simplificación del diagrama de fases, de modo que para valores por encima de 0.1 GeV^2, hay nuevamente una única transición en tanto nos mantengamos en el rango de parametrizaciones físicas. Vale la pena enfatizar que si los valores de μ, M_0 y eB son escaleados con las

correspondientes potencias de $f_\pi^{ch} = 90$ MeV estas figuras son universales en el sentido ya mencionado.

4.2.1. Diagramas de fases en el plano $eB - \mu$

Para una mejor comprensión de la estructura de fase y su dependencia con los parámetros, ahora completaremos el estudio de la sección anterior presentando los diagramas de fase en el plano $eB - \mu$ para diferentes valores de M_0. Antes de considerar valores en el rango de interés físico, nos vamos a enfocar en el caso en que $M_0 = 200$ MeV. Aunque esto puede ser considerado de interés puramente académico, es instructivo analizarlo ya que exhibe la total complejidad que un diagrama de este tipo puede tener, también permitiendo apreciar la simplificación que ocurre cuando M_0 aumenta hacia la región de parámetros físicos. El correspondiente diagrama de fases se ve en la fig.4.4. Por conveniencia, también introducimos la notación siguiente para las líneas que denotan las transiciones de fase: ℓ_{B} indica la línea de primer orden que separa la fase B de las fases C_0 o A_0, ℓ_{C_i} (con $i = 1, 2..$) la línea de primer orden separando las fases C_i y C_{i-1} entre sí y ℓ_{A_i} (con $i = 1, 2..$) la línea de segundo orden separando las A_i y A_{i-1} (notar, sin embargo, que un segmento de la línea, que va de t_i a s_{i-1}, separa las fases A_i y C_{i-1}).

Como se ha dicho, los distintos niveles de Landau se acercan entre sí a medida que eB tiende a cero, por lo cual en dicho límite todas las líneas ℓ_{C_i} de este diagrama se deben cruzar con ℓ_{B} para $eB = 0$ y $\mu = M = 200$ MeV. Sin embargo, debemos recalcar que este límite no es sencillo de graficar puesto que el eje de potencial químico se llena densamente de líneas ℓ_{C_i}. Por otro lado, la pendiente de las correspondientes funciones $\mu(eB)$ para los segmentos que conectan los puntos t_i y s_{i-1} es siempre positiva y crece con eB. Las líneas ℓ_{A_i} son las transiciones horizontales en la fig.4.1 y están dadas por (4.3). Cada vez que una de esas líneas es cruzada de derecha a izquierda se puebla un nuevo nivel de Landau. De hecho, cruzar ℓ_{A_1} corresponde a la población del estado de quark d con $k = 1$, aquel de ℓ_{A_2} a la población simultánea de estados u-quark con $k = 1$ y estados d-quark con $k = 2$, etc. El hecho de que la población del quark u con un cierto k coincide con el del quark d con $2k$ se debe simplemente a la relación entre las cargas $|q_u| = 2|q_d|$. Por lo tanto, aquellos ℓ_{A_i} asociados con i impar corresponden a la población de un nivel de quark d solamente, mientras que aquellos con i par corresponden a la población simultánea de quarks d y quarks u. Consecuentemente, efectos mayores son esperados cuando se cruza un valor par de ℓ_{A_i}. Un fenómeno similar ocurre al cruzar las líneas de primer orden ℓ_{C_i}. También es interesante notar que para la parametrización $M_0 = 200$ MeV cada línea de primer orden ℓ_{C_i} aparenta estar naturalmente continuada por una del tipo ℓ_{A_i}. Como veremos más adelante, esta correspondencia no es tan clara para valores mayores de M_0, y se pierde totalmente en el caso no quiral.

En el resto de esta sección discutimos cómo los diagramas $eB - \mu$ para materia

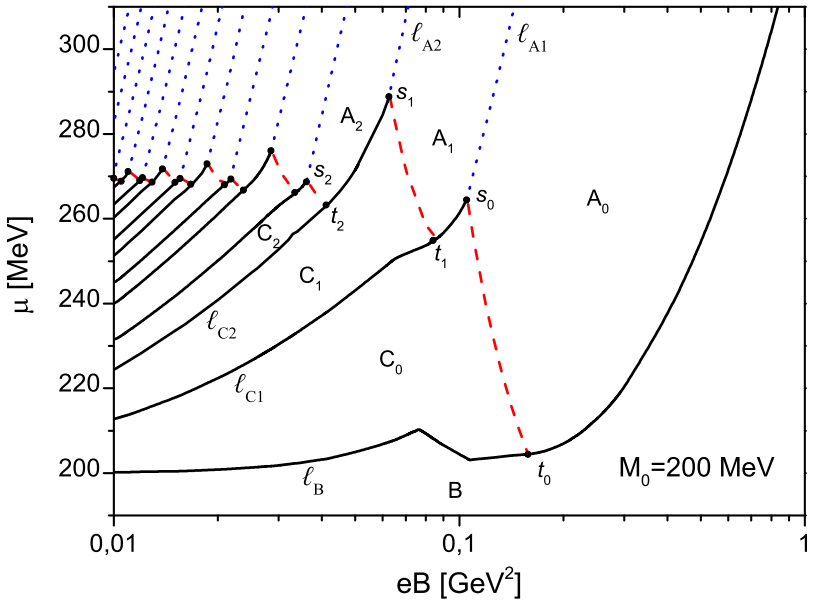

Figura 4.4: Diagrama de fases en el plano $eB - \mu$ para $M_0 = 200$ MeV en el caso quiral. La notación C_i corresponde a fases masivas donde los niveles de Landau se pueblan hasta $k = i$ para d-quarks y $k = m$ para u-quarks. Aquí, $m = i/2$ ($(i-1)/2$) si m es par (impar). En la fase B, la masa vestida toma el valor de vacío $M(0, eB)$ independientemente de μ, mientras que en las fases C_i toman un valor menor que sí depende de μ. La notación A_i corresponde a fases donde la simetría quiral está completamente restaurada y los niveles de Landau se pueblan hasta un valor k, relacionado con i de la misma forma.

fría de quarks evolucionan a medida que nos movemos hacia parametrizaciones en el rango relevante $300 < M_0 < 400$ MeV. Diagramas con varios valores de M_0 en intervalos de 20 MeV son mostrados en la fig.4.5. Sólo parametrizaciones hasta $M_0 = 400$ MeV son incluidas, puesto que más allá de ese valor los correspondientes diagramas de fase no involucran ninguna característica cualitativa nueva. Vemos que, en general, estos exhiben una considerable simplificación con respecto al caso de $M_0 = 200$ MeV. Además de la fase B, siempre presente, existen a lo sumo dos fases masivas en el rango relevante de campos magnéticos (para $M_0 = 300$ MeV, muy cerca de $eB = 0.01$ GeV^2 hay una región muy pequeña de la fase C_2 que apenas puede ser vista en la figura). Comparando estos diagramas, podemos ver que existe una estructura compuesta de a lo sumo dos transiciones "principales", que de hecho aparecerán con frecuencia en los diagramas que analizaremos posteriormente. La transición principal inferior es la que conecta la fase B con las restantes y podemos

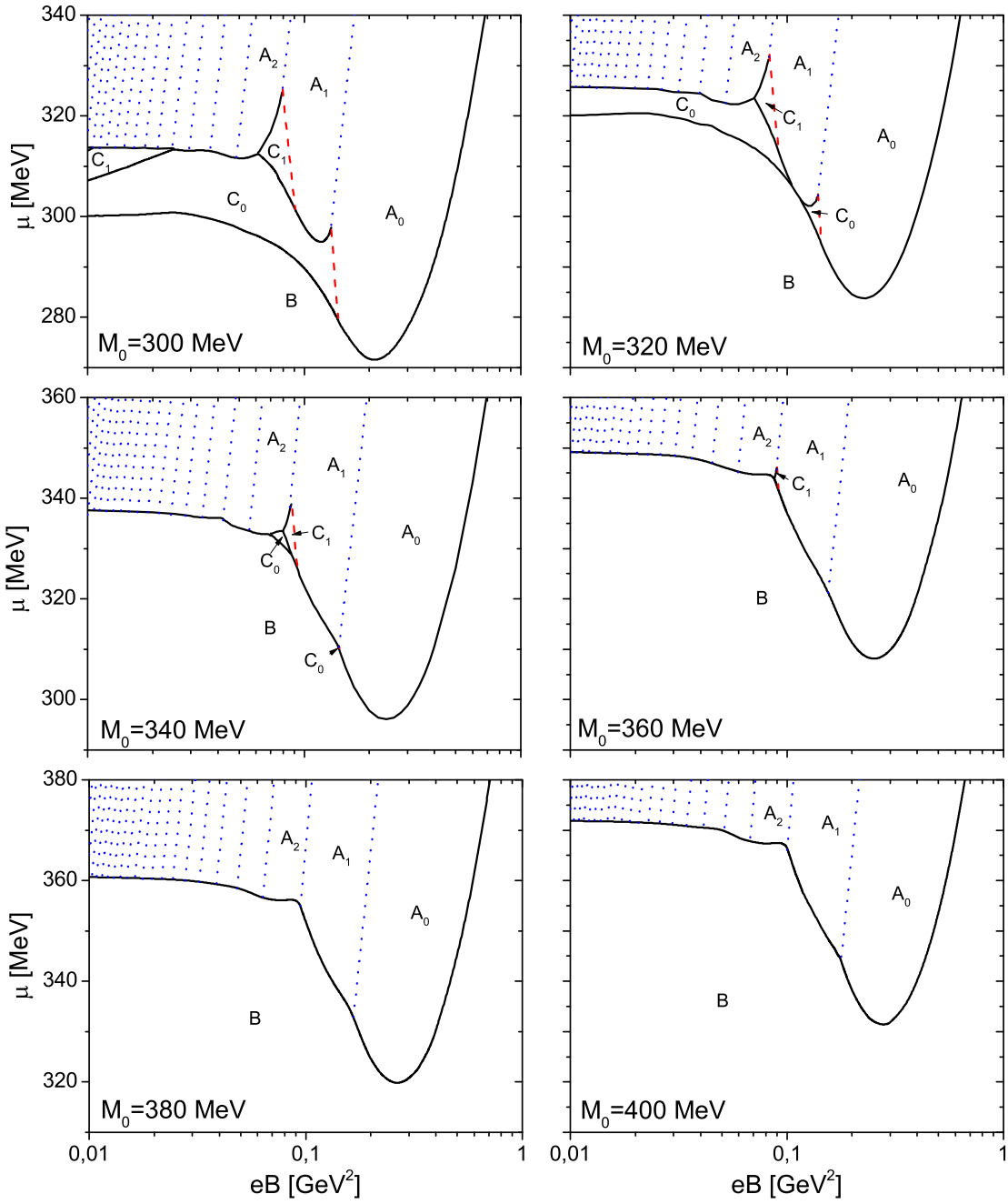

Figura 4.5: Diagramas de fase en el plano $eB - \mu$ en el caso quiral para varios valores representativos de M_0. Las líneas negras llenas corresponden a transiciones de primer orden, mientras que las líneas rojas guionadas corresponden a transiciones de segundo orden. Las líneas azules punteadas corresponden a transiciones de segundo orden que separan distintas fases no masivas. La notación para las fases es la de la fig.4.4.

identificarla con la línea ℓ_B del caso $M_0 = 200$ MeV. La transición principal superior, como veremos más adelante, surge de la fusión de varias líneas ℓ_{C_k}. Por lo tanto, contrario al caso de $M_0 = 200$ MeV, ahora vemos que hay un rango de campos magnéticos para los cuales una transición de primer orden puede conectar la fase C_i a otras fases A_{i+m}, con $m > 1$. La población simultánea de varios niveles en una única transición es posible porque la masa disminuye a 0 desde un valor alto, aumentando en forma súbita el espacio de fases disponible para la población de dichos niveles.

Además, se pierde la correspondencia estricta entre la línea de primer orden ℓ_{C_i} y la de segundo orden ℓ_{A_i} con mismo valor de i. Por otro lado, la fase C_1 se ha separado en dos regiones desconexas, lo cual puede entenderse en términos de que la parte intermedia de la línea ℓ_{C_1} se eleva de modo de intersecar con ℓ_{C_2}, separando la fase en dos partes. Al aumentar M_0, notamos que las dos transiciones principales se acercan entre sí, reduciendo la extensión vertical de la fase C_0. En el caso $M_0 = 320$ MeV, además, la línea ℓ_{C_1} asciende de modo que desaparece la región de la fase C_1 a campo chico, y sólo permanece el sector rodeado por C_0, A_1 y A_2. Para valores aún mayores de M_0, las fases tipo C continúan reduciéndose en extensión y, en particular, las dos transiciones principales se unieron. También, notemos que para $eB = 0$ hay sólo una línea de primer orden a partir de $M_0 = 340$ MeV (ver panel izquierdo de la fig.2.2), por lo cual tampoco se espera que aparezcan fases C_i para valores de eB menores que los graficados. Para $M_0 = 380$ MeV, las fases C_i que existían alrededor de $eB = 0.1$ GeV^2 ya desaparecieron completamente, y de aquí en más los diagramas exhiben una única transición de primer orden, para valores arbitrarios de los campos magnéticos. El valor preciso en el que C_1 desaparece puede ser determinado encontrando el punto de encuentro entre s_1 y t_1. Desde ya que este valor coincide con aquel de $M_0(a)^{hm}$ dado en (4.4). Por lo tanto, para nuestra elección de $f_\pi^{ch} = 90$ MeV, la parametrización más allá de la cual hay una única transición corresponde a $M_0 = 371.46$ MeV. También podemos mencionar que la fase C_0 no existe para parametrizaciones $M_0 > M_0(a)^{lm}$.

4.2.2. Catálisis magnética inversa

Es interesante mencionar a esta altura el llamado efecto de "catálisis magnética inversa" (CMI) recientemente discutido en la literatura [45]. Este fenómeno en general se lo relaciona con una disminución del potencial químico crítico a valores intermedios de los campos magnéticos, lo cual puede ser observado para todos los casos indicados en la fig.4.5. La línea ℓ_B desarrolla una curva en forma de pozo, el cual denominamos "pozo de catálisis magnética inversa". La transición se mantiene aproximadamente horizontal a lo sumo hasta $eB \simeq 0.05$ GeV^2, después de lo cual se curva hacia abajo llegando a un mínimo a $eB \simeq 0.2 - 0.3$ GeV^2, para después aumentar en forma sostenida con el campo magnético. Por lo tanto, hay un rango

intermedio de potenciales químicos en el diagrama donde un aumento de eB a μ constante produce primero una transición de la fase masiva B a una fase sin masa A_i, y un aumento posterior produce el retorno a la fase masiva B. Este comportamiento es el resultado de la competencia entre los distintos términos del potencial termodinámico. A campos magnéticos pequeños y debajo de la línea ℓ_B, el sistema se encuentra en la fase B. Allí, las contribuciones Ω_{MED} y Ω_{MAG} son despreciables y dominan los términos de vacío independientes del campo, y el potencial termodinámico tiene un único mínimo para M alrededor de M_0. Al aumentar el campo magnético, sin embargo, el término del medio se vuelve relevante y favorece la formación de un mínimo de potencial a masas pequeñas, el cual eventualmente termina convirtiéndose en mínimo global. Para campos magnéticos aún mayores, el término Ω_{MAG} se vuelve relevante, favoreciendo nuevamente las fases masivas respecto a las fases tipo A, y llevando por ende al sistema nuevamente a la fase B.

El efecto de este comportamiento sobre el parámetro de orden puede verse en la fig.4.6, donde graficamos M como función de eB para $M_0 = 320$ y 400 MeV y para algunos valores representativos de μ. Nótese que incluimos como referencia el caso $\mu = 270$ MeV, correspondiente a la fase de vacío. Una característica importante puede ser notada en el caso $M_0 = 320$ MeV: cuando un sistema está en una fase C_i, también hay un efecto de catálisis inversa en el sentido de que la masa disminuye con el campo magnético mientras permanece en una misma fase. Por ejemplo, en el caso de $\mu = 300$ MeV (línea verde rayada-punteada) M aumenta mientras permanece en la fase B, y después salta a un valor menor en $eB = 0.127$ GeV^2 al pasar a la fase C_0, donde la masa disminuye. Luego, en $eB = 0.139$ GeV^2, ocurre una transición de segundo orden a la fase A_0, donde la masa es nula, y finalmente para $eB = 0.394$ GeV^2 el sistema vuelve a la fase B a través de una transición de primer orden. En el caso de $\mu = 310$ MeV (línea punteada roja) la situación es similar excepto por el hecho de que la transición a la fase A_k (con $k = 1$ en este caso) es de primer orden. Para $\mu = 321$ MeV (línea azul guionada) el sistema ya está en la fase C_0 para campos magnéticos muy pequeños. Es interesante notar que a campos pequeños, M se encuentra de hecho muy cerca de su valor en vacío y que disminuye en forma sostenida al aumentar eB, por lo cual la fase C a campos magnéticos intermedios puede entenderse como una fase de simetría parcialmente restaurada. En $eB = 0.074$ GeV^2 hay una transición de primer orden a la fase C_1 después del cual el efecto de catálisis inversa en la masa continúa siendo observado. Al seguir aumentando eB, nos encontramos con una segunda transición de primer orden en $eB = 0.088$ GeV^2 a A_1 y finalmente en $eB = 0.39$ GeV^2 se regresa a la fase B. Notar que entre las últimas dos transiciones hay una de segundo orden desde A_1 a la A_0 que, por supuesto, en el caso presente quiral no produce ningún efecto en el parámetro de orden.

Es interesante analizar el comportamiento de la densidad en función del campo

magnético. Entre otras cosas, esta cantidad influye sobre el valor que adquiere la masa en las fases tipo C. Recordemos que a temperatura cero, la densidad para un sistema de fermiones está determinada por el volumen del espacio de fases disponible para energías que se encuentran por debajo del umbral dado por el potencial químico. A campo magnético finito, la expresión correspondiente es:

$$\rho = \frac{N_c}{2\pi^2} \sum_{k,f} \alpha_k |q_f B| \sqrt{\mu^2 - M^2 - 2k|q_f B|}. \tag{4.6}$$

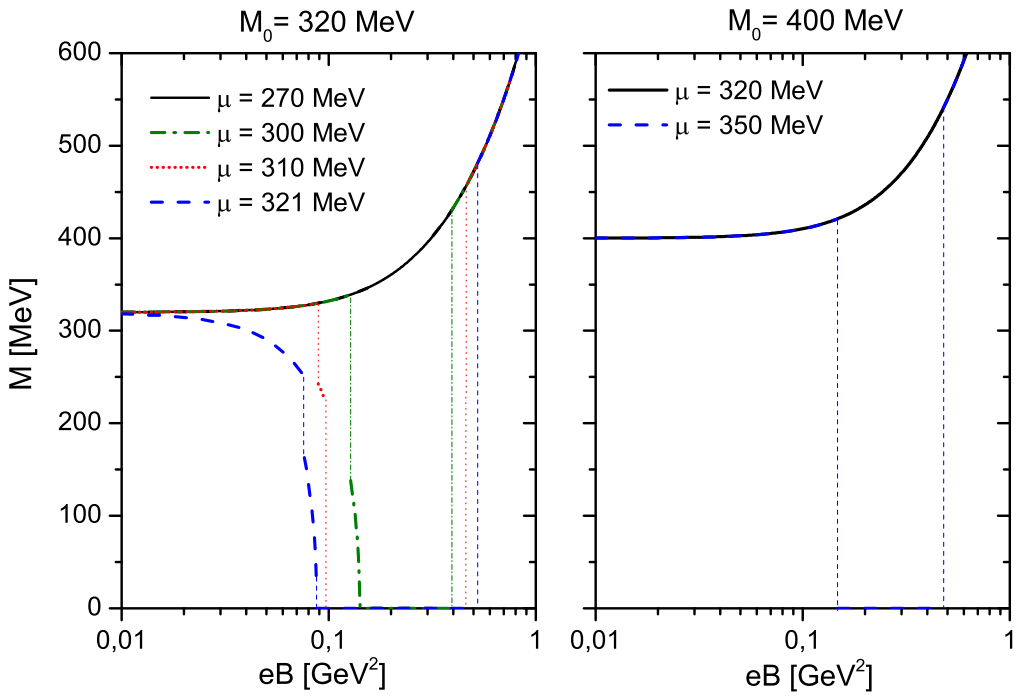

Figura 4.6: Masa vestida M como función de eB en el caso quiral, para varios valores representativos del potencial químico, usando los conjuntos de parámetros correspondientes a $M_0 = 320$ MeV (izquierda) y $M_0 = 400$ MeV (derecha).

