

Tesis Doctoral

Estudios sobre el espectro de los nucleones excitados usando la expansión en $1/N_c$ de la cromodinámica cuántica

Willemyns, Cintia Teresita

2017-03-14

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Willemyns, Cintia Teresita. (2017-03-14). Estudios sobre el espectro de los nucleones excitados usando la expansión en $1/N_c$ de la cromodinámica cuántica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

Cita tipo Chicago:

Willemyns, Cintia Teresita. "Estudios sobre el espectro de los nucleones excitados usando la expansión en $1/N_c$ de la cromodinámica cuántica". Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2017-03-14.

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Resumen

En el presente trabajo se investigan los estados excitados de bariones no extraños en el marco de la expansión en la inversa del número de colores (N_c) de la Cromodinámica Cuántica (QCD). En particular, se busca obtener una mejor comprensión teórica de la fenomenología de los bariones excitados de manera independiente de modelos particulares y también conectar el análisis que se obtiene en términos de operadores efectivos en la expansión $1/N_c$ con una imagen dinámica que explique los valores de los coeficientes de la expansión. También se trabaja en la dirección de extender el análisis que usa la expansión en $1/N_c$ al caso en el que tenemos mezcla de configuraciones de spin-sabor.

Para alcanzar estos objetivos se estudia el espectro de masas de los bariones excitados de paridad negativa realizando la conexión (*matching*) entre una extensa clase de modelos de quarks no relativistas, con interacciones efectivas entre quarks tanto dependientes como independientes del sabor, y la base de operadores de spin-sabor que se utiliza habitualmente en la expansión $1/N_c$. Los resultados obtenidos son expresiones analíticas para los coeficientes libres que acompañan a cada uno de los operadores que aparecen a un cierto orden en potencias de $1/N_c$. Estos coeficientes se expresan en función de integrales radiales que dependen de la forma y la magnitud relativa de las interacciones tensorial, spin-spin y spin-órbita del modelo y que se dejan sin especificar para mantener la generalidad de las expresiones. A partir de este *matching* se obtienen relaciones nuevas entre las masas bariónicas y los ángulos de mezcla. Estas relaciones son independientes de los parámetros y permiten discriminar entre distintas estructuras de spin-sabor de las interacciones quark-quark. Se analiza cómo esta parametrización general de las matrices de masa depende de los ángulos de mezcla y qué restricciones se imponen al considerar las suposiciones recién mencionadas sobre la interacción efectiva entre quarks. Los resultados hallados indican que, dentro de las incertezas experimentales, los valores para los ángulos de mezcla determinados por un reciente ajuste global a las masas y a los decaimientos no excluyen ninguna de las dos posibilidades más extremas para la dependencia o independencia del sabor de la interacción entre quarks originada por el intercambio de un mesón o gluón respectivamente.

Por otro lado, se realiza un análisis del espectro de masas de los bariones excitados de paridad positiva utilizando la base de operadores de spin-sabor de la expansión $1/N_c$. Se analiza por primera vez el espectro incluyendo la mezcla de configuraciones. En el límite de N_c grande los bariones excitados sin extrañeza se agrupan en representaciones irreducibles de la simetría contraída $SU(4)_c$. Por medio del cálculo explícito del espectro de masas encontramos que esta estructura se conserva. El estudio de los autoestados demuestra que las mezclas son más sencillas de lo que se esperaría en un modelo de quarks y está de acuerdo con la simetría que se espera el límite del número de colores grande.

PALABRAS CLAVES: QCD, Expansión en $1/N_c$, Bariones excitados.

Studies on the mass spectrum of excited baryons using the $1/N_c$ expansion of Quantum Chromodynamics

Abstract

In this thesis we study the non-strange excited baryons in the $1/N_c$ expansion of Quantum Chromodynamics, with N_c the number of colors. In particular, we seek to obtain a better theoretical understanding of baryon phenomenology, less dependent on the particular details of models, and to connect the analysis obtained in terms of effective operators in the $1/N_c$ expansion with a dynamical picture that can help to understand the numerical values of the coefficients in the $1/N_c$ expansion. We also aim to extend the $1/N_c$ analysis by considering configuration mixing in the spin-flavor space.

For this purpose, we study the mass spectrum of excited baryons with negative parity by matching a large class of non-relativistic quark models, with both flavor dependent and flavor independent effective quark-quark interactions, to the usual spin-flavor operator basis of the $1/N_c$ expansion. We obtain analytic expressions for the coefficients of each operator that appears in the expansion at a given order in $1/N_c$. The coefficients of the $1/N_c$ operators can be expressed in terms of radial integrals that depend on the shape and relative strength of the spin-spin, spin-orbit and tensor interactions of the model, which are left unspecified. From this matching, we obtain several new parameter-free relations between the masses and the mixing angles that can discriminate between different spin-flavor structures of the effective quark-quark interaction. We analyze how a general parametrization of the mass matrix depends on the mixing angles and is constrained by the assumptions on the effective quark-quark interaction mentioned above. We find that, within the present experimental uncertainties, consistency with the best values of the mixing angles as determined by a recent global fit to masses and decays does not exclude either of the two most extreme possibilities of flavor dependent (independent) quark-quark interactions, as generated by meson (gluon) exchange interactions.

We also perform an analysis of the mass spectrum of excited baryons with positive parity using the spin-flavor operator basis of the $1/N_c$ expansion. We analyze the spectrum considering configuration mixing for the first time. In the large N_c limit, non-strange excited baryons are members of irreducible representations of a contracted $SU(4)_c$ symmetry. By calculating the mass spectrum explicitly, we find that this structure is still conserved when configuration mixing is taken into account. The analysis of the eigenstates shows that the mixings are simpler than what is expected from quark models and they satisfy the structure predicted in the large N_c limit.

KEYWORDS: QCD, $1/N_c$ Expansion, Excited baryons.

Índice General

1	Introducción	9
2	<i>Large N_c QCD</i>	15
2.1	Introducción	15
2.2	Diagramas de Feynman para <i>large N_c</i>	17
2.3	Mesones en <i>large N_c</i>	24
2.4	Bariones en <i>large N_c</i>	27
2.5	El acoplamiento mesón-barión en <i>large N_c</i>	28
3	Modelos de quarks	31
3.1	Introducción	31
3.2	Funciones de onda de spin-sabor	35
3.3	Funciones de onda orbitales en la base de oscilador armónico	38
3.3.1	Bariones excitados con $L = 1$	41
3.4	Extensión a <i>large N_c</i>	43
3.4.1	Funciones de onda de spin-sabor para <i>large N_c</i>	44
3.4.2	Funciones de onda orbitales en la base de oscilador armónico para <i>large N_c</i>	47
3.5	Modelos del tipo Isgur-Karl	49
3.5.1	Interacciones y estructura de spin-sabor para estados de paridad negativa	50
4	Simetría de spin-sabor para bariones en <i>large N_c</i>	53
4.1	Introducción	53
4.2	Condiciones de consistencia para <i>large N_c</i>	54
4.3	Expansión de operadores	57
4.4	Relaciones entre operadores	59
4.5	Operadores para bariones excitados	63
5	Análisis de operadores para bariones de paridad negativa	67
5.1	Introducción	67
5.2	Parametrización de matrices de masa y <i>matching</i> de operadores	67
5.3	Relaciones entre las masas y ángulos de mezcla	73
5.4	Ángulos de mezcla y ajustes a los datos experimentales	79

5.5	Relación con la expansión en $1/N_c$	85
5.6	Conclusiones	88
6	Bariones excitados de paridad positiva en <i>large</i> N_c	91
6.1	Introducción	91
6.2	Operador de masa	92
6.3	Bariones de la banda $\mathcal{N} = 2$ en <i>large</i> N_c	92
6.4	Matrices de masa y clasificación en torres	93
6.5	Interpretación como mezcla de dos niveles	94
6.6	Conclusiones	99
7	Conclusiones generales	101
A	Funciones de onda con $L = 1$	105
B	Elementos de matriz de operadores <i>CCGL</i> para $L = 1$	107
C	Relación entre coeficientes y la parametrización	111
D	Relaciones entre operadores	115
E	Dependencia angular de los coeficientes	117
F	El <i>matching</i> para el modelo de Isgur-Karl	119
G	Elementos de matriz de $\mathcal{O}_{1,2,3}$ para bariones de la banda $\mathcal{N} = 2$	121
G.1	Para N_c arbitrario	122
G.2	En el límite de <i>large</i> N_c	123
H	Mezcla de dos niveles	131
	Bibliografía	133

Capítulo 1

Introducción

Todas las partículas elementales hasta hoy observadas y sus interacciones están contenidas en el Modelo Estándar [1]. Esta teoría describe tres de las cuatro interacciones fundamentales de la física: la fuerza fuerte, el electromagnetismo y la fuerza débil. Dentro del Modelo Estándar, la Cromodinámica Cuántica (o *QCD* por sus siglas en inglés) es la teoría fundamental que describe las interacciones fuertes. Los grados de libertad de esta teoría son los quarks y los gluones. Los quarks forman la materia hadrónica, que puede ser clasificada en bariones y mesones, mientras los gluones actúan como mediadores de la interacción. Más aún, se observa que los quarks y gluones se presentan en la naturaleza solo formando bariones o mesones, no se los encuentra como estados libres, este fenómeno se conoce como “confinamiento”.

Si bien *QCD* está bien establecida y verificada, debido a su complejidad se requieren métodos aproximados para estudiar procesos que involucran interacciones fuertes.

Como en el caso de la Electrodinámica Cuántica (*QED*), se puede hacer una expansión perturbativa de la teoría en términos de la constante de acoplamiento. Así como *QED*, *QCD* también es una teoría renormalizable por lo que la constante de acoplamiento depende de la escala de energías, sin embargo tiene un comportamiento muy distinto al de *QED*. Esta dependencia está dada por el gráfico de la figura 1.1. Este gráfico sugiere que existen dos regímenes. Por un lado, a altas energías el acoplamiento es débil y tiende a cero cuando $Q \rightarrow \infty$ donde Q es la escala de energía. Es decir que en el rango de altas energías los quarks se comportan como casi-libres. Este fenómeno se conoce como “libertad asintótica”. En este régimen, la constante de acoplamiento es pequeña, por lo tanto resulta un parámetro adecuado de una expansión perturbativa y hace posible estudiar procesos de producción e interacción de hadrones a altas energías. Por otro lado, a bajas energías (~ 1 GeV), la constante de acoplamiento adquiere un valor demasiado grande que hace que no sea adecuada como parámetro de una expansión perturbativa. Entender cómo funciona *QCD* a bajas energías resulta fundamental para nuestro entendimiento sobre la física que gobierna la materia ordinaria del universo, ya que son energías típicas en la espectroscopía bariónica y la física nuclear. Para estudiar la fenomenología hadrónica en este régimen se han desarrollado métodos no perturbativos.

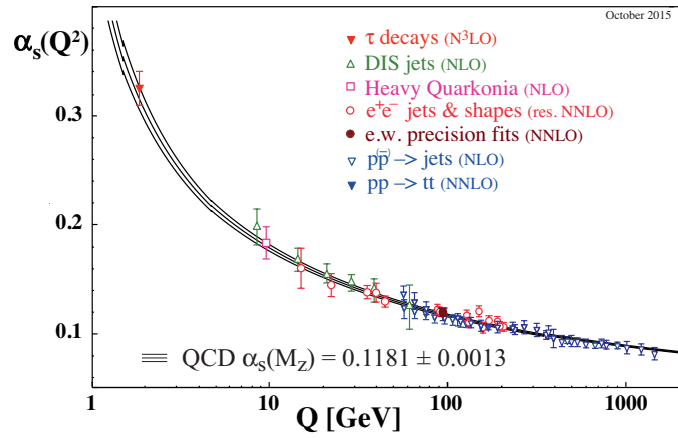


Figura 1.1: Valores experimentales de la constante de acoplamiento $\alpha_s = g^2/4\pi$ en función de la escala de energía Q [2].

Los “modelos de quarks” precedieron a la teoría de QCD en alrededor de dos décadas, y en cierto sentido contribuyeron a su formulación. Estos modelos, en donde los bariones livianos forman una representación irreducible de los grupos orbital \times spin-sabor $O(3) \times SU(2N_f)$, donde N_f es el número de sabores, fueron propuestos para describir la espectroscopía hadrónica. Las observaciones experimentales sugieren una clasificación de los bariones en “bandas” que pueden asociarse a $\mathcal{N} = 0, 1, 2, \dots$ en analogía a los niveles de energía de una partícula en un pozo de potencial tipo oscilador armónico. Cada banda contiene multipletes de $O(3) \times SU(2N_f)$. Por ejemplo, para $N_f = 3$ la banda $\mathcal{N} = 1$ contiene estados pertenecientes a un solo multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$, la banda $\mathcal{N} = 2$ tiene cinco multipletes $[\mathbf{56}', 0^+]$, $[\mathbf{56}, 2^+]$, $[\mathbf{70}, 0^+]$, $[\mathbf{70}, 2^+]$ y $[\mathbf{20}, 1^+]$, la banda $\mathcal{N} = 3$ contiene 10 multipletes, etc..

En sus principios el modelo de quarks fue básicamente un esquema de clasificación basado en simetrías. Más tarde, inspiró la formulación de modelos de quarks cuya dinámica se ve descrita por un potencial de interacción entre quarks. Debido al éxito de los modelos de quarks para explicar fenómenos a bajas energías (espectros bariónicos y mesónicos, decaimientos fuertes, débiles y electromagnéticos, etc.) estos modelos resultan herramientas muy valiosas para guiar nuestro conocimiento a la hora de aplicar métodos más modernos (que, sin embargo, aún tienen limitaciones) basados en la teoría fundamental de QCD . Muchos de los modelos de quarks están asociados a Hamiltonianos con potenciales basados en interacciones entre quarks dadas por el intercambio de un gluón (en inglés *one-gluon-exchange* o OGE) o por el intercambio de un bosón de Goldstone, piones o mesones en general (en inglés *one-meson-exchange* o OME). Desde un punto de vista experimental, aún existen muchos estados faltantes de los multipletes de spin-sabor del modelo de quarks, este es un viejo problema que constantemente impulsa a los programas experimentales para la búsqueda de nuevas resonancias.

Desde hace al menos treinta años se conocen métodos rigurosos para tratar problemas no perturbativos en QCD como por ejemplo, la expansión en el número de colores de 't Hooft [3], la teoría de perturbaciones quirales [4], la teoría de perturbaciones quirales para bariones pesados [5] o la más reciente teoría efectiva para divergencias colineales [6]. En todos los casos se cuenta con un esquema perturbativo no trivial en el sentido que el parámetro de la expansión no es evidente como en el caso de QCD a altas energías. Estos esquemas ponen el énfasis en factorizar las contribuciones no perturbativas que no se pueden calcular (pero que, no obstante, son universales), de las perturbativas que sí pueden ser calculadas. La comparación con la fenomenología permite fijar las contribuciones no perturbativas con un subconjunto de procesos y realizar luego predicciones para otros procesos que comparten las mismas contribuciones no perturbativas. Los errores en las predicciones se pueden estimar gracias a un conteo de potencias consistente en el parámetro de la expansión. Si bien estos métodos son rigurosos, al intentar extenderlos a órdenes superiores se hace necesario incluir información física adicional, ya que de otra manera el aumento en el número de parámetros de la teoría efectiva impide hacer predicciones.

Por otro lado, es importante mencionar que existen métodos para tratar QCD en forma exacta también, esto se logra mediante su formulación en un espacio-tiempo discreto llamada “ QCD en red”, también conocida como *lattice QCD* [7]. Los cálculos de *lattice QCD* están basados en primeros principios y en los últimos años han mostrado progresos significativos en la determinación de las masas del espectro de bariones livianos y en la identificación de la paridad de espín de los estados excitados [8, 9]. Los resultados obtenidos hasta la fecha parecen confirmar la imagen dada por los viejos modelos de quarks. Sin embargo, los cálculos de *lattice QCD* resultan sumamente costosos en términos de recursos computacionales, además presentan dificultades teóricas, como por ejemplo, el paso del espacio-tiempo discreto al continuo, la implementación de la simetría quiral, etc..

Dentro de los métodos aproximados para tratar problemas no perturbativos el único método que hace una expansión en un parámetro independiente de la energía y, por lo tanto válida a cualquier escala, es *large N_c QCD*. Este método, introducido por 't Hooft en 1973 [3], consiste en hacer una generalización de QCD en la que se estudia la fenomenología hadrónica en el límite de N_c grande (en inglés *large N_c*) donde N_c es el número de colores de la teoría de gauge (en QCD se tiene $N_c = 3$). El considerar N_c grande permite obtener cantidades físicas cuyas correcciones son de orden $1/N_c$, $1/N_c^2$, etc.. En 1979 Witten aplicó, por primera vez, la teoría de *large N_c* a bariones [10] y estableció reglas que permiten determinar el orden en $1/N_c$ de los diagramas de Feynman. El autor estudió la dispersión pión-nucleón en el marco de *large N_c* que permitió algunos años más tarde el descubrimiento de una simetría exacta de spin-sabor contraída $SU(2N_f)_c$ que surge en el límite $N_c \rightarrow \infty$ [11–15]. La simetría $SU(2N_f)_c$ permite obtener una expansión sistemática en $1/N_c$ de los operadores de QCD asociados a observables de los bariones como la masa, la corriente axial, el momento magnético, etc. en términos de operadores formados por productos de los generadores de spin-sabor conocidos de $SU(2N_f)$, entablando así una profunda

conexión entre QCD y el modelo de quarks [16–18]. Las predicciones de esta simetría para las masas y los acoplamientos explican parte del éxito del modelo de quarks [19]. Así mismo, la ruptura de simetría de spin-sabor puede ser estudiada de manera sistemática en la expansión en $1/N_c$ usando operadores de quarks.

La expansión en $1/N_c$ de QCD ha sido aplicada a las masas y los acoplamientos axiales de los estados fundamentales de los bariones [16–19]. En particular, la expansión en $1/N_c$ del operador de masa para los bariones no excitados explica por qué las masas experimentales se ajustan tan bien a las conocidas relaciones de Gell-Mann-Okubo [20, 21] y Coleman-Glashow [22, 23]. Debido al éxito de la expansión en $1/N_c$ para bariones en el estado fundamental, más tarde ha sido utilizada para el estudio de bariones excitados. En general, el estudio de estados excitados en *large* N_c trae varias complicaciones. El enfoque usual sugiere que la función de onda total del barión excitado puede descomponerse en una función de onda simétrica que describe un “núcleo” de $N_c - 1$ quarks (que llamaremos *core*) y una función que describe al quark excitado. Este método está basado en una aproximación de Hartree donde cada quark dentro del estado de N_c quarks interactúa con un potencial promedio producido por los otros $N_c - 1$ quarks. Las masas de los bariones de la banda $\mathcal{N} = 1$ que están asociados al multiplete $[70, 1^-]$ fueron estudiados en el marco de *large* N_c en las referencias [24–29]. Las propiedades fuertes y electromagnéticas de estos estados, así como las resonancias de otros multipletes de spin-sabor, también fueron estudiados en la expansión $1/N_c$ y han desembocado en resultados interesantes (ver [30] para una reseña y sus referencias). Sin embargo, en una expansión sistemática en $1/N_c$ toda la dinámica no perturbativa permanece “escondida” dentro de los valores de los coeficientes de los operadores que en un análisis fenomenológico son ajustados a los datos experimentales. Por lo tanto, resulta de gran interés conectar los resultados obtenidos de *large* N_c QCD con cálculos dinámicos como los de los modelos de quarks.

Varios autores han realizado la conexión entre la expansión en $1/N_c$ y resultados obtenidos con modelos de quarks para la banda $\mathcal{N} = 1$ [31–34]. En la referencia [33] se consideró el modelo de Isgur-Karl [35, 36] que consiste en una versión particular del modelo de quarks que contiene sólo interacciones cuadrupolares y de spin-spin independientes del sabor y se realizó la conexión (*matching*) a la expansión de operadores en $1/N_c$. Este análisis fue continuado en la referencia [34] conservando únicamente la interacción de spin-spin pero considerando la dependencia más general del sabor en la interacción entre quarks y despreciando las interacciones cuadrupolar y de spin-órbita. En esta tesis se considera la interacción spin-sabor entre quarks más general, considerando las tres componentes (spin-spin, cuadrupolar y spin-órbita) de la interacción y la estructura más general de spin-sabor.

El estudio de estados de la banda $\mathcal{N} = 2$ resulta más complejo ya que contiene estados de cinco multipletes distintos, los ya mencionados $[56', 0^+]$, $[56, 2^+]$, $[70, 0^+]$, $[70, 2^+]$ y $[20, 1^+]$. Los bariones pertenecientes a la representación $[56, 2^+]$ fueron estudiados en el marco de *large* N_c en la referencia [37]. Mientras que los multipletes $[70, 0^+]$ y $[70, 2^+]$ se analizaron en [38] con $N_f = 2$ y en más tarde se extendió este análisis al caso $N_f = 3$ en [39]. Sin embargo, en todos los trabajos sobre los estados

de esta banda se despreció la mezcla entre estados de distintas representaciones de $O(3) \times SU(2N_f)$, esta mezcla se conoce como “mezcla de configuraciones”. Si bien se cree que los efectos de la mezcla de configuraciones son chicos para $N_c = 3$ [40] correcciones de este tipo pueden ser importantes a la hora de distinguir estados con niveles de energías muy próximos o con errores experimentales demasiado grandes. Por otro lado, con los análisis de los trabajos mencionados para estados de la banda $\mathcal{N} = 2$ no se conocen los efectos que estas correcciones podrían tener, por ejemplo, sobre la estructura de torres en el límite de $N_c \rightarrow \infty$. En esta tesis se consideran las mezclas de configuraciones para los multipletes $[56', 0^+]$, $[56, 2^+]$, $[70, 0^+]$ y $[70, 2^+]$ en el límite de *large* N_c .