Esta cantidad consiste de la suma de las densidades parciales provenientes de cada nivel de Landau poblado para cada sabor. A su vez, la densidad para cada uno de estos niveles está dada por el producto de dos términos dependientes del campo. El factor $\sqrt{\mu^2 - M^2 - 2k|q_f B|}$, por un lado, proviene de la integral en la dirección p_z y está relacionada a la cantidad de estados de impulso p_z que pueden acomodarse en un nivel de Landau dado. El factor $|q_f B|$ global, por otra parte, proviene de la degeneración dada por la integral sobre p_2 que se calcula en (3.35). Es decir, cada estado con valores de p_z y k dados tiene una degeneración que es directamente proporcional al campo. Por lo tanto, este factor siempre tenderá a producir un

aumento de la densidad en función del campo y, en particular, será dominante en las fases C_0 y C_1 donde al menos una de las especies de quarks se encuentran en el NL inferior. Puede interpretarse, entonces, que la disminución de la masa en estas fases proviene del bloqueo de Pauli producido por el aumento de la densidad. Para fases con mayores valores de k, mientras tanto, existe una competencia entre el factor proveniente de los niveles de Landau y el factor global. También puede interpretarse que estos efectos son precisamente los que producen la disminución del potencial en la fase restaurada, que eventualmente conducen a la producción del pozo de anticatálisis. Puede notarse en todas las figuras que la disminución brusca del potencial químico crítico se produce alrededor de la transición vA-dH que separa las fases A_1 y A_2.

Este comportamiento también puede apreciarse en la densidad en función del campo magnético en las fases tipo A. En este caso, la simetría se encuentra completamente restaurada, por lo cual la densidad no depende de M, y de hecho se encuentra completamente determinada por el potencial químico y el campo magnético. Presentamos el gráfico correspondiente en la fig.4.7. Allí, vemos que a campos magnético hasta 0.2 GeV^2, la densidad exhibe oscilaciones que son el resultado de la competencia entre factor global $|q_f B|$, el cual siempre tiende a aumentar la densidad, y los factores provenientes de los niveles de Landau cuyo espacio de fases disponible disminuye para un k y un μ dado. Este comportamiento también tiene, como veremos más adelante, un efecto importante sobre la masa vestida en las fases tipo A en el caso no quiral. También vemos que a valores altos de eB, donde solamente el nivel de Landau $k = 0$ está poblado, la densidad aumenta en forma sostenida con el campo. La expresión correspondiente en dicho caso está dada por: $\rho = N_c|eB|\mu/2\pi^2$.

4.3. Masa corriente de quark finita

Ahora pasamos el estudio del caso no quiral del modelo NJL el cual conduce, incluso para valores pequeños de masa corriente, a diferencias cualitativas importantes. En primer lugar, el diagrama de fase pierde la propiedad de universalidad: conjuntos de parámetros asociados a distintos valores de f_π ya no están relacionados entre sí a través de un cambio de escala. Por lo tanto, en el resto de este trabajo imponemos $m_\pi = 138$ MeV y $f_\pi = 92.4$ MeV. Antes de presentar los diagramas de fases vamos a discutir los principales efectos que ocurren al incluir una masa corriente finita. En la fase A, la simetría quiral no se restaurará en forma exacta, aunque la masa vestida será pequeña y en general cercana a m_c. Las transiciones tipo vA-dH que separan a las distintas fases A_i son similares a las del caso quiral, en el sentido de que denotan el pasaje entre fases con distintos niveles de Landau ocupados. Sin embargo, ahora son de primer orden y están caracterizadas por saltos

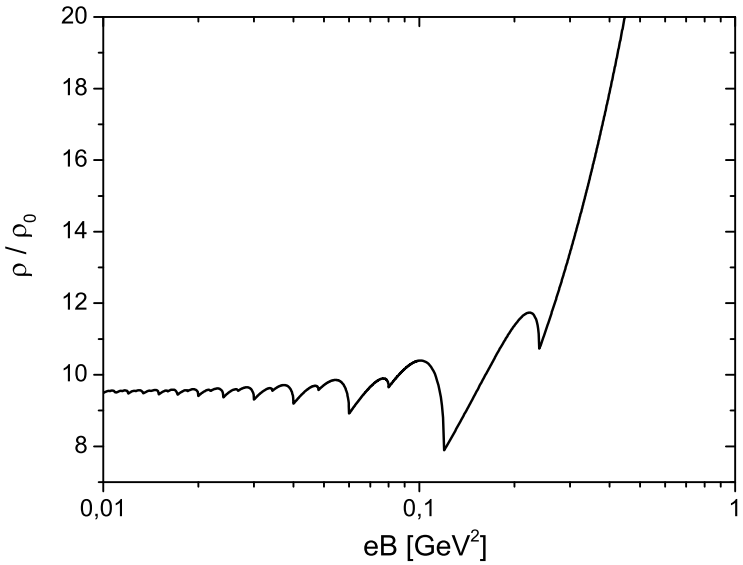

Figura 4.7: Densidad ρ como función de eB en el caso quiral, para $\mu = 400$ MeV.

débiles de la masa vestida. La posición exacta de la transición estará determinada por la competencia de los potenciales asociados a las fases vecinas con distintos niveles de Landau. De todas formas, dada la pequeña masa corriente de los quarks, esto sólo producirá un apartamiento pequeño respecto a la relación $\mu = \sqrt{2k|q_f B|}$, difiriendo apreciablemente sólo en las inmediaciones de la transición principal superior, donde la masa vestida es mayor. Por otro lado, como en este caso las distintas fases A_i están separadas por líneas de primer orden, ya no es posible distinguir entre las líneas $\ell_{\mathrm{A}i}$ y $\ell_{\mathrm{C}i}$ como se hizo en el caso quiral.

Por otro lado, las líneas que separan las fases C_i de las A_i, que son de segundo orden en el caso quiral, pasan a ser *crossovers* suaves para $m_c > 0$. En consecuencia, su posición no está unívocamente definida y a continuación discutiremos varios criterios posibles que pueden usarse para establecer dónde ocurren las mismas. Un criterio sencillo es buscar el pico en la derivada de M, ya sea respecto de μ o de eB. La elección de una variable de derivación o la otra da lugar a resultados diferentes. Sin embargo, dado que las líneas de transición son más bien paralelas al eje μ (ver fig. 4.5), en este caso encontramos que la derivada $dM/d\mu$ no siempre tiene un pico, dejando como opción la segunda posibilidad, que denotamos Def. (i).

Otra alternativa es recurrir al uso de la susceptibilidad quiral, definida como

$$\chi_{ch} = \frac{\partial < \bar{\psi}\psi >}{\partial m_c}, \tag{4.7}$$

y cuyo máximo también puede ser calculado respecto de eB [Def. (ii)] o de μ [Def.

(iii)]. Nuevamente en el primer caso se ve un conjunto de picos mejor definidos. Mientras tanto, la línea de transición en el segundo caso tiende a desaparecer cuando la masa corriente de los quarks varía de $m_c = 0$ a su correspondiente valor físico. Ahora bien, incluso en el caso en que existen los picos en las derivadas para ambas direcciones, las transiciones resultantes están en distintas posiciones, por lo que es preferible buscar alguna manera de evitar esta ambigüedad. Esto puede lograrse mediante una cuarta alternativa [Def. (iv)], que consiste de definir la línea de transición como el risco que exhibe la susceptibilidad quiral graficada como función de las dos variables. Partiendo del valor máximo de χ en una dada región, se la puede definir trazando la trayectoria cuyo vector tangente en cada punto coincide con la dirección en la cual el gradiente en el plano $eB-\mu$ es mínimo. En la fig.4.8 incluimos las transiciones resultantes de estos criterios, donde el panel izquierdo corresponde

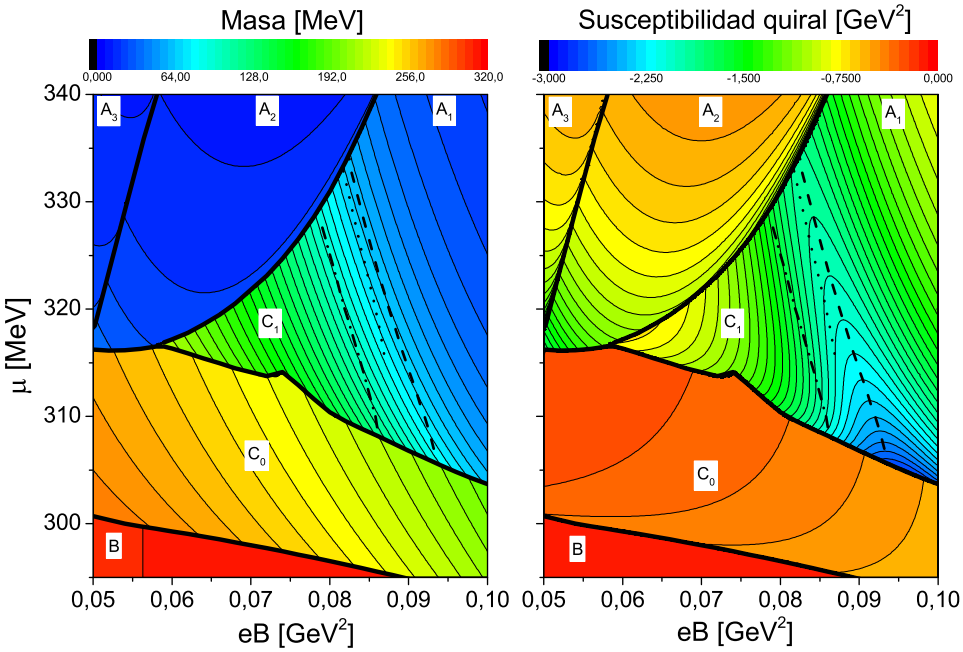

Figura 4.8: Curvas de nivel de la masa vestida (izquierda) y susceptibilidad quiral (derecha) en el plano $eB - \mu$. G y Λ corresponden a $M_0 = 300$ MeV del lḿite quiral, pero con $m_c = 1$ MeV. Las líneas negras llenas representan transiciones de primer orden. Las diferentes definiciones dadas en el texto son usadas para obtener las transiciones del tipo *crossover*: Def. (i) (pico de dM/dB) está representada por la línea rayado-guionada, la Def. (ii) por una línea guionada y la Def. (iii) por una línea punteada. La Def. (iv) corresponde a la línea de "menor descenso" partiendo del pico absoluto de la susceptibilidad quiral (región azul oscura en el panel derecho), la cual básicamente coincide con la def.(ii).

a las curvas de nivel de la masa en el plano $eB - \mu$ y el panel derecho corresponde a la susceptibilidad. Para estos gráficos se escogieron los valores de Λ y g asociados al caso quiral con $M_0 = 300$ MeV pero m_c es arbitrariamente puesto a $m_c = 1$ MeV. Aunque no es un caso de interés físico, para este conjunto de parámetros es posible usar todas las formas alternativas de definir la transición mencionada arriba (en particular, también aquella asociada al pico de $d\chi_{ch}/d\mu$, que desaparece rápidamente cuando m_c crece). De esta forma uno puede obtener una medida de la ambigüedad en estas definiciones. En la fig.4.8, la línea rayada punteada gruesa corresponde a Def. (i), la línea rayada a Def. (ii) y la línea punteada a Def. (iii). En el panel de la izquierda de esta figura es bastante claro que la última definición conduce a otra línea de transición, que básicamente coincide con la obtenida mediante la Def. (iv), y que a su vez corresponde con la línea de "menor descenso" desde el pico absoluto de la susceptibilidad quiral (región azul oscuro). Aunque algunas definiciones alternativas aún son posibles (por ejemplo, la línea contorno en el diagrama de susceptibilidad que, en el punto de contacto, es tangente a la línea de primer orden que separa las fases C_1 o A_1 de las A_2) podemos ver que las distintas definiciones conducen a resultados cualitativamente similares. Por lo tanto, en lo que sigue vamos a usar la Def. (iv), recordando que para establecer en forma más rigurosa la existencia de la transición, uno debería poder definirla de más de una forma. Esto impone el requerimiento de que la Def. (iv) debe ser complementada con la condición de que exista al menos una región de cada lado de la curva tal que haya un máximo en la susceptibilidad para cualquier camino arbitrario que conecta las dos regiones. Como corolario de esta discusión, notamos que la ubicación de los puntos críticos es equivalente a los puntos s_i y t_i discutidos en la sección anterior y están también sujetos a ambigüedades.

4.3.1. Diagrama de fases en el plano $eB - \mu$

Los diagramas de fase en el plano $eB - \mu$ para valores diferentes de M_0 son presentados en la fig.4.9. Aparte de las características particulares discutidas en la sección anterior, observamos que la tendencia general es similar a aquella del caso quiral dada en fig.4.5: para valores bajos de M_0 hay varias transiciones que se fusionan a medida que M_0 aumenta, formando una estructura con dos transiciones principales. Además, el diagrama de fases para un dado M_0 en el caso quiral es siempre similar a otro del caso no quiral con un valor mayor de M_0. Por otro lado, las transiciones del tipo *crossover* entre C_i y A_i, presentes para el Set $M_0 = 300$ MeV, desaparecen rápidamente, permaneciendo sólo las correspondientes a $i = 0, 1$ en los diagramas con $M_0 = 320$ MeV hasta $M_0 = 360$ MeV. Para m_c finito, el valor de M_0 a partir del cual hay una única transición es 375.9 MeV, donde desaparece la fase C_0. Por otro lado, la fase C_1 deja de existir para valores de M_0 apenas por arriba de 360 MeV. La forma en que las curvas se fusionan a medida que M_0 aumenta es

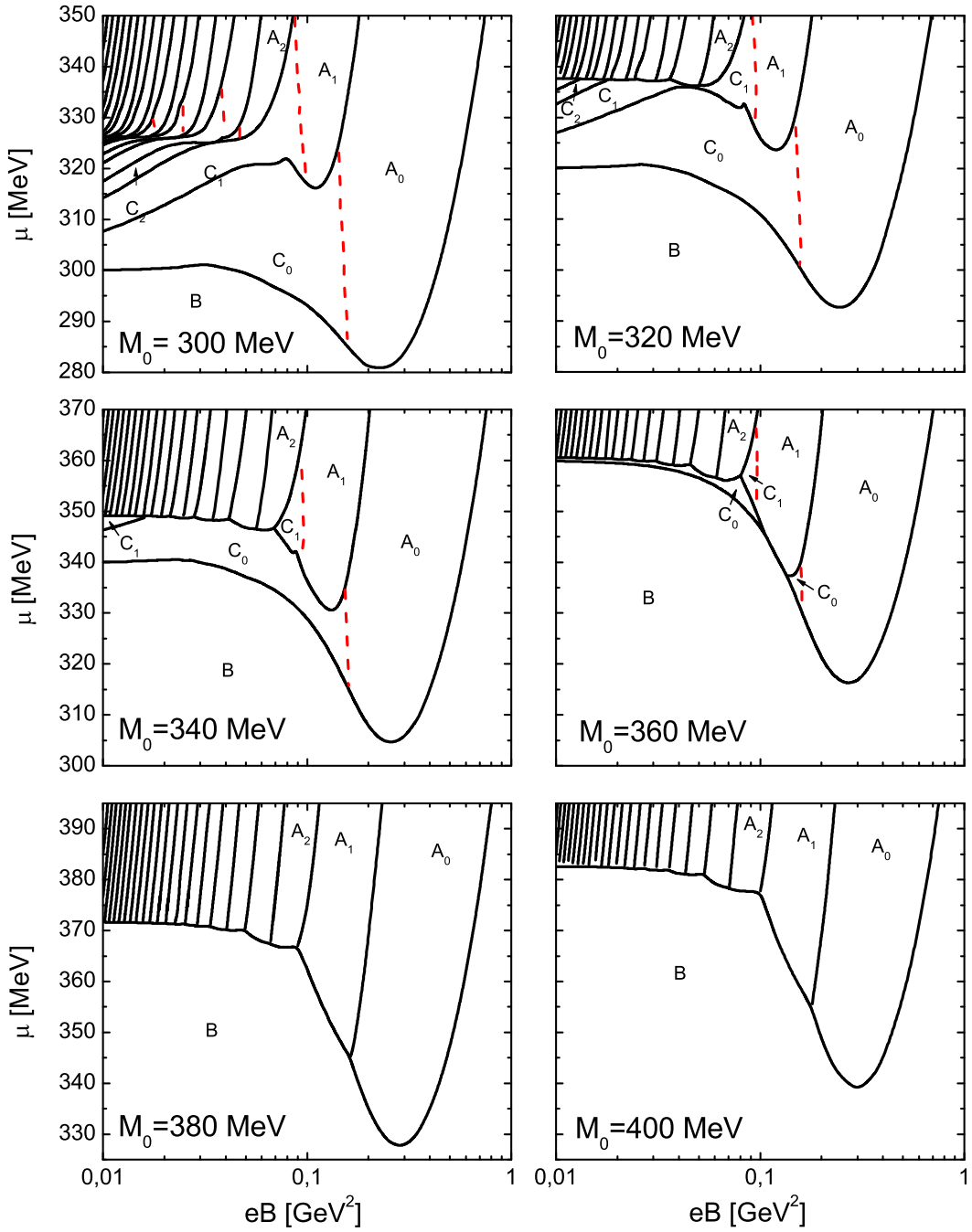

Figura 4.9: Diagramas de fase en el plano $eB - \mu$, para masas corrientes de quark finitas y varios valores representativos de M_0. Las líneas negras llenas representan transiciones de primer orden y las líneas rojas guionadas representan *crossovers*. Las fases están denotadas como en la fig.4.4.

cualitativamente similar al caso quiral. Estas son exhibidas en la fig.4.10 donde mostramos el detalle de los diagramas $eB-\mu$ para $M_0 = 300$ MeV (panel izquierdo) y $M_0 = 310$ MeV (panel derecho). Las curvas desarrollan una región horizontal con forma cúbica, a través de la cual se ponen en contacto. Eventualmente, la transición principal superior se forma a partir de la unión de estos segmentos horizontales. Las ramas verticales que yacen por encima de la transición principal (es decir, aquellas separando las fases A_i) siguen existiendo a medida que M_0 aumenta, mientras que las ramas inferiores eventualmente desaparecen. En la fig.4.10 también se ve que las curvas se juntan de a pares, donde se han coloreado las curvas de transición en esta figura para indicar cuales curvas se unen primero entre sí. Por ejemplo, la primera línea a la derecha, correspondiente a la población simultánea del segundo nivel de Landau del quark d y el primer nivel del quark u, se fusiona con la siguiente curva que corresponde a la población del tercer nivel de Landau del d.

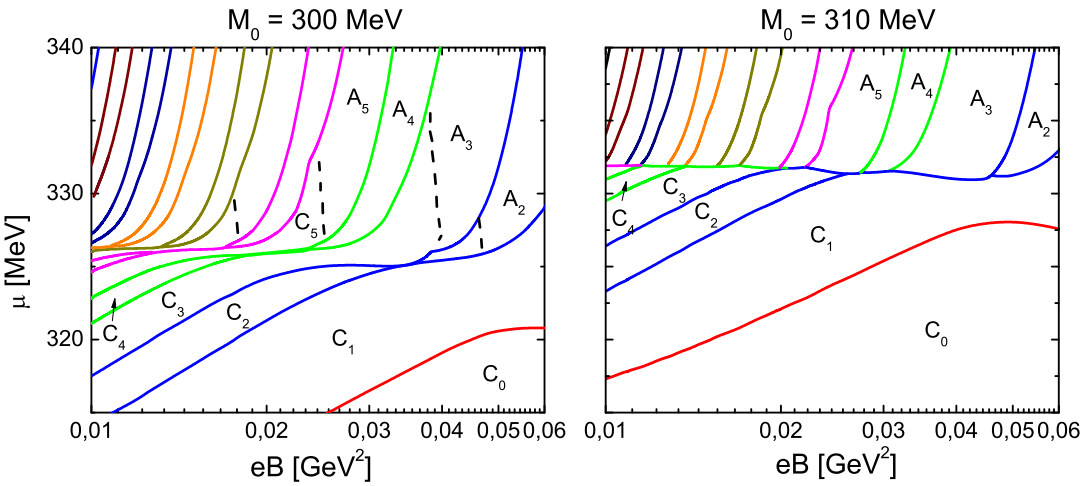

Figura 4.10: Detalle del diagrama de fase en el plano $eB-\mu$ para el caso de masas corrientes de quark finitas para $M_0 = 300$ MeV (panel izquierdo) y $M_0 = 310$ MeV (panel derecho). Las fases están denotadas como en la fig.4.4.