La presente tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentará una introducción a *large* N_c QCD . Se introducirá la notación de doble línea de 't Hooft. Se mostrará cómo obtener los órdenes en $1/N_c$ de los diagramas de Feynman que surgen al generalizar la teoría de QCD y se discutirán algunas propiedades de los mesones y los bariones en este límite.

En el capítulo 3 hará una descripción de los modelos de quarks para bariones. Se introducirán los diagramas de Young y se mostrará como se construyen las funciones de onda de los estados fundamentales y excitados tanto para el caso $N_c = 3$ como para el caso de N_c arbitrario. También se introducirán los modelos de quarks del tipo Isgur-Karl en especial para el caso de estados de paridad negativa.

En el capítulo 4 se describirá cómo surge la simetría contraída en el límite de $N_c \rightarrow \infty$, se discutirá cómo esto permite establecer la expansión en $1/N_c$ de los operadores asociados a operadores bariónicos y se mostrará cómo esta simetría da lugar a torres formadas por estados degenerados en el caso de los estados fundamentales. Se presentarán las expansiones en $1/N_c$ de operadores tanto para describir observables asociados a estados bariónicos fundamentales como para estados excitados.

En el capítulo 5 se presentará un análisis de las masas obtenidas con un modelo de quarks general para bariones no extraños del multiplete $[70, 1^-]$. También se describirá el *matching* del modelo de quarks general con la expansión de operadores en $1/N_c$.

En el capítulo 6 se presentará un análisis de las masas los estados excitados de bariones no extraños pertenecientes a la banda $\mathcal{N} = 2$ en el límite $N_c \rightarrow \infty$ y se analizará el esquema de los niveles de energía que se obtiene en función de las simetrías de *large* N_c .

Finalmente, en el último capítulo se presentarán un resumen de la tesis y las conclusiones generales de los trabajos realizados.

Capítulo 2

Large N_c QCD

2.1 Introducción

En la teoría de *QCD*, los quarks llevan carga de color, estas cargas se indican con las etiquetas r (rojo o *red* en inglés), g (verde o *green*) y b (azul o *blue*) y pertenecen a la representación fundamental del grupo $SU(3)$. Esta carga es la que describe a las interacciones fuertes. Además, los quarks se presentan en seis sabores distintos: u , d , s , c , t , b siendo u y d los más livianos y por lo tanto generalmente estos son los quarks más estables. Como se verá más adelante, el sabor puede asociarse a una simetría aproximada del grupo $SU(3)_{fl}$ si se tienen en cuenta sólo los tres quarks más livianos (u , d y s). El subíndice fl indica que se trata de una simetría de sabor, *flavor* en inglés. Además de los quarks, existen ocho gluones en la representación adjunta de $SU(3)$ que también llevan carga de color por lo que pueden interactuar entre sí, esto es lo que hace de *QCD* una teoría de gauge no-abeliana. Es decir que *QCD* es una teoría cuántica de campos de gauge no-abeliana basada en el grupo de simetría $SU(3)$ de color.

El Lagrangiano que describe la dinámica de los quarks y gluones en *QCD* viene dado por [1]

$$\mathcal{L} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f^j \left(i\gamma^\mu D_\mu^{jj'} - \delta^{jj'} m_f \right) q_f^{j'} - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a, \quad (2.1)$$

donde existe una suma sobre los índices repetidos. El primer término describe la dinámica de los quarks y sus interacciones con gluones y el segundo término describe la dinámica de los gluones. Los campos q_f^j son espinores de Dirac de cuatro componentes con índice $j = r, g, b$ correspondientes a los $N_c = 3$ colores y representan a los quarks de sabor f en la representación fundamental de $SU(3)$. Además, γ^μ con $\mu = 0, 1, 2, 3$ son las matrices de Dirac. Por otro lado, la derivada covariante está definida como $D_\mu^{jj'} = \delta^{jj'} \partial_\mu + ig t_a^{jj'} A_\mu^a$ donde $t_a^{jj'}$ están asociadas a las matrices de Gell-Mann, A_μ^a son los campos gluónicos con índice de color $a = 1, \dots, 8$ y g es la constante de acoplamiento fuerte. Las matrices $t_a^{jj'}$ son los generadores de $SU(3)$ en la representación fundamental

y satisfacen las propiedades

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c, \quad \{t^a, t^b\} = \frac{1}{3}\delta^{ab} + d^{abc}t^c, \quad \text{Tr}(t^a t^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}, \quad (2.2)$$

donde $d^{abc} = 2\text{Tr}(\{t^a, t^b\}t^c)$ y $f^{abc} = -2i\text{Tr}([t^a, t^b]t^c)$ son las constantes de estructura del álgebra del grupo $SU(3)$. Finalmente, el tensor de campo gluónico viene dado por

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

Las interacciones gluón-gluón del Lagrangiano de la ecuación (2.1) son las que dan origen a la dinámica no trivial de las interacciones fuertes. En particular, dan lugar a los fenómenos de confinamiento y libertad asintótica mencionados en la introducción de esta tesis.

En *large N_c QCD* se extiende *QCD* a un número arbitrario de N_c colores. Existen algunas razones por las cuales uno podría cuestionar la utilidad de esta extensión en un principio. Por ejemplo, se podría pensar que al aumentar los N_c grados de libertad de la teoría aumenten la complejidad del problema de interacciones fuertes. Esto es cierto en el sentido en que las interacciones para cualquier quark o gluón se vuelven más complicadas para N_c grande si intenta resolver la teoría de manera exacta. El interés de esta generalización de *QCD* con tres colores a *QCD* con N_c colores radica en la posibilidad de hacer un desarrollo perturbativo en la inversa del número de colores. Por lo tanto, en *large N_c* el número de colores es arbitrariamente grande, el límite de interés en esta teoría es $N_c \rightarrow \infty$.

Para que la teoría sea fenomenológicamente relevante, *large N_c QCD* debe conservar las propiedades de la naturaleza conocidas al tomar $N_c = 3$. Para lograr esto se asumen varias propiedades que se mencionarán más adelante. Aquí mencionamos la primera suposición importante que consiste en considerar que en *large N_c* también se tiene confinamiento de color. De modo contrario tendríamos una teoría que difiere mucho de lo observado en nuestro universo de $N_c = 3$, sería un universo lleno de estados bariónicos con color y quarks libres. Esta suposición no es necesaria en principio, la extrapolación desde *QCD* con $N_c = 3$ a $N_c \rightarrow \infty$ podría llevar de una fase confinante a una no-confinante a partir de cierto valor de $N_c > 3$. Sin embargo, no existen razones particulares para considerar este caso y por otro lado, se perdería la relevancia fenomenológica del límite de *large N_c* ya que no se tiene conocimiento empírico sobre teorías con interacciones fuertes no-confinantes.

Entonces, *large N_c QCD* es una teoría de gauge no-abeliana basada en el grupo de simetría $SU(N_c)$ de color (en vez de $SU(3)$). El Lagrangiano de *large N_c QCD* está dado por la misma ecuación (2.1) pero considerando ahora, que el índice de color de los campos de quarks pueden tomar N_c valores [20]. En esta teoría, los índices j pueden tomar N_c valores mientras los índices a pueden tomar $N_c^2 - 1$ valores, es decir que existen N_c quarks y $N_c^2 - 1$ gluones en *QCD* extendida a N_c colores.

2.2 Diagramas de Feynman para *large* N_c

En la expansión en $1/N_c$ se considera *QCD* con N_c colores y un grupo de gauge $SU(N_c)$ en el límite de N_c grande [10]. Al considerar procesos con N_c grande aparecerán un mayor número de diagramas de Feynman ya que, a pesar de que los colores de los estados inicial y final de un determinado proceso estén especificados, los estados intermedios tienen color arbitrario y aparece una suma sobre todas las posibilidades. En *large* N_c esto se ve reflejado en la aparición de factores combinatorios grandes. Más concretamente, como ya se mencionó en la sección anterior, en *large* N_c *QCD* existen $N_c^2 - 1$ gluones mientras que los quarks pueden tener N_c colores distintos, por lo tanto esta teoría tiene muchos más quarks que *QCD* pero aún mayor es el efecto sobre la cantidad de gluones.

Desde un punto de vista de los diagramas de Feynman de la teoría, se podría pensar nuevamente que extender *QCD* a N_c colores resulta en una teoría más compleja porque la cantidad de diagramas es mayor. Sin embargo, como se verá a continuación, *QCD* en muchos sentidos se simplifica en el límite $N_c \rightarrow \infty$, ya que existe una expansión sistemática en $1/N_c$.

La notación de doble línea introducida por 't Hooft [3] resulta particularmente útil para hallar el orden en $1/N_c$ de los diagramas de Feynman. En esta notación el campo de gauge de los gluones $(A^\mu)^A$ en la representación adjunta son reemplazados por un campo tensorial $(A^\mu)_j^i$, donde los índices i, j pertenecen a la representación fundamental del grupo $SU(N_c)$ de color. En términos de diagramas de Feynman, esto significa que un gluón $(A^\mu)_j^i$ puede ser representado por una combinación de un campo de quarks índice superior i y un campo de antiquarks con índice inferior j . Este reemplazo sugiere que, como es usual representar a un quark con una línea con una flecha cuyo sentido indica si se trata de un quark o un antiquark, los gluones pueden representarse con una doble línea como se muestra en la figura 2.1. Esta es una manera muy simple y efectiva de llevar un registro de los números cuánticos de color de cualquier proceso y, por lo tanto, de deducir el orden en $1/N_c$ de cualquier diagrama.

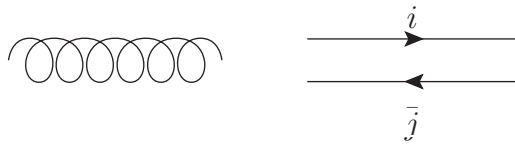


Figura 2.1: Representación tradicional y notación de doble línea para el gluón.

Para ejemplificar esto consideramos un diagrama de Feynman típico, analizamos el diagrama de polarización del vacío por un lazo (o *loop*) gluónico que se muestra en la figura 2.2. Con la notación de doble línea es fácil notar que, a pesar de que los números cuánticos de color de los estados inicial y final están determinados, el campo de quarks en el *loop* puede tener cualquier color k , por lo tanto hay N_c posibilidades

para este número cuántico del gluón en el estado intermedio. Esto da lugar a un factor combinatorio de orden N_c que, en principio, lleva a una contribución infinita en el límite de *large* N_c . Sin embargo, también aparecen constantes de acoplamiento en los dos vértices de interacción y siguiendo las reglas de Feynman [41] sabemos que cada vértice de tres gluones aporta un factor g . Para lograr que este diagrama sea finito en el límite de N_c grande se puede “reescalar” la constante de acoplamiento del Lagrangiano de QCD para *large* N_c para que sea del orden de $1/\sqrt{N_c}$ [10]

$$g \rightarrow \frac{g_0}{\sqrt{N_c}}, \quad (2.4)$$

donde g_0 , conocido como “acoplamiento de 't Hooft” se mantiene fijo en el límite $N_c \rightarrow \infty$.

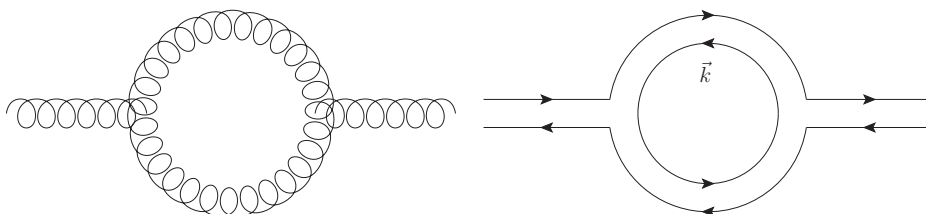


Figura 2.2: Diagramas de polarización del vacío debida a un *loop* gluónico en la notación tradicional y en notación de doble línea.

Entonces, con este “reescaleo” de la constante de acoplamiento de la teoría y teniendo en cuenta las reglas de Feynman para los vértices en términos de la constante de acoplamiento g , el vértice quark-gluón y el vértice de tres gluones son de orden $1/\sqrt{N_c}$ mientras que el vértice de cuatro gluones es de orden $1/N_c$. Estos vértices aparecen representados en la figura 2.3.

Con esta notación de doble línea resulta fácil determinar el orden en $1/N_c$ de cualquier diagrama. Para analizar las características de *large* N_c es útil estudiar el orden de algunos diagramas específicos. Tomaremos como ejemplo procesos con más de un *loop* que contribuyen al propagador gluónico.

Consideramos la contribución de dos *loops* al propagador gluónico que se muestra en la figura 2.4. Este diagrama contiene cuatro vértices, cada uno aporta un factor $1/\sqrt{N_c}$ y dos *loops* de color que aportan un factor N_c cada uno, por lo tanto este diagrama es de orden

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^4 \times N_c^2 = N_c^0. \quad (2.5)$$

Del mismo modo es fácil ver que el diagrama de tres *loops* de la figura 2.5 que tiene seis vértices y tres *loops* de color es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^3 = 1$ y el diagrama de cuatro *loops* que contiene seis vértices de tres gluones y un vértice de cuatro gluones es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 (1/N_c) \times N_c^4 = 1$. Es decir que ninguno de estos diagramas se anula en el límite de *large* N_c .

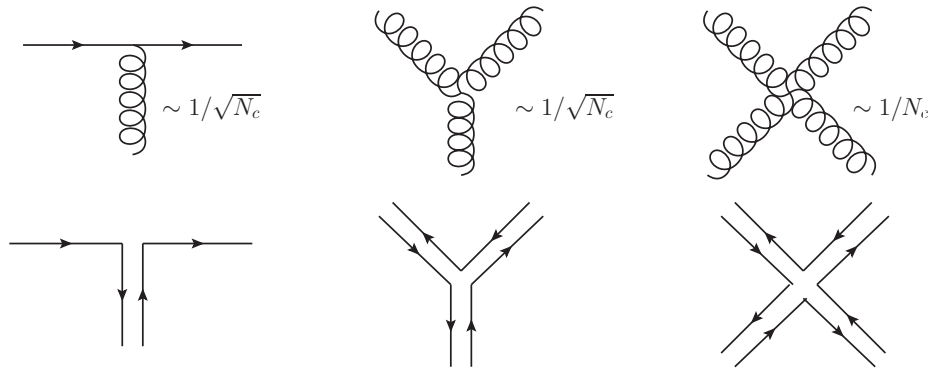


Figura 2.3: Vértices de interacción quark-gluón y de tres gluones de orden $1/\sqrt{N_c}$ y de cuatro gluones de orden $1/N_c$ en la notación tradicional (arriba) y en notación de doble línea (abajo).

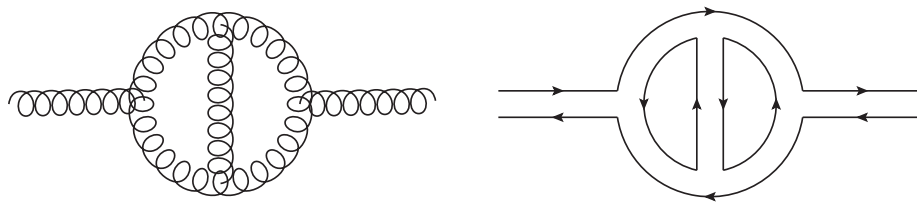


Figura 2.4: Corrección de dos *loops* al propagador gluónico.

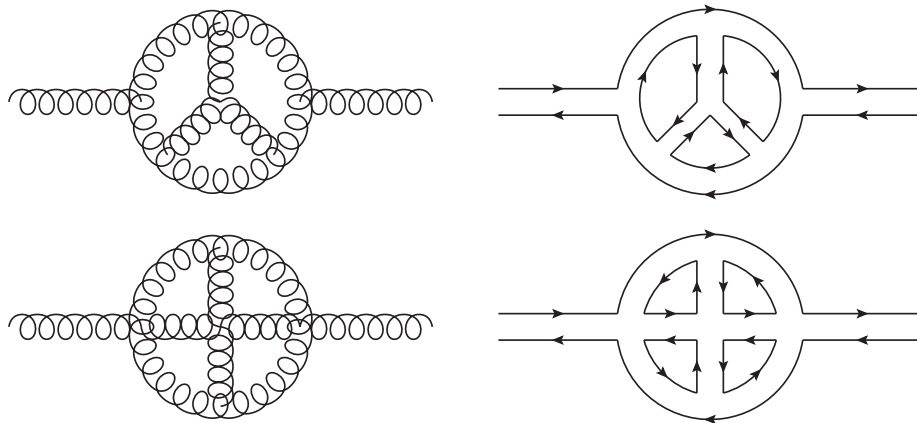


Figura 2.5: Corrección de tres y cuatro *loops* al propagador gluónico.

Más aún, cualquier diagrama de gluones plano, es decir que se puede dibujar en un plano, resulta en una contribución que no se anula en el límite de *large N_c* [10]. Para ver esto basta notar que solo se puede agregar un gluón a un diagrama plano cualquiera manteniéndolo plano de tres maneras que se describirán a continuación.

Estas tres posibilidades se muestran a modo de ejemplo en la figura 2.6 para el caso del diagrama de polarización por un *loop* gluónico, pero lo que sigue es válido para cualquier diagrama plano permitido para gluones. Se puede agregar un gluón de modo que se agregan dos vértices adicionales de tres gluones y un *loop* de color, es decir que, según las reglas que se mostraron esquemáticamente en la figura 2.3, incluir un gluón de esta manera contribuye en un factor $(1/\sqrt{N_c})^2 \times N_c = 1$. Por otro lado, se puede agregar un gluón de modo que aparece un vértice de tres gluones adicional, pero se reemplaza un vértice de tres gluones por uno de cuatro y aparece un *loop* de color adicional, por lo que contribuye en un factor $(1/\sqrt{N_c})(1/\sqrt{N_c})^{-1}(1/N_c) \times N_c = 1$. Finalmente, la inserción de un gluón puede resultar en reemplazar dos vértices de tres gluones por dos de cuatro gluones y así aparece un *loop* de color adicional, por lo que el diagrama resulta multiplicado por un factor $(1/N_c)^2(1/\sqrt{N_c})^{-2} \times N_c = 1$. Es decir que agregar un gluón a un diagrama plano, manteniéndolo plano, no cambia la dependencia en N_c , los diagramas planos sobreviven en el límite $N_c \rightarrow \infty$.

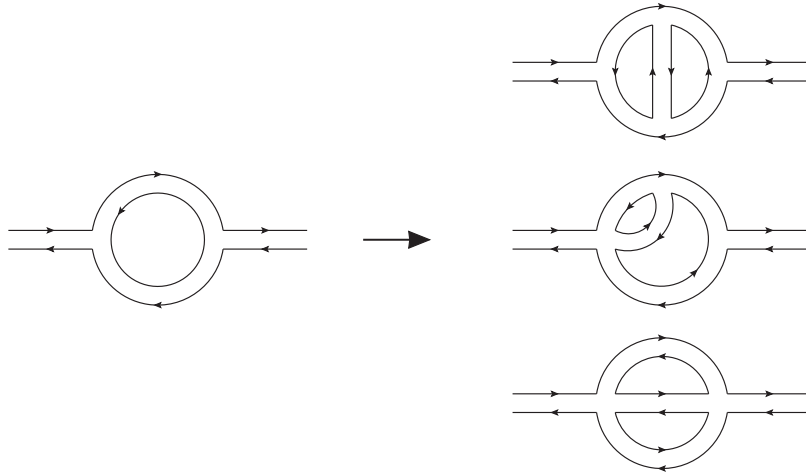


Figura 2.6: Efecto al agregar un gluón a un diagrama plano, todos los diagramas son de orden 1.

Sin embargo, no todos los diagramas sobreviven al límite de N_c grande. En la figura 2.7 se muestra un típico diagrama que se ve suprimido en el límite de N_c grande. Este diagrama no-plano tiene seis vértices de interacción pero un solo *loop* de color por lo que resulta de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c$. Lo que demuestra que este diagrama está suprimido en el límite de N_c grande por un factor $1/N_c^2$. Considerando otros procesos de diagramas no-planos es posible demostrar que cualquier diagrama de gluones no-plano está suprimido por al menos un factor $1/N_c^2$ mientras que todos los diagramas planos con un número arbitrario de gluones son de orden 1 [10].

Por último, consideremos la contribución de un *loop* fermiónico al propagador gluónico. Este diagrama se muestra en la figura 2.8. Como los gluones son “patas” externas del diagrama tienen sus colores fijados pero entonces el color de la línea

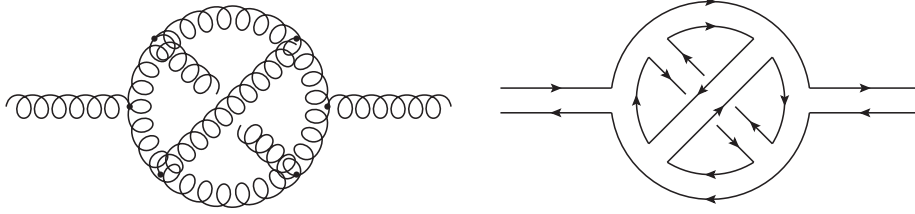


Figura 2.7: Diagrama no-plano de orden $1/N_c^2$.

fermiónica interna también está determinado, como se ve claramente en el diagrama de doble línea. Por lo tanto, no aparece un factor combinatorio y toda dependencia en N_c proviene de los vértices de interacción que en este caso contribuyen en un factor $(1/\sqrt{N_c})^2 = 1/N_c$. Es decir que la contribución del *loop* fermiónico al propagador gluónico está suprimida en N_c .

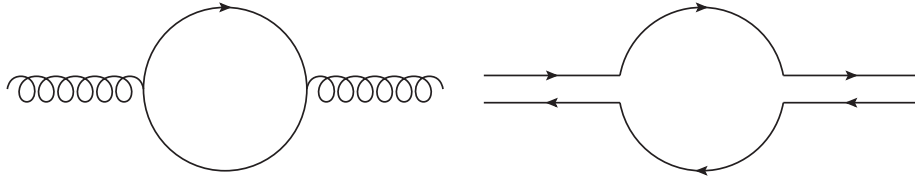


Figura 2.8: Corrección de un *loop* fermiónico al propagador gluónico de orden $1/N_c$.

Hasta aquí hemos considerado el propagador del gluón, que es la función de correlación de dos puntos de un campo gluónico A_μ . Pero también necesitaremos considerar elementos de matriz de operadores invariantes de gauge como bilineales de quarks (como por ejemplo $\bar{q}q$ o $\bar{q}\gamma^\mu q$). En lo que sigue analizaremos la función de correlación de dos puntos $\langle J(y)J(x) \rangle$ de una corriente J que corresponde a un bilineal de quarks. Esta función crea un mesón en el punto x y lo aniquila en el punto y . En una teoría libre, sin gluones, existe un solo diagrama que se muestra en la figura 2.9 y es de orden N_c ya que se suma sobre todos los colores posibles de los quarks en el loop. Como ya hemos mencionado, la inserción de un gluón que mantenga al diagrama plano, no cambiará la dependencia en N_c . Por ejemplo, el diagrama de la figura 2.10(a) es de orden $(1/\sqrt{N_c})^2 \times N_c^2 = N_c$ y el diagrama de la figura 2.10(b) es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^4 = N_c$, ambos diagramas tienen la misma dependencia en N_c que la teoría libre.

Sin embargo, para asegurar que la contribución del diagrama a los elementos de matriz de esta función de dos puntos sea dominante no es suficiente con que sea plano. Por ejemplo, el diagrama de la figura 2.11 es un diagrama plano que al dibujarlo en notación de doble línea se ve que tiene solo una línea cerrada de quarks entonces es de orden $(1/\sqrt{N_c})^4 N_c = 1/N_c$, es decir que está suprimido en dos ordenes frente a los diagramas de las figuras 2.9 y 2.10.

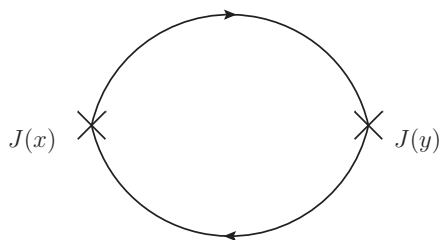


Figura 2.9: Función de correlación de dos puntos en una teoría libre. En *large N_c QCD* este diagrama es de orden N_c .

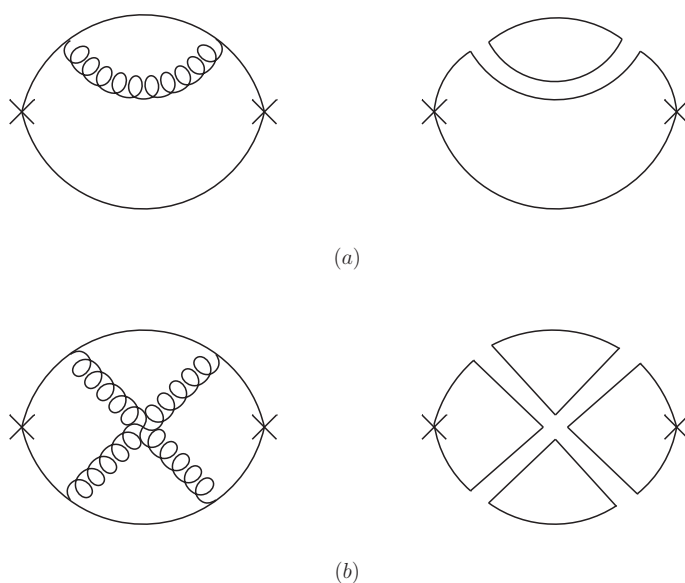


Figura 2.10: Contribuciones a la función de correlación de dos puntos en notación tradicional y de doble línea. Ambos diagramas, (a) y (b), son de orden N_c .

El diagrama de la figura 2.11 difiere de los ejemplos anteriores en el hecho que tiene una línea gluónica por fuera del *loop* fermiónico. Los diagramas de las figuras 2.9 y 2.10 están delimitados solo por líneas fermiónicas. Considerando ejemplos simples puede verse que, para analizar la dependencia en N_c de los diagramas, conviene incluir en la definición de “planaridad” la condición de que el diagrama contenga sólo líneas de quarks en los bordes [10].

Por otro lado, los diagramas que contengan un *loop* fermiónico interno adquieren un factor de supresión $1/N_c$. Esto se puede ver, por ejemplo, en el diagrama de la figura 2.12(a) que es de orden $(1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^3 = 1$ mientras que si se reemplaza el *loop* de quarks interno por un *loop* gluónico (figura 2.12(b)) el diagrama resulta del mismo orden que el de la teoría libre $((1/\sqrt{N_c})^6 \times N_c^4 = N_c)$.

En decir que los diagramas dominantes de la función de dos puntos en *large N_c* son

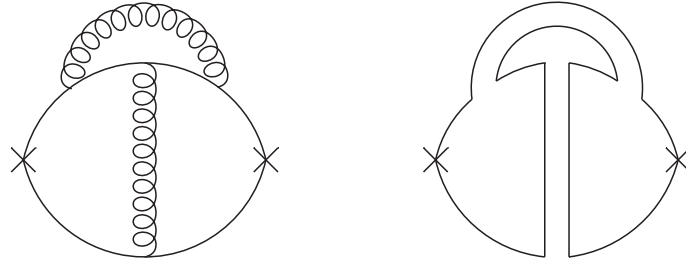


Figura 2.11: Diagrama de orden $1/N_c$ que contribuye a la función de correlación de dos puntos. Este diagrama no responde a la definición de planaridad adoptada usualmente en *large N_c QCD*.

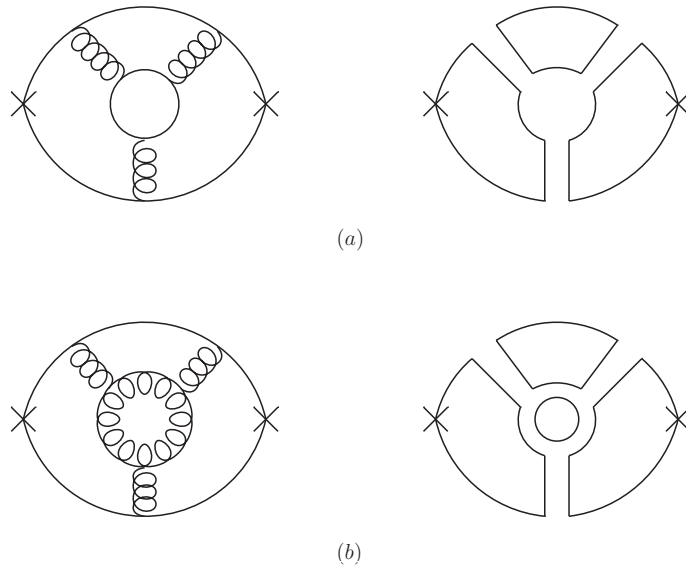


Figura 2.12: Función de correlación de dos puntos con un *loop* interno de quarks (a) y de gluones (b).

diagramas planos (sin gluones en los bordes) con un solo *loop* de quarks.

Con el análisis de esta sección podemos establecer las siguientes reglas de conteo para *large N_c*:

- (1) Agregar líneas gluónicas, conservando la planaridad, no cambia el orden del diagrama.
- (2) Cada línea gluónica no-plana está suprimida por un factor $1/N_c^2$.
- (3) Loops de quarks internos están suprimidos por un factor $1/N_c$.

Es decir que los diagramas dominantes en *large N_c* son planos y contienen el menor número de loops fermiónicos posible.

Considerando estas reglas se puede ver que los diagramas dominantes pueden ser

muy complejos, pueden tener un número arbitrariamente grande de gluones internos. Los diagramas con muchas líneas gluónicas internas no se pueden evaluar en forma cerrada. No es posible sumar sobre todos los diagramas planos lo que llevaría a pensar que la teoría en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ no permite conocer demasiado acerca de las características de QCD. Sin embargo, si suponemos que QCD sigue siendo una teoría confinante en el límite de *large* N_c [10] es posible deducir varias propiedades de los mesones y bariones en *large* N_c como se verá en las próximas secciones. Esta suposición implica, que si bien no podremos calcular todos los diagramas planos, todos los diagramas dominantes se combinan de modo que la teoría se mantiene confinante.

2.3 Mesones en *large* N_c

En esta sección analizaremos algunas propiedades de los mesones en *large* N_c . Si bien en esta tesis estudiamos propiedades de los bariones, algunos resultados utilizados en la expansión de operadores para la masa de los bariones dependen del acoplamiento barión-mesón. Antes de analizar este proceso describiremos algunas propiedades de los mesones en el límite $N_c \rightarrow \infty$.

Los mesones en *large* N_c son estados ligados sin color compuestos por un quark y un antiquark. La función de onda del mesón que transforma como un singlete de color esta dada por [42]

$$|1\rangle_c = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \underbrace{(\bar{l}l + \bar{m}m + \dots + \bar{n}n)}_{N_c \text{ términos}}, \quad (2.6)$$

donde l, m, \dots, n representan distintos números cuánticos de color. La suma sobre todos los N_c colores posibles da origen al factor $\sqrt{N_c}$.

En lo que sigue, mostraremos que el operador $J(x)$ correspondiente a un bilineal de quarks, actuando sobre el vacío solo puede crear estados de un único mesón en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Esto es equivalente a mostrar que las únicas singularidades de la función de correlación de dos puntos de J son polos correspondientes a un solo mesón. Para esto analizamos los diagramas de creación y aniquilación. Consideramos la contribución a la función de dos puntos de una bilineal de quarks del diagrama de la figura 2.13. Vemos que el estado intermedio contiene un par $\bar{q}q$ y tres gluones. En una teoría confinante el quark y el antiquark aparecen ligados formando un mesón. Queremos ver que el quark, el antiquark y los tres gluones del estado intermedio forman un hadrón singlete de color y que no aparecen singletes de color formados solo por gluones (conocidos como *glueballs*). Para esto miramos los índices de $SU(N_c)$ del diagrama de la figura 2.13. Es fácil ver que para cualquier diagrama dominante el estado intermedio tendrá la estructura

$$\bar{q}_l A_k^l A_j^k A_i^j q^i, \quad (2.7)$$

es decir, todos los índices aparecen contraídos formando un solo singlete de color. Esto no sucede con los diagramas suprimidos como es el caso del diagrama no-plano de la figura 2.11. En este tipo de diagramas aparecen estructuras del estado intermedio que

tienen la forma

$$\bar{q}_k A_l^k q^l A_m^j A_j^m, \quad (2.8)$$

que es un producto de dos singletes de color, $\bar{q}_k A_l^k q^l$ y $A_m^j A_j^m$. Un estado intermedio con esta estructura puede interpretarse como un mesón ($\bar{q}_k A_l^k q^l$) y un estado *glueball* ($A_m^j A_j^m$). Como los diagramas no-planos se encuentran suprimidos en *large N_c*, solo existen estados como el de la ecuación (2.7) en este límite. De este análisis podemos

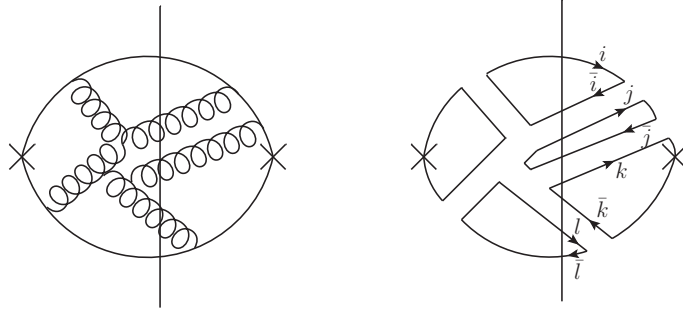


Figura 2.13: Estado intermedio que contribuye al elemento de matriz $\langle JJ \rangle$.

extraer varias conclusiones que describimos a continuación.

Como los estados intermedios de la función de dos puntos de J consisten siempre en estados de un mesón tenemos

$$\langle J(k)J(-k) \rangle = \sum_n \frac{a_n^2}{k^2 - m_n^2} \sim N_c, \quad (2.9)$$

donde la suma incluye a todos los estados físicos intermedios sin grados de libertad de color, es decir que se trata de una suma sobre todos los diagramas planos que contribuyen a esta función de dos puntos. El hecho de que $\langle J(k)J(-k) \rangle \sim N_c$ se discutió en la sección 2.2. Esta dependencia en N_c proviene del factor a_n que es la probabilidad de crear un mesón a partir del vacío, es decir, $a_n = \langle 0|J|n \rangle$. Esto indica que un factor $\sqrt{N_c}$ está asociado a cada punto de creación y aniquilación del mesón, por lo que se puede deducir que la constante de nto del mesón f_m es de orden

$$f_m \sim \langle 0|J|n \rangle \sim \sqrt{N_c}. \quad (2.10)$$

Al observar la ecuación (2.6) notamos que el resultado obtenido para la constante de decaimiento del mesón era de esperar ya la suma sobre los N_c colores en la función de onda, que corresponden a los N_c términos que aparecen por la indeterminación del color del *loop* fermiónico en los diagramas de la función de dos puntos, son los que dan origen a al factor $\sqrt{N_c}$.

Podemos obtener más propiedades de los mesones considerando elementos de matriz del producto de más de dos corrientes J . Consideremos, por ejemplo, la función de tres puntos $\langle J(p)J(q)J(r) \rangle$. En la figura 2.14 se muestra un diagrama típico de

una contribución a $\langle JJJ \rangle$. Utilizando los mismos argumentos que usamos para las contribuciones a $\langle JJ \rangle$ (figura 2.13) se puede ver que los estados intermedios también consisten en estados de un solo mesón. Es decir que las singularidades son polos de un mesón. Esto es suficiente para afirmar que $\langle J(p)J(q)J(r) \rangle$ está dado por diagramas a nivel árbol del tipo que se muestra en la figura 2.15 [10]. En la figura también se indican las dependencias en N_c de las inserciones que vimos que son de orden $\sqrt{N_c}$ y como sabemos que el diagrama es de orden N_c el vértice de tres mesones es de orden $1/\sqrt{N_c}$.

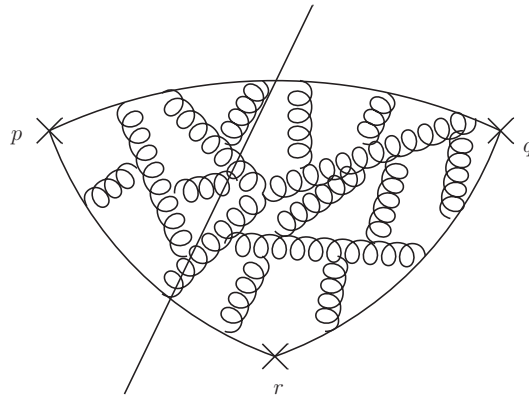


Figura 2.14: Estado intermedio que contribuye al elemento de matriz $\langle JJJ \rangle$.

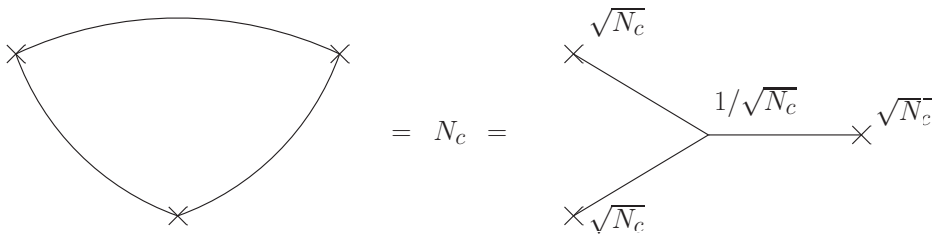


Figura 2.15: Dependencia en N_c del vértice de tres mesones.

Estos resultados se pueden generalizar para funciones de k puntos. Cada corriente crea un mesón y el diagrama dominante es un *loop* de quarks plano y es de orden N_c es decir

$$\underbrace{\text{loop fermiónico}}_{N_c} = \underbrace{(\sqrt{N_c})^k}_{k \text{ mesones}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^{k-2}}_{\text{vértice de } k \text{ mesones}}. \tag{2.11}$$

Por lo tanto, el vértice de k mesones es de orden $(1/\sqrt{N_c})^{k-2}$.

Con lo discutido en esta sección obtuvimos las siguientes propiedades para los mesones:

- (1) La constante de decaimiento del mesón f_m es de orden $\sqrt{N_c}$.
- (2) La masa del mesón es de orden 1 por la ecuación (2.6).
- (3) La amplitud de decaimiento de un mesón a dos mesones es de orden $1/\sqrt{N_c}$.
- (4) Pasar de un vértice de k mesones a unos de $k + 1$ mesones agrega un factor $1/\sqrt{N_c}$ al orden del vértice (ecuación 2.11).
- (5) Como el número de diagramas planos que describen a las funciones de dos puntos es infinito, el número de mesones intermedios es infinito.

Es decir que la amplitud de dispersión o *scattering* para los mesones se anula en *large N_c* ya que es de orden $1/N_c$. Los mesones en *large N_c* son estados estables y no interactuantes.

2.4 Bariones en *large N_c*

Los bariones en el marco de *large N_c* fueron estudiados por primera vez por Witten [10]. Estos estados se construyen por analogía a las observaciones para $N_c = 3$ que establecen que estados fermiónicos con funciones de onda de spin-sabor-orbital completamente simétricas requieren, al menos la misma cantidad de quarks que de colores de la teoría. Por otro lado, una vez especificado el número de colores N_c , el grupo $SU(N_c)$ requiere de un mínimo de N_c colores para formar un singlete de color. Por lo tanto, los bariones en *large N_c QCD* están compuestos por exactamente N_c quarks de valencia completamente antisimétricos en los índices de color. El invariante ϵ , se usa para contraer los índices de color de los N_c quarks para formar un estado ligado singlete de color como lo requiere el confinamiento en *QCD* de este modo la función de onda bariónica puede escribirse como

$$\epsilon_{i_1 i_2 i_3 \dots i_{N_c}} q^{i_1} q^{i_2} q^{i_3} \dots q^{i_{N_c}} . \quad (2.12)$$

Es importante destacar que solo en el caso de N_c impar pueden lograrse estados de bariones fermiónicos, ya que en *large N_c* los quarks también tienen espín $1/2$. También se podrían considerar teorías con N_c par, pero estas no serán fenomenológicamente relevantes.

A primer orden, el barión en *large N_c* puede ser representado por diagramas de quarks y gluones que consisten en N_c líneas de quarks de valencia y un número arbitrario de gluones intercambiados por los quarks. A lo largo de esta tesis consideraremos solo bariones ordinarios, es decir bariones compuestos por N_c quarks de valencia y ningún antiquark de valencia. Si tenemos en cuenta las reglas de Feynman deducidas en la sección 2.2 (resumidas en la figura 2.3) vemos que la interacción entre dos quarks es de orden $1/N_c$ si intercambian un solo gluón.

Como los bariones están formados por N_c quarks donde N_c es grande resulta adecuado usar una aproximación de Hartree en la que cada quark se mueve en un campo medio producido por los $N_c - 1$ quarks restantes [10]. A primer orden en $1/N_c$,

este campo es estático. Es decir que todos los quarks en el estado fundamental deben satisfacer las mismas ecuaciones y tienen la misma función de onda. La forma de la función de onda de los quarks en el barión depende de las propiedades de QCD y son desconocidas en principio, pero esto no impide hacer un análisis en términos de potencias de N_c .

El análisis de los bariones con el método de Hartree, fue llevado a cabo por primera vez por Witten que, usando las reglas de conteo para *large* N_c mencionadas en la sección 2.2 dedujo las siguientes propiedades para los bariones en *large* N_c :

- (1) Las masas de los bariones son de orden N_c .
- (2) El tamaño y la función de onda de los bariones es de orden 1.

Este método utilizando la aproximación de Hartree sólo es capaz de describir procesos a orden más bajo. Es posible analizar contribuciones subdominantes que involucran un subconjunto de quarks actuando de modo colectivo. Se conocen dos métodos para estudiar la estructura de los bariones, el “método de relaciones de consistencia” y el “método de operadores” que se describirán en el capítulo 4.

2.5 El acoplamiento mesón-barión en *large* N_c

Por último, analizamos el acoplamiento mesón-barión en el marco de *large* N_c QCD.

La dependencia en N_c del acoplamiento mesón-barión se puede obtener analizando el diagrama de la figura 2.16. Según las reglas de conteo que se introdujeron en este capítulo, los dos vértices quark-gluón que aparecen aportan un factor $(1/\sqrt{N_c})^2$ al diagrama. La suma sobre los colores c' del mesón aporta un factor N_c y la normalización de la función de onda de la ecuación (2.6) agrega un factor $1/N_c$. Finalmente debemos tener en cuenta que el acoplamiento puede darse en cualquiera de las líneas de quarks por lo que aparece un factor N_c (que es lo mismo que sumar sobre los colores que puede tener la línea c). Entonces el diagrama de la figura 2.16 es de orden

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^2 N_c \frac{1}{\sqrt{N_c}} N_c = \sqrt{N_c}. \quad (2.13)$$

Es decir que el acoplamiento mesón-barión es de orden $\sqrt{N_c}$.

Luego de este análisis, podemos fácilmente considerar también la amplitud de dispersión mesón-barión. Analizando el diagrama de la figura 2.17 vemos que tenemos cuatro vértices quark-gluón que contribuyen en un factor $(1/\sqrt{N_c})^4$. La suma sobre los colores posibles de c' y c'' aportan un factor N_c , además los mesones tiene una función de onda que aporta un factor $1/\sqrt{N_c}$ cada uno. Finalmente el color de la línea del quark c puede adquirir N_c colores distintos. Por lo tanto el orden del diagrama resulta

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^4 N_c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{N_c}}\right)^2 N_c = 1. \quad (2.14)$$

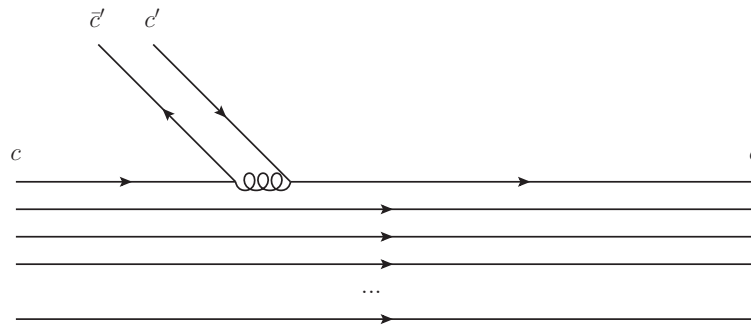


Figura 2.16: Acoplamiento mesón-barión.