Terminamos esta sección describiendo el efecto de catálisis inversa para el caso en que existe una masa corriente finita. En la fig.4.11, exhibimos el comportamiento de la masa como función del campo magnético para varios potenciales químicos, y para los valores $M_0 = 320$ MeV y $M_0 = 400$ MeV. La compleja estructura de fases para $M_0 = 320$ MeV explica los diferentes posibles comportamientos dependiendo del potencial químico. Para $\mu = 290$ MeV, el sistema está en la fase B para todo el rango de campos magnéticos, por lo cual la masa aumenta con el campo. Para $\mu = 310$ MeV se ve un comportamiento similar, excepto por la sección intermedia donde el sistema pasa por una fase C_0 y una A_0 antes de volver a la fase de vacío

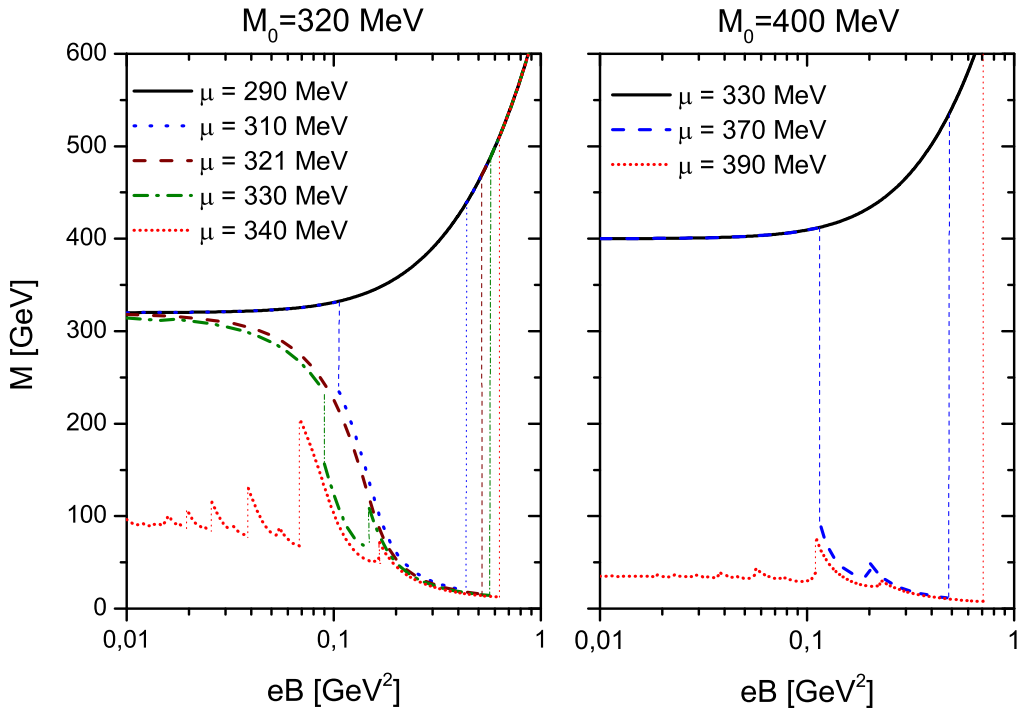

Figura 4.11: Masa vestida de quarks M como función de eB para valores representativos del potencial químico, usando los conjuntos de parámetros asociados a $M_0 = 320$ MeV (panel izq.) y $M_0 = 400$ MeV (panel derecho).

nuevamente. Contrario al caso quiral, la transición de C_0 a A_0 no es particularmente notable, dado que dicha transición está a lo sumo identificada por un pico en la susceptibilidad o derivadas del parámetro de orden, como ya fue discutido. En esta región de la curva, así como en el resto de las curvas siguientes, el efecto de catálisis inversa también está presente. En particular, para $\mu = 321$ MeV, el sistema está en la fase C_0 para un rango grande de campos magnéticos, donde la masa decrece sostenidamente. Este efecto no difiere cualitativamente de aquel observado en el caso quiral.

Para los potenciales químicos correspondientes a la región A, la masa exhibe oscilaciones y, en particular, encontramos que en general disminuye dentro de una misma fase, a lo sumo aumentando levemente antes de la transición vA-dH a una fase con i menor. Por otro lado, cuando nos movemos a una fase de mayor i, de modo de poblar nuevos niveles de Landau, el salto en la masa será hacia un valor menor. Comparando este comportamiento con el de la densidad en la fig.4.7, vemos que hay una relación estrecha entre las oscilaciones de ambas magnitudes. Dado que las masas vestidas son pequeñas en esta fase, no alteran significativamente el comportamiento de la densidad, y por lo tanto, se puede concluir que las oscila-

ciones del parámetro de orden están determinadas por los efectos de densidad que conducen al bloqueo de Pauli. De esta manera, concluimos que en la fase C_0, donde la masa disminuye al aumentar eB, dominan los términos de energía de vacío y de materia (correspondiente al NL inferior), mientras que en las fases tipo A el comportamiento de la masa está dominado por efectos relacionadas con la disponibilidad del espacio de fases. Para campos magnéticos grandes, también es posible que la masa aumente dentro de la fase A_0, debido a que empieza a hacer efecto el término de vacío magnético, que favorece aumentos de las masas. Se observa que con cierta generalidad ocurre que en las fases con densidades de quarks no nulas, M es típicamente una función decreciente del campo magnético, mientras que el fenómeno de catálisis ocurre principalmente en la fase de vacío.

Capítulo 5

Interacciones generalizadas

A continuación analizaremos cómo las características de la materia densa y magnetizada son afectadas por la variación de constantes de acoplamiento asociadas a interacciones de carácter más general. Primero analizaremos el caso de materia simétrica, en el cual estudiaremos el comportamiento del diagrama de fases variando el grado de mezcla de sabor. En este caso, el campo magnético induce una ruptura explícita de la simetría $SU(2)_V$, por lo cual los sabores u y d tendrán comportamientos distintos. Luego, pasaremos a estudiar el efecto de las interacciones vectoriales, que introducirán campos ω_f que conducirán a potenciales químicos modificados $\mu_f \to \tilde{\mu}_f = \mu_f - \omega_f$. Finalmente, en la última sección, impondremos condiciones de equilibrio β y neutralidad de carga eléctrica.

5.1. Efecto de interacciones con mezcla de sabor variable

En esta subsección discutiremos cómo se modifican los diagramas de fases al variar el grado de mezcla de sabor en ausencia de interacciones vectoriales. Este caso corresponde a elegir $c_v = g_v = 0$, mientras que c_s se tomará como un parámetro libre que puede variar entre 0 y 0.5. El potencial termodinámico se obtiene a partir de (2.112), implementando la prescripción de campo magnético de la misma forma que se hizo para obtener la expresión (4.2), pero teniendo en cuenta ahora que el término de interacción de vacío se ve modificado por la presencia de interacciones adicionales, por lo que los campos u y d pueden desarrollar valores medios diferentes. La expresión resultante es:

$$\begin{aligned}\Omega^{\text{MFA}}(\mu, eB, M_u, M_d) &= \Omega_{FM}(M_u, M_d) \\ &+ N_c \sum_{f=u,d} \Big[\Omega_{VAC}(M_f) + \Omega_{MAG}(q_f B, M_f) + \Omega_{MED}(\mu, q_f B, M_f)\Big],\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde hemos definido

$$\Omega_{FM}(M_u, M_d) = \frac{(1-c_s)(M_u-m_c)^2}{8g_s(1-2c_s)} + \frac{(1-c_s)(M_d-m_c)^2}{8g_s(1-2c_s)} - \frac{c_s(M_u-m_c)(M_d-m_c)}{4g_s(1-2c_s)}, \tag{5.2}$$

que se obtiene a partir de (2.111) poniendo $\omega_u = \omega_d = 0$. Notemos que el tercer término de esta expresión es el responsable del acoplamiento entre M_u y M_d. Como vemos, esta elección conduce a un sistema de dos ecuaciones en los que M_u y M_d son variables independientes, y cuyo grado de acoplamiento está determinado por el parámetro c_s. Las masas de los quarks u y d son tomados como parámetros de orden distintos, por lo que existirán transiciones de fase independientes para cada uno de ellos, que pueden ocurrir separadamente o coincidir en ciertas regiones. Por otro lado, el caso de mezcla máxima de sabores, que fue discutido en el capítulo anterior, se recupera tomando $c_s = 0.5$. En dicho límite, $\Omega_{FM}(M_u, M_d)$ es divergente a menos que las dos masas de los quarks sean idénticas, lo cual nuevamente reduce el sistema a una ecuación para una única masa. En lo que sigue haremos un análisis de la dependencia con el parámetro de mezcla de sabores. Si bien es sabido que la fenomenología de $SU(3)$ predice $c_s \simeq 0.2$ para este parámetro, también es interesante ver qué tan robusto es el comportamiento del sistema al variarlo entre 0 y 0.5 e investigar las distintas fases posibles.

Basándonos en los resultados obtenidos en el capítulo anterior, vemos que la mayoría de las características cualitativas de los diagramas de fases en el plano $eB-\mu$ pueden describirse refiriéndose solamente a unos pocos conjuntos de parámetros, por lo cual alcanza con seleccionar dos de ellos. En la fig. 5.1, presentamos entonces los diagramas de fases con distintos grados de mezcla de sabor para los conjuntos de parámetros con $M_0 = 340$ MeV y 400 MeV, a los cuales nos referiremos de aquí en más como Set 1 y Set 2, respectivamente. Dado que en este caso existen parámetros de orden para cada sabor por separado, la notación para las fases debe modificarse respecto a los diagramas de la sección anterior. Ahora, la fase asociada a cada sabor debe indicarse independientemente, por lo que se requieren dos números. El estado de vacío se representará nuevamente con la letra B, mientras que una fase C_k estará denotada directamente por la letra k, y una fase A_k estará denotada por $\bar{k}$. De esta manera, por ejemplo, una fase que se encuentra en vacío para el quark u y en la fase A_1 para el quark d será denotada como $B\bar{1}$. Los dos paneles superiores de la fig. 5.1 corresponden a $c_s = 0$, caso en el cual los sabores u y d no interactúan mutuamente. Como puede verse en (5.2), el tercer término en Ω_{FM} se anula, por lo cual queda una ecuación de gap para cada sabor, desacopladas entre sí. A causa de esto, cada sabor tendrá, en cierto sentido, su propio diagrama de fase independiente del otro. En dichos paneles, cada línea corresponde a una transición para un solo sabor de quarks (líneas rojas para quarks d y azules para quarks u). Recordemos que la simetría $SU(2)_V$ se rompe en presencia del campo magnético, ya que las

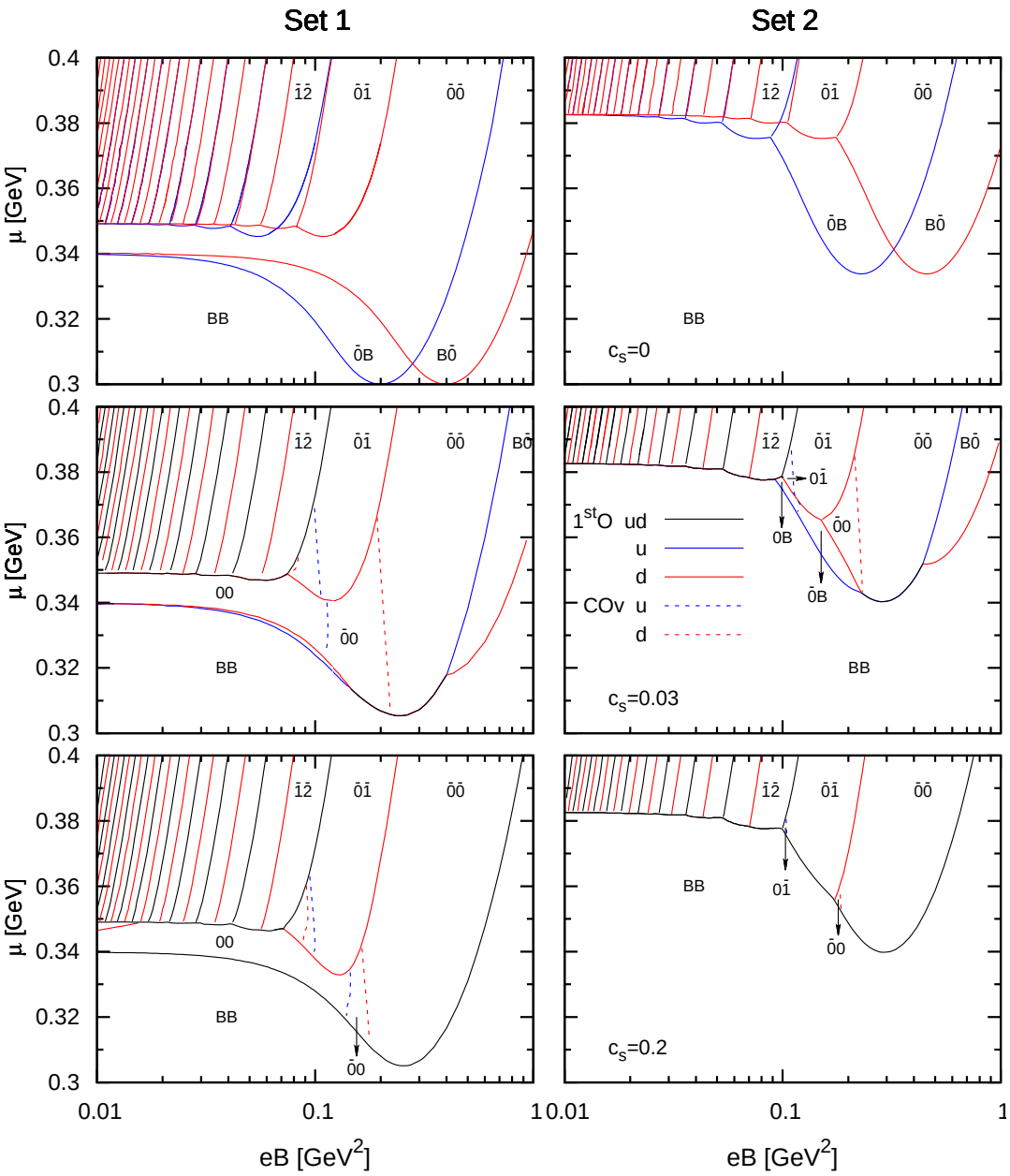

Figura 5.1: Diagramas de fase en el plano $eB-\mu$ para materia simétrica con distintos valores del parámetro c_s y sin interacciones vectoriales.

cargas eléctricas de los quarks son diferentes. Por otra parte, para $eB = 0$, donde dicha simetría se recupera, las transiciones de los dos sabores coinciden. Como el valor de la carga es la única diferencia entre las ecuaciones para ambos sabores y dado que esta sólo aparece en el producto $q_f B$, el diagrama de fases para el quark

d puede de hecho obtenerse a partir de aquel del quark u a través del reemplazo $q_u B = (2q_d)B = q_d(2B)$, lo cual es equivalente a estirar el diagrama de fases del quark u a lo largo del eje de campo magnético. En otras palabras, dado que el quark d se acopla al campo con la mitad de la intensidad, se precisará un campo magnético el doble de grande para reproducir el efecto sobre un quark u. Los pozos de CMI van a estar desplazados uno respecto del otro, y habrá una región bien definida donde los quarks u ocupan el nivel de Landau inferior, y los quarks d están en vacío, y otra región donde se da el comportamiento opuesto.

Si ahora pasamos al caso $c_s = 0.03$ (segunda fila en fig. 5.1), los efectos de la mezcla de sabor ya comienzan a hacerse presentes. Se observa la competencia entre el campo magnético, que tiende a romper la simetría $SU(2)_V$ y el parámetro c_s, que tiende a reestablecerla. Si bien el acoplamiento es débil, en ciertas regiones las transiciones u y d se acercan y en algunos puntos incluso se unen (líneas negras). Por ejemplo, las transiciones para ambos conjuntos de parámetros ocurren simultáneamente para campos magnéticos chicos, separándose para $eB = 0.02$ GeV^2 en el Set 1 y $eB = 0.1$ GeV^2 en el Set 2. Sin embargo, notamos que para un campo magnético más alto se vuelven a unir. Esto ocurre porque a la altura de los pozos CMI, para $eB = 0.12$ GeV^2, dichas transiciones se cruzan incluso en el caso $c_s = 0$ (para ambos conjuntos de parámetros). Cuando introducimos mezcla de sabores, este punto de intersección se convierte en una línea, cuyo largo aumenta a medida que c_s se tiende a 0.5. Para $c_s = 0.03$ las transiciones se separan nuevamente para $eB = 0.4$ GeV^2, mientras que para $c_s = 0.2$, las transiciones de ambos sabores ya se juntaron por completo en el rango de campos magnéticos considerado. Sin embargo, se puede suponer que para valores más allá de $eB = 1$ GeV^2 se vuelven a separar, y que para cualquier valor de $c_s < 0.5$ siempre habrá un campo magnético lo suficientemente grande que produzca que las transiciones u y d se separen.

En cuanto a las transiciones vA-dH, las que corresponden al quark d ocurrirán con el doble de frecuencia que las del quark u al atravesar el diagrama de fases horizontalmente, al igual que en el caso discutido en el capítulo anterior. En el caso $c_s = 0$, las transiciones pares del quark d diferirán levemente de las del quark u, debido a la diferencia entre las masas constituyentes. Por otro lado, al aumentar μ, dichas transiciones comienzan a coincidir pues ambas masas vestidas se acercan al valor de masa corriente. Al aumentar la mezcla de sabor, las transiciones vA-dH se acercan rápidamente entre sí, ya ocurriendo prácticamente juntas para el caso $c_s = 0.03$.

En la fig. 5.2 graficamos las masas vestidas para ambos sabores para el Set 2, con $c_s = 0.03$ y $eB = 0.11$ GeV^2, donde se muestra un comportamiento típico para las masas en función de μ. La primera discontinuidad ocurre en $\mu = 370$ MeV y corresponde a una transición del quark u, donde se puebla el nivel de Landau inferior ($k_u = 0$) y M_u salta en forma discontinua a algo menos que la mitad de

su valor en vacío. El quark u está en una fase C_0, como puede verse en el panel correspondiente de la fig. 5.1, donde el *crossover* a la fase A_0 está levemente a su derecha. El quark d, por otro lado, permanece en estado de vacío. Su masa disminuye levemente, pero esto ocurre debido a su acoplamiento al quark u, y no se interpreta como una transición propia del d. La transición análoga correspondiente al quark d ocurre para $\mu = 374$ MeV. Es interesante notar la diferencia entre las masas en cada fase. En el vacío, $M_u > M_d$, como consecuencia del efecto de catálisis magnética. En las fases en las que hay población de ambas especies de quarks, por otro lado, el quark d tiene mayor masa, lo cual es consistente con el hecho de que a densidad finita la masa disminuye con el campo magnético, como se discutió en el capítulo anterior.

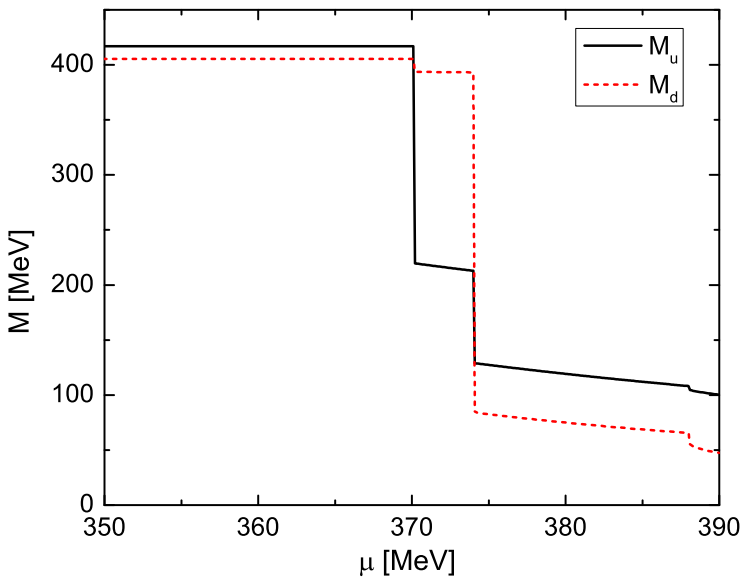

Figura 5.2: Masas vestidas para los sabores u y d, para el Set 2, $c_s = 0.03$, para $eB = 0.11$ GeV^2.

Respecto al comportamiento de los *crossovers*, notamos que para $c_s = 0$ hay solamente uno para cada especie de quark. Para $c_s = 0.03$, aquel asociado al quark u adquiere una pequeña discontinuidad, ya que el segmento que yace en la fase 00 se desplaza hacia la derecha respecto al segmento en 01. Al aumentar c_s, los *crossovers* del u y el d en la fase 00 se acercan entre sí, uniéndose en el límite $c_s = 0.5$. En la fase 01 ocurre algo similar, donde el *crossover* del quark u se desplaza lateralmente hacia campos magnéticos menores. Este se fusionará con otro que aparece desde la región izquierda de esta fase, el cual es visible en la esquina inferior del diagrama del Set 1 con $c_s = 0.03$. Es interesante notar que en todos los casos, el límite en el cual los *crossovers* u y d se han unido es alcanzado muy lentamente, estando estos

aún separados entre sí para $c_s \simeq 0.4995$.

Para cuantificar el efecto del parámetro de mezcla de sabores, en la fig. 5.3 presentamos un diagrama con el potencial químico crítico de las transiciones principales en función del parámetro c_s para algunos valores representativos de los campos magnéticos. Acá vemos que las transiciones de primer orden de ambos sabores se acercan rápidamente y sólo para $c_s < 0.1$ son relevantes dichos efectos de mezcla. Por lo tanto, podemos concluir que para el caso realista $c_s \simeq 0.2$, las mismas ya ocurren juntas en todo el rango de eB estudiado, y que el comportamiento cuantitativo es similar al caso de mezcla máxima de sabor $c_s = 0.5$. Por otra parte, como ya hemos dicho, las líneas vA-dH se unen para un valor de c_s especialmente bajo, coincidiendo ya para el caso estudiado de $c_s = 0.03$, mientras que los *crossovers* tienden mucho más lentamente al comportamiento $c_s = 0.5$.

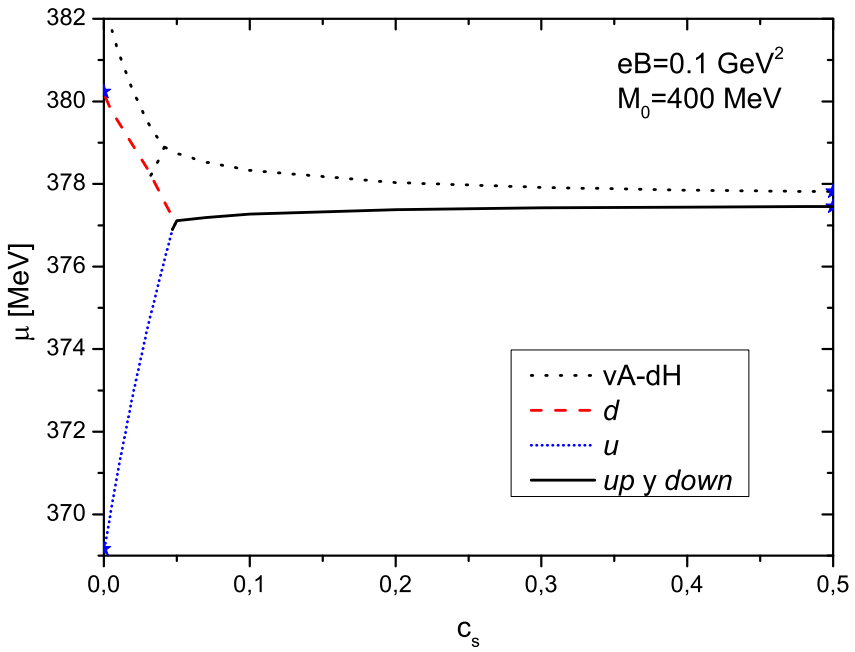

Figura 5.3: Potenciales químicos críticos en función de c_s. Set 2 y $eB = 0.1$ GeV^2.

5.2. Efecto de las interacciones vectoriales

En esta sección analizaremos el efecto de los términos de interacción vectorial. Al incluir dichos términos de interacción en presencia de campo magnético y a potencial químico finito, el potencial termodinámico resulta:

$$\Omega_{MFA}(\mu, eB, M_u, M_d, \omega_u, \omega_d) = \Omega_{INT}(M_u, M_d, \omega_u, \omega_d) + N_c \sum_{f=u,d} \Big[\Omega_{VAC}(M_f) + \Omega_{MAG}(q_f B, M_f) + \Omega_{MED}(\tilde{\mu}_f, q_f B, M_f)\Big], \quad (5.3)$$

donde Ω_{VAC} se encuentra definido por (2.84), Ω_{MAG} se definió en (3.68) y Ω_{MED} fue definido en (4.1), donde hemos hecho el reemplazo $\mu \longrightarrow \tilde{\mu}_f = \mu - \omega_f$. Para la interacción vectorial en su forma más general existen dos parámetros a ser regulados, c_v y g_v/g_s. Sin embargo, se puede demostrar que variar c_v entre 0 y 0.5 sólo produce cambios cuantitativos pequeños en el comportamiento de M_f, y no altera cualitativamente los diagramas de fases, con lo cual alcanza con discutir detalladamente el caso $c_v = 0$. Cabe destacar que para esta elección de c_v, los campos ω_f son proporcionales a la densidad, estando la relación dada por:

$$\rho_f = \frac{\omega_f}{4g_v}. \tag{5.4}$$

Como vimos en la sección anterior, por otro lado, para $c_s \gtrsim 0.1$ los diagramas de fases son relativamente robustos ante variaciones adicionales de dicho parámetro. Por lo tanto, fijaremos el valor $c_s = 0.2$, dado que este además yace en el rango de valores realistas sugeridos en Ref. [56].

En la fig.5.4 presentamos los diagramas de fases para diferentes intensidades de interacción vectorial. Para el Set 1 observamos que a medida que g_v/g_s aumenta, las dos transiciones principales se separan y en la región de eB chico-intermedio, varias fases nuevas del tipo C se hacen presentes. Para $g_v/g_s = 0.5$, la transición principal superior se ha descompuesto en varias curvas, prolongándose así las transiciones tipo vA-dH hacia potenciales químicos menores. Para el Set 2 hay una única transición principal para $g_v = 0$, la cual se separa en dos ya para $g_v/g_s \simeq 0.1$, dejando una fase 00 entre medio que antes no estaba presente. Para $g_v/g_s = 0.3$ y 0.5, los diagramas de fases son similares al del Set 1 sin interacción vectorial, lo cual es consistente con el comportamiento a $eB = 0$ descrito en Ref. [66]. Como observación general, puede decirse que al aumentar g_v/g_s desde 0, la estructura de fases se modifica en forma similar a la observada cuando se modifican los parámetros de modo que disminuya M_0, lo cual se discutió en el capítulo anterior. La existencia de nuevas transiciones a eB chico, a medida que aumenta g_v/g_s, también puede verse en el panel izquierdo de la fig.5.5, donde mostramos la densidad de los quarks d normalizadas a la densidad de materia nuclear, como función del potencial químico para $eB = 0.016$ GeV^2 en el Set 1. En ausencia de interacciones vectoriales, la densidad salta de cerca de 0 a 3 veces la densidad de materia nuclear, mientras que la población de quarks salta de 00 a una fase donde varios niveles de Landau están ocupados.

Es interesante analizar la influencia de las interacciones vectoriales sobre la profundidad del pozo de CMI. En la fig.5.4, observamos que dicho pozo disminuye al aumentar el parámetro. De hecho, si definimos la profundidad del pozo CMI como la diferencia entre el potencial químico crítico a $eB = 0$ y el valor más pequeño alcanzado por μ_c en todo el diagrama, encontramos que esta diferencia se reduce en un 84 % para el Set 1 y en un 67 % para el Set 2 cuando vamos de $g_v = 0$ a $g_v/g_s = 0.5$. Para explicar esta característica, recordamos que el efecto CMI puede ser enten-

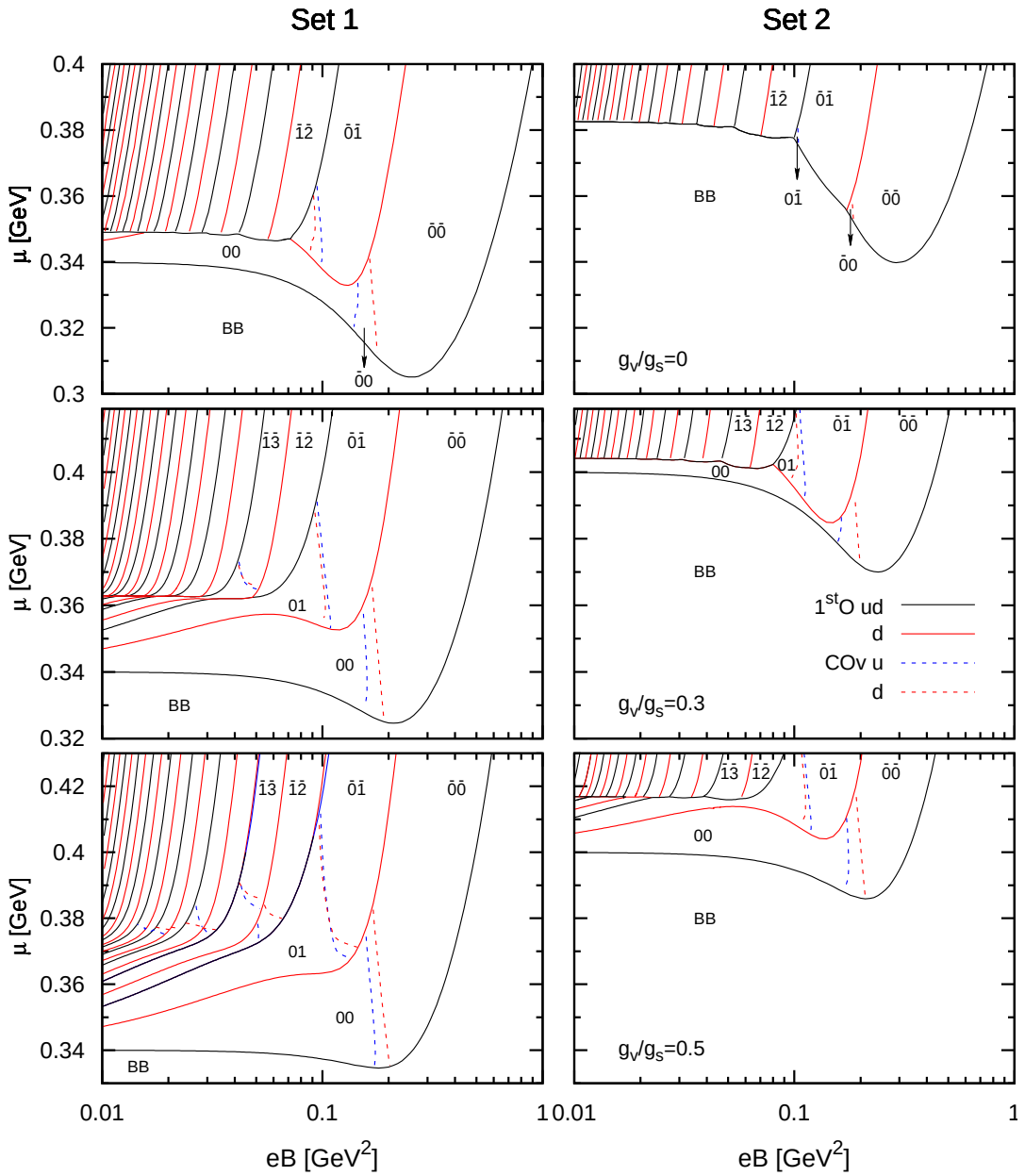

Figura 5.4: Diagramas de fase en el plano $eB-\mu$ para materia simétrica con $c_s = 0.2$ y varios valores de g_v/g_s.

dido en términos del costo adicional en energía libre para formar un condensado fermión-antifermión a μ finito, Ω_{ext} [45]. En ausencia de interacciones vectoriales, este costo adicional se origina básicamente en la contribución al término de materia proveniente del NL inferior. Considerando, por simplicidad, el límite quiral, vemos

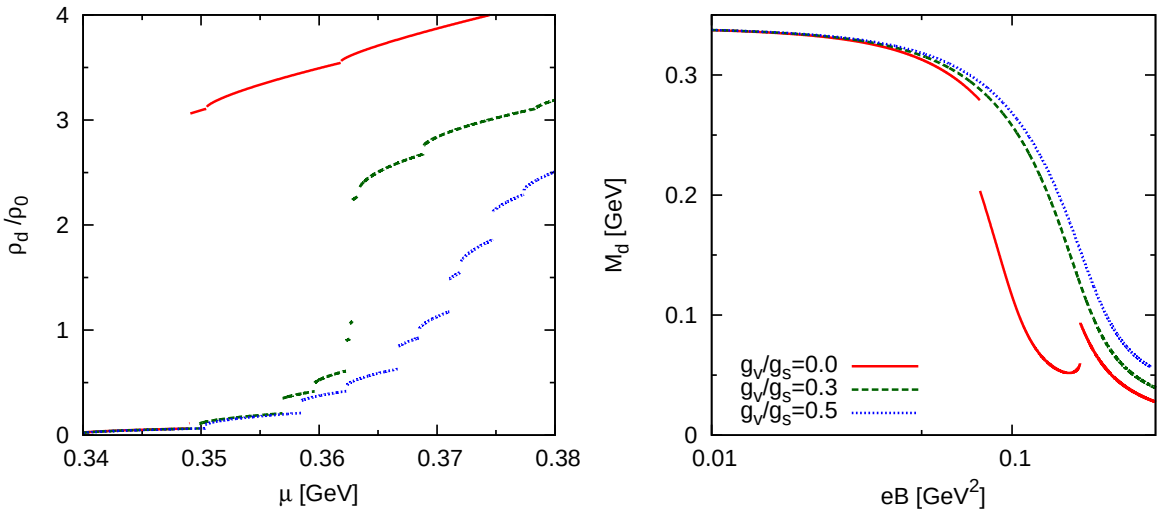

Figura 5.5: Densidad de quarks sobre densidad de materia nuclear en función del potencial químico para $eB = 0.016$ GeV^2 (izquierda) y masa corriente en función del campo magnético para $\mu = 0.345$ GeV (derecha) para distintos valores de g_v/g_s y $c_s = 0.2$. Los resultados corresponden al Set 1.

a partir de (4.1) que para materia simétrica esta contribución es proporcional a $|eB|\mu^2$, y que tiende a disminuir la diferencia en energía libre entre la fase de vacío y la de densidad finita. Como se ve en (5.3), la presencia de interacciones vectoriales introduce algunas modificaciones en Ω_{ext}. En el caso del término del medio, implican el reemplazo $\mu_f \to \tilde{\mu}_f = \mu_f - \omega_f$. Además, hay una nueva contribución proveniente de Ω_{INT}. Por lo tanto, asumiendo como arriba que los NL inferiores dominan y que los quarks son no masivos en la fase restaurada, el costo adicional para materia simétrica es:

$$\Omega_{ext} = \frac{N_c}{4\pi^2} \sum_f |q_f B|(\mu - \omega)^2 + \frac{\omega^2}{4g_v} \tag{5.5}$$

donde, por simplicidad, hemos asumido que $c_v = 1/2$, por lo que $\omega = \omega_u = \omega_d$. La generalización para valores arbitrarios de c_v es inmediata y, además, la dependencia numérica en c_v de las estimaciones hechas es despreciable. Por supuesto ω debe satisfacer la ecuación de gap asociada. Por lo tanto, la solución de esta ecuación es:

$$\omega = \left[1 + \frac{\pi^2}{N_c g_v \sum_f |q_f B|}\right]^{-1} \mu \tag{5.6}$$

Reemplazando en (5.5) obtenemos que Ω_{ext} puede ser expresado en una forma

similar a la obtenida en ausencia de interacciones vectoriales, pero donde μ debe ser multiplicado por un factor $1/\sqrt{1+N_c g_v |eB|/\pi^2}$. Por lo tanto, en la región $eB \sim 0.2$ GeV^2 alrededor de la cual esta expresión vale aproximadamente, tenemos que:

$$\frac{\mu_c(g_v)}{\mu_c(0)} \simeq \sqrt{1+\frac{N_c}{\pi^2}\,|eB|\;g_v}. \tag{5.7}$$

Por ejemplo, para el Set 2 obtenemos que el menor potencial químico crítico (que ocurre alrededor de $eB = 0.24$ GeV^2) aumenta en un 10 % aproximadamente cuando se va de $g_v = 0$ a $g_v/g_s = 0.5$. Junto con el hecho de que el menor μ_c a campo magnético cero permanece constante para valores alrededor de $g_v/g_s \gtrsim 0.1$, esto explica la fuerte reducción del pozo de CMI.

Otro aspecto de la reducción del fenómeno CMI inducido por la presencia de interacciones vectoriales puede ser observado en el panel derecho de la fig. 5.5. Ahí, graficamos la masa corriente de quarks d en función del campo magnético para el Set 1, $\mu = 345$ MeV y varios valores de g_v/g_s, donde el sistema está en una fase 00 en $eB = 0$. Como vimos en el capítulo anterior, la masa disminuye como función de eB. Sin embargo, dicha disminución es menos pronunciada para mayores valores de g_v. Las discontinuidades que aparecen en $g_v/g_s = 0$ corresponden a transiciones de quarks d de la fase 00 a la fase $\bar{0}\bar{1}$ y viceversa.

5.3. Resultados para materia eléctricamente neutra bajo equilibrio β

En la última sección de este capítulo, estudiamos los efectos de imponer condiciones de neutralidad de carga y equilibrio β ante procesos débiles. Al imponer dichas condiciones, se cumple la relación (2.114) entre los potenciales químicos de los quarks u y d, que tomarán valores diferentes, ocasionando una ruptura explícita del grupo $SU(2)_V$. Siguiendo la discusión de la sección anterior, sólo resultados para $c_s = 0.2$ serán presentados. A pesar de que vimos que este valor es cercano al de mezcla máxima, los sabores ahora tendrán comportamientos diferentes y, en particular, las densidades de los sabores serán necesariamente distintas a menos que ambas sean cero. El potencial termodinámico está dado por:

$$\Omega_{NEUT} = \Omega_{MFA} + \sum_{l=e,\mu} \Omega_{MED}(\mu_e, eB, m_l), \tag{5.8}$$

donde ahora se considera un término del medio asociado a los leptones que tiene la forma (4.1), mientras que el primer término está dado por (5.3), para el cual ahora se debe evaluar cada sabor en su propio valor de potencial químico. Estos se

relacionan con el potencial químico electrónico μ_e y el potencial químico de número de quarks μ mediante la relación $\mu_f = \mu - q_f \mu_e$.

Los diagramas de fase en el plano $eB - \mu$ para ambos conjuntos de parámetros y para valores crecientes de g_v/g_s están graficados en la fig. 5.6. La introducción de condiciones de neutralidad de carga y de equilibrio β tiene efectos similares a los de interacción vectorial, en el sentido de que los diagramas ahora se comportan como aquellos correspondientes a conjuntos con M_0 menor: las transiciones principales se separan para valores de eB pequeños y varias transiciones aparecen en la región entre medio. El efecto de catálisis inversa se reduce también: la profundidad del pozo CMI, como fue definido en la sección previa, disminuye en un 74 % para el Set 1 y en un 49 % en el Set 2. Esto puede entenderse generalizando al caso presente la discusión dada en la sección anterior. Alrededor del potencial químico crítico mínimo, que ocurre en $eB \sim 0.2$ GeV^2 en ausencia de interacciones vectoriales, el costo adicional en energía libre para crear el par fermión-antifermión a μ finito es proporcional a $eB\bar{\mu}^2$ con $\bar{\mu}^2 = \sum_f |q_f|\mu_f^2 + \mu_e^2/3$. Aquí, una contribución muónica que generalmente es pequeña ha sido despreciada. Usando las relaciones obtenidas a partir de las condiciones de equilibrio β, $\mu_f = \mu - q_f\mu_e$, obtenemos $\bar{\mu} = \mu(1 - 2x/3 + 2x^2/3)^{1/2}$, donde $x = \mu_e/\mu$. Notemos que el signo negativo en el término (dominante) lineal sale del hecho de que $|q_u| = 2|q_d|$. El valor relevante de x proviene de la condición de neutralidad. Suponiendo como antes que en la fase quiralmente restaurada estamos lidiando con quarks sin masa, uno obtiene $x \simeq 0.38$ para $\mu \simeq 350$ MeV. Usando este resultado obtenemos $\bar{\mu} \simeq 0.92\ \mu$. Esto implica que el costo adicional en energía libre es más pequeño que aquel requerido en materia simétrica para el mismo valor de eB y μ. Consecuentemente, para un dado eB, uno precisa un valor más grande de potencial químico para inducir la transición de fase. De hecho, tenemos que $\mu_c^{\beta ecn}/\mu_c^{sym} \simeq 1.09$, valor que está en buen acuerdo con nuestros resultados numéricos. Para determinar el cambio en el pozo de CMI también deberíamos estimar el cambio de μ_c para $eB = 0$. Como se muestra en la Ref. [67], este valor también crece cuando las condiciones de neutralidad y equilibrio β son impuestas. Sin embargo, tal aumento es varias veces más pequeño que aquel en $eB \sim 0.2$ GeV^2, conduciendo a una reducción del pozo CMI. Como es de esperar, la introducción de interacciones vectoriales va a acentuar aún más estos efectos. Consecuentemente, observamos que el pozo de anticatálisis desapareció completamente para $g_v = 0.5$.