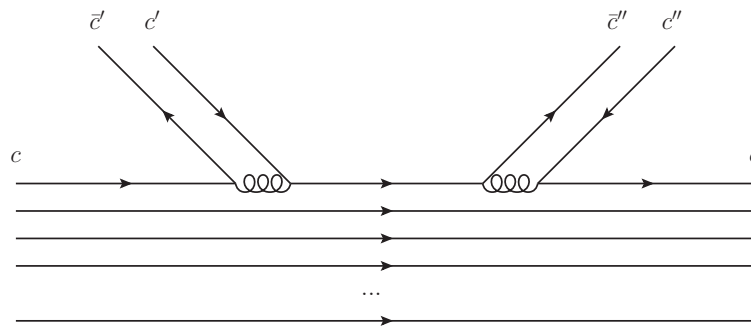


Figura 2.17: Dispersión mesón-barión.

Esta regla de conteo se puede generalizar a procesos que involucren más mesones. Cada mesón que se introduce reduce la amplitud de dispersión en un factor $1/\sqrt{N_c}$. Entonces, por ejemplo, el proceso *barión + mesón* \rightarrow *barión + (n + 1) mesones* es de orden $N_c^{1-n/2}$ [42].

Las reglas de Feynman para *large N_c QCD* que se describieron en este capítulo y en particular, este proceso de dispersión mesón-barión, dieron lugar al importante descubrimiento de la simetría contraída de *large N_c* que se presentará más adelante, en el capítulo 4.

Capítulo 3

Modelos de quarks

3.1 Introducción

Como se ha visto en el capítulo anterior, los bariones para *large* N_c QCD se pueden describir como estados ligados de N_c quarks de valencia. En QCD con $N_c = 3$ esta descripción proviene del hecho que una gran cantidad de estados bariónicos observados pueden asociarse a estados de tres quarks de valencia que interactúan mediante fuerzas dependientes del espín. A lo largo de este capítulo consideraremos el caso de QCD con $N_c = 3$, con excepción de la sección 3.4 en la que extendemos la clasificación de los bariones en modelos de quarks para el caso de N_c arbitrario.

Como ya mencionamos en la introducción de esta tesis, en sus principios el modelo de quarks fue básicamente un esquema de clasificación basado en una simetría orbital \times spin-sabor de modo que los estados bariónicos se ubican en multipletes de $O(3) \times SU(2N_f)$. Las resonancias bariónicas observadas experimentalmente pueden ser asociadas a multipletes que resultan de estos grupos de simetría como se puede ver en la tabla 3.1. Este esquema, luego dio lugar a modelos de quarks que intentan describir a los bariones mediante potenciales de interacción entre los quarks manteniendo esta simetría de spin-sabor.

Para entender el origen de estas simetrías recordamos que los quarks se presentan en seis sabores distintos u, d, s, c, b y t . Cuando se propuso el número cuántico de isospín, el protón y el neutrón pasaron a poder ser descritos como una misma partícula con distinta proyección. De este modo, los quarks livianos u, d y s pueden ser interpretados como el mismo quark con distinto sabor. Esto se traduce en una simetría adicional aproximada de $SU(N_f)$, donde N_f es el número de sabores. En este capítulo solo se consideran estados compuestos por quarks de valencia livianos. Junto con el grupo de simetría orbital $O(3)$ y la simetría dada por el espín mostraremos que se pueden describir a los estados bariónicos como multipletes de $O(3) \times SU(2N_f)$. Como la masa del quark s es apreciablemente mayor que la masa de los quarks u y d , esta simetría está considerablemente rota para $N_f = 3$. Esto rompe la degeneración de masa adentro de los multipletes a los que pertenecen los estados bariónicos.

Para describir a los bariones observados consideraremos estas simetrías orbital, de

$O(3) \times SU(2N_f)$	$SU(3) \times SU(2)$	J^P	$s = 0$	$s = -1$		$s = -2$	$s = -3$
				$I = 0$	$I = 1$		
[56, 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁺	$N(939)$	$\Lambda(1116)$	$\Sigma(1193)$	$\Xi(1318)$	$\Omega(1672)$
	⁴ 10	3/2 ⁺	$\Delta(1232)$		$\Sigma(1385)$	$\Xi(1533)$	
[70, 1 ⁻]	² 8	3/2 ⁻	$N(1520)$	$\Lambda(1690)$	$\Sigma(1580)^{**}$	$\Xi(1820)$	
		1/2 ⁻	$N(1535)$	$\Lambda(1670)$	$\Sigma(1620)^{**}$		
	⁴ 8	1/2 ⁻	$N(1650)$	$\Lambda(1800)$	$\Sigma(1750)$		
		3/2 ⁻	$N(1700)$		$\Sigma(1670)$		
		5/2 ⁻	$N(1675)$	$\Lambda(1830)$	$\Sigma(1775)$		
	² 10	1/2 ⁻	$\Delta(1620)$				
		3/2 ⁻	$\Delta(1700)$				
	² 1	1/2 ⁻		$\Lambda(1405)$			
	3/2 ⁻		$\Lambda(1520)$				
[56', 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁺	$N(1440)$	$\Lambda(1600)$	$\Sigma(1660)$	$\Xi(1690)?$	
	⁴ 10	3/2 ⁺	$\Delta(1600)^{**}$		$\Sigma(1690)^{**?}$		
[56, 2 ⁺]	² 8	3/2 ⁺	$N(1720)$	$\Lambda(1890)$			
		5/2 ⁺	$N(1680)$	$\Lambda(1820)$	$\Sigma(1915)$		
	⁴ 10	1/2 ⁺	$\Delta(1910)$				
		3/2 ⁺	$\Delta(1920)$		$\Sigma(2080)^{**}$		
		5/2 ⁺	$\Delta(1905)$				
		7/2 ⁺	$\Delta(1950)$		$\Sigma(2030)$		
[70, 0 ⁺]	² 8	1/2 ⁺	$N(1710)$	$\Lambda(1810)$	$\Sigma(1880)^{**}$		
	⁴ 8	3/2 ⁺	$N(1540)^{*?}$				
	² 10	1/2 ⁺	$\Delta(1550)$				
	² 1	1/2 ⁺	$N(2100)^{**}$				
[70, 2 ⁺]	² 8	5/2 ⁺		$\Lambda(2100)$			
	⁴ 8	7/2 ⁺	$N(1990)^{**?}$				

Tabla 3.1: Resonancias bariónicas observadas experimentalmente asociadas representaciones irreducibles de $O(3) \times SU(2N_f)$ y de $SU(3) \times SU(2)$. Los símbolos * y ? indican el grado de incertidumbre relacionado con la asignación de los números cuánticos y la detección experimental del estado. s indica el número de extrañeza del barión observado. [2]

espín y de sabor y la simetría de color $SU(3)$. Como los bariones son fermiones, sabemos que la función de onda total debe ser completamente antisimétrica con respecto al intercambio de quarks. Además, estas funciones de onda deben contener información sobre los números cuánticos del barión, es decir que debe tener grados de libertad espaciales, de espín, de sabor y de color. La parte de color debe ser completamente antisimétrica ya que no se observan estados con color en la naturaleza que se explica por el confinamiento en QCD . Por lo tanto, el resto de la función de onda, que contiene a las partes espacial, de sabor y de espín, debe ser completamente simétrica. Teniendo esto en cuenta podremos clasificar los estados bariónicos.

En los modelos de quarks no-relativistas, las funciones de onda de los bariones pueden factorizarse y escribirse como

$$\Psi = \psi_{lm} \chi \phi C, \quad (3.1)$$

donde ψ_{lm} , χ , ϕ y C son las funciones orbital, de espín, de sabor y de color respectiva-

mente. Ya vimos que la función C debe ser antisimétrica, es decir que C es un singlete de color. Por lo tanto, se requerirá que la función $\psi_{lm}\chi\phi$ sea completamente simétrica ante permutaciones de quarks.

La combinación de tres quarks puede dar lugar un espín total de $S = 1/2$ o $S = 3/2$. Los estados con $S = 3/2$ son simétricos ante intercambio de quarks y tienen cuatro proyecciones posibles. Los estados con $S = 1/2$ tienen dos proyecciones con simetría mixta. Llamaremos χ^ρ al estado simétrico ante intercambio del quark 1 y el quark 2, es decir que viene de combinar los espines de 1 y 2 de modo que su espín total sea $S_{12} = 0$ y luego acoplarlas con la tercera partícula, es decir $S_{12} = 0 \times S_3 = 1/2$. Usaremos el supraíndice λ para indicar la función de onda con simetría mixta que se arma combinando las funciones de onda de las partículas 1 y 2 a un espín $S_{12} = 1$ que combinado con el espín del quark 3 resulta en $S_{12} = 1 \times S_3 = 1/2$ acoplado de modo que el espín total está dado por $S = 1/2$. Estas funciones se pueden escribir en su máxima proyección como

$$\chi_{1/2}^\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \quad (3.2)$$

$$\chi_{1/2}^\lambda = -\frac{1}{\sqrt{6}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle), \quad (3.3)$$

donde \uparrow y \downarrow indican la proyección del espín de cada partícula. Cada una de estas funciones tiene una contraparte con proyección de espín total $S_z = -1/2$. Cabe destacar en esta instancia, que no es posible armar una función de onda completamente antisimétrica con tres quarks. Entonces, teniendo en cuenta el espín, en total se tienen ocho estados posibles, cuatro simétricos con $S = 3/2$ y dos grupos de dos estados con simetría mixta

$$2^3 = 8 = \underbrace{4}_{Sym} + \underbrace{2}_\rho + \underbrace{2}_\lambda. \quad (3.4)$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta el sabor, cada uno de los tres quarks puede tomar uno de los tres sabores u , d o s . Es decir que se pueden armar $3^3 = 27$ estados. Existen diez combinaciones totalmente simétricas, ocho con simetría del tipo ρ y ocho del tipo λ , también existe una combinación antisimétrica posible, es decir

$$3^3 = 27 = \underbrace{10}_{Sym} + \underbrace{8}_\rho + \underbrace{8}_\lambda + \underbrace{1}_A. \quad (3.5)$$

Entre estos estados, ocho corresponden a bariones sin extrañeza, son los nucleones N y las Δ observados y sus funciones de onda son análogas a las funciones de espín que se describieron más arriba.

Todas las funciones de onda de sabor de la ecuación 3.5 están dadas de en la tablas 3.2-3.4 donde se indica además el correspondiente barión observado.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, vemos que existe una simetría $SU(3)_{fl}$ de sabor y $SU(2)_{sp}$ de espín asociada a los bariones observados. Estos grupos de sabor y de espín se combinan en multipletes de $SU(6)$ que se detallarán en la próxima sección.

Barión	ϕ^S
Δ^{++}	uuu
Δ^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu)$
Δ^0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$
Δ^-	ddd
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$
Σ^0	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + usd + sud + sdu + dsu)$
Σ^-	$\frac{1}{\sqrt{3}}(sdd + dsd + dds)$
Ξ^0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$
Ξ^-	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$
Ω^-	sss

Tabla 3.2: Funciones de onda de sabor simétricas de tres quarks para el decuplete bariónico.

Barión	ϕ^λ	ϕ^ρ
p	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(udu + duu - 2uud)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udu - duu)$
n	$\frac{1}{\sqrt{6}}(udd + dud - 2ddu)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(udd - dud)$
Σ^+	$\frac{1}{\sqrt{6}}(usu + suu - 2uus)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(usu - suu)$
Σ^0	$-\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds + 2dus - sdu - sud - usd - dsu)$	$-\frac{1}{2}(usd + dsu - sdu - sud)$
Σ^-	$\frac{1}{\sqrt{6}}(dsd + sdd - 2dds)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(dsd - sdd)$
Λ^0	$\frac{1}{2}(sud - sdu + usd - dsu)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(2uds - 2dus + sdu - sud + usd - dsu)$
Ξ^0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(uss + sus - 2ssu)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(uss - sus)$
Ξ^-	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(dss + sds - 2ssd)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}(dss - sds)$

Tabla 3.3: Funciones de onda de sabor mixta-simétricas de tres quarks para el octete bariónico.

Barión	ϕ^A
Λ	$\frac{1}{\sqrt{6}}(sdu - sud + usd - dsu + dus - uds)$

Tabla 3.4: Funciones de onda de sabor antisimétricas de tres quarks para el singlete bariónico.

Hasta este punto no hemos considerado la simetría $O(3)$ correspondiente a la parte espacial de los bariones. En el marco de una formulación hamiltoniana, esta simetría

se traduce en un Hamiltoniano que describe las interacciones entre los quarks de los bariones que debe ser invariante ante rotaciones espaciales. Las propiedades de simetría de los bariones corresponde a las del grupo $SU(6) \times O(3)$ donde $SU(6)$ es el grupo de transformaciones de spin-sabor. Es decir que los bariones pertenecen al grupo de simetría $SU(6) \times O(3)$. Se describirán los detalles sobre la construcción de la parte espacial de las funciones de onda bariónicas en la sección 3.3.

3.2 Funciones de onda de spin-sabor

Como mencionó en la sección anterior, si tenemos en cuenta solo los quarks livianos u , d y s se puede considerar que los bariones transforman según una simetría aproximada de spin-sabor $SU(2)_{sp} \times SU(3)_{fl} \subset SU(6)$.

Observando las ecuaciones (3.4) y (3.5) vemos que podemos combinar los cuatro estados de espín simétricos con los diez estados de sabor simétricos para formar cuarenta estados simétricos en el espacio de spin-sabor. El multiplete al que pertenecen estos bariones se identifica como 410 donde el supraíndice indica los $(2S+1)$ estados posibles con $S = 3/2$. Además las funciones de sabor con simetría mixta se pueden combinar con las funciones mixtas de espín con $S = 1/2$ para formar funciones de spin-sabor completamente simétricas. La combinación adecuada para lograr esto es $(\chi^\rho\phi^\rho + \chi^\lambda\phi^\lambda)$. De este modo se obtienen $2 \times 8 = 16$ estados simétricos. Es decir que, utilizando la notación recién mencionada, estos estados pertenecen a 28 . En total, existen entonces

$${}^410 + {}^28 = 56 \quad (3.6)$$

funciones de spin-sabor completamente simétricas. Estas funciones de onda se pueden asociar a los bariones en el estado fundamental como se muestra en la tabla 3.1, donde para etiquetar los distintos niveles de energía, se utilizó la notación $[\mathbf{D}, L^P]$ donde \mathbf{D} es la dimensión de la representación irreducible, en este caso **56**. Por otro lado, L es el momento angular del multiplete y P es la paridad de los que se hablará más adelante. De la tabla 3.1 también se observa que la simetría $SU(6)$ considerada debe estar rota, ya que sabemos que los estados que se asocian a un mismo multiplete no tienen la misma masa experimental. Para poder completar el espectro bariónico con esta descripción será necesario considerar funciones de spin-sabor con simetría mixta o antisimétricas.

Las funciones de espín y de sabor pueden combinarse para formar veinte estados antisimétricos

$${}^41 + {}^28 = 20. \quad (3.7)$$

El restante de los estados permitidos tienen simetría mixta. Los 70 estados con simetría del tipo ρ y otros 70 estados con simetría λ que corresponden a la suma

$${}^210 + {}^48 + {}^28 + {}^21 = 70. \quad (3.8)$$

Este análisis puede visualizarse con la ayuda de los diagramas de Young que indican de manera muy simple la descomposición de un producto directo. En lo que sigue

describiremos brevemente las reglas para poder utilizar diagramas de Young que serán particularmente útiles a la hora de extender el análisis a bariones con N_c colores (sección 3.4).

Los diagramas de Young están formados por casillas, en nuestro caso cada casilla representa un quark. Si el grupo de simetría considerado es un $SU(N)$, la casilla puede tomar valores de 1 a N . Para representar correctamente a los grupos de permutaciones la disposición de las casillas debe seguir las siguiente reglas:

- (1) Las casillas se disponen por filas de modo que cada fila tiene una cantidad menor o igual de casillas que la fila anterior.
- (2) Al completar las casillas con las etiquetas de 1 a N para analizar la dimensionalidad del multiplete se debe seguir dos reglas para evitar el doble conteo de los estados: al moverse a la derecha en una fila, el número de la etiqueta de la partícula debe ser igual o mayor a la anterior y al moverse hacia abajo, el número de la partícula debe ser mayor (y no puede ser igual).

Con las reglas para los diagramas de Young, el producto $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ por ejemplo, consiste en ordenar dos casillas con tres etiquetas posibles de modo que

$$\square \times \square = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}. \quad (3.9)$$

Esto se puede indicar en una notación más compacta como

$$\begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array}, \quad (3.10)$$

donde arriba de cada diagrama se indica la dimensión de la representación irreducible. La disposición de las casillas en los diagramas de Young indica la simetría de la representación irreducible. Las funciones de onda de cada grupo son simétricas ante intercambio de partículas en la misma fila y antisimétricas ante intercambio de partículas en la misma columna. Es decir que por ejemplo $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$, corresponde a un multiplete completamente simétrico ante permutaciones de quarks, $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ es antisimétrico mientras que $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ tiene simetría mixta.

Para obtener diagramas de Young correspondientes a estados de tres quarks basta hacer el producto interno de dos partículas para luego repetir la operación con la partícula restante. El caso de los bariones, como estados de quarks ligados con simetría $SU(6)$, corresponde al producto directo $\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6}$ que resulta en

$$\begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 56 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 70 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 20 \\ \hline \end{array}, \quad (3.11)$$

donde vemos que aparecen dos representaciones con simetría mixta que corresponden a las combinaciones mixta-simétrica y mixta-antisimétrica. Con la ayuda de estos diagramas se ve que el **56**-plete es completamente simétrico ante permutaciones de quarks mientras que el **20**-plete es completamente antisimétrico y los **70**-pletos tienen simetría mixta.

Los diagramas de Young también permiten visualizar la descomposición de cada multiplete en su contenido $SU(2)_{sp} \times SU(3)_{fl}$

$$\begin{array}{c} 56 \\ \square\square\square \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 8 \\ \square\square \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \square\square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 10 \\ \square\square\square \end{array}, \quad (3.12)$$

$$\begin{array}{c} 70 \\ \square\square \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 10 \\ \square\square\square \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ \square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 8 \\ \square\square \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \square\square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 8 \\ \square\square \end{array}, \quad (3.13)$$

$$\begin{array}{c} 20 \\ \square \end{array} = \begin{array}{c} 2 \\ \square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 8 \\ \square\square \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \square\square\square \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \square \end{array}, \quad (3.14)$$

que se corresponden con las ecuaciones (3.6), (3.7) y (3.8) respectivamente.

Ahora bien, si nos restringimos a los estados sin extrañeza, cada multiplete contiene bariones N (con isospin $I = 1/2$) o estados Δ ($I = 3/2$). Indicando el spin total J como subíndice es fácil ver que los estados con $L = 0$ de los multipletes simétrico, mixto-simétrico y antisimétrico son

$$\begin{aligned} 56 &= {}^4 10 + {}^2 8 \supset N_{1/2}, \Delta_{3/2}, \\ 70 &= {}^4 10 + {}^4 8 + {}^2 8 + {}^2 1 \supset N_{1/2}, N_{3/2}, \Delta_{1/2}, \\ 20 &= {}^4 1 + {}^2 8 \supset N_{1/2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que es consistente con los estados observados con $L = 0$ que se muestran en la tabla 3.1.

Al considerar estados con extrañeza aparecen otros bariones que completan los multipletes. En la figura 3.1 se muestran los diagramas de peso conocidos correspondientes al octete y al decuplete que conforman al multiplete $[56, 0^+]$ y corresponden a los bariones en el estado fundamental. Las primeras filas corresponden a estados sin quarks extraños y las siguientes filas contienen estados que van disminuyendo en una unidad la extrañeza.

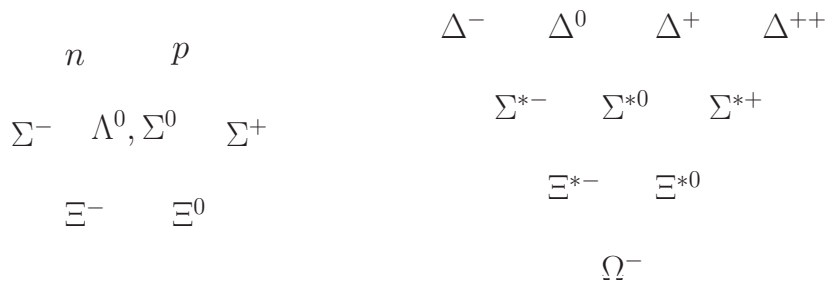


Figura 3.1: Diagramas de peso bariones pertenecientes al octete (izq.) y al decuplete (der.) de $SU(3)_{fl}$. El eje horizontal indica la proyección de isospin mientras el eje vertical indica la extrañeza.

3.3 Funciones de onda orbitales en la base de oscilador armónico

Una vez obtenidas las funciones bariónicas de spin-sabor, estas deben combinarse con la parte espacial de modo de obtener la simetría adecuada. El Hamiltoniano del modelo de quarks no-relativista se puede escribir como

$$H = \sum_i T_i + \sum_{i<j} V_{ij}, \quad (3.16)$$

donde la sumas se hacen sobre los quarks de valencia, T_i representa la energía cinética del quark i mientras que V_{ij} es el potencial confinante promedio debido a los quarks j actuando sobre el quark i .