Debido a la ruptura de simetría de sabor dada por las condiciones impuestas, también es de esperar que las transiciones vA-dH sean distintas para los dos sabores. Lo que se observa es que algunas transiciones d y u ocurren simultáneamente en una región dada del diagrama de fases, pero si las seguimos en la dirección de potencial químico creciente, se separan visiblemente a partir de un cierto punto. Esto se ve mejor alrededor de eB ($\simeq 0.1$ GeV^2) para las transiciones separando las fases 02, 12

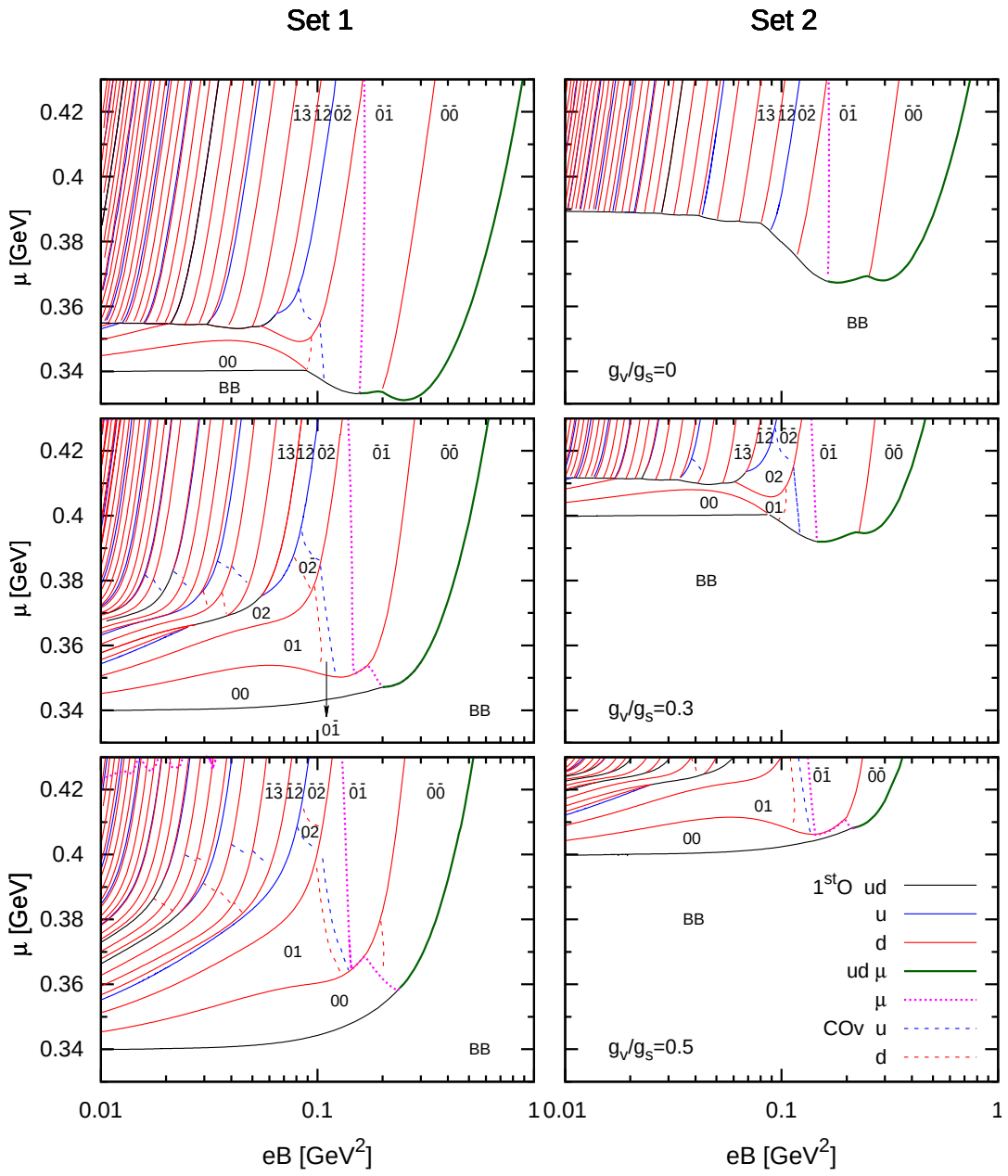

Figura 5.6: Diagramas de fase en el plano $eB-\mu$ para materia neutra bajo equilibrio β con $c_s = 0.2$ y varios valores de g_v/g_s. Las fases se denotan como se explicó en la sección 5.1. La línea rosa representa la transición muónica de vacío al NL inferior.

y 13, y es consecuencia de que la diferencia entre μ_u y μ_d aumenta como función de μ. La relación aproximada para potenciales químicos críticos $\mu_c = \sqrt{2k|q_f B|}$,

que ocurría para materia simétrica ahora es válida para cada potencial químico separadamente. Como consecuencia de esto, vemos que en la fig. 5.6, graficada en términos del potencial químico de quarks, tenemos aproximadamente una transición u cada cuatro correspondientes del d, mientras que en materia simétrica teníamos una u cada dos d. En particular, para g_v alto, las transiciones tienen una tendencia a agruparse en grupos de tres (dos transiciones d y una u) con una transición d intermedia que está claramente separada de este grupo.

Naturalmente, la población de leptones ocurre cuando el potencial químico asociado supera el valor necesario para excitar un estado con la energía determinada por su propia masa. Las transiciones correspondientes también se incluyen en la fig. 5.6. El potencial químico leptónico aumenta de manera discontinua al ocurrir la transición principal inferior, y dado que el electrón tiene masa casi despreciable, su transición de vacío al NL inferior ocurre simultáneamente con los quarks. Por otro lado, el comportamiento de los muones es más complicado. Como tienen masa mayor que la de los electrones es necesario un potencial químico mayor para que adquieran una densidad no nula. Esto es lo que efectivamente ocurre en todos los diagramas para campo magnético pequeño ($eB < 0.1$ GeV^2), donde valores por encima de 430 MeV son necesarios para esto, por lo tanto no aparecen en la región graficada. En esta región, el potencial químico leptónico permanece por debajo del valor de la masa del muón. Sin embargo, a valores intermedios del campo magnético, ($0.1 < eB < 0.2$ GeV^2), donde los quarks ya se encuentran ocupando sólo los NL inferiores, μ_e aumenta súbitamente, permitiendo la población de muones. Por lo tanto, la correspondiente transición desciende en forma prácticamente vertical, hasta unirse a la transición principal inferior de los quarks. Para valores de eB aún mayores, todas las transiciones de quarks y leptones al NL inferior ocurren simultáneamente. Por otro lado, la población del primer NL para cualquiera de los dos leptones requiere potenciales químicos incluso más elevados. Esto es consecuencia de que los leptones tienen mayor carga que los quarks, conduciendo a niveles de Landau con mayor energía, y porque μ_e crece muy lentamente como función de μ. El valor requerido de μ_e para el primer nivel de Landau electrónico, que está alrededor de 250 MeV, es por lo tanto alcanzado sólo para $\mu = 900$ MeV. En algunos diagramas de fases, por otro lado, la transición de muones afecta el comportamiento de los *crossovers*. Esto ocurre porque μ_e esta acoplado a los parámetros de orden, por lo cual, una transición del muón, con su correspondiente salto en μ_e, afectará los valores de las masas de los quarks y las susceptibilidades asociadas. Para $g_v/g_s = 0.5$ en el Set 1, por ejemplo, el *crossover* del quark d, que separa las fases 00 y $\bar{0}\bar{0}$ es borroneada cerca de la transición del muón. En otros diagramas, como aquel en donde $g_v/g_s = 0.3$, el *crossover* de los quarks es completamente absorbido por la transición del muón.

En la fig. 5.7 graficamos la densidad de leptones junto con aquellas de los quarks

como función de μ, para $eB = 0.02$ GeV^2, $g_v/g_s = 0.3$ y parámetros de Set 1. Dado que la densidad de electrones es pequeña en todo el rango de μ, se la multiplicó por un factor 50 de modo de que sea visible en la escala de las densidades de los quarks u y d. Las tres densidades se hacen finitas simultáneamente en $\mu = 340$ MeV, donde todos ocupan su correspondiente NL inferior. Sin embargo, mientras que la densidad de quarks crece monótonamente después de esta transición, notamos que el comportamiento de ρ_e es más complicado, alternando saltos y disminuciones. Al volverse finita, la densidad electrónica comienza a aumentar, pero disminuye cuando aparece la próxima transición de quarks y salta a un valor incluso menor en la transición siguiente. Recordando que estas transiciones corresponden a las de quarks d y que las condiciones de neutralidad de carga impuestas son $\rho_e + \rho_\mu = (2\rho_u - \rho_d)/3$, puede entenderse que la densidad de electrones disminuye siempre que haya una transición d seguida de un crecimiento de ρ_d (recordar que $\rho_\mu = 0$ en este rango de potencial químico), sin cambios relevantes en ρ_u. Este es el caso para este rango de potenciales químicos y campos magnéticos.

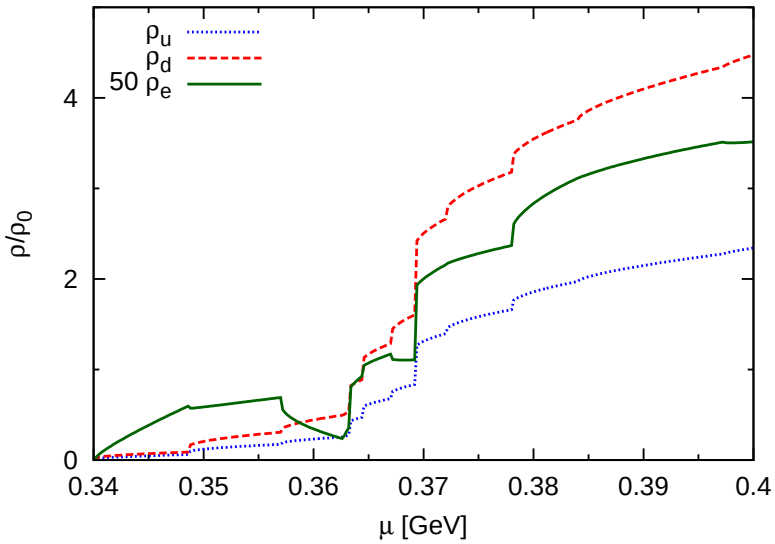

Figura 5.7: Densidades de quark y electrón respecto a densidad de materia nuclear, en función del potencial químico para $eB = 0.02$ GeV^2. Los resultados fueron obtenidos con $g_v/g_s = 0.3$, $c_s = 0.2$ y Set 1.

En la fig. 5.8 mostramos las densidades de quarks y leptones como funciones del campo magnético para $\mu = 0.36$ GeV, y diferentes intensidades del acoplamiento vectorial. Los resultados corresponden nuevamente al Set 1. Para valores crecientes de g_v, notamos que la densidades se vuelven en general menores, lo cual es consecuencia de la presencia del campo ω en el término del medio, que da lugar a

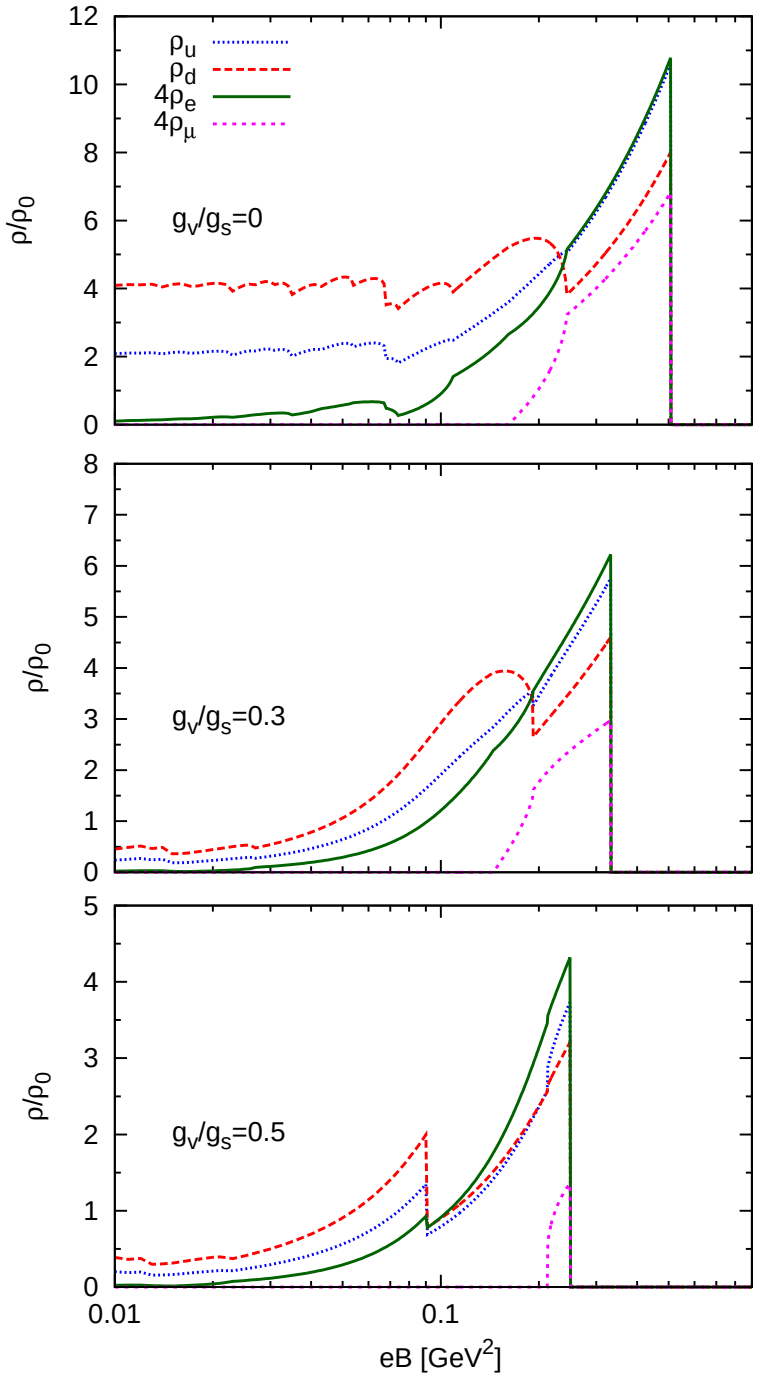

Figura 5.8: Densidades de quarks y leptones respecto a densidad de materia nuclear, en función del campo magnético para $\mu = 0.36$ GeV para valores diferentes de g_v/g_s y $c_s = 0.2$. Los resultados fueron obtenidos con el Set 1.

un potencial químico efectivo menor. En el caso $g_v = 0$, el presente valor de potencial químico corresponde a la región de fases tipo A del diagrama, donde ocurren transiciones de vA-dH hasta alrededor de $eB = 0.2$ GeV^2, dando lugar a las oscilaciones de la densidad cuyo origen ya fue discutido en la sección 4.2.2. Mientras tanto, para los casos correspondientes a g_v finito, el sistema se encuentra más cerca de la transición principal inferior, por lo que la masa vestida es mayor y solamente los niveles de Landau más bajos están ocupados. A partir de $eB \sim 0.1$ GeV^2, el quark u tiene ocupado solamente el NL inferior, por lo que su densidad aumenta en forma sostenida en virtud del factor de degeneración, causando un aumento de μ_e y de ρ_e en todos los casos. Es interesante notar cómo cambian las pendientes cada vez que ocurre una transición del quark d. Cuando estos finalmente alcanzan la fase 0, todas las densidades aumentan en forma sostenida y se vuelven nulas cuando el sistema regresa a la fase B.

Capítulo 6

Superconductividad de Color

En este capítulo estudiaremos los efectos de campo magnético sobre las posibles fases superconductoras de color de la materia de quarks. En esta versión del modelo, se trabaja con un campo de fondo que consiste de una combinación de campos de color y electromagnético. Detallaremos la generalización de la regularización independiente del campo magnético para el caso con interacciones de diquarks, el cual no había sido tratado anteriormente en la literatura. Una vez realizado esto, nuevamente haremos un estudio del comportamiento del modelo en función de la intensidad de interacción quark-quark y los restantes parámetros.

6.1. Modelo NJL con superconductividad de color en presencia de campo magnético

En el fenómeno de superconductividad ordinaria ocurre una expulsión del campo magnético en el interior del medio superconductor. Debido a que la carga eléctrica neta de los pares de Cooper es no nula, se da lugar a la generación de una masa efectiva para el fotón, lo cual a su vez hace que la distancia de penetración de los campos electromagnéticos en el superconductor sea finita. Ahora bien, en materia superconductora de quarks se presenta una situación similar, ya que los pares quark-quark que forman el condensado también tienen carga eléctrica neta. En este caso, la carga de color de dichos condensados también será distinta de cero, por lo cual los gluones pueden adquirir masa [68] y nos encontramos de esta manera en una situación en la que el condensado no es invariante ni ante las transformaciones $U(1)$ electromagnéticas ni las de tipo $SU(3)$ del grupo de color. Sin embargo, es posible construir una combinación lineal de estos campos, de manera de que el condensado sea invariante ante un nuevo operador de carga. Dicho operador está dado por:

$$\tilde{Q} = Q_f \otimes 1_c - 1_f \otimes \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}}. \tag{6.1}$$

Como consecuencia de esto, existirá un campo "rotado" que permanecerá no masivo incluso ante la formación del condensado, y el cual puede penetrar el medio. La correspondiente carga eléctrica rotada está dada por $\tilde{e} = \mathrm{e}\cos\theta$, donde θ es el ángulo de rotación, cuyo valor estimado según [69] es $\simeq 1/20$.