La forma del potencial V_i que aparece en el Hamiltoniano de la ecuación (3.16) es desconocida pero por consideraciones fenomenológicas usualmente se considera que es del tipo $V_{ij} = C_{ccc} + br_{ij} - 2\alpha_s/3r_{ij}$, donde r_{ij} es la distancia entre los quarks i, j [43]. En la práctica, los modelos de quarks no-relativistas aproximan este potencial a un potencial de tipo armónico $V_{ij} \sim r_{ij}^2$. Es decir que el Hamiltoniano de estos modelos tienen un potencial central tipo oscilador armónico tridimensional que se puede escribir como

$$H_0 = \frac{1}{2m} \sum_i \vec{p}_i^2 + \frac{K}{2} \sum_{i<j} \vec{r}_{ij}^2, \quad (3.17)$$

donde K es un parámetro del modelo.

El modelo de quarks con un potencial armónico fue desarrollado hace más de sesenta años por Dalitz [44] y por Faiman [45] y permitió describir de manera exitosa varias propiedades de la espectroscopía bariónica. Más adelante, De Rújula *et al.* [46] incorporaron un potencial hiperfino dependiente del espín asociado a un intercambio de un gluón entre dos quarks. Esta contribución permitió describir la separación de masas entre el octete y el decuplete bariónico. Inspirados en las interacciones de QCD , Isgur y Karl usaron la base generada por el potencial armónico para diagonalizar al potencial hiperfino dependiente del espín junto con una contribución tensorial del potencial generado por el intercambio de un gluón para obtener una mejor descripción de los estados excitados [36, 47]. En la sección 3.5 se describirá con detalle un modelo de quarks más general que incluye a este modelo considerado por Isgur y Karl.

El Hamiltoniano de la ecuación (3.17) describe estados con quarks de igual masa, en el caso de bariones sin extrañeza esto se reduce a despreocupar las diferencia entre las masas de los quarks u y d . Este Hamiltoniano se puede diagonalizar exactamente y el movimiento del centro de masa se desacopla cuando H_0 se expresa en términos de las

coordenadas de Jacobi dadas por

$$\vec{R} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \quad (3.18)$$

$$\vec{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (3.19)$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3). \quad (3.20)$$

En coordenadas de Jacobi, el Hamiltoniano H_0 adquiere la forma de tres osciladores armónicos

$$H_0 = \frac{P^2}{6m} + \frac{3}{2}KR^2 + \left[\frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3}{2}K\rho^2 + \frac{3}{2}K\lambda^2 \right], \quad (3.21)$$

donde $\vec{P} = -i\partial/\partial\vec{R}$, $\vec{p}_\rho = -i\partial/\partial\vec{\rho}$ y $\vec{p}_\lambda = -i\partial/\partial\vec{\lambda}$ son los momentos conjugados. Por lo tanto, una autofunción de este Hamiltoniano puede escribirse como

$$\psi_R(\vec{R})\psi_\rho(\vec{\rho})\psi_\lambda(\vec{\lambda}), \quad (3.22)$$

donde $\psi_R(\vec{R})$, $\psi_\rho(\vec{\rho})$ y $\psi_\lambda(\vec{\lambda})$ son funciones de onda soluciones del oscilador armónico para una partícula. Las funciones $\psi_\rho(\vec{\rho})$ y $\psi_\lambda(\vec{\lambda})$ describen el movimiento relativo de los quarks y determinan el espectro de los bariones. La función de onda $\psi_R(\vec{R})$ describe el movimiento del centro de masa. Para conservar la invariancia de translación del modelo, la función ψ_R se supone en el estado fundamental y todos sus estados excitados son considerados estados espurios que no se corresponden con estados observados en la naturaleza. Entonces, para estudiar a los estados bariónicos con este modelo no es necesario tener en cuenta los dos primeros términos del Hamiltoniano de la ecuación (3.21) sino que basta con considerar

$$H_0 = \frac{p_\rho^2}{2m} + \frac{p_\lambda^2}{2m} + \frac{3}{2}K\rho^2 + \frac{3}{2}K\lambda^2, \quad (3.23)$$

y las funciones de onda que describen los bariones se reducen al producto $\psi_\rho(\vec{\rho})\psi_\lambda(\vec{\lambda})$.

Las funciones de onda de una partícula en un potencial tipo oscilador armónico se pueden escribir como

$$\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.24)$$

Para cada valor de l , m puede variar entre $-l$ y l . Y su energía está dados por

$$E = \left(N + \frac{3}{2} \right) \omega, \quad (3.25)$$

donde $N = 2n + 1$ y $n = 0, 1, \dots$

Ahora consideramos caso de un potencial tridimensional, la energía de los autoestados de H_0 están determinados por un número cuántico \mathcal{N} y tiene la forma

$$E_{\mathcal{N}} = \left(\mathcal{N} + \frac{3}{2} \right) \omega, \quad \mathcal{N} = N_\rho + N_\lambda = (2n_\rho + l_\rho) + (2n_\lambda + l_\lambda), \quad (3.26)$$

donde $\omega = \sqrt{3K/m}$ y $l_{\rho,\lambda}$ son los momentos angulares de cada oscilador mientras que $n = 0, 1, 2, \dots$ está asociado a la cantidad de nodos en cada función de onda radial. El momento angular orbital L del estado total se obtiene acoplando l_{ρ} y l_{λ} vectorialmente de la forma

$$L = l_{\rho} + l_{\lambda}. \quad (3.27)$$

Denominaremos a los autoestados de H_0 con números cuánticos L y \mathcal{N} como $\Psi_{\mathcal{N}L}(\rho, \lambda)$.

La paridad de la función de onda total está dada por

$$P = (-1)^{\sum l_i}, \quad (3.28)$$

donde l_i es el momento angular del quark i .

Cabe destacar que en este modelo de oscilador armónico los estados con igual \mathcal{N} , es decir que pertenecen a la misma banda, están degenerados. Para romper esta degeneración será necesario considerar términos hiperfinos.

Las soluciones del Hamiltoniano de la ecuación (3.17) son combinaciones de las soluciones del oscilador armónico para cada quark. Para etiquetar estas funciones de onda es usual utilizar la notación espectroscópica. A continuación se muestran algunos ejemplos de estas funciones de un quark

$$(0s) = \psi_{000}(\vec{r}) = \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\alpha^2 r^2/2}, \quad (3.29)$$

$$(0p) = \psi_{11m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \alpha r e^{-\alpha^2 r^2/2} Y_1^m(\theta, \phi), \quad (3.30)$$

$$(0d) = \psi_{22m}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{4}{15}} \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \alpha^2 r^2 e^{-\alpha^2 r^2/2} Y_2^m(\theta, \phi), \quad (3.31)$$

$$(1s) = \psi_{200}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{3}{2} - \alpha^2 r^2\right) e^{-\alpha^2 r^2/2}. \quad (3.32)$$

Al considerar las soluciones de los tres quark, para desacoplar a la contribución del movimiento del centro de masa (y eliminar estados espurios) será necesario escribir las soluciones en función de coordenadas de Jacobi.

El nivel más bajo de energía, con $\mathcal{N} = 0$ corresponde al estado fundamental. Todos los quarks están en un estado $(0s)$ lo que corresponde a una configuración $(0s)^3$ donde el supraíndice indica que las funciones de onda de los tres quarks corresponden a $\psi_{000}(\vec{r})$. La parte orbital de la función de onda bariónica es totalmente simétrica y, por lo tanto, corresponde al multiplete $[56, 0^+]$. Para este multiplete, es fácil concluir que los estados del decuplete bariónico de la figura 3.1 tienen espín $S = 3/2$ mientras que el octete tiene $S = 1/2$.

El primer estado excitado, con $\mathcal{N} = 1$, corresponde a una combinación $(0s)^2(0p)$ entonces tiene $l^P = 1^-$. con esta configuración es posible formar funciones de onda simétricas o mixta-simétricas. Sin embargo, la combinación simétrica corresponde al movimiento interno de los quarks en el estado fundamental y el movimiento del centro

de masa ocupando un estado $(0p)$. Esta combinación es proporcional a la coordenada del centro de masa y corresponde a un estado espurio. Entonces, el primer estado excitado de paridad negativa pertenece al multiplete $[\mathbf{70}, 1^-]$.

El estado con $\mathcal{N} = 2$ es más complejo ya que permite más de una configuración de tres quarks, $(0s)^2(1s)$, $(0s)^2(0d)$ y $(0s)(0p)^2$. Estas tres configuraciones tienen la misma energía. Algunas funciones de onda que se obtienen con estas configuraciones corresponden a estados espurios. Se pueden lograr estados no espurios tomando combinaciones lineales adecuadas. Las combinaciones que corresponden a estados no espurios se muestra en la tabla 3.5 en donde $[3]$ y $[2, 1]$ se indica la simetría requerida.

Multiplete de $SU(6)$	\mathcal{N}	L	P	Configuración del oscilador armónico
56	0	0	+	$ [3](0s)^3\rangle$
70	1	1	-	$ [21](0s)^2(0p)\rangle$
56'	2	0	+	$\sqrt{\frac{2}{3}} [3](0s)^2(1s)\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} [3](0s)(0p)^2\rangle$
70	2	0	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [21](0s)^2(1s)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [21](0s)(0p)^2\rangle$
56	2	2	+	$\sqrt{\frac{2}{3}} [3](0s)^2(0d)\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} [3](0s)(0p)^2\rangle$
70	2	2	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [21](0s)^2(0d)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [21](0s)(0p)^2\rangle$
20	2	1	+	$ [1^3](0s)(0p)^2\rangle$

Tabla 3.5: Configuraciones para el modelo de quarks con un confinamiento tipo oscilador armónico y $N_c = 3$ partículas.

En la figura 3.2 se muestra el esquema de los niveles de energía que se obtienen considerando el confinamiento del tipo oscilador armónico. Este esquema es consistente con los valores observados para los estados de la tabla 3.1.

3.3.1 Bariones excitados con $L = 1$

En lo que sigue discutiremos con más detalle el caso de los estados excitados sin extrañeza con $L = 1$ en el modelo de quarks no-relativista. Las funciones de onda que se obtendrán para estos estados serán de particular interés para realizar los cálculos que se describirán en el capítulo 5.

Teniendo en cuenta únicamente bariones compuestos por quarks livianos u y d , los estados con paridad negativa de menor energía pertenecen al multiplete de $SU(4)$ de spin-sabor con simetría mixta tiene dimensión $\mathbf{20}$ (en lugar de $\mathbf{70}$ en el caso de $SU(6)$). Según la tabla 3.5, la parte orbital de estos estados tiene una configuración $|[21](0s)^2(0p)\rangle$. La combinación que resulta en las simetrías mixtas esta dada por

$$\psi_\lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \frac{1}{4\pi} \alpha (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) e^{-\alpha^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)/2}, \quad (3.33)$$

$$\psi_\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} \frac{1}{4\pi} \alpha (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{-\alpha^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)/2}. \quad (3.34)$$

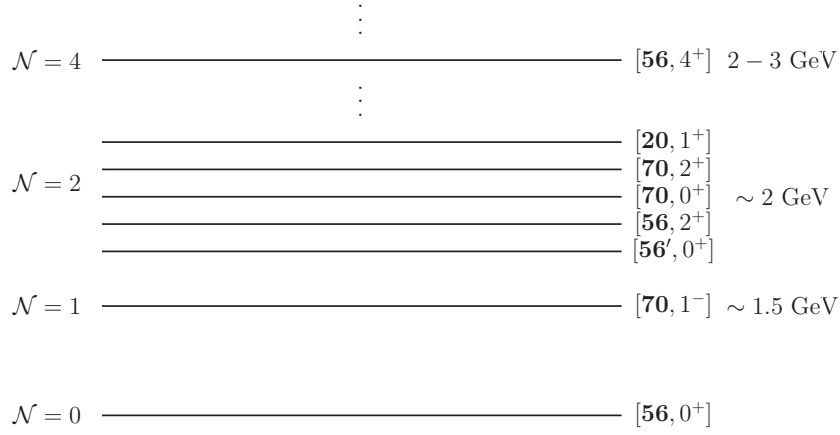


Figura 3.2: Esquema de los primeros niveles del espectro bariónico. A la derecha se indican los valores aproximados de las masas en cada nivel $\mathcal{N} = 1, 2$ y 4

Estas funciones de onda son no-espurias, en el sentido en que la función de onda para el centro de masa describe un estado fundamental, ya que son proporcionales a las coordenadas $\vec{\lambda}$ y $\vec{\rho}$. Eliminando la parte correspondiente al movimiento del centro de masa se pueden obtener funciones $\Psi_{Lm}^{\rho, \lambda}(\vec{\rho}, \vec{\lambda})$ que son solución del Hamiltoniano en coordenadas de Jacobi (ecuación (3.23)). Entonces, los estados de $\mathcal{N} = 1$ con simetría mixta que tienen $L = 1$ y proyección máxima $m = 1$ se pueden escribir como

$$\Psi_{11}^{\rho} = \rho_{+} \frac{\alpha^4}{\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2(\rho^2 + \lambda^2)\right), \quad (3.35)$$

$$\Psi_{11}^{\lambda} = \lambda_{+} \frac{\alpha^4}{\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2(\rho^2 + \lambda^2)\right), \quad (3.36)$$

donde $\rho_{+} = \rho_x + i\rho_y$, $\lambda_{+} = \lambda_x + i\lambda_y$ y la combinación $\rho^2 + \lambda^2$ es invariante ante permutaciones de los tres quarks.

Para asociar estas funciones de onda a estados físicos N y Δ debemos analizar qué combinaciones están permitidas según los números de espín e isospin de cada estado. El espín de los quarks de la representación irreducible mixta-simétrica con isospín $I = 1/2$ puede tomar valores $S = 1/2, 3/2$. Estos números cuánticos combinados con un momento angular de $L = 1$ dan lugar a los siguientes estados N : dos estados con $J = 1/2$ denominados ${}^2N_{1/2}, {}^4N_{1/2}$, dos estados ${}^2N_{3/2}, {}^4N_{3/2}$ con $J = 3/2$ y un estado con $J = 5/2$ denominado ${}^4N_{5/2}$. Además, también existen estados mixto-simétricos con $I = 3/2$ que tienen $J = 1/2, 3/2$ identificados como ${}^2\Delta_{1/2}, {}^2\Delta_{3/2}$.

Los estados de simetría mixta de spin-isospin se deben acoplar a funciones de onda mixta-simétricas espaciales dadas por las ecuaciones (3.35) y (3.36) para formar estados completamente simétricos con los números cuánticos adecuados. Las combinaciones de las funciones de onda espaciales y de spin-isospin mixta-simétricas que describen a los estados ${}^{2S+1}N_J$ y ${}^{2S+1}\Delta_J$ están dadas por

$$|^2N_J; J_3 I_3\rangle = \frac{1}{2} \sum_{m, S_3} \left(\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ S_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} J \\ J_3 \end{array} \right. \right) [(\chi_{S_3}^\rho \phi_{I_3}^\rho - \chi_{S_3}^\lambda \phi_{I_3}^\lambda) \Psi_{1m}^\lambda + (\chi_{S_3}^\rho \phi_{I_3}^\lambda - \chi_{S_3}^\lambda \phi_{I_3}^\rho) \Psi_{1m}^\rho], \quad (3.37)$$

$$|^4N_J; J_3 I_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m, S_3} \left(\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ S_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} J \\ J_3 \end{array} \right. \right) \chi_{S_3}^{3/2} (\phi_{I_3}^\rho \Psi_{1m}^\rho + \phi_{I_3}^\lambda \Psi_{1m}^\lambda), \quad (3.38)$$

$$|^2\Delta_J; J_3 I_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{I_3}^{3/2} \sum_{m, S_3} \left(\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ S_3 \end{array} \left| \begin{array}{c} J \\ J_3 \end{array} \right. \right) (\chi_{S_3}^\rho \Psi_{1m}^\rho + \chi_{S_3}^\lambda \Psi_{1m}^\lambda), \quad (3.39)$$

donde ϕ y χ son funciones de espín e isospín ortonormales. Como se puede ver, estas expresiones no son triviales. En el apéndice A se muestran las funciones de onda explícitamente de cada uno de los siete estados del multiplete de simetría mixta con $L = 1$ junto con las expresiones para las funciones de espín y de sabor, χ y ϕ .

Aún falta una consideración para poder asociar estas funciones de onda a estados físicos. Los bariones observados en la naturaleza tienen momento angular definido J pero sabemos que el espín no es un buen número cuántico. Esto significa que para $L = 1$ algunos estados físicos son una mezcla de estados de distinto espín (pero igual J). Por ejemplo, los estados físicos con $J = 1/2$ son una mezcla de estados con espín $S = 1/2$ y $S = 3/2$. Estas mezclas pueden parametrizarse con ángulos θ . Definimos los ángulos de mezcla para los bariones de $L = 1$ en función de estados bariónicos observados de modo que para los estados con $J = 1/2$ se tiene

$$\begin{aligned} N_{J=1/2}(1535) &= \cos \theta_1 {}^2N_{1/2} + \sin \theta_1 {}^4N_{1/2}, \\ N_{J=1/2}(1650) &= -\sin \theta_1 {}^2N_{1/2} + \cos \theta_1 {}^4N_{1/2}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

mientras que para $J = 3/2$ los ángulos de mezcla están definidos por

$$\begin{aligned} N_{J=3/2}(1520) &= \cos \theta_3 {}^2N_{3/2} + \sin \theta_3 {}^4N_{3/2}, \\ N_{J=3/2}(1700) &= -\sin \theta_3 {}^2N_{3/2} + \cos \theta_3 {}^4N_{3/2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De acuerdo con las definiciones para $\theta_{1,3}$ dadas por las ecuaciones (3.40),(3.41) vemos que siempre es posible elegir los ángulos de mezcla en el rango $[-\pi/2, \pi/2]$ redefiniendo apropiadamente la fase de los estados físicos. Esta elección es la adoptada a lo largo de toda la tesis.

3.4 Extensión a *large N_c*

En esta sección queremos extender el análisis que se hizo en este capítulo al caso de bariones con N_c quarks de valencia. Como ya se vio en el capítulo 2, en *large N_c QCD* los bariones están compuestos por N_c quarks de valencia y cuyas funciones de onda son

completamente antisimétricas en color. Se conserva el valor del numérico bariónico de los quarks igual a $1/3$ por lo que el número bariónico de los bariones es

$$\mathcal{B} = \frac{N_c}{3}. \quad (3.42)$$

3.4.1 Funciones de onda de spin-sabor para *large* N_c

Analizaremos en primer lugar, los bariones en el estado fundamental. En este caso la parte orbital de la función de onda total es simétrica ya que los N_c quarks están en el estado fundamental ($0s$). Por lo tanto, la parte de spin-sabor también debe ser simétrica ante intercambio de dos quarks. El diagrama de la representación irreducible simétrica para $N_c = 3$ y el diagrama asociado N_c arbitrario se muestran en la figura 3.3.

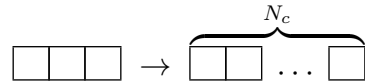


Figura 3.3: Diagramas de Young para la representación irreducible del grupo de permutaciones S_3 y su generalización al grupo S_{N_c} [48].

Al igual que en el caso $N_c = 3$ (ver ecuación (3.12)), la representación simétrica de $SU(6)$ se descompone en su contenido $SU(2)_{sp} \times SU(3)_{fl}$ y puede escribirse en términos de los diagramas de Young como

$$\begin{aligned} \overbrace{\square \square \cdots \square}^{N_c} &= \left(S = \frac{1}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \oplus \left(S = \frac{3}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \cdots \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ &\oplus \cdots \oplus \left(S = \frac{N_c}{2}; \square \square \cdots \square \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

donde las representaciones irreducibles de $SU(2)$ se etiquetan con el correspondiente valor de espín S . Todos los estados de esta ecuación pertenecen al mismo multiplete de $SU(6)$, por lo que implica que existe una torre infinita de bariones en el estado fundamental cuando $N_c \rightarrow \infty$. En el caso de bariones sin extrañeza se obtiene una torre con

$$S = I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{N_c}{2}. \quad (3.44)$$

El número de estados de la torres crece con N_c . En $N_c = 3$ esta torre contiene a los estados $N_{1/2}$ y $\Delta_{3/2}$.

Para analizar el caso de bariones extraños conviene introducir el *grand spin* \vec{K} definido por la ecuación

$$\vec{J} = \vec{I} + \vec{K}, \quad (3.45)$$

ya que se relaciona directamente con el número de quarks extraños n_s del barión como $K = n_s/2$. El isospin para cada valor de \vec{K} puede indicarse como [26]

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \rightarrow (K = 0, I = \frac{1}{2}) \oplus (K = \frac{1}{2}, I = 0, 1) \oplus (K = 1, I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \oplus \dots, \quad (3.46)$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow (K = 0, I = \frac{3}{2}) \oplus (K = \frac{1}{2}, I = 1, 2) \oplus (K = 1, I = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \oplus \dots. \quad (3.47)$$

La ecuación (3.46) corresponde a estados con espín $S = 1/2$ mientras que los estados descritos por la ecuación (3.47) tienen $S = 3/2$. Esto es consistente con la ecuación (3.12), es decir que, en el caso en que $N_c = 3$, estas representaciones corresponden al octete y al decuplete de $SU(3)_{fl}$ respectivamente.

Para analizar las dimensiones de las representaciones de sabor que aparecen en la ecuación (3.43) es útil usar el resultado que indica la dimensión de una representación irreducible de $SU(3)$ en términos de los diagramas de Young. Esta relación está dada por [49]

$$d_{(\mu\nu)}^{SU(3)} = \frac{1}{2}(\mu + 1)(\nu + 1)(\mu + \nu + 2), \quad (3.48)$$

donde μ, ν corresponden a contar las casillas del diagrama de Young siguiendo el esquema

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\nu} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\mu}. \quad (3.49)$$

Teniendo en cuenta la dimensión de cada representación en la ecuación (3.43) que se puede obtener gracias a la ecuación (3.48), es fácil ver que la dimensión de cada representación irreducible de $SU(3)$ depende de N_c .

Discutiremos en lo que sigue cómo construir la parte de spin-sabor para los bariones excitados. Vimos al comienzo de esta sección cómo se descompone la representación simétrica de $SU(6)$ en sus componentes $SU(2)_{sp} \times SU(3)_{fl}$. Para poder describir estados excitados es necesario conocer la descomposición de la representación irreducible mixta-simétrica de $SU(6)$ para N_c arbitrario. Esta descomposición resulta [50]

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \dots \overbrace{\square}^{N_c-1} = \left(S = \frac{1}{2}; \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \dots \square \right) + \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ + \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \right) + \left(S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \right) \\ + \dots + \left(S = \frac{N_c}{2} - 1; \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}^{N_c} \dots \square \right) + \left(S = \frac{N_c}{2} - 1, \frac{N_c}{2}; \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}}^{N_c-1} \dots \square \right). \quad (3.50)$$

Los estados físicos con J definido se obtienen agregando la contribución del momento angular orbital.

Las tres primeras representaciones de $SU(3)_{fl}$ que aparecen después de la igualdad en la ecuación (3.50), son iguales a los de la ecuación (3.13) para $N_c = 3$ por lo que corresponden al singlete, al decuplete y al octete de $SU(3)$ respectivamente. El isospín para cada valor de *grand spin* K de la primera representación irreducible de $SU(3)$ que aparece del lado derecho de la igualdad en la ecuación (3.50) está dado por

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \rightarrow (K = \frac{1}{2}, I = 0) + (K = 1, I = \frac{1}{2}) + \dots, \quad (3.51)$$

donde se puede notar que para esta representación $K \neq 0$. Para $N_c = 3$, esta representación corresponde al singlete de $SU(3)$. Los otros términos de la ecuación (3.50) aparecen solo en el caso en que $N_c > 3$. Para cada multiplete mixto-simétrico esto implica una torre infinita de estados excitados.

En la figura 3.4 se muestran los diagramas de peso de las extensiones del octete y del decuplete bariónico de $SU(3)_{fl}$ con $N_c = 3$ a N_c colores. Al contrario de lo que sucede para $SU(2)_{sp}$, el diagrama de peso de $SU(3)_{fl}$ depende de N_c . Por lo tanto la identificación de los estados en *large* N_c con los estados de $N_c = 3$ no es única. Usualmente se toman los estados de la parte superior de los diagramas de peso para describir a los bariones de $N_c = 3$ de extrañeza pequeña [42]. La hipercarga de los estados de la parte superior de los diagramas de peso está dada por

$$Y = s + \mathcal{B} = s + \frac{N_c}{3}, \quad (3.52)$$

donde s es la extrañeza (de orden $\mathcal{O}(1)$). Esto indica que la hipercarga de un nucleón o una Δ en *large* N_c es igual a $N_c/3$.

Ahora bien, podemos repetir el análisis de la sección 3.2 y clasificar los estados no-extraños N y Δ según su simetría (el isospin es un buen número cuántico también para N_c arbitrario). Al tener N_c quarks de valencia que componen al barión, existen más estados posibles dentro de cada multiplete. Por ejemplo, los estados dentro de los multipletes de spin-sabor que para $N = 3$ se mostraron en las ecuaciones (3.15) en el caso de $L = 0$, ahora con N_c arbitrario resultan

$$S \supset N_{1/2}, \Delta_{3/2}, \quad (3.53)$$

$$MS \supset N_{1/2}, N_{3/2}, \Delta_{3/2}, \overbrace{\Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}}^{N_c \geq 5}, \quad (3.54)$$

$$A \supset N_{1/2}, \overbrace{N_{3/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}}^{N_c \geq 5}, \overbrace{\Delta_{5/2}}^{N_c \geq 7}, \quad (3.55)$$

donde S , MS y A corresponden a las representaciones irreducibles simétrica, mixta-simétrica y antisimétrica de $SU(6)$ para N_c arbitrario. En la tabla 3.6 se muestran todos los estados sin extrañeza con $L = 0, 1, 2$. De esta tabla se puede observar que

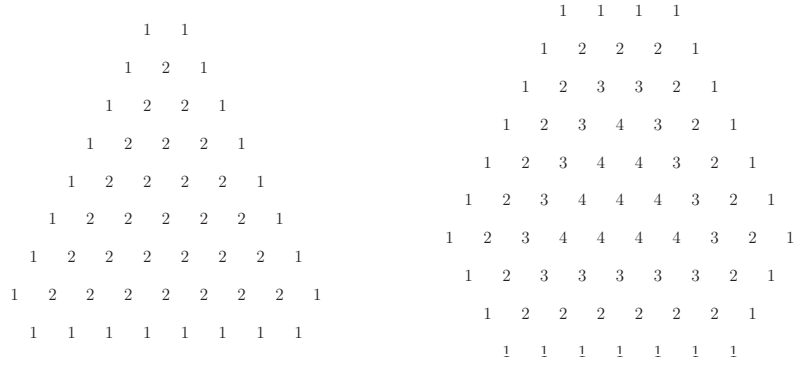


Figura 3.4: Esquema de los diagramas de peso para el octete (izq.) y el decuplete bariónico (der.) de $SU(3)$ para el caso de N_c colores. Los números indican la multiplicidad de cada peso. El lado más largo del diagrama del octete contiene $\frac{1}{2}(N_c+1)$ pesos mientras que el lado más largo del diagrama del decuplete tiene $\frac{1}{2}(N_c - 1)$ pesos [51].

la representación antisimétrica para *large* N_c contiene muchos más estados que en el caso de $N_c = 3$, mientras que para la representación mixta-simétrica se agregan muchos menos estados, más interesante aún es que se puede mostrar que para $N_c \geq 7$ estas dos representaciones contienen exactamente los mismos estados no-extraños con $I = 1/2, 3/2$ [52].

Representación	L	Estados
S	0	$N_{1/2}, \Delta_{3/2}$
	1	$N_{1/2}, N_{3/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}$
	2	$N_{3/2}, N_{5/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}, \Delta_{7/2}$
MS o A	0	$N_{1/2}, N_{3/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}$
	1	$2N_{1/2}, 2N_{3/2}, N_{5/2}, 2\Delta_{1/2}, 3\Delta_{3/2}, 2\Delta_{5/2}, \Delta_{7/2}$
	2	$N_{1/2}, 2N_{3/2}, 2N_{5/2}, N_{7/2}, 2\Delta_{1/2}, 3\Delta_{3/2}, 3\Delta_{5/2}, 2\Delta_{7/2}, \Delta_{9/2}$

Tabla 3.6: Bariones no-extraños con $I = 1/2, 3/2$ en las representaciones simétrica (S), mixta-simétrica (MS) y antisimétrica (A) en *large* N_c para $L = 0, 1, 2$ [52]. La multiplicidad de los estados se debe a los distintos valores de espín permitidos para cada estado.

3.4.2 Funciones de onda orbitales en la base de oscilador armónico para *large* N_c

Una vez que se estudiaron las simetrías de las funciones de onda de spin-sabor buscamos conocer más acerca de la parte espacial para bariones en *large* N_c .

Para generalizar la parte orbital de la función de onda de los bariones excitados consideramos que la cantidad de quarks excitados en *large* N_c es igual que en el caso de $N_c = 3$. Esto significa que el número de quarks en el estado fundamental es del orden $\mathcal{O}(N_c)$ (esta suposición es razonable, al menos para los primeros estados excitados).

La generalización del estado simétrico resulta trivial ya que es única como se puede ver en la figura 3.3. Pero la generalización de los estados mixto-simétricos no es única. Debemos generalizar la representación $[\mathbf{2}, \mathbf{1}]$ de S_3 al caso de N_c colores de modo de obtener los estados que observamos en $N_c = 3$. En la sección anterior utilizamos las coordenadas de Jacobi para desacoplar el centro de masa y obtener una base de funciones para las representaciones irreducibles de S_3 simétrica $[\mathbf{3}]$ y mixta-simétricas $[\mathbf{21}]$. Las coordenadas de Jacobi para un sistema de N_c partículas son

$$\vec{\rho}_R = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{j=1}^{N_c} \vec{r}_j, \quad (3.56)$$

$$\vec{\rho}_i = \sqrt{\frac{i-1}{i}} \left(\vec{r}_i - \frac{1}{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \vec{r}_j \right) \quad \text{para } i = 2, \dots, N_c, \quad (3.57)$$

que implica que

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_N^2 = \rho_R^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \dots + \rho_N^2. \quad (3.58)$$

Es fácil ver que tomando $N_c = 3$ se recuperan las coordenadas de las ecuaciones (3.18), (3.19) y (3.20).

La coordenada de centro de masa $\vec{\rho}_R$ es una función simétrica por construcción y puede ser usada como base para la representación simétrica $[\mathbf{N}_c]$. Las coordenadas asociadas al movimiento interno definidas en la ecuación (3.57) forman un subespacio invariante para la representación irreducible mixta-simétrica $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ [49]. Esto sugiere que la única solución posible para describir los estados excitados es tomar la representación irreducible $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ del grupo S_{N_c} ya que al tomar $N_c = 3$ esta representación se reduce a $[\mathbf{2}, \mathbf{1}]$. En la figura 3.5 se muestra esta generalización en términos de los diagramas de Young.

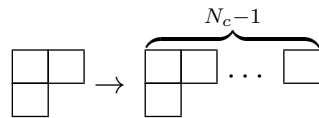


Figura 3.5: Generalización del diagrama de Young de la representación irreducible $[\mathbf{2}, \mathbf{1}]$ de S_3 a $[\mathbf{N}_c - \mathbf{1}, \mathbf{1}]$ del grupo de permutaciones S_{N_c} [25].

La tabla 3.5 indica que se tienen estados con uno o dos quarks excitados (o una combinación de funciones) dependiendo de la configuración para $N_c = 3$. La generalización a N_c colores resulta en las configuraciones $(0s)^{N_c-1}(0p)$ para $\mathcal{N} = 1$ y $(0s)^{N_c-1}(1s)$,

$(0s)^{N_c-1}(0d)$, $(0s)^{N_c-2}(0p)^2$ para $\mathcal{N} = 2$. Al igual que en el caso de $N_c = 3$ debemos encontrar la combinación lineal que elimine al centro de masa para así conservar la invariancia translacional requerida. Las combinaciones adecuadas están dadas en la tabla 3.7.

Multiplete de SU(6)	N	L	P	Configuración del oscilador armónico
56	0	0	+	$ [N_c](0s)^{N_c}\rangle$
70	1	1	-	$ [N_c - 1, 1](0s)^{N_c-1}(0p)\rangle$
56'	2	0	+	$\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}} [N_c](0s)^{N_c-1}(1s)\rangle - \sqrt{\frac{1}{N_c}} [N_c](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
70	2	0	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [N_c - 1, 1](0s)^{N_c-1}(1s)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [N_c - 1, 1](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
56	2	2	+	$\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}} [N_c](0s)^{N_c-1}(0d)\rangle - \sqrt{\frac{1}{N_c}} [N_c](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$
70	2	2	+	$\sqrt{\frac{1}{3}} [N_c - 1, 1](0s)^{N_c-1}(0d)\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} [N_c - 1, 1](0s)^{N_c-2}(0p)^2\rangle$

Tabla 3.7: Configuraciones para el modelo de quarks con un confinamiento tipo oscilador armónico y N_c partículas [53].

3.5 Modelos del tipo Isgur-Karl

Si se considera un Hamiltoniano solo con un potencial central tipo oscilador armónico tridimensional como el de la ecuación (3.17) todos los estados del multiplete $SU(6)_{fl} \times O(3)$ tienen la misma masa promedio m_0 . Para poder describir la separación de masas observada experimentalmente usando este tipo de modelo es necesario incluir una contribución hiperfina al potencial.

Se han propuesto varios modelos para describir a los estados excitados de bariones, uno de los más exitosos en términos fenomenológicos es el modelo de Isgur-Karl (IK) [35, 36]. En este modelo los campos gluónicos producen un potencial confinante lineal a distancias grandes mientras que a cortas distancias la interacción quark-quark es dominada por un potencial de Coulomb y un potencial dependiente del espín. (En la ecuación (F.1) del apéndice F puede leerse la expresión explícita del Hamiltoniano del modelo IK.)

El Hamiltoniano IK tiene la forma general [43]

$$H_{IK} = \sum_i \left(m_i + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} \right) + \sum_{i < j} (U^{ij} + H_{hyp}^{ij}), \quad (3.59)$$

donde la suma se hace sobre los tres quarks de valencia y m_i es la masa del quark i . Los términos U^{ij} contienen la contribución independiente del espín y es usual aproximarlos por un potencial armónico. La interacción hiperfina H_{hyp} contiene los efectos que dan lugar a la separación de masas. En el modelo de IK, H_{hyp} consiste en dos contribuciones, una proviene de interacciones de contacto de spin-spin y la otra es

una interacción tensorial con una dependencia radial $\sim 1/r^3$. Además este modelo no incluye dependencias en el sabor. En lo que sigue definiremos un modelo más general que contiene a los modelos de IK. Nótese que el Hamiltoniano H_0 de tipo oscilador armónico de la ecuación (3.17) es el Hamiltoniano de la ecuación (3.59) sin interacción hiperfina y con $U^{ij} = K\vec{r}_{ij}^2/2$.

3.5.1 Interacciones y estructura de spin-sabor para estados de paridad negativa

Para terminar este capítulo definiremos un modelo de quarks mucho más general que el modelo de IK. En el caso de estados con paridad negativa podemos tomar un Hamiltoniano tipo oscilador armónico H_0 y sumarle una interacción de dos cuerpos V_{ij} dependiente de espín y del isospín

$$H = H_0 + \sum_{i<j} V_{ij} = H_0 + V_{ss} + V_{so} + V_t, \quad (3.60)$$

donde se incluyeron tres términos que llevan una etiqueta de acuerdo con sus propiedades de transformación ante momento angular orbital ℓ : $\ell = 0$ corresponde a una interacción spin-spin V_{ss} , la interacción spin-órbita V_{so} tiene $\ell = 1$ y $\ell = 2$ corresponde a la interacción cuadrupolar V_t . Para mantener la generalidad escribimos estos términos en forma genérica dejando la parte radial sin especificar siguiendo las líneas de las referencias [32] y [31]. Así los términos del potencial hiperfino se escriben como

$$V_{ss} = V_{ss}^0 + V_{ss}^1 = \sum_{i<j=1}^3 v_{ss}(r_{ij}) \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j, \quad (3.61)$$

$$V_{so} = V_{so}^0 + V_{so}^1 = \sum_{i<j=1}^3 v_{so}(r_{ij}) \left[(\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{s}_i - (\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{s}_j \right. \\ \left. + 2(\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_i) \cdot \vec{s}_j - 2(\vec{r}_{ij} \times \vec{p}_j) \cdot \vec{s}_i \right], \quad (3.62)$$

$$V_t = V_t^0 + V_t^1 = \sum_{i<j=1}^3 v_t(r_{ij}) \left[3(\hat{r}_{ij} \cdot \vec{s}_i)(\hat{r}_{ij} \cdot \vec{s}_j) - (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j) \right], \quad (3.63)$$

con $v_{\varkappa}(r_{ij}) = v_{\varkappa}^0(r_{ij}) + v_{\varkappa}^1(r_{ij})\tau_i^a\tau_j^a$, donde las $\varkappa = ss, so, t$ etiquetan a las funciones radiales $v_{\varkappa}^{0,1}$ que se mantienen indeterminadas. Los superíndices 0(1) indican la ausencia (presencia) de las interacciones dependientes del isospín $\tau_i \cdot \tau_j$. Tomando $v_{\varkappa}^1 = 0$ ($v_{\varkappa}^0 = 0$) se obtienen las interacciones independientes (dependientes) del isospín que llamaremos *OGE* (*OME*), respectivamente, ya que este tipo de interacciones se obtienen de modelos de interacción que consideran el intercambio de un gluón [46] (en inglés *one-gluon exchange*) o un mesón (*one-meson exchange*) [54, 55]. Nos referiremos al modelo de quarks general definido por las ecuaciones (3.60)–(3.63) como modelo de quarks *OGE+OME*.

Es interesante notar que, a pesar de haber partido de un Hamiltoniano con interacciones únicamente de dos cuerpos, al remover el centro de masa, el potencial spin-órbita desarrolla una interacción de tres cuerpos [36], como se puede observar al escribir la componente $(ij) = (12)$ de V_{so}

$$\begin{aligned} (V_{so})_{12} &= 3 v_{so}(\sqrt{2}\rho) \left[(\vec{\rho} \times \vec{p}_\rho) \cdot (\vec{s}_1 + \vec{s}_2) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (\vec{\rho} \times \vec{p}_\lambda) \cdot (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) \right] \quad (3.64) \\ &\equiv (V_{so-2B})_{12} + (V_{so-3B})_{12} , \end{aligned}$$

donde las funciones V_{so-2B} de dos cuerpos y V_{so-3B} de tres cuerpos están definidas por los primero y segundo términos respectivamente.

Capítulo 4

Simetría de spin-sabor para bariones en *large* N_c

4.1 Introducción

Luego de los trabajos de 't Hooft y Witten sobre QCD con N_c colores, Gervais y Sakita [11, 12] y paralelamente Dashen y Manohar [14] descubrieron, al estudiar el proceso de dispersión mesón-barión, que en el límite $N_c \rightarrow \infty$ existe una simetría exacta de spin-sabor para los bariones. Esta simetría, llamada simetría contraída $SU(2N_f)_c$, es una consecuencia de las condiciones de consistencia que deben satisfacerse para que la teoría de QCD siga siendo unitaria en el límite de *large* N_c . En este límite, los bariones no excitados forman una torre infinita de estados degenerados. Sin embargo, la simetría $SU(2N_f)_c$ del límite $N_c \rightarrow \infty$ esta rota a orden $\mathcal{O}(1/N_c)$, lo que permite estudiar la estructura de spin-sabor de los bariones no excitados analizando contribuciones subdominantes. Los bariones excitados de *large* N_c también se organizan en torres formadas por estados pertenecientes a representaciones irreducibles de la simetría de spin-sabor contraída [25, 26, 56]. Sin embargo, esta simetría no coincide con la simetría $O(3) \times SU(2N_f)$ de los modelos de quarks (se volverá sobre esto en el capítulo 6).

En este capítulo se estudiará cómo surge la simetría contraída $SU(2N_f)_c$ para bariones en el límite $N_c \rightarrow \infty$. Luego se presentarán los operadores que permiten hacer una expansión en $1/N_c$ en términos de generadores de $SU(2N_f)$. Éstos sirven para construir operadores que describen a observables bariónicos como combinación lineal de operadores independientes. Este análisis se realizará para los bariones no excitados y luego se extenderá al caso de los bariones excitados. En particular, en la última sección se introducirán los operadores que llamaremos $CCGL$ y se utilizarán en los análisis de los capítulos 5 y 6.

4.2 Condiciones de consistencia para *large* N_c

En lo que sigue consideraremos el proceso de dispersión mesón-barión. Como se muestra en la figura 4.1, los diagramas dominantes de este proceso contienen dos vértices mesón-barión y, como se discutió en el capítulo 2, cada uno de ellos aporta una contribución de orden $\sqrt{N_c}$, lo que en principio llevaría a una contradicción con las reglas de conteo y además se violaría unitariedad para *large* N_c . Esto indica que ocurre una cancelación al considerar las contribuciones a este proceso y esta tiene origen en las condiciones de consistencia para *large* N_c .

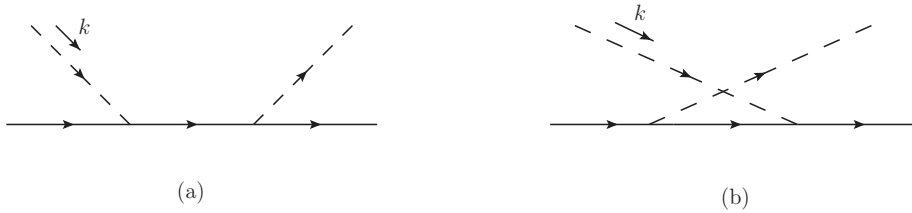


Figura 4.1: Diagramas de las contribuciones dominantes para el proceso $B + \pi \rightarrow B + \pi$.

En un principio nos restringiremos al caso $N_f = 2$ por simplicidad, más adelante generalizaremos los resultados al caso de N_f arbitrario. El vértice de interacción pión-nucleón está dado por

$$\frac{\partial_\mu \pi^a}{f_\pi} \langle B | \bar{q} \gamma_5 T^a q | B \rangle, \quad (4.1)$$

donde a es el índice de isospin y la constante de decaimiento del pión f_π es de orden $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ como se ha visto en el capítulo 2. El elemento de matriz $\langle B | \bar{q} \gamma_5 T^a q | B \rangle$ es la corriente axial del barión y es de orden $\mathcal{O}(N_c)$ ya que aparecen N_c líneas de quarks en el diagrama del barión. Entonces, esta expresión es compatible con un hecho ya mencionado, este vértice es de orden $\mathcal{O}(\sqrt{N_c})$. Esto nos permite simplificar la expresión de la corriente axial del barión en el límite de *large* N_c . Como la masa del barión es de orden $\mathcal{O}(N_c)$, mientras que la energía del pión es de orden $\mathcal{O}(1)$, el acoplamiento pión-barión se reduce al acoplamiento estático. En este caso, los elementos de matriz pueden escribirse como

$$\langle B | \bar{q} \gamma^i \gamma_5 T^a q | B \rangle = g N_c \langle B | X^{ia} | B \rangle, \quad (4.2)$$

donde g y $\langle B | X^{ia} | B \rangle$ son de orden uno.