Para tratar esta situación en el modelo de NJL, se agrega un campo de color de fondo, el cual se acopla a los quarks mediante la derivada covariante usual:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\tilde{e}\tilde{Q}\tilde{A}_\mu, \tag{6.2}$$

donde $\tilde{A}_\mu$ es la combinación del campo electromagnético y el de color. En este caso, podemos agrupar los estados de quarks en el espacio sabor-color, $(u_r, u_g, u_b, d_r, d_g, d_b)$, de acuerdo a los valores de las cargas rotadas:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}|ur> &= +\frac{1}{2}|ur> \qquad \tilde{Q}|ug>= +\frac{1}{2}|ur> \\
\tilde{Q}|dr> &= -\frac{1}{2}|dr> \qquad \tilde{Q}|dg>= -\frac{1}{2}|dg> \\
\tilde{Q}|ub> &= +1|ub> \qquad \tilde{Q}|db>= \ 0|db> .
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Por lo tanto, podemos escribir el potencial termodinámico de la siguiente manera [70, 71]

$$\Omega_{\mathrm{MFA}}\,(M, \Delta, eB, \mu) = \frac{(M - m_c)^2}{4G} + \frac{\Delta^2}{4H} + \sum_{|\tilde{q}|=0,\frac{1}{2},1} \Omega_{|\tilde{q}|}, \tag{6.4}$$

donde la suma está realizada sobre las distintas especies de quarks, con cargas $\tilde{q} = 0, 1/2, 1$. Los términos correspondientes son:

$$\Omega_{|\tilde{q}|=0} = -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big(E_0^+ + \big|E_0^-\big|\Big), \tag{6.5}$$

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1} = -\frac{\tilde{e}B}{4\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}\Big(E_1^+ + \big|E_1^-\big|\Big), \tag{6.6}$$

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1/2} = -\frac{\tilde{e}B}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}\Big(E_{1/2}^+ + E_{1/2}^-\Big). \tag{6.7}$$

Las relaciones de dispersión serán análogas a las del caso sin diquarks, con el correspondiente valor de carga que se acopla al campo rotado:

$$\begin{aligned}
E_0^\pm &= \sqrt{p^2 + M^2} \pm \mu = E_p \pm \mu \\
E_1^\pm &= \sqrt{p_z^2 + 2k\tilde{e}B + M^2} \pm \mu = E_1(p_3, k) \pm \mu \\
E_{1/2}^\pm &= \sqrt{\left[\sqrt{p_z^2 + k\tilde{e}B + M^2} \ \pm \ \mu\right]^2 + \Delta^2}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

El término de $\tilde{q} = 0$ está desacoplado del campo y tendrá por lo tanto el comportamiento usual del caso en ausencia de campo magnético y sin interacciones quark-quark. Separando los términos de vacío y de materia obtenemos:

$$\begin{aligned}\Omega_{|\tilde{q}|=0}(\mu, M) &= -2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p - 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}(\mu - E_p)\Theta(\mu - E_p) \\ &= \Omega_{VAC}(M) + \Omega_{MED}(\mu, M). \end{aligned} \tag{6.9}$$

El término $\Omega_{|\tilde{q}|=1}$, por otra parte, tiene la forma correspondiente a la de quarks en campo magnético, donde ahora hacemos el reemplazo $q_f \longrightarrow \tilde{q} = 1$. Por lo tanto, también podemos separar esta expresión en una parte de vacío y otra de materia:

$$\begin{aligned}\Omega_{|\tilde{q}|=1} = &-\frac{\tilde{e}B}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}E_1(p_3, k) \\ &- \frac{\tilde{e}B}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}\Big(\mu - E_1(p_3, k)\Big)\Theta\Big(\mu - E_1(p_3, k)\Big) \end{aligned} \tag{6.10}$$

y, aplicando la regularización independiente del campo magnético sobre el término de vacío, obtenemos:

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1} = \Omega_{VAC}(M) + \Omega_{MAG}(\tilde{e}B, M) + \Omega_{MED}(\tilde{e}B, M, \mu). \tag{6.11}$$

Finalmente tratamos el caso $|\tilde{q}| = 1/2$, donde la presencia del condensado Δ en la relación de dispersión impide llevar a cabo en forma directa la regularización discutida en el cap.3, y requiere por lo tanto de un tratamiento especial. De hecho, en la literatura se ha explorado el caso de NJL con interacciones quark-quark en campo magnético usando solamente reguladores que actúan sobre cada NL por separado [72, 73], lo cual produce las oscilaciones espurias discutidas en la sec.3.2.1.

A continuación, se llevará a cabo la generalización de la regularización independiente del campo magnético para el término $\Omega_{|\tilde{q}|=1/2}$. El primer paso consiste de sumar y restar el siguiente término, independiente del potencial químico:

$$S_1 = \frac{\tilde{e}B}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}\sqrt{p_z^2 + k\tilde{e}B + M^2 + \Delta^2}. \tag{6.12}$$

De esta manera, obtenemos:

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1/2} = -(S_1 + S_2), \tag{6.13}$$

donde

$$S_2 = -\Omega_{|\tilde{q}|=1/2} - S_1 = \frac{\tilde{e}B}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}F(p_z^2 + k\tilde{e}B), \tag{6.14}$$

y hemos definido

$$F(z) = \sum_{s=\pm 1} \left[\sqrt{(\sqrt{z+M^2} + s\ \mu)^2 + \Delta^2} - \sqrt{z + M^2 + \Delta^2} \right]. \tag{6.15}$$

Ambos términos en (6.13) son divergentes. S_1, sin embargo, puede ser llevado a la forma del término de vacío con campo magnético del caso sin diquarks mediante el reemplazo $M \longrightarrow M^* = \sqrt{M^2 + \Delta^2}$. Teniendo en cuenta que $\tilde{q} = 1/2$, escribimos:

$$S_1 = \frac{\tilde{e}B}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} \sqrt{p_z^2 + k\tilde{e}B + (M^*)^2}. \tag{6.16}$$

Usando la regularización ya discutida, obtenemos:

$$-S_1 \quad = \quad 4\ \Omega_{VAC}(M^*) + 4\ \Omega_{MAG}\left(M^*, \frac{\tilde{e}B}{2}\right). \tag{6.17}$$

El factor 4 adelante de cada término corresponde a que hay cuatro especies de quark cuya carga es $|\tilde{q}| = 1/2$. Por otro lado, para regularizar el término S_2, deberemos a su vez sumar y restar la siguiente contribución en ausencia de campo magnético y dependiente del potencial químico:

$$R_1 = 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F(p^2). \tag{6.18}$$

De esta manera,

$$S_2 = R_2 + R_1, \tag{6.19}$$

donde

$$R_2 = S_2 - R_1 = \frac{\tilde{e}B}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{2\pi} F(p_z^2 + k\tilde{e}B) - 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} F(p^2). \tag{6.20}$$

En esta expresión, el término R_1 es divergente. Para regularizarlo, primero debemos reescribirlo de la siguiente manera:

$$R_1 = 4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\sqrt{(E_0^-)^2 + \Delta^2} + \sqrt{(E_0^+)^2 + \Delta^2} - 2\sqrt{p^2 + M^2 + \Delta^2} \right] \tag{6.21}$$

y, definiendo

$$\Omega_\Delta(M, \Delta, \mu) = -2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=\pm 1} \left[\sqrt{(E_p + s\ \mu)^2 + \Delta^2} \right], \tag{6.22}$$

podemos reexpresarlo como:

$$-R_1 = 2\ \Omega_\Delta(M, \Delta, \mu) + 4\ \Omega_{VAC}(M^*), \tag{6.23}$$

donde el término $\Omega_{VAC}(M^*)$ en la última expresión se cancelará con el que aparece en S_1 en (6.17), mientras que el término $\Omega_\Delta(M,\mu,\Delta)$ debe ser regularizado al igual que en el caso sin campo magnético mediante una función de corte.

Por otro lado, en lo que respecta al término R_2, debemos reescribirlo y demostrar que es finito. El cálculo procede de una forma similar a lo realizado para el caso sin interacción de diquarks. Primero escribimos la segunda integral en coordenadas cilíndricas, mediante el cambio de variables:

$$\begin{aligned} p_x &= \sqrt{\tilde{e}Bx}\cos\theta \\ p_y &= \sqrt{\tilde{e}Bx}\sin\theta. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Luego de hacer la integral angular, obtenemos:

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}F(p^2) = \frac{\tilde{e}B}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp_z}{2\pi}\int_0^\infty dx\ F(p_z^2+\tilde{e}Bx). \tag{6.25}$$

Esta expresión puede simplificarse nuevamente usando el cambio de variables $p_z = \sqrt{\tilde{e}B}p$. También, definiendo una función nueva $f(z)$ que satisface que $\sqrt{\tilde{e}B}f(z) = F(z\tilde{e}B)$, tenemos:

$$R_2 = \frac{(\tilde{e}B)^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k f(p^2+k) - 2\int_0^\infty dx\ f(p^2+x)\right], \tag{6.26}$$

donde

$$f(z) = \sum_{s=\pm1}\left[\sqrt{(\sqrt{z+2x}+s\ \mu/\sqrt{\tilde{e}B})^2+y-2x} - \sqrt{z+y}\right]. \tag{6.27}$$

La convergencia de esta expresión se demuestra realizando la expansión asintótica de la función $f(z)$ para valores grandes de z, lo cual se encuentra detallado en la última sección de este capítulo. Resumiendo estos resultados, tenemos que:

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1/2} = -(S_1+R_1+R_2), \tag{6.28}$$

con

$$-S_1 = 4\ \Omega_{VAC}(M^*) + 4\ \Omega_{MAG}(M^*,\tilde{e}B/2) \tag{6.29}$$

$$-R_1 = 2\ \Omega_\Delta(M,\mu,\Delta) + 4\ \Omega_{VAC}(M^*), \tag{6.30}$$

de modo que los términos $\Omega_{VAC}(M^*)$ en S_1 y R_1 se cancelan entre sí. De esta manera, llegamos finalmente a la expresión regularizada para $\Omega_{|\tilde{q}|=1/2}$:

$$\Omega_{|\tilde{q}|=1/2} = 4\ \Omega_{MAG}(M^*,\tilde{e}B/2) + 2\ \Omega_\Delta(M,\mu,\Delta) - R_2. \tag{6.31}$$

Este término se introduce entonces, junto con (6.9) y (6.11), en la expresión para el potencial dada por (6.4).

6.2. Comportamiento del modelo en función de los parámetros

A continuación analizaremos en detalle los resultados obtenidos para el modelo con interacciones entre diquarks en campo magnético, nuevamente comparando los comportamientos para los conjuntos de parámetros correspondientes a $M_0 = 340$ MeV y $M_0 = 400$ MeV y prestando atención a la dependencia con el cociente H/G. En particular, los valores representativos $H/G = 0.5, 0.75$ y 1 serán considerados y también discutiremos cómo los resultados se modifican al barrer en el rango de H/G entre 0 y 0.5.

Comenzamos analizando el comportamiento de los parámetros de orden como función de μ para algunos valores fijos de campo magnético, los cuales se presentan en la fig.6.1. Nos concentramos en los resultados obtenidos usando el Set 1, el cual exhibe una estructura de fases más complicada, mientras que nos referiremos al Set 2 más adelante. Como es usual, notamos para todos los valores de H/G la existencia de la fase vacío a potenciales químicos suficientemente pequeños, donde el gap superconductor es nulo y por ende la interacción de diquarks no produce ningún efecto. De hecho, el comportamiento de la masa vestida es también el mismo que en el caso $H = 0$, exceptuando una diferencia pequeña en la respuesta ante campo magnético proveniente del hecho de que tratamos con un campo magnético rotado. Por otro lado, para potenciales químicos grandes el sistema se encuentra en una fase superconductora, donde el parámetro de orden Δ es no nulo. La misma mantiene las características de las fases tipo A ya discutidas, en el sentido de que la densidad es finita y la simetría quiral se encuentra restaurada. El gap superconductor aumenta con el cociente H/G y con el potencial químico. En lo que respecta al caso $H/G = 0.5$, vemos que para $eB = 0.04$ GeV^2 (panel izquierdo) existe una fase tipo C, con simetría parcialmente restaurada en el rango intermedio de potenciales químicos $\mu = 338.2 - 346.1$ MeV. Al igual que en el caso sin diquarks, está separada de las fases B y A por transiciones de primer orden. La densidad de quarks es finita para las especies con carga $|\tilde{q}| = 0$ y $|\tilde{q}| = 1$, donde para esta última sólo el NL más bajo está poblado. Como hemos mencionado, la interacción quark-quark produce un gap incluso para valores arbitrariamente bajos del cociente H/G, sin embargo, dado que la densidad de los quarks $|\tilde{q}| = 1/2$ también es pequeña en esta fase, el gap resultante es prácticamente despreciable, manteniéndose por debajo de 1 MeV en la mayoría de la misma, mientras que por otro lado, la masa vestida presenta casi el mismo comportamiento que en el caso sin superconductividad. Por otra parte, en la fase A el campo Δ adquiere un valor algo mayor, aunque permanece en el rango $25 - 30$ MeV, que es un valor relativamente pequeño comparado con los que resultan de valores mayores del cociente H/G en esta misma fase. Al aumentar el cociente H/G, el potencial químico crítico correspondiente a la transición superior

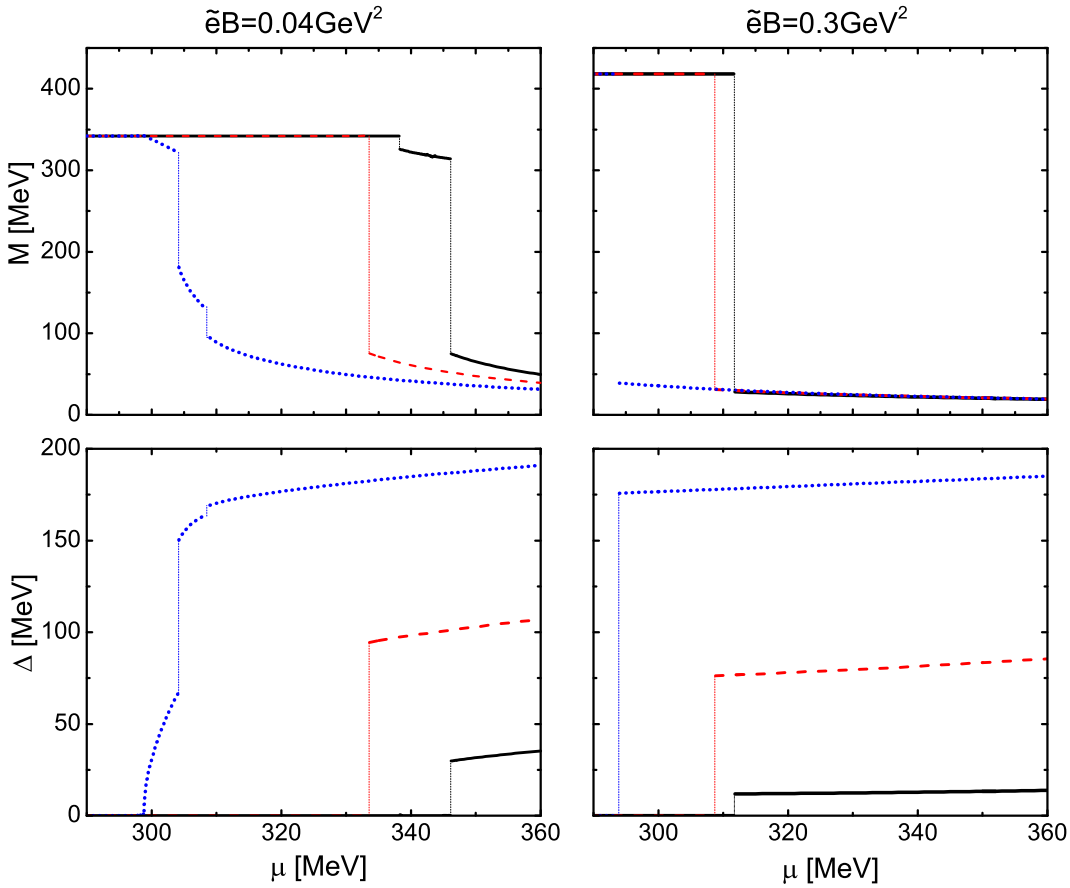

Figura 6.1: M y Δ en función de μ para el Set 1, diferentes valores del cociente H/G y dos valores representativos de $\tilde{e}B$. Las líneas llenas, guionadas y punteadas corresponden a $H/G = 0.5, 0.75$ y 1 respectivamente.

se desplaza hacia abajo, con lo cual disminuye la extensión de la fase C. Para $H/G = 0.75$ dicha fase no está más presente y la única transición existente ocurre a un potencial químico menor. En este caso la estructura de fases es particularmente simple, estando presentes solamente la fase B, donde $M \neq 0$ y $\Delta = 0$, y por otro lado el conjunto de fases tipo A donde M es pequeño y $\Delta \neq 0$. Para valores aún mayores de H/G, vemos que nuevamente existe una fase intermedia, la cual denotamos como fase D. Esta es cualitativamente diferente a la fase C ya discutida, dado que aquí tanto la masa vestida como el gap superconductor son distintos de cero. Por esta razón, esta fase a veces es llamada "fase mixta" [74], aunque este no es el único significado que se la ha otorgado a este término en la literatura

[75]. La transición que conecta las fases B y D es de segundo orden y además M no disminuye sustancialmente en esta fase, aunque es interesante notar que Δ aumenta rápidamente de 0 a 75 MeV en un rango pequeño de μ. Por otro lado, la densidad de quarks de las especies $|\tilde{q}| = 0$ y $|\tilde{q}| = 1$ es nula, pero la presencia del gap Δ induce una densidad no nula para los quarks $|\tilde{q}| = 1/2$. Como en los casos previos, la transición que conduce a las fases tipo A es de primer orden, donde ahora $\Delta \sim 175$ MeV. Además, vemos que en este gráfico hay otra transición para $\mu = 308.5$ MeV, lo cual de hecho es una vA-dH atravesada verticalmente.

Por otro lado, vemos que el comportamiento es más simple para campos magnéticos altos, como puede verse en el panel derecho correspondiente a $\tilde{e}B = 0.3$ GeV^2. Al igual que en los resultados discutidos en los capítulos anteriores, vemos que para estos valores de campo magnético sólo permanecen las fases B y las de tipo A_k. En particular, a partir de $\tilde{e}B \simeq 0.15$ GeV^2, una única transición conecta la fase B a la fase A_0, que es la única presente en el rango de μ que es de interés. Nuevamente, notamos en general que aumentar H/G produce un aumento del parámetro de orden Δ en la fase A y una disminución del potencial químico crítico que conduce a esta fase. Por otro lado, notamos que en el caso $\tilde{e}B = 0.04$ GeV^2, Δ crece más rápido como función de μ que para $\tilde{e}B = 0.3$ GeV^2, donde aparenta ser casi constante. De hecho, hemos verificado que para $\tilde{e}B > 0.4$ GeV^2, el gap superconductor disminuye (aunque levemente) con el potencial químico.

En la fig. 6.2 exhibimos los diagramas de fase en el plano $\tilde{e}B - \mu$, para los tres cocientes ya discutidos de H/G y para ambos conjuntos de parámetros. A medida que H/G crece, vemos que la fase superconductora tiende a producirse a valores menores de μ, mientras que la profundidad del pozo de catálisis inversa disminuye. En la región de fases tipo A, los NL's están ocupados hasta alrededor de $k = 7$ por quarks $|\tilde{q}| = 1$. Notemos que el k_{max} que se observa en este rango es mucho menor que el que se tiene para el caso sin diquarks. Esto se debe simplemente a que la carga asociada al campo magnético rotado es 1, por lo que los niveles de Landau se encuentran más espaciados que para las cargas 2/3 y 1/3 correspondientes al caso de campo puramente magnético.

Como hemos discutido, el caso $H/G = 0.5$ es similar al caso sin diquarks para ambos conjuntos de parámetros, puesto que los gaps superconductores producidos no son lo suficientemente grandes como para modificar los potenciales químicos críticos. En particular, en el Set 1, vemos (panel superior izquierdo) que la fase C se extiende en una franja horizontal hasta $\tilde{e}B \simeq 0.11$ GeV^2, donde está limitada por un *crossover* quiral. Observamos que aunque la región parcialmente restaurada consiste de una sola fase tipo C_0, es decir, donde solo el NL inferior está poblado, los estudios realizados en las secciones anteriores sugieren que si se introducen interacciones vectoriales o si se escoge un M_0 menor, pueden aparecer fases C_k con valores más altos de k entre las dos transiciones principales. Por otro lado, en el Set 2 (panel

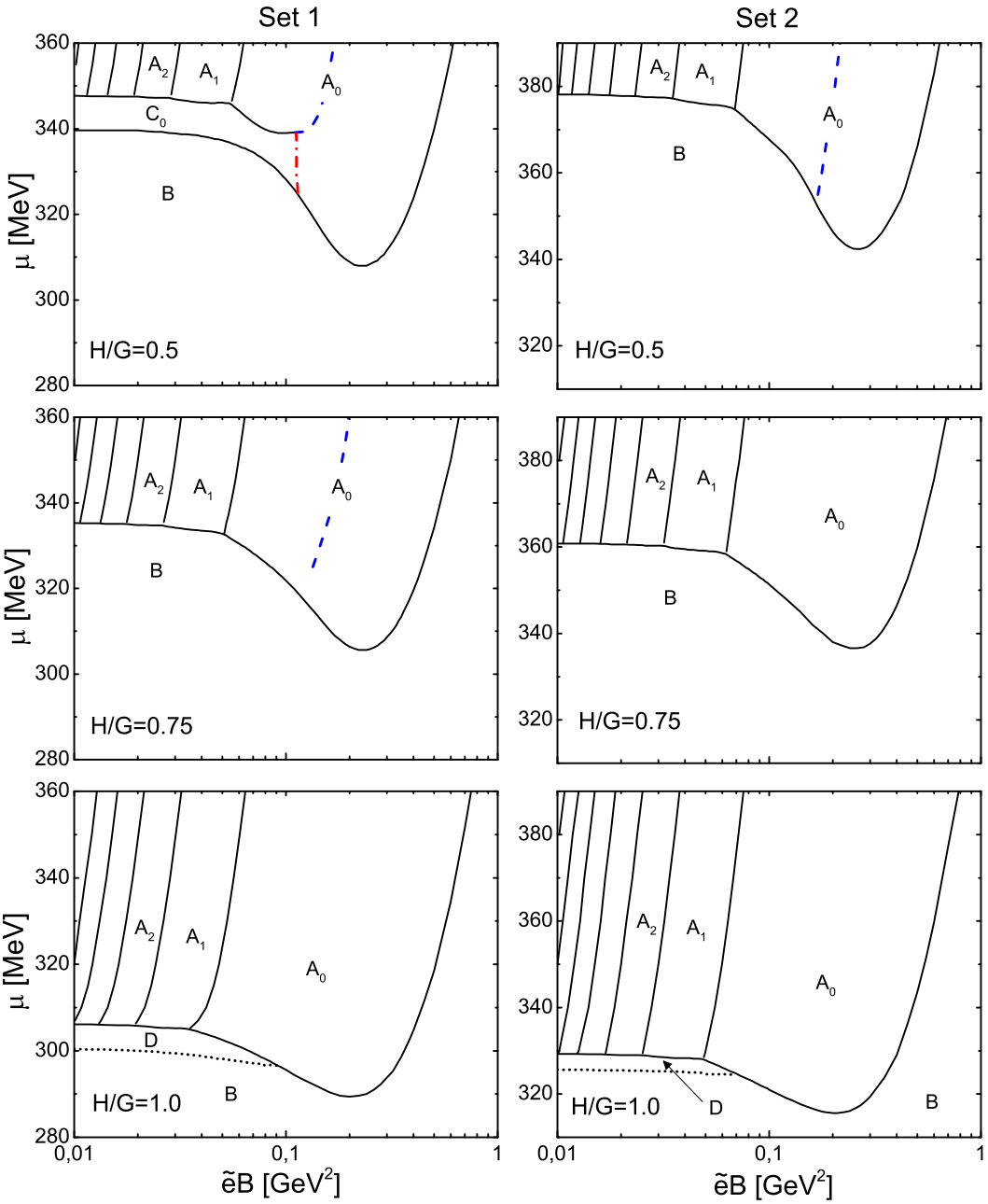

Figura 6.2: Diagramas de fase para diferentes valores del cociente H/G, para los Sets 1 (paneles izquierdos) y 2 (paneles derechos). Las líneas llenas negras corresponden a transiciones de primer orden y las líneas punteadas negras a transiciones de segundo orden. Las líneas rayadas-punteadas representan los *crossovers* asociados a la susceptibilidad quiral *crossovers*. Las líneas guionadas azules representan los *crossovers* de susceptibilidad de número de quarks, los cuales son demasiado débiles para considerar que separan distintas fases.

superior derecho) la situación es mucho más sencilla, nuevamente mostrando que el valor de M_0 al que ajustan los parámetros determina la complejidad del diagrama de fases.

Al aumentar H/G, vemos que ocurre un desplazamiento hacia abajo de las transiciones principales para ambos conjuntos de parámetros. En el Set 1, en particular, la transición principal superior se desplaza hacia abajo, mientras que la transición inferior permanece fija al barrer en H/G. Para $H/G = 0.75$, los dos conjuntos de parámetros presentan una estructura particularmente simple, existiendo una única transición principal en todo el rango de campos magnéticos. Finalmente, los diagramas para $H/G = 1$ son mostrados en los paneles inferiores, donde la fase D está presente en ambos conjuntos de parámetros. La existencia de esta fase es consecuencia del apareamiento de quarks y por lo tanto está presente también para $\tilde{e}B = 0$. Es interesante notar, sin embargo, que se extiende considerablemente en la región de campos magnéticos finitos. Las dos transiciones que la delimitan son aproximadamente horizontales para $\tilde{e}B$ chico. Para valores más grandes, las líneas de las transiciones se acercan y finalmente intersecan en $eB \simeq 0.1$ GeV^2, donde la fase D desaparece. A campo magnético chico, la fase D existe para un rango angosto de μ de a lo sumo 5 MeV para ambos conjuntos de parámetros, aunque es claro que el tamaño de esta región es sensible al valor de H/G y por lo tanto será más extensa en la dirección del potencial químico para valores más altos de H/G.

En la fig. 6.3, presentamos el comportamiento de los parámetros de orden en función del campo magnético, para los valores de H/G estudiados y para algunos potenciales químicos representativos. Nuevamente, exhibimos los resultados para el Set 1, ya que no hay diferencia cualitativa con el Set 2. Ya habíamos visto al comienzo de esta sección que en la fase B la masa crece con campo magnético y que $\Delta = 0$ independientemente de H/G. Cuando la población de quarks es finita, varias posibilidades aparecen dependiendo del campo magnético, conjunto de parámetros y constante de acoplamiento. Para potenciales químicos altos, ($\mu = 360$ MeV), donde la simetría quiral está restaurada para todos los valores de H/G, la masa exhibe una serie de picos discontinuos. Estos corresponden a las transiciones de vA-dH ya discutidas, donde el k_{max} corresponde a los quarks $|\tilde{q}| = 1$ que cambian en una unidad. Debido a su acoplamiento con la masa, Δ también oscila. Estas oscilaciones se hacen especialmente grandes para campo magnético intermedio, alrededor de $\tilde{e}B = 0.1$ GeV^2. Al aumentar H/G, no sólo aumenta Δ, sino que además M exhibe una leve disminución. Por otra parte, las oscilaciones presentes en ambos parámetros de orden se atenúan y se vuelven despreciables respecto a la escala misma de los parámetros de orden.

Para $H/G = 0.5$, $\mu = 340$ MeV corresponde a la fase intermedia tipo C donde la población de quarks es finita y Δ es pequeño. Notamos que para $\tilde{e}B$ chico, la masa está cerca de su valor en vacío, y que gradualmente disminuye a medida que

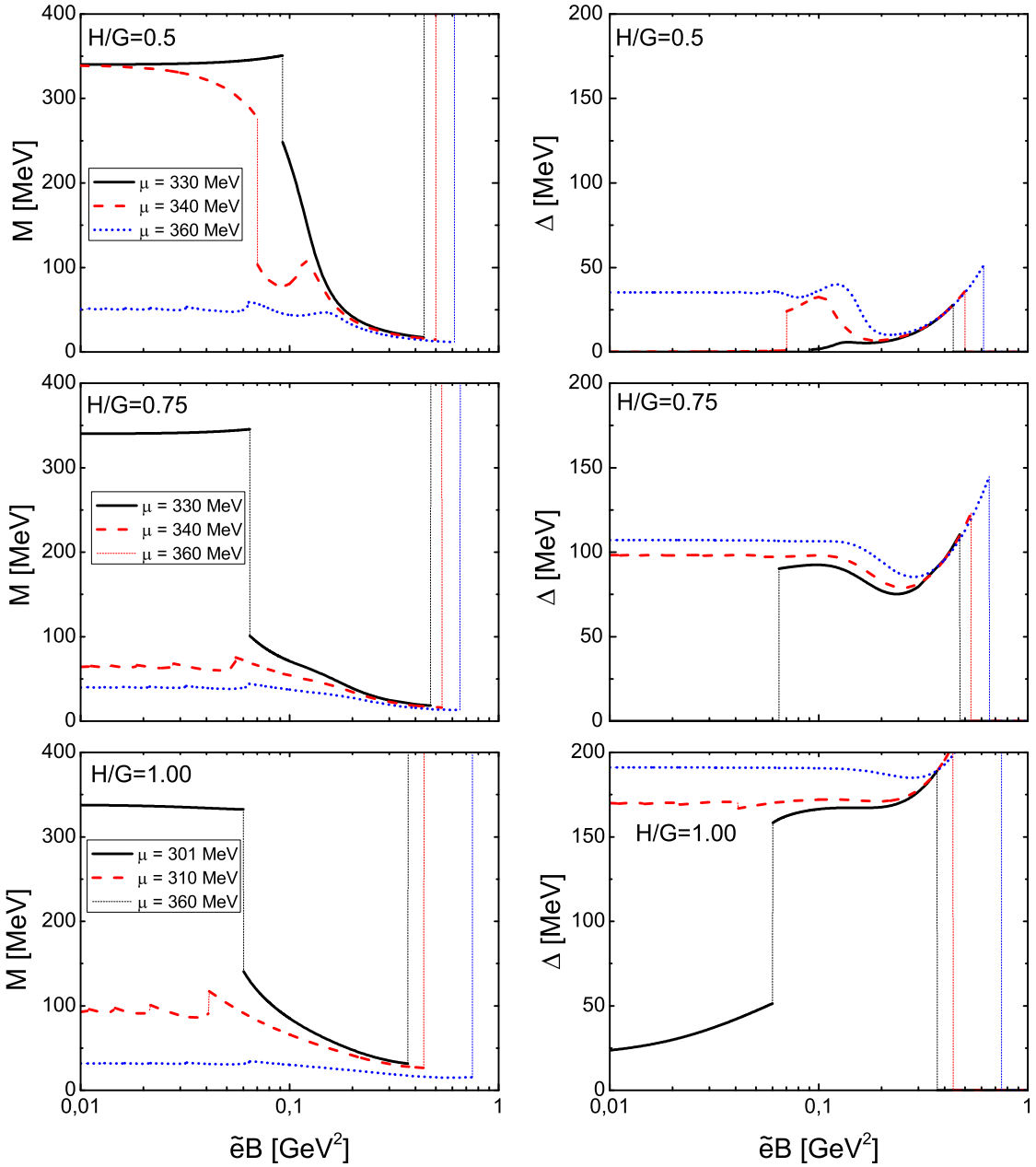

Figura 6.3: M y Δ en función de $\tilde{e}B$ para tres valores de H/G y valores representativos de μ en el Set 1.

$\tilde{e}B$ crece. Esta característica es una manifestación del efecto de anticatálisis, similar al que se vio en el caso sin diquarks en el capítulo 4. Por otro lado, Δ es muy pequeño y crece sólo levemente, permaneciendo siempre debajo de 1 MeV. Los saltos en M y Δ cerca de $\tilde{e}B = 0.1$ GeV^2 corresponden a la transición de primer orden a una fase

A_1. Para campos magnéticos mayores, la masa disminuye hasta finalmente llegar a la fase B, donde aumenta abruptamente. En los dos paneles inferiores de la fig. 6.3, también puede verse el comportamiento de M y Δ en la fase mixta $H/G = 1$. Aquí, vemos que la masa es casi independiente del campo magnético en la fase D (levemente decreciente), mientras que el gap superconductor aumenta de 25 MeV a 50 MeV.

Respecto a las transiciones vA-dH, recordemos que estas son características de la fase quiralmente restaurada de cualquier modelo NJL con campo magnético. En particular, en el modelo sin apareamiento de quarks, habrá transiciones de este tipo para quarks u y d. En presencia de un campo rotado, los quarks con carga $|\tilde{q}| = 1$ y $|\tilde{q}| = 1/2$ acoplan al campo magnético, de los cuales sólo la primera especie produce transiciones vA-dH, puesto que la presencia del condensado Δ en la relación de dispersión del quark $|\tilde{q}| = 1/2$ produce que la suma sobre niveles de Landau no tenga un valor de corte. Sin embargo, hay una transición tipo *crossover* para $H/G = 0.5$ y 0.75 que se asemeja a una $|\tilde{q}| = 1/2$ vA-dH en el siguiente sentido. En el caso $H = 0$, donde $\Delta = 0$, las integrales en los términos de materia de $|\tilde{q}| = 1/2$ se transformarían en funciones de Heaviside, cortando las sumas sobre niveles de Landau en un máximo dado por la relación $\sqrt{\mu^2 - (M^2 + k\tilde{e}B)}$ y por lo tanto produciendo transiciones vA-dH. Si H/G es finito pero pequeño, estas discontinuidades desaparecen rápidamente, pero un remanente de las mismas sigue estando presente porque las susceptibilidades de número de quarks aún exhiben picos. Sin embargo, estos son borroneados a medida que H/G aumenta y para $H/G = 0.5$ no hay más rastro de estas transiciones, excepto por aquella correspondiente al pasaje del NL 0 al 1, que es la que exhibe el mayor salto cuando $H/G = 0$. En el Set 1, esta transición es de primer orden, aunque dicha línea se convierte en un *crossover*, como puede verse en el correspondiente panel fig. 6.2. Este *crossover* sigue estando presente para $H/G = 0.75$ y finalmente desaparece en $H/G = 1$. Hacemos la observación de que como estas transiciones son débiles, no consideramos que separen distintas fases.

6.3. Convergencia de la integral R_2

En este apéndice preentamos el detalle de cómo se demuestra que la expresión dada en (6.26) resulta convergente. Partiendo de esta, notamos que primero conviene aislar el término $k = 0$.

$$R = \frac{(\tilde{e}B)^2}{2\pi^2}\int_0^\infty dp\; f(p^2) + \frac{(\tilde{e}B)^2}{\pi^2}\int_0^\infty dp\left[\sum_{k=1}^{\infty} f(p^2+k) - \int_0^\infty dx\; f(p^2+x)\right] \quad (6.32)$$

donde se usó que los integrandos son funciones pares de p para reescribir el límite de las integrales. Primero, notamos que la función $f(z)$ es acotada en el intervalo $0 \leq z \leq \infty$. Luego, para demostrar que las integrales de impulso son convegentes,

alcanza con verificar que los integrandos correspondientes tienden a cero lo suficientemente rápido cuando $p \to \infty$. Para esto, podemos considerar la expansión de $f(z)$ para $z >> \mu^2/\tilde{e}B; (M^2 + \Delta^2)/\tilde{e}B$. Obtenemos

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{z^{m+1/2}} \tag{6.33}$$

donde los valores de C_m para $m = 1, 2$ son

$$C_1 = \frac{\Delta^2 \mu^2}{(\tilde{e}B)^2} \qquad ; \qquad C_2 = \frac{\Delta^2 \mu^2}{(\tilde{e}B)^2} \left[\frac{\mu^2}{\tilde{e}B} - \frac{3}{2} \frac{M^2 + \Delta^2}{\tilde{e}B} \right] \tag{6.34}$$

A partir de la ec.(6.33) podemos ver que para valores grandes de p el integrando en el primero término de R disminuye como $1/p^3$ y, por lo tanto, la integral es convergente. Para demostrar la convergencia del segundo término, debe procederse de la siguiente manera. Consideremos $N >> \mu^2/\tilde{e}B; (M^2 + \Delta^2)/\tilde{e}B$ tal que para $z > N$ podemos reemplazar $f(z)$ por la expansión dada en ec.(6.33). Como ejemplo, notamos que para el rango de valores de μ y $\tilde{e}B$ considerados en este trabajo, $\mu^2/\tilde{e}B$ y $(M^2 + \Delta^2)/\tilde{e}B$ son siempre menores que 25. A su vez, se verificó que si $N >> 25$ (ej. N=250), el uso de los primeros pocos términos de (6.33) conduce a valores que están en excelente acuerdo con aquellos obtenidos a partir de la expresión completa. Entonces, denotando como I al integrando en el segundo término de Eq.(6.32), tenemos

$$\begin{aligned} I &= \left[\sum_{k=1}^{N} f(p^2 + k) - \int_0^N dx \; f(p^2 + x) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{(p^2 + k)^{m+1/2}} - \int_N^{\infty} \frac{dx}{(p^2 + x)^{m+1/2}} \right] \end{aligned} \tag{6.35}$$

A continuación notamos que, dado que $m \geq 1$, la suma sobre k en el segundo término puede escribirse en términos de la función Hurwitz zeta ξ y que la integral sobre x es convergente y puede realizarse explícitamente. Consecuentemente, obtenemos:

$$\begin{aligned} I &= \left[\sum_{k=1}^{N} f(p^2 + k) - \int_0^N dx \; f(p^2 + x) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left[\xi \left(m + 1/2, 1 + p^2 + N \right) - \frac{1}{m - 1/2} \; \frac{1}{(p^2 + N)^{m-1/2}} \right] \end{aligned} \tag{6.36}$$

Considerando valores de $p^2 >> N$ y nuevamente haciendo uso de ec.(6.33) es fácil ver que los dos términos en el primer corchete de (6.36) van como N/p^3, lo cual implica que sus contribuciones a R son finitas. Falta entonces demostrar que la

contribución principal al segundo corchete disminuye más rápido que $1/p$. Esto no es tan obvio ya que para $m = 1$ el segundo término disminuye como $1/p$. De hecho, es preciso que ese término caiga de esa manera de modo de cancelar un término similar que aparece en el primer término. Para demostrar cómo ocurre esta cancelación, consideramos primero la expansión de la función zeta de Hurwitz. Para $x >> 1$ y $m \geq 1$, uno tiene

$$\xi(m + 1/2, 1 + x) = \frac{x^{-(m-1/2)}}{m - 1/2} - \frac{x^{-(m+1/2)}}{2} + \mathcal{O}\left(x^{-(m+3/2)}\right). \tag{6.37}$$

Usando esta expansión es fácil ver que para $p^2 >> N$ tenemos:

$$\xi\left(m + 1/2, 1 + p^2 + N\right) - \frac{1}{m - 1/2}\,\frac{1}{(p^2 + N)^{m-1/2}} \to -\frac{1}{2p^{2m+1}} + \mathcal{O}\left(p^{-(2m+3)}\right). \tag{6.38}$$

Esto implica que la contribución principal proviene del término $m = 1$ y que tiende a cero como $1/p^3$, asegurando la convergencia de la integral correspondiente.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se estudió el efecto de campos magnéticos sobre materia de quarks fría, haciendo énfasis en la caracterización del diagrama de fases a potencial químico finito y el comportamiento de los parámetros de orden que determinan las posibles fases del sistema. El punto de partida fue el modelo de Nambu Jona-Lasinio (NJL), sobre el cual se realizaron las extensiones pertinentes para realizar un tratamiento termodinámico y para tener en cuenta interacciones de distinto tipo. Se observó que la presencia de campo magnético induce una estructura de fases potencialmente compleja, dando lugar a una variedad de diagramas cualitativamente diferentes dependiendo de los parámetros escogidos. Para el tratamiento del modelo se recurrió al formalismo de bosonización. Este procedimiento consiste de reescribir los grados de libertad de quarks en términos de los campos mesónicos $\sigma(x)$ y $\vec{\pi}(x)$, y en términos de los cuales se escribe el potencial termodinámico. Luego, al realizar la aproximación de campo medio, se descartan las fluctuaciones de los campos y, además, solamente el valor promedio $\bar{\sigma}$ es distinto de cero. Finalmente, el parámetro de orden de la simetría quiral es el valor de $\bar{\sigma}$ que minimiza el potencial. Este cálculo muestra entonces cómo los términos de interacción dan lugar a la ruptura dinámica de la simetría quiral, mostrando además la relación entre el campo $\bar{\sigma}$ y la generación de masa vestida para los quarks.

El análisis del modelo con campo magnético requirió prestar especial atención al procedimiento de regularización. Como es sabido, el modelo NJL precisa ser regularizado para obtener resultados con significado físico, para lo cual existen varias alternativas. En esta tesis se recurrió al uso de funciones de corte que se implementan sobre el integrando del término de vacío divergente. Este procedimiento es fácilmente aplicable al caso de campo magnético cero, pero la generalización a campo magnético finito no es evidente, puesto que la relación de dispersión de los quarks adquiere aquí una estructura dependiente de los niveles de Landau. Por lo tanto, el término de vacío consta de una suma sobre dichos niveles, cada uno de ellos con una integral divergente sobre el componente de impulso paralelo al campo

magnético. En primera instancia, se discutió un procedimiento para tratar estas divergencias que consiste de aplicar funciones reguladoras sobre el integrando de cada nivel de Landau por separado. Esta alternativa ha sido discutida en la literatura y en principio aparenta ser una extensión natural del caso de campo magnético cero. Sin embargo, la dependencia explícita del campo en los términos divergentes da lugar a oscilaciones en el parámetro de orden, las cuales no son físicas y por lo tanto dificultan la interpretación de los resultados. En el caso más extremo de la función escalón, incluso se observa que este procedimiento introduce puntos no analíticos en el diagrama de fases que no están asociados a una transición de fase, puesto que se originan puramente en el procedimiento de regularización. Para poder realizar un análisis que estuviera desprovisto de este tipo de complicaciones, se recurrió entonces a otro tipo de esquema, denominado "regularización independiente del campo magnético", que consta de sumar y restar al potencial termodinámico un término de vacío con la forma del caso de campo magnético cero. Se demostró que la diferencia entre dicho término y el de vacío magnético resulta finito, con lo cual la divergencia se aísla en el término restante. Este no depende explícitamente del campo, y por ende puede regularizarse mediante los mismos métodos que se usan para el caso de $eB = 0$. Por lo tanto, no existen las dependencias espurias del campo previamente mencionadas y varios de los efectos en presencia de campo magnético son más sencillos de interpretar. Entre estos se encuentra el efecto de catálisis magnética, el cual consiste de un aumento sostenido de la masa en función del campo, y que se hace particularmente visible a partir de $eB \simeq 0.1$ GeV^2. Para completar el estudio de estos dos esquemas de regularización, se comparó el comportamiento del parámetro de orden en función de eB con los resultados correspondientes de *Lattice QCD* (*LQCD*) que se encuentran en la literatura. Aquí se observó que los resultados basados en el uso de factores de forma no tienen buen acuerdo con aquellos obtenidos mediante *LQCD* y, en particular, a campos magnéticos altos las pendientes resultantes son mucho mayores. Además, se tuvieron en cuenta varios conjuntos de parámetros que conducen a un rango de valores relativamente amplio de M_0, y se observó que el comportamiento del parámetro de orden es relativamente estable, por lo cual se concluyó que el ajuste no puede mejorarse modificando los parámetros en un rango realista. Por el contrario, para la regularización independiente del campo magnético la curva de *LQCD* sí se encuentra contenida dentro del rango que se obtiene variando M_0 y, además, las pendientes en el límite de campos altos son similares entre sí.