Considerando los diagramas a orden más bajo (figura 4.1) la amplitud para el proceso de dispersión pión-barión $\pi^a(k) + B(q) \rightarrow \pi^b(k') + B(q')$ está dada por [57]

$$\mathcal{A} = -i k^i k'^j \frac{N_c^2 g^2}{f_\pi^2} \left(\frac{1}{k_0} X^{jb} X^{ia} - \frac{1}{k'_0} X^{jb} X^{ia} \right). \quad (4.3)$$

Dado que los bariones inicial y final están *on-shell* se tiene $k_0 = k'_0$. Por otro lado, el producto de las matrices X en la ecuación (4.3) involucra una suma sobre todos los

espines e isospines posibles del estado bariónico intermedio. Como $f_\pi \sim \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$ la amplitud resultante es de orden $\mathcal{O}(N_c)$ y esto viola unitariedad y entra en contradicción con la reglas de conteo de Witten como se mencionó al principio de esta sección. Para que esta amplitud sea finita en el límite de *large* N_c debe producirse una cancelación que, en este caso, se reduce al vínculo

$$N_c[X^{ia}, X^{jb}] \leq \mathcal{O}(1). \quad (4.4)$$

Como X^{ia} es de orden uno, puede expandirse en términos de N_c como

$$X^{ia} = X_0^{ia} + \frac{1}{N_c} X_1^{ia} + \frac{1}{N_c^2} X_2^{ia} + \dots \quad (4.5)$$

Entonces, la condición de consistencia de *QCD* para *large* N_c está dada por

$$[X_0^{ia}, X_0^{jb}] = 0. \quad (4.6)$$

Además X^{ia} transforma como vector en los espacios de espín y de isospin por lo que se tienen las siguientes relaciones de conmutación asociadas a los operadores de espín S^i y de sabor T^a

$$\begin{aligned} [S^i, T^a] &= 0, \\ [S^i, S^j] &= i\epsilon^{ijk} S^k, \quad [T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \\ [S^i, X_0^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} X_0^{ka}, \quad [T^a, X_0^{ib}] = if^{abc} X_0^{ic}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde también se incluyeron las relaciones de conmutación conocidas del álgebra $SU(2N_f)$. La relación en la ecuación (4.6) junto con las relaciones de la ecuación (4.7) forman el álgebra contraída del grupo de espín-sabor $SU(2N_f)_c$. Este álgebra puede compararse con el álgebra de $SU(2N_f)$ de los modelos de quarks, donde los generadores S^i , T^a y los generadores de spin-sabor G^{ia} satisfacen [18]

$$\begin{aligned} [S^i, T^a] &= 0, \\ [S^i, S^j] &= i\epsilon^{ijk} S^k, \quad [T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \\ [S^i, G^{ja}] &= i\epsilon^{ijk} G^{ka}, \quad [T^a, G^{ib}] = if^{abc} G^{ic}, \\ [G^{ia}, G^{jb}] &= \frac{i}{4} \delta^{ij} f^{abc} T^c + \frac{i}{2N_f} \delta^{ab} \epsilon^{ijk} S^k + \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} d^{abc} G^{kc}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Entonces, podemos ver que existe una correspondencia entre el álgebra contraída antes mencionada y el álgebra de $SU(2N_f)$ si se identifica a los operadores X_0^{ia} con el límite

$$X_0^{ia} = \lim_{N_c \rightarrow \infty} \frac{G^{ia}}{N_c}. \quad (4.9)$$

Así, dividiendo $[G^{ia}, G^{jb}]$ por N_c^2 y tomando el límite $N_c \rightarrow \infty$ se obtiene la relación de consistencia dada por la ecuación (4.6). Es decir que *QCD* tiene una simetría de spin-sabor contraída en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ en el sector bariónico.

Para obtener una representación del álgebra es necesario hallar los números cuánticos de los estados clasificados según los generadores de dicho álgebra. En nuestro caso conocemos los números cuánticos de los estados físicos J, J_z, I, I_3 , sin embargo, estos números cuánticos no son suficientes para especificar completamente un estado. Una vez obtenidos los autovalores del operador X_0 , se observa que aparece un grupo de generadores adicionales K [58], es decir que X_0 induce una representación irreducible especificada por estados $|X_0, K, k\rangle$. Uno quisiera asociar estos estados a estados determinados por números cuánticos conocidos por lo que se proyectan los estados $|X_0, K, k\rangle$ sobre estados $|I, I_3, J, J_3, K\rangle$ sin embargo el número cuántico K no tiene sentido físico en principio. Dashen, Jenkins y Manohar hallaron las representaciones irreducibles correspondientes a la simetría contraída $SU(2N_f)_c$ en [19] y mostraron que K tiene las mismas propiedades que el número de quarks extraños dividido por 2, dado por $K = n_s/2$ que ya fue mencionado en la sección 3.4 del capítulo 3.

En el caso de los bariones no excitados, los vectores de la base de esta representación irreducible forman una torre infinita de estados degenerados (S, I) [30]. Estas “torres” de estados degenerados agrupan estados de igual número de *grand spin* K . Así, la primera torre tiene $K = 0$, es decir $S = I$ por lo que está formada por los estados

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \dots \quad (4.10)$$

Con $K = 1/2$ se tiene la segunda torre compuesta por

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right), \dots, \quad (4.11)$$

mientras que para $K = 1$ se tienen los estados

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right), \dots, \quad (4.12)$$

y para $K = 3/2$ se obtienen los estados

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{3}{2}, 3\right), \dots \quad (4.13)$$

Como se tiene la relación $K = n_s/2$, estos estados se pueden asociar fácilmente a estados físicos. Por ejemplo, la torre de $K = 0$ contiene estados sin extrañeza, el estado $(S, I) = (1/2, 1/2)$ corresponde al nucleón N y el estado $(3/2, 3/2)$ describe a las deltas Δ . La torre con $K = 1/2$ contiene estados con extrañeza $n_s = -1$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$ y $(3/2, 1)$ corresponden a los estados Λ , Σ y Σ^* respectivamente. En el caso de $K = 1$ se tienen los estados Ξ y Ξ^* que se corresponden con los valores $(1/2, 1/2)$ y $(3/2, 1/2)$ de la torre. El estado Ω con extrañeza -2 corresponde a $(3/2, 0)$ de la torre de $K = 3/2$. Los estados restantes en las torres son estados espurios que existen solo para $N_c > 3$.

4.3 Expansión de operadores

Consideremos un operador de un quark en QCD del tipo $O_{QCD} = \bar{q}\Gamma q$, donde Γ es una matriz de Dirac o de sabor. Por ejemplo, $\Gamma = \gamma_\mu\gamma_5$ o $\Gamma = T^a\gamma_\mu$. Este operador es un “operador de un cuerpo” porque actúa sobre una línea de quark. El elemento de matriz de O_{QCD} se obtiene insertando el operador en alguna de las N_c líneas de quarks como se indica con una cruz en la figura 4.2(a). Existen N_c inserciones posibles en el diagrama de un barión por lo que el elemento de matriz del operador O_{QCD} es de orden (a lo sumo) N_c . El elemento de matriz no necesariamente es de orden N_c ya que pueden producirse cancelaciones entre las inserciones de los operadores en las distintas líneas de quarks. Por lo discutido en el capítulo 2, todos los diagramas planos que contienen el intercambio de un gluón (figura 4.2(b)) son del mismo orden de el diagrama de la figura 4.2(a) mientras que todos los diagramas no-planos están suprimidos.

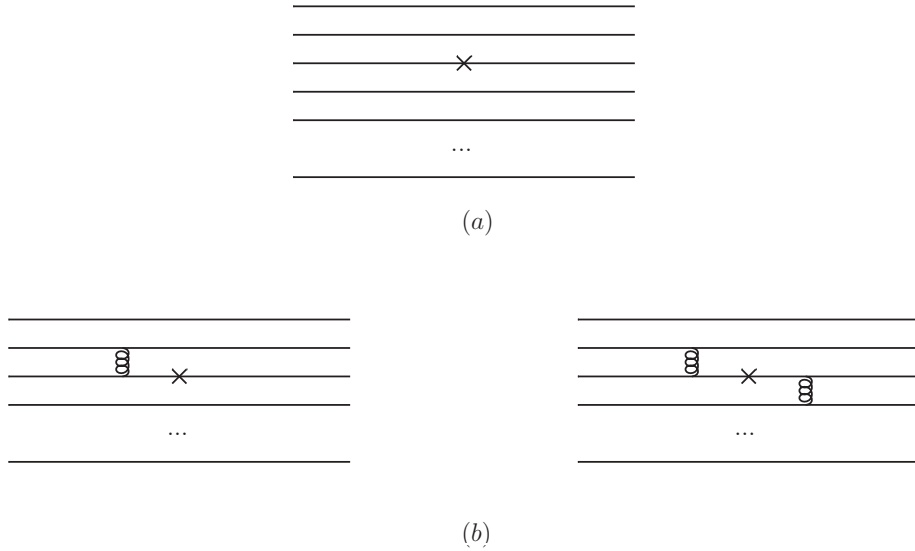


Figura 4.2: Diagramas de Feynman que representan la inserción de un operador de 1 cuerpo de QCD en las N_c líneas de quarks de un barión. Los diagramas en (b) contienen gluones adicionales que mantienen plano al diagrama por lo que son del mismo orden que el diagrama en (a).

El operador de un quark en QCD que transforma según la simetría $SU(2) \times SU(N_f)$ puede escribirse como una expansión en serie de operadores efectivos de n cuerpos, que involucran n líneas de quarks. A primer orden esta expansión tiene la forma [18]

$$O_{QCD}^{1-quark} = \sum_{n,k} c_k^{(n)} \frac{1}{N_c^{n-1}} O_k^{(n)} \quad (4.14)$$

donde la suma es sobre todos los operadores de n cuerpos $O_k^{(n)}$, donde $n = 0, \dots, N_c$ y tienen los mismos números cuánticos de espín y de sabor que O_{QCD} . Los $c_k^{(n)}$ son

coeficientes de orden 1. Las correcciones de orden $1/N_c$ en la ecuación (4.14) pueden ser absorbidas en los coeficientes $c_k^{(n)}$. La dinámica de QCD está parametrizada estos coeficientes desconocidos.

Vimos que un operador de QCD puede expandirse en potencias de $1/N_c$ con dos métodos distintos. Uno está basado en el grupo $SU(2N_f)_c$ y usa los generadores de spin-sabor X_0^{ia} con este método el operador de masa de un barión con $N_f = 2$ tiene la forma [42]

$$N_c \mathcal{P} \left(X_0, \frac{S}{N_c}, \frac{I}{N_c} \right), \quad (4.15)$$

donde \mathcal{P} es un polinomio. El otro método consiste en utilizar los generadores del álgebra de spin-sabor del grupo $SU(2N_f)$ representada términos de operadores del modelo de quarks para *large* N_c . En lo que sigue, usaremos este último método ya que resulta en una base de operadores más simple a la hora de construir los operadores de la expansión.

Un operador arbitrario $O^{(n)}$ resultan de todas las posibles combinaciones de S^i , T^a y G^{ia} de modo que

$$O^{(n)} = \sum_{l,m} (S^i)^l (T^a)^m (G^{ia})^{n-l-m}, \quad (4.16)$$

entonces la expansión del operador de QCD de un quark de la ecuación (4.14) se puede escribir como

$$O_{QCD}^{1-quark} = \sum_{n,l,m} c_k^{(n)} \frac{1}{N_c^{n-1}} (S^i)^l (T^a)^m (G^{ia})^{n-l-m}. \quad (4.17)$$

Es decir que la dependencia en N_c del operador de un cuerpo en QCD aparece en dos factores. El primero es la dependencia explícita que aparece en el factor $\frac{1}{N_c^{n-1}}$ de la ecuación (4.17). Pero también hay una dependencia implícita que proviene de los operadores $O^{(n)}$. Los elementos de matriz de los generadores del grupo $SU(2N_f)$ tienen una dependencia no trivial en N_c que varía según que estado bariónico del multiplete de spin-sabor se está considerando. Por ejemplo, si consideramos los estados que pertenecen a la torre de la ecuación (3.44) vemos que los primeros estados tienen espín e isospin de orden N_c^0 pero los últimos estados de la torres tienen espín e isospin de $\mathcal{O}(N_c)$. De igual modo, todos los elementos de matriz de G^{ia} de la torre son del orden N_c por lo que este operador se denomina *operador coherente*. Esto último implica que todos los elementos de matriz de un operador $O^{(n)}$ son de orden $\leq \mathcal{O}(N_c^n)$.

La expansión en $1/N_c$ de un operador pierde el poder de predictibilidad si el factor $1/N_c^{n-1}$ se ve completamente anulado por los factores implícitos que surgen de los elementos de matriz de los operadores $O^{(n)}$.

Es posible generalizar la expansión $1/N_c$ a operadores de m cuerpos de QCD . Este operador actúa sobre m quarks dentro del barión por lo que su elementos de matriz es a lo sumo de orden N_c^m . En este caso, se puede expandir el operador de m cuerpos de QCD en términos de operadores efectivos de n cuerpos cuyos coeficientes serán de

orden N_c^{m-n} es decir [42]

$$O_{QCD}^{m-body} = \sum_{n,k} c_k^{(n)} \frac{1}{N_c^{n-m}} O_k^{(n)}. \quad (4.18)$$

Cuando se consideran los elementos de matriz de los operadores de QCD como los de la ecuación (4.17) se puede ver en general no todos los productos de generadores que aparecen en la expansión son independientes. Algunos operadores de n cuerpos se pueden expresar como combinaciones lineales de operadores de orden más bajo. Se deben eliminar estos operadores “redundantes” para lograr obtener operadores efectivos de n cuerpos puros. Estos operadores redundantes pueden ser eliminados usando relaciones entre operadores. Dashen et al. [18] derivaron estas relaciones para los bariones en el estado fundamental.

4.4 Relaciones entre operadores

Existen varias relaciones entre operadores conocidas para los estados fundamentales de los bariones. Estas relaciones no se cumplen en general para todas las representaciones, varias se derivan teniendo en cuenta la simetría del estado fundamental.

Para entender el origen de las identidades entre los operadores en la representación fundamental introducimos los operadores de creación y aniquilación q_α^\dagger y q^α , donde $\alpha = 1, \dots, N_f$ representa los N_f sabores de quarks con espín *up* y $\alpha = N_f + 1, \dots, 2N_f$ son los N_f sabores de quarks con espín *down*. Como la parte de color de la función de onda del barión es simétrica pueden omitirse los números cuánticos de color de los operadores de quark, entonces estos operadores satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas

$$[q^\alpha, q_\beta^\dagger] = \delta_\beta^\alpha, \quad (4.19)$$

ya que la parte de spin-sabor de la función de onda bariónica (ecuación (3.1)) es simétrica para los estados fundamentales. Los operadores clasificarse de acuerdo a si son de cero cuerpos, un cuerpos, ... o de n cuerpos y pueden expresarse en términos de estos operadores de creación y aniquilación.

Un operador de cero cuerpos no contiene ningún operador de creación o aniquilación, el único operador de cero cuerpos es el operador identidad $\mathbb{1}$, es independiente de q_α^\dagger y q^α , no actúa sobre ningún quark del barión.

Existen cuatro operadores de un cuerpo, el operador número de quarks

$$q^\dagger q = \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger q_j = N_c \mathbb{1}, \quad (4.20)$$

y los tres generadores de $SU(2N_f)$

$$\begin{aligned} S^i &= \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (S^i \times \mathbb{1}) q_j, \\ T^a &= \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (\mathbb{1} \times T^a) q_j, \\ G^{ia} &= \sum_{j=1}^{N_c} q_j^\dagger (S^i \times T^a) q_j. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En la ecuación (4.20) puede verse que el operador número de quarks puede expresarse en términos del operador de cero cuerpos $\mathbb{1}$. Es decir que hay solo tres operadores de un cuerpo independientes, S^i , T^a y G^{ia} .

Los operadores de dos cuerpos actúan sobre dos quarks, por lo tanto involucran dos operadores de creación q y dos de aniquilación q^\dagger . Estos operadores pueden escribirse como producto de generadores de spin-sabor para los bariones del tipo

$$\sum_{j,j'} \left(q_j^\dagger \Lambda^A q_j \right) \left(q_{j'}^\dagger \Lambda^B q_{j'} \right), \quad (4.22)$$

donde cada operador de 1 cuerpo actúa independientemente sobre una línea de quark. Este operador no es un operador puro de 2 cuerpos ya que, en el caso $j' = j$, los dos operadores de 1 cuerpo actúan sobre el mismo quark y, entonces, se trata de un operador de 1 cuerpo.

El operador de 2 cuerpos puro es el operador de la ecuación (4.22) sin el operador de un cuerpo recién mencionado, es decir

$$\sum_{j \neq j'} \left(q_j^\dagger S^i q_j \right) \left(q_{j'}^\dagger T^a q_{j'} \right), \quad (4.23)$$

y es puro ya que tiene elementos de matriz nulos entre estados de un solo quark. Como se trata de operadores bosónicos, los operadores de creación y aniquilación conmutan y la ecuación (4.23) puede escribirse en forma de orden normal

$$q^\dagger q^\dagger S^i T^a q q. \quad (4.24)$$

Esto puede generalizarse a n cuerpos

$$q^\dagger \dots q^\dagger \mathcal{T} q \dots q, \quad (4.25)$$

donde \mathcal{T} es un tensor completamente simétrico de traza nula. Este tensor debe tener traza nula para poder obtener un operador de n cuerpos puro y simétrico ya que la parte de spin-sabor de la función de onda de los bariones en el estado fundamental es simétrica. Los operadores tensoriales antisimétricos o mixto-simétricos se anulan al considerar los elementos de matriz.

La ecuación (4.20) constituye la primera identidad que relaciona operadores, reduce un operador de 1 cuerpo a uno de cero cuerpos.

En lo que sigue analizamos las identidades para los operadores de 2 cuerpos. Como ya se mencionó, los operadores de 2 cuerpos pueden escribirse como producto de dos operadores de 1 cuerpo. Los tres operadores de 1 cuerpo independientes son los generadores de $SU(2N_f)$ de las ecuaciones (4.21). Pertenecen a la representación adjunta de $SU(2N_f)$. El producto de dos operadores puede descomponerse en un producto simétrico (un anticonmutador) y un producto antisimétrico (un conmutador). El conmutador puede ser eliminado teniendo en cuenta el álgebra de $SU(2N_f)$ dadas por las ecuaciones (4.8). Como los generadores de $SU(2N_f)$ pertenecen a la representación adjunta (*adj*), el anticonmutador transforma como [18]

$$(adj \times adj)_S = 1 + adj + \bar{a}a + \bar{s}s, \quad (4.26)$$

donde S indica que se trata de un producto simétrico. El término $\bar{a}a$ ($\bar{s}s$) representa el tensor de traza nula $\mathcal{T}_{[\beta_a, \beta_2]}^{[\alpha_1, \alpha_2]}$ ($\mathcal{T}_{(\beta_a, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}$) que es antisimétrico (simétrico) en sus supraíndices y sus subíndices.

Según la ecuación (4.26) las identidades para los operadores de 2 cuerpos pueden ser clasificadas en tres tipos distintos [18]. La primera identidad reduce a los operadores de 2 cuerpos a un singlete de $SU(2N_f)$ esta combinación lineal corresponde al operador de Casimir. El segundo tipo de identidades corresponden a combinaciones lineales de operadores de 2 cuerpos que transforman como la representación $SU(2N_f)$ adjunta. Finalmente la última categoría contiene a las combinaciones lineales de operadores que se anulan cuando actúan sobre una representación completamente simétrica de spin-sabor como lo son los bariones en el estado fundamental.

No existen otras identidades para operadores de n cuerpos con $n > 2$ ya que siempre es posible obtener operadores de n cuerpos aplicando de forma recursiva las identidades para operadores de 2 cuerpos sobre todos los pares de identidades de 1 cuerpo que aparecen en un producto completamente simétrico de n operadores.

En la tabla 4.1 se muestran los tres tipos de identidades para operadores de 2 cuerpos del grupo $SU(2N_f)$. La representación de spin-sabor ($SU(2)$, $SU(N_f)$) de cada identidad se indica explícitamente en la última columna. Esta tabla está dividida en tres bloques que corresponden a las tres categorías de identidades descritas. El primer bloque contiene la identidad de Casimir de $SU(2N_f)$. el segundo bloque contiene tres identidades que transforman como combinaciones lineales de operadores de 2 cuerpos en la representación de $SU(2N_f)$ adjunta, a su vez esta representación adjunta se puede descomponer en tres representaciones $(3, 1)$, $(1, adj)$ y $(3, adj)$. El tercer bloque de identidades se obtienen combinando las dos representaciones adjuntas de operadores de 1 cuerpo a una representación $\bar{a}a$ e igualándola a cero (para más detalles sobre la obtención de estas identidades puede verse en la referencia [18]).

Usando las relaciones de la tabla 4.1 para los operadores del “núcleo” o *core* simétrico de $N_c - 1$ quarks se pueden encontrar las relaciones entre los operadores que se construyen para los bariones excitados.