En lo que siguió del trabajo, se utilizó la regularización independiente del campo magnético, con la cual se procedió a estudiar la estructura de fases a potencial químico finito para distintos tipos de interacciones. En una primera etapa, se utilizó el modelo NJL en su versión elemental. Como es sabido, la misma es suficiente para describir el fenómeno de ruptura de simetría quiral y la aparición de los bosones de

Goldstone asociados con los piones mediante sólo dos términos de interacción, de naturaleza escalar-isoescalar y pseudoescalar-isovectorial. En este marco, se caracterizó el diagrama de fases resultante del modelo, realizando un estudio exhaustivo de su dependencia con la parametrización. Esto se llevó a cabo escogiendo valores fijos para la masa y la constante de decaimiento del pión, cantidades que se calculan reteniendo las fluctuaciones a orden cuadrático en el potencial termodinámico. Luego, M_0 se varió en el rango físico de $300 - 400$ MeV. Como resultado general, se observó que a potenciales químicos suficientemente chicos el sistema siempre se encuentra en una fase de vacío y simetría rota (fase B), mientras que a potenciales químicos altos la simetría se restaura y la densidad es finita, en un conjunto de fases (fases tipo A) que difieren entre sí por la cantidad de niveles de Landau poblados. La estructura del diagrama de fases a valores intermedios del potencial químico resultó ser más compleja, donde dependiendo de la elección de parámetros podía existir o no un conjunto de fases de simetría parcialmente restaurada (fases tipo C), donde la densidad es finita también. En la mayoría de los casos, se encontró para el diagrama de fases una estructura que consta de una o dos denominadas "transiciones principales", las cuales son horizontales a campo magnético intermedio y que dividen el diagrama en las regiones A, B y C. Para realizar una caracterización rigurosa de la estructura de fases, se optó por realizar primero un estudio del límite quiral. Si bien este caso no es realista, resulta sumamente útil estudiarlo ya que la simetría $SU(2)$ de sabor del Lagrangiano es exacta aquí, y por lo tanto ciertos efectos pueden ser interpretados con mayor facilidad. Una de las características más importantes de dicho límite es que la simetría se restaura de manera exacta a potenciales químicos altos. A su vez, las transiciones de fase entre las fases tipo C y las fases tipo A pueden ser de primer orden o de segundo orden. Al incluir masa corriente finita, la distinción entre las fases C y A se vuelve difusa, puesto que las transiciones de segundo orden se convierten en *crossovers*, y por ende la definición misma de la transición se vuelve relativamente ambigua. Por otro lado, tanto en el límite quiral como en el caso de masa corriente finita, se observó que los diagramas de fases correspondientes se simplifican notablemente al aumentar M_0 y, en particular, para valores grandes de dicha cantidad existe una única transición conectando la fase de vacío con la de simetría rota. Mientras tanto, a valores de M_0 menores el comportamiento depende del campo magnético. A campos chicos e intermedios, la restauración de simetría se da a través de varias transiciones sucesivas donde la masa disminuye en saltos pequeños, mientras que para campos magnéticos altos nuevamente se encuentra una estructura de fases que consta de una única transición. Es interesante notar que esta dependencia de la parametrización ocurre para valores de M_0 dentro del rango fenomenológico.

En las fases tipo A, el comportamiento del sistema está dominado principalmente por efectos de la densidad. En el límite quiral, de hecho, el condensado quiral es

nulo y la densidad es el único parámetro de orden relevante, el cual se encuentra completamente determinado por el potencial químico y el campo magnético. De esta manera, la densidad presenta oscilaciones que son producto de la competencia entre el factor de degeneración qB (proveniente de la integral en la dirección p_2 en el potencial termodinámico) y el espacio de fases disponible asociado a niveles de Landau sucesivos. Al pasar al caso de masa corriente finita, este comportamiento no se modifica sustancialmente y de hecho se ve que hasta campos magnéticos intermedios la masa vestida presenta oscilaciones inducidas por las variaciones de densidad. A campos magnéticos más altos, por otro lado, el término de vacío magnético se vuelve relevante y tiende a desfavorecer masas pequeñas. Por otro lado, también se discutió el fenómeno de catálisis magnética inversa, presente a potencial químico finito. Si bien en principio se sabe que el campo magnético estabiliza el condensado de quarks, sugiriendo que a mayores campos siempre hará falta un potencial químico crítico mayor para restaurar la simetría, este efecto se hace presente solamente a partir de campos grandes. Por lo tanto, a campos magnéticos menores dominan los efectos de la densidad, que tienden a restaurar la simetría. La competencia entre dichos efectos da lugar a una transición de fase que exhibe una curva en forma de pozo, la cual se denominó "pozo de catálisis magnética inversa" (pozo CMI). Para campos magnéticos suficientemente grandes, por otro lado, el término de energía de vacío se vuelve más relevante y el potencial químico crítico aumenta indefinidamente. Por lo tanto, los efectos relacionados al término de vacío (la catálisis magnética y la formación del pozo CMI, básicamente) se hacen presentes para $eB > 0.1\text{GeV}^2$. Sin embargo, es interesante notar que las fases múltiples tipo C o tipo A ya existen a campos menores, modificando sustancialmente la estructura de fases respecto al caso $eB = 0$.

Habiendo realizado este estudio, se escogieron los valores 340 MeV y 400 MeV como casos representativos de los distintos comportamientos posibles que se encuentran en el rango de valores aceptables de M_0. Con estos, se procedió a estudiar las características de diferentes extensiones del modelo de Nambu Jona-Lasinio. Primero, se incorporaron al Lagrangiano términos de interacción corriente-corriente lo más generales posibles que respetan las simetrías $SU(2)$ (exceptuando términos de naturaleza tensorial). Entre ellos, se trató el término de 't Hooft, el cual reproduce la anomalía axial de *QCD*. La intensidad de este término de interacción regula el grado de mezcla de sabor a través del parámetro c_s, de modo que los quarks u y d desarrollan condensados de manera independiente, y en general pueden tomar valores diferentes dependiendo de las condiciones dadas. En virtud de esto, los diagramas se vuelven en general más complejos, ya que contienen transiciones de fase para cada sabor por separado. El parámetro c_s se varió en todo el rango posible con el objetivo de estudiar la competencia existente entre el campo magnético, que induce una ruptura del grupo de simetría $SU(2)_V$ y la mezcla de sabor, que tiende

a reestablecerla a medida que aumenta c_s. A partir de estos estudios, se concluyó que al aumentar este parámetro se alcanza relativamente rápido un comportamiento cualitativamente similar al de mezcla máxima, donde las transiciones de los dos sabores de quarks ocurren simultáneamente en todo el rango estudiado de campos magnéticos. En particular, el modelo presenta un comportamiento relativamente robusto alrededor del valor $c_s = 0.2$, el cual es sugerido por cálculos realizados dentro de la versión $SU(3)$ del modelo. Por lo tanto, en estudios posteriores, se tomó este valor de mezcla de sabor. A continuación se estudió el efecto de las interacciones vectoriales fijando el grado de mezcla de sabor en este valor. A nivel de campo medio son relevantes solamente los parámetros c_v y g_v (2.110 y 2.111), y además puede probarse que variar el parámetro c_v da lugar solamente a cambios cuantitativamente pequeños, con lo que alcanza con estudiar exhaustivamente la dependencia en g_v. Una de las características más notorias que se observa es la disminución de la profundidad del pozo de catálisis inversa para intensidad creciente de la interacción vectorial. Además, los diagramas se vuelvan más complejos, siendo el efecto similar al que se observa al disminuir M_0, donde las transiciones principales se apartan entre sí y aparecen fases intermedias tipo C de simetría parcialmente restaurada. Por último, manteniéndonos en este caso con $c_s = 0.2$ e interacciones vectoriales con intensidad variable, se impusieron condiciones de neutralidad de carga y equilibrio β. Uno de los efectos más notorios de imponer dichas condiciones es que nuevamente los sabores de quarks tendrán comportamientos diferentes entre sí, debido a la asimetría de los respectivos potenciales químicos. Pueden nuevamente existir transiciones separadas y, en particular, las transiciones de van Alphen-de Haas (vA-dH) se vuelven más complicadas. Por otro lado, algunos efectos son similares a los que producen las interacciones vectoriales. Por ejemplo, estas condiciones contribuyen a reducir el pozo CMI, y de hecho, en conjunto con valores altos de g_v el mismo desaparece completamente. También se tuvo en cuenta el comportamiento de los leptones, cuyo potencial químico se encuentra determinado por aquel de los quarks y las ecuaciones del sistema. Se estudiaron las transiciones de los electrones y los muones, observando que los electrones se excitan con facilidad, apareciendo simultáneamente con los quarks, mientras que los muones exhiben un comportamiento más complicado, requiriendo potenciales químicos altos a eB chico, pero excitándose con el resto de los quarks a eB alto. Además, se vio que la transición de fase en la cual se pueblan los muones afecta las transiciones de los quarks debido al acoplamiento entre el potencial químico leptónico y los parámetros de orden.

Finalmente, se estudió el comportamiento del modelo al tener en consideración interacciones quark-quark. Se trabajó utilizando la interacción más sencilla posible capaz de generar condensados de diquarks, la cual acopla entre sí los estados r y g, mientras que los estados b permanecen desacoplados. Esto introduce un parámetro de orden adicional Δ, el cual da cuenta de la presencia de superconductividad, y

que rompe en forma dinámica la simetría de color $SU(3)$. Para esta extensión del modelo, se trabajó con un campo magnético "rotado", el cual consiste de una mezcla de un campo magnético y otro de color, cuyo operador de carga correspondiente da lugar a especies de quark con cargas 0, 1 y 1/2. En lo que respecta al tratamiento de las divergencias, el término de vacío asociado a los quarks de carga 1/2 requirió un análisis especial, debido a que la generación del gap superconductor no permite realizar la regularización independiente de campo magnético de manera inmediata. Se introdujo de esta manera un procedimiento que puede considerarse una generalización del caso sin diquarks, y el cual no había sido tratado en la literatura. Para caracterizar el comportamiento de este modelo en función de la intensidad de interacción quark-quarks, se tomaron valores representativos del cociente H/G alrededor de 0.75, valor escogido en base a modelos de intercambio de un gluón. A continuación, se presentaron los diagramas de fase y se discutió el comportamiento de los parámetros de orden, en función del campo magnético y de la intensidad de interacción. Para valores por debajo de 0.5, el efecto de la interacción entre diquarks es relativamente pequeño, donde Δ no toma un valor grande, la masa vestida de los quarks no se modifica sustancialmente y los diagramas de fase no cambian su estructura. Al aumentar el cociente H/G, sin embargo, las transiciones principales se desplazan a potenciales químicos menores, y para el Set 1 las dos transiciones se juntan, por lo que para $H/G = 0.75$ la fase intermedia tipo C no está presente. A mayores valores de H/G se vuelve a producir una fase intermedia, la cual es de distinta naturaleza puesto que el gap superconductor es finito. Es interesante notar que esta fase, que ya existe para $eB = 0$, se extiende en la región de campo magnético finito hasta $eB \simeq 0.1$ GeV^2. De esta manera, se observa que si bien el diagrama de fases exhibe una única transición alrededor de $H/G = 0.75$, ante variaciones no demasiado grandes del mismo se forman otras estructuras de fases posibles.

En estudios próximos, el análisis del comportamiento de materia superconductora sujeta a campos magnéticos elevados puede completarse imponiendo condiciones de neutralidad de carga y equilibrio β, como se hizo para el caso de interacciones vectoriales.

Bibliografía

[1] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 494.

[2] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, Phys. Lett. 47B (1973) 365.

[3] W.N. Cottingham and D.A. Greenwood, "An Introduction to the Standard Model of Particle Physics" (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[4] J.C. Collins and M.J. Perry, Phys. Rev. Lett. 34 (1975) 1353.

[5] N. Cabibbo and G. Parisi, Phys. Lett. 59B (1975) 67.

[6] K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept. Prog. Phys. **74** (2011) 014001.

[7] J. Cleymans, R.V. Gavai, and E. Suhonen, Phys. Rep. 130 (1986) 217.

[8] H. Meyer-Ortmanns, Rev. Mod. Phys. 68 (1996) 473.

[9] T. Schafer, Quark Matter, in: A.B. Santra et al. (Eds.), "Quarks and Mesons", Proc. of the BARC workshop on Quarks and Mesons, Bhabba Atomic Research Center, Mumbai, India (2003), Narosa Publishing House, New Delhi (2004).

[10] S. Aoki, M. Fukugita, S. Hashimoto, N. Ishizuka, Y. Iwasaki, K. Kanaya, Y. Kuramashi, H. Mino, M. Okawa, A. Ukawa, and T. Yoshie, Phys. Rev. D 57 (1998) 3910.

[11] Y. Aoki, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabo, Phys. Lett. B 643, 46 (2006); Y. Aoki, S. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor, S. D. Katz, S. Krieg, and K. K. Szabo, J. High Energy Phys. 0906 (2009) 088.

[12] Physics of Neutron Star Interiors, D. Blaschke, N. Glendenning, and A. Sedrakian (eds.), Lectures Notes in Physics vol. 578, Springer, Berlin 2001.

[13] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, Phys. Lett. B 422 (1998) 247.

[14] R. Rapp, T. Schafer, E.V. Shuryak, and M. Velkovsky, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 53.

[15] P. Fulde and R. A. Ferrell, Phys. Rev. 135 (1964) A550.

[16] L.N. Cooper, Phys. Rev. 104 (1956) 1189.

[17] J. Bardeen, L.N. Cooper, and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. 106 (1957) 162.

[18] F. Weber, Acta Phys. Polon. B30 (1999) 3149. 184

[19] A. Kurkela, E. S. Fraga, J. Schaffner-Bielich and A. Vuorinen, Astrophys. J. **789** (2014) 127.

[20] A. Zacchi, R. Stiele and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **92** (2015) no. 4.

[21] P. Jaikumar, G. Rupak and A. W. Steiner, Phys. Rev. D **78** (2008).

[22] D. Page, U. Geppert and F. Weber, Nucl. Phys. A **777** (2006) 497 .

[23] U. Heinz and M. Jacob, nucl-th/0002042.

[24] R. Nouicer, Eur. Phys. J. Plus **131**, no. 3 (2016) 70.

[25] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration], Nucl. Phys. A **757** (2005) 1.

[26] B. B. Back *et al.*, Nucl. Phys. A **757** (2005) 28.

[27] K. Rajagopal and E. Shuster, Phys. Rev. D **62** (2000) 085007.

[28] W. Greiner, S. Schramm y E. Stein, "Quantum Chromodynamics", (Springer, Second Edition, 2002).

[29] C. Itzykson and J.B. Zuber "Quantum Field Theory" (McGraw-Hill International Book Company, 1980).

[30] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122 (1961) 345; 124 (1961) 246.

[31] S.P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 3.

[32] U. Vogl and W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195; T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rep. 247 (1994) 221.

[33] P. N. Meisinger and M. C. Ogilvie, Phys.Lett. B379 (1996) 163.

[34] R. D. Pisarski, Phys.Rev. D62 (2000) 111501.

[35] K. Fukushima, Phys.Lett. B591 (2004) 277.

[36] F. Karsch, and E. Laermann, Phys. Rev. D 50 (1994) 6954; F. Karsch, Lattice QCD at high temperature and density, Lect. Notes Phys. 583 (2002) 209-249.

[37] F. Karsch and E. Laermann, In *Hwa, R.C. (ed.) et al.: Quark gluon plasma* 1-59.

[38] D. Kharzeev, et al., Lect. Notes Phys. 871 (2013) 1.

[39] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A 803 (2008) 227; V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, Int. J. Mod. Phys. A 24 (2009) 5925; V. Voronyuk, V. D. Toneev, W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, V. P. Konchakovski and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C 83 (2011) 054911.

[40] R. C. Duncan and C. Thompson, Astrophys. J. 392 (1992) L9; C. Kouveliotou et al., Nature 393 (1998) 235.

[41] D. Lai and S. L. Shapiro, Astrophys. J. 383 (1991) 745.

[42] D. Bandyopadhyay, S. Chakrabarty, and S. Pal, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 2176.

[43] E. J. Ferrer, V. de la Incera, J. P. Keith, I. Portillo, and P. L. Springsteen, Phys. Rev. C 82 (2010) 065802.

[44] V. P. Gusynin, V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 3499 [Erratum-ibid.76 (1996) 1005].

[45] F. Preis, A. Rebhan and A. Schmitt, JHEP **1103** (2011) 033.

[46] D. Ebert, K. G. Klimenko, M. A. Vdovichenko and A. S. Vshivtsev, Phys. Rev. D 61 (2000) 025005.

[47] D. Ebert and K. G. Klimenko, Nucl. Phys. A 728 (2003) 203.

[48] C. Amsler *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Lett. B **667** (2008) 1.

[49] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14** (1976) 3432 Erratum: [Phys. Rev. D **18** (1978) 2199].

[50] H. G. Dosch and S. Narison, Phys. Lett. B **417** (1998) 173.

[51] L. Giusti, F. Rapuano, M. Talevi and A. Vladikas, Nucl. Phys. B **538** (1999) 249.

[52] W. Greiner and J. Reinhardt, Berlin, Germany: Springer (1996) 440 p

[53] G. Ripka, "Quarks bound by chiral fields" (Oxford University Press, Oxford, 1997).

[54] J. I. Kapusta and C. Gale, "Finite-temperature field theory: Principles and applications" (Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2006).

[55] T. Kunihiro, Phys. Lett. B **219** (1989) 363 [Erratum-ibid. B **245** (1990) 687].

[56] M. Frank, M. Buballa and M. Oertel, Phys. Lett. B **562** (2003) 221.

[57] M. Hanauske, L. M. Satarov, I. N. Mishustin, H. Stoecker and W. Greiner, Phys. Rev. D **64** (2001) 043005.

[58] M. Buballa, Phys. Rept. **407** (2005) 205.

[59] D. Blaschke, M. K. Volkov and V. L. Yudichev, Eur. Phys. J. A **17** (2003) 103.

[60] L. Campanelli and M. Ruggieri, Phys. Rev. D 80 (2009) 034014.

[61] M. Frasca and M. Ruggieri, Phys. Rev. D 83 (2011) 094024).

[62] R. Gatto and M. Ruggieri, Lect. Notes Phys. 871 (2013) 87.

[63] Gradshteyn and Ryzhik's Table of Integrals, Series, and Products Daniel Zwillinger and Victor Moll (eds.) Eighth edition (Oct 2014)

[64] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and A. Schafer, Phys. Rev. D **86** (2012) 071502.

[65] D. Ebert and K. G. Klimenko, Nucl. Phys. A **728** (2003) 203.

[66] M. Buballa, Nucl. Phys. A **611** (1996) 393; Phys. Rept. **407** (2005) 205.

[67] A. G. Grunfeld, D. P. Menezes, M. B. Pinto and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **90** (2014) 044024.

[68] D. H. Rischke, Phys. Rev. D **62** (2000) 034007 / PhysRevD.62.034007.

[69] E. V. Gorbar, Phys. Rev. D **62** (2000) 014007 PhysRevD.62.014007.

[70] S. Fayazbakhsh and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **82** (2010) 045010.

[71] S. Fayazbakhsh and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **83** (2011) 025026.

[72] J. L. Noronha and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **76**, (2007) 105030 [Phys. Rev. D **86**, (2012) 049901].

[73] T. Mandal and P. Jaikumar, Phys. Rev. C **87**, (2013) 045208.

[74] M. Huang, P. f. Zhuang and W. q. Chao, Phys. Rev. D **65**, (2002) 076012.

[75] F. Neumann, M. Buballa and M. Oertel, Nucl. Phys. A **714**, (2003) 481.