$2 \{S^i, S^i\} + N_f \{T^a, T^a\} + 4N_f \{G^{ia}, G^{ia}\} = N_c(N_c + 2N_f)(2N_f - 1)$	(1, 1)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{2}{N_f} \{S^i, G^{ic}\} + \frac{1}{4} d^{abc} \{T^a, T^b\} = (N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) T^c$	(1, <i>adj</i>)
$\{T^a, G^{ia}\} = (N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) S^i$	(3, 1)
$\frac{1}{N_f} \{S^k, T^c\} + d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = 2(N_c + N_f) \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) G^{kc}$	(3, <i>adj</i>)
$4N_f(2 - N_f) \{G^{ia}, G^{ia}\} + 3N_f^2 \{T^a, T^a\} + 4(1 - N_f^2) \{S^i, S^i\} = 0$	(1, 1)
$(4 - N_f) d^{abc} \{G^{ia}, G^{ib}\} + \frac{3}{4} N_f d^{abc} \{T^a, T^b\} - 2 \left(N_f - \frac{4}{N_f}\right) \{S^i, G^{ia}\} = 0$	(1, <i>adj</i>)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = -3 \{T^a, T^b\} \quad (\bar{a}a)$	(1, $\bar{a}a$)
$4 \{G^{ia}, G^{ib}\} = \{T^a, T^b\} \quad (\bar{s}s)$	(1, $\bar{s}s$)
$\epsilon^{ijk} \{S^i, G^{jc}\} = f^{abc} \{T^a, G^{kb}\}$	(3, <i>adj</i>)
$d^{abc} \{T^a, G^{kb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_f}\right) (\{S^k, T^c\} - \epsilon^{ijk} f^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\})$	(3, <i>adj</i>)
$\epsilon^{ijk} \{G^{ia}, G^{jb}\} = f^{acg} d^{bch} \{T^g, G^{kh}\} \quad (\bar{a}s + \bar{s}a)$	(3, $\bar{a}s + \bar{s}a$)
$\{T^a, G^{ib}\} = 0 \quad (\bar{a}a)$	(3, $\bar{a}a$)
$\{G^{ia}, G^{ja}\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{N_f}\right) \{S^i, S^j\} \quad (S = 2)$	(5, 1)
$d^{abc} \{G^{ia}, G^{jb}\} = \left(1 - \frac{2}{N_f}\right) \{S^i, G^{jc}\} \quad (S = 2)$	(5, <i>adj</i>)
$\{G^{ia}, G^{jb}\} = 0 \quad (S = 2, \bar{a}a)$	(5, $\bar{a}a$)

Tabla 4.1: Identidades de operadores en $SU(2N_f)$. La segunda columna indica las propiedades de las identidades ante una transformación $SU(2)_{sp} \times SU(N_f)_{fl}$ [18].

4.5 Operadores para bariones excitados

Analizaremos en lo que sigue la expansión en operadores para bariones excitados. Esta representación corresponde a estados excitados de bariones que pueden describirse como la combinación de un *core* simétrico y un quark excitado. Podemos usar operadores análogos a los de la ecuación (4.21) que actúan sobre el *core* o sobre el quark excitado. Se indica con un subíndice c a los operadores que actúan solo sobre el *core* (S_c, T_c, G_c) mientras que a los operadores que actúan sobre el quark excitado se nota con una letra minúscula (s, t, g). Entonces, las relaciones que fueron descritas para los estados fundamentales (ecuación (4.20) y tabla 4.1) también se cumplen para los operadores que actúan sobre el *core* reemplazando N_c por $N_c - 1$ ya que el *core* tiene un quark menos.

Para obtener los operadores que describan a estados excitados de bariones se deben combinar los operadores de spin-sabor que actúan sobre el *core* S_c^i, T_c^a y G_c^{ia} y los operadores del quark excitado s^i, t^a y g^{ia} y el operador momento angular l^i . La representación mixta-simétrica para los bariones tienen $L = 1$, por lo que las únicas combinaciones de l^i necesarias serán el operador identidad $\mathbb{1}$ que tiene $\Delta l = 0$, l^i con $\Delta l = 1$ y el operador tensorial

$$l^{(2)ij} \equiv \frac{1}{2}\{l^i, l^j\} - \frac{l^2}{3}\delta^{ij}, \quad (4.27)$$

con $\Delta l = 2$. Los operadores para los bariones sin extrañeza deben tener las simetrías observadas, invariancia ante inversión temporal y ante rotaciones y deben formar singletes de isospin. Además, como los estados físicos tienen solo dos quarks en el *core*, es suficiente con considerar solo operadores que actúan a lo sumo sobre dos quarks del *core*. En la referencia [27] se consideraron las relaciones entre operadores y obtuvieron 18 operadores independientes para bariones sin extrañeza que se muestran en la tabla 4.2.

En la definición de los operadores de la tabla 4.2 se incluyó el factor $1/N_c^{1-n}$ pero debe tenerse en cuenta que, como ya se mencionó en la sección 4.3, G^{ia} es un operador coherente y que entonces el orden de los elementos de matriz de los operadores de la lista es de $1/N_c^{1-n+m}$ donde m corresponde a la cantidad de veces que aparece el operador coherente en la definición¹.

Más aún, este análisis es válido para valores arbitrarios de N_c , sin embargo, no todos los elementos de matriz tienen la misma dependencia en N_c , esto implica que es posible que haya elementos de matriz que son independientes para $N_c = 3$ pero linealmente dependientes para $N_c \rightarrow \infty$. Este es el caso de $\langle ls \rangle$ y $\langle ltG_c \rangle$, ambos son de orden N_c^0 sin embargo la combinación $\langle ls + \frac{4}{N_c+1}ltG_c \rangle$ es de orden $1/N_c$ lo que indica que entre los dos operadores originales uno solo es un operador linealmente independiente de orden N_c^0 . Pero este resultado depende de los estados que se tienen en cuenta a la

¹En el caso de estados con más de dos sabores el operador T_c^a también puede ser un operador *coherente*.

Operador			Orden del elemento de matriz
$N_c \mathbb{1}$			N_c^1
ls	$\frac{1}{N_c} l^{(2)} g G_c$	$\frac{1}{N_c} lt G_c$	N_c^0
$\frac{1}{N_c} l S_c$	$\frac{1}{N_c} S_c^2$	$\frac{1}{N_c} s S_c$	N_c^{-1}
$\frac{1}{N_c} l^{(2)} s S_c$	$\frac{1}{N_c^2} l^i g^{ja} \{S_c^j, G_c^{ia}\}$	$\frac{1}{N_c} lg T_c$	
$\frac{1}{N_c} t T_c$	$\frac{1}{N_c^2} l^{(2)} t \{S_c, G_c\}$		
$\frac{1}{N_c^2} \{l S_c, s S_c\}$	$\frac{1}{N_c^2} (l S_c)(t T_c)$	$\frac{1}{N_c^2} g S_c T_c$	N_c^{-2}
$\frac{1}{N_c^2} l^{(2)} S_c S_c$	$\frac{1}{N_c^2} l^{(2)} g S_c T_c$	$\frac{1}{N_c^2} (ls) S_c^2$	

Tabla 4.2: Operadores linealmente independientes para bariones sin extrañeza y simetría mixta de spin-sabor [27] clasificados según el orden en N_c de sus elementos de matriz.

hora de calcular los elementos de matriz, en principio es válido solo para bariones sin extrañeza.

Con lo discutido en la sección anterior podemos obtener una base de operadores para analizar el espectro de los bariones no extraños de paridad positiva. La descripción del espectro del **70**-plete sin los bariones con extrañeza requiere de siete masas y dos ángulos de mezcla, entonces necesariamente 9 de los 18 operadores de la tabla 4.2 son linealmente dependientes si nos restringimos a este espacio.

Para obtener una base de operadores conveniente para este caso, es útil elegir los primeros operadores de la expansión como los operadores de orden más bajo $N_c \mathbb{1}$, ls y $\frac{1}{N_c} l^{(2)} g G_c$ que son independientes tanto para $N_c = 3$ como para $N_c \rightarrow \infty$. Luego conviene considerar los ocho operadores cuyos elementos de matriz son orden $1/N_c$ (ver tabla 4.2) y la combinación $ls + \frac{4}{N_c+1} lt G_c$. Entre estos nueve operadores debemos seleccionar seis para obtener una base. Se puede mostrar que si consideran todas las posibilidades, al menos uno de estos operadores es linealmente dependiente para $N_c \rightarrow \infty$, esto indica que al menos una combinación corresponde a un operador de orden $1/N_c^2$. Se puede demostrar que la combinación $\frac{N_c+1}{N_c} ls + \frac{4}{N_c} lt G_c + \frac{1}{N_c} l S_c + \frac{8}{N_c^2} l^i g^{ja} \{S_c^j, G_c^{ia}\}$ tiene elementos de matriz de orden $1/N_c^2$. De este modo podemos elegir una base definida por los operadores $O_{1,\dots,9}$ de la tabla 4.3 donde, por completitud, también se presentan las expresiones de los operadores restantes. En esta tesis nos referiremos a estos operadores como operadores *CCGL*. Los elementos de matriz de cada uno de los operadores *CCGL* fueron calculados en la referencia [27] y se muestran

en las tablas B.1 y B.2 del apéndice B donde se pueden verificar las dependencias en N_c de los elementos de matriz de las combinaciones de operadores mencionadas en esta sección.

$\mathcal{O}_1 = N_c \mathbb{1}$	$\mathcal{O}_{10} = \frac{1}{N_c} l g T_c$
$\mathcal{O}_2 = l s$	$\mathcal{O}_{11} = \frac{1}{N_c} t T_c$
$\mathcal{O}_3 = \frac{1}{N_c} l^{(2)} g G_c$	$\mathcal{O}_{12} = \frac{1}{N_c^2} l^{(2)} t \{S_c, G_c\}$
$\mathcal{O}_4 = l s + \frac{4}{1+N_c} l t G_c$	$\mathcal{O}_{13} = \frac{1}{N_c^2} (l s) S_c^2$
$\mathcal{O}_5 = \frac{1}{N_c} l S_c$	$\mathcal{O}_{14} = \frac{1}{N_c^2} \{l S_c, s S_c\}$
$\mathcal{O}_6 = \frac{1}{N_c} S_c^2$	$\mathcal{O}_{15} = \frac{1}{N_c^2} (l S_c) (t T_c)$
$\mathcal{O}_7 = \frac{1}{N_c} s S_c$	$\mathcal{O}_{16} = \frac{1}{N_c^2} g S_c T_c$
$\mathcal{O}_8 = \frac{1}{N_c} l^{(2)} s S_c$	$\mathcal{O}_{17} = \frac{1}{N_c^2} l^{(2)} S_c S_c$
$\mathcal{O}_9 = \frac{N_c+1}{N_c} \mathcal{O}_4 + \mathcal{O}_5 + \frac{8}{N_c^2} l^i g^{ja} \{S_c^j, G_c^{ia}\}$	$\mathcal{O}_{18} = \frac{1}{N_c^2} l^{(2)} g S_c T_c$

Tabla 4.3: Operadores *CCGL*. Los operadores $\mathcal{O}_{1,\dots,9}$ forman una base para estudiar el espectro de los bariones no extraños con $L = 1$

Los operadores *CCGL* permiten obtener observables dentro del marco de una expansión en $1/N_c$ pero también son útiles para estudiar estados con $N_c = 3$, como se verá en el capítulo siguiente.

Capítulo 5

Análisis de operadores para bariones de paridad negativa

5.1 Introducción

En este capítulo se describe el estudio realizado sobre los primeros estados excitados de bariones no extraños [59]. Para esto se analizó el espectro de masa de los bariones más livianos con $L = 1$. Como ya vimos en capítulos anteriores, estos estados son los que pertenecen al multiplete $[70, 1^-]$ de $SU(6)$ sin extrañeza, es decir que corresponden a los estados de la representación irreducible $[20, 1^-]$ de $SU(4)$. A lo largo de todo el trabajo que se describe en este capítulo, se despreciaron los términos correspondientes a la mezcla de configuraciones. Es decir que no se tuvieron en cuenta la mezcla de los estados de $[70, 1^-]$ con estados de otros multipletes. Esta suposición se ha hecho en análisis de $1/N_c$ anteriores. La mezcla de configuraciones, cuando no aparece suprimida en $1/N_c$, está gobernada por operadores de spin-órbita [40] y existen razones para creer que las contribuciones de estos operadores son chicas para $N_c = 3$ [60].

Como ya se mencionó en el capítulo 3, la estructura general de las interacciones de spin-sabor se pueden reducir a dos casos extremos, donde solo se tienen interacciones independientes del sabor que llamamos OGE y el caso en el que las interacciones son solo dependientes del sabor como en el caso de los modelos con interacciones OME . En particular, en la sección 3.5 se definió un modelo de quarks general que incluye estos dos casos. Este modelo general, que llamamos $OME+OGE$, es el considerado en los cálculos que se describen en este capítulo.

5.2 Parametrización de matrices de masa y *matching* de operadores

Para analizar el espectro de masas de los bariones se considera el Hamiltoniano del modelo $OME+OGE$, dado por las ecuaciones (3.60)–(3.63). Es posible obtener las matrices de masas mediante un cálculo explícito usando una base de oscilador armónico

autoestados de H_0 . Esto consiste en tomar los elementos de matriz de $H = H_0 + V_{ss} + V_{so} + V_t$ utilizando las funciones de onda expresadas en las ecuaciones (3.37)–(3.39).

A pesar de la forma no trivial de las funciones de onda (ver apéndice A), se puede ver que el cálculo de los elementos de matriz del término V_{ss} es sencillo. Sin embargo, obtener los elementos de matriz del potencial tensorial V_t y el potencial correspondiente a una interacción spin-órbita V_{so} resulta mucho más complejo.

El potencial por la interacción spin-órbita V_{so} contiene una suma de operadores de dos cuerpos y de tres cuerpos como ya se mostró en el capítulo 3 (ecuación (3.64)) y cada uno de estos dos términos tiene un producto de operadores tensoriales de rango 1 que actúan sobre la parte de espín y la parte orbital. Por otro lado, en el caso del potencial V_t se tiene el producto de operadores tensoriales de rango 2.

Los cálculos de los elementos de matriz de un producto de operadores tensoriales pueden simplificarse si se considera una relación particular que se deriva del teorema de Wigner-Eckart. Este teorema se puede expresar como

$$\langle \alpha j m | T_q^k | \alpha' j' m' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \langle \alpha j || T^k || j' \alpha' \rangle \langle j m | j' k m' q \rangle, \quad (5.1)$$

donde T_q^k son las componentes esféricas de un operador tensorial de rango k y $\langle \alpha j || T^k || j' \alpha' \rangle$ son los elementos de matriz *reducidos* independientes de la proyección cuya definición está dada por esta misma ecuación. De esta relación se deduce que (ver, por ejemplo, la referencia [61])

$$\begin{aligned} & \langle \gamma' j'_1 j'_2 J M | \vec{T}(k) \cdot \vec{U}(k) | \gamma j_1 j_2 J M \rangle = \\ & (-)^{j_1+j'_2+J} \left\{ \begin{array}{ccc} J & j'_2 & j'_1 \\ k & j_1 & j_2 \end{array} \right\} \sum_{\gamma''} \langle \gamma' j'_1 || \vec{T}(k) || \gamma'' j_1 \rangle \langle \gamma'' j'_2 || \vec{U}(k) || \gamma j_2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde la expresión entre llaves es un símbolo 6j y el punto en $\vec{T}(k) \cdot \vec{U}(k)$ indica que todos los índices de los operadores tensoriales $\vec{T}(k)$ y $\vec{U}(k)$ de rango k están contraídos.

Para poder utilizar la relación de la ecuación (5.2) es necesario expresar los potenciales en términos de productos de operadores tensoriales irreducibles. Ya vimos que el potencial V_{so} se expresa como una suma de productos tensoriales de rango 1 en la ecuación (3.64). Por otro lado, para ver que el término tensorial es un producto de operadores tensoriales de rango 2, basta notar que la contribución V_t , dada por la ecuación (3.63), también puede expresarse como

$$V_t = \sum_{i<j=1}^3 [v_t(r_{ij}) (3\hat{r}_{ij}^a \hat{r}_{ij}^b - \delta^{ab})] \cdot \left[\frac{s_i^a s_j^b + s_i^b s_j^a}{2} - \frac{\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j}{3} \delta^{ab} \right]. \quad (5.3)$$

De esta expresión se puede ver que ambos factores tienen la forma de un tensor irreducible general de rango 2

$$\frac{V^a W^b + V^b W^a}{2} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}}{3} \delta^{ab}. \quad (5.4)$$

El producto escalar de dos tensores del mismo rango puede escribirse también en términos de las componentes esféricas como

$$\mathbf{Q}_{ij} \cdot \mathbf{O}_{ij} = \sum_{q=-2}^2 (-1)^q T_{ij}(2, q) U_{ij}(2, -q) \equiv \mathbf{T}_{ij}(2) \cdot \mathbf{U}_{ij}(2). \quad (5.5)$$

Todos los elementos de matriz reducidos de los operadores espaciales pueden escribirse en términos de las integrales radiales de las funciones sin determinar $v_{\mathbf{z}}^{0,1}$.

Con estas consideraciones se calcularon los elementos de matriz del Hamiltoniano del modelo general *OGE+OME* en la base armónica. Los resultados obtenidos para los elementos de matriz de cada uno de los términos del Hamiltoniano de este modelo de quarks general aparecen resumidos en la tabla 5.1, que permite distinguir las contribuciones de la parte *OGE* y *OME* de cada potencial. Como ya se mencionó en el capítulo 3, los estados físicos de momento angular J son una mezcla de estados del modelo de quarks por lo tanto aparecen elementos fuera de las diagonales que se notan como ${}^2N_J - {}^4N_J$.

	H_0	V_{ss}^0	V_{ss}^1	$V_{so-2B}^{0,1}$	V_{so-3B}^0	V_{so-3B}^1	$V_t^{0,1}$
${}^2N_{1/2}$	m_0	S^0	S^1	$2 P_{2B}^{0,1}$	0	$-4 P_{3B}^1$	0
${}^4N_{1/2}$	m_0	$-S^0$	S'^1	$5 P_{2B}^{0,1}$	0	0	$5 D^{0,1}$
${}^2N_{1/2} - {}^4N_{1/2}$	0	0	0	$P_{2B}^{0,1}$	P_{3B}^0	P_{3B}^1	$5 D^{0,1}$
${}^2N_{3/2}$	m_0	S^0	S^1	$-P_{2B}^{0,1}$	0	$2 P_{3B}^1$	0
${}^4N_{3/2}$	m_0	$-S^0$	S'^1	$2 P_{2B}^{0,1}$	0	0	$-4 D^{0,1}$
${}^2N_{3/2} - {}^4N_{3/2}$	0	0	0	$\sqrt{\frac{5}{2}} P_{2B}^{0,1}$	$\sqrt{\frac{5}{2}} P_{3B}^0$	$\sqrt{\frac{5}{2}} P_{3B}^1$	$-\sqrt{\frac{5}{2}} D^{0,1}$
${}^4N_{5/2}$	m_0	$-S^0$	S'^1	$-3 P_{2B}^{0,1}$	0	0	$D^{0,1}$
${}^2\Delta_{1/2}$	m_0	S'^0	S'^1	0	$-2 P_{3B}^0$	$2 P_{3B}^1$	0
${}^2\Delta_{3/2}$	m_0	S'^0	S'^1	0	P_{3B}^0	$-P_{3B}^1$	0

Tabla 5.1: Elementos de matriz de las componentes spin-spin V_{ss} , spin-órbita de dos cuerpos V_{so-2B} , de tres cuerpos V_{so-3B} y elementos de matriz de la componente tensorial V_t de la interacción. Los supraíndices 0 y 1 corresponden a los casos *OGE* y *OME* respectivamente.

Los elementos de matriz de la tabla 5.1 involucran la masa promedio de los estados del multiplete m_0 y diez constantes que pueden escribirse en términos de integrales

radiales I_2 , I_4 , U y J_4 como

$$\begin{aligned}
S^0 &= -\frac{3}{2} \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} \left(I_2^0 + \frac{2}{3} \alpha^2 I_4^0 \right), & P_{2B}^0 &= -4 \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} U^0, \\
S'^0 &= \frac{3}{2} \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} (I_2^0 - 2\alpha^2 I_4^0), & P_{3B}^0 &= \frac{8}{27} \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} U^0, & D^0 &= -\frac{2}{5} \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} J_4^0, \\
S^1 &= \frac{3}{8} \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} (5I_2^1 - 2\alpha^2 I_4^1), & P_{2B}^1 &= 3 \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} U^1, & D^1 &= \frac{3}{10} \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} J_4^1, \\
S'^1 &= \frac{3}{8} \frac{\alpha^3}{\sqrt{\pi}} (I_2^1 - 2\alpha^2 I_4^1), & P_{3B}^1 &= -\frac{2}{27} \frac{\alpha^5}{\sqrt{\pi}} U^1,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde las integrales radiales dependen de las funciones indeterminadas $v_{\zeta}^{0,1}$ que aparecen en el potencial hiperfino y están dadas por

$$\begin{aligned}
I_2^{0,1} &= \int_0^\infty \rho^2 v_{ss}^{0,1}(\sqrt{2}\rho) e^{-\alpha^2 \rho^2} d\rho, & J_4^{0,1} &= \int_0^\infty \rho^4 v_t^{0,1}(\sqrt{2}\rho) e^{-\alpha^2 \rho^2} d\rho, \\
I_4^{0,1} &= \int_0^\infty \rho^4 v_{ss}^{0,1}(\sqrt{2}\rho) e^{-\alpha^2 \rho^2} d\rho, & U^{0,1} &= \int_0^\infty \rho^4 v_{so}^{0,1}(\sqrt{2}\rho) e^{-\alpha^2 \rho^2} d\rho.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Las integrales I_2 , I_4 , U y J_4 dependen de la forma particular y de la intensidad relativa de las interacciones de spin-sabor de un determinado modelo. Estas interacciones darán lugar a una separación de los valores para las masas (*splittings*) dentro de un multiplete de spin-sabor.

Las masas físicas y los ángulos de mezcla se obtienen diagonalizando la matriz de masa. Recordando la definición utilizada para los ángulos de mezcla dada por las ecuaciones (3.40) y (3.41), la forma general de la matriz de masas para los estados con $J = 1/2, 3/2$ es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} M_+ + M_- \cos 2\theta & M_- \sin 2\theta \\ M_- \sin 2\theta & M_+ - M_- \cos 2\theta \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

con

$$M_+ = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) = \frac{1}{2} \text{Tr } M, \tag{5.9}$$

$$M_- = \frac{1}{2}(M_1 - M_2) = \sqrt{\frac{1}{4} (\text{Tr } M)^2 - \text{Det } M}, \tag{5.10}$$

donde M_1 y M_2 son los autovalores que corresponden a las masas físicas. Las matrices cambio de base están dadas por

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Así las matrices pueden diagonalizarse y se obtienen las masas físicas como

$$C.M.C^{-1} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

De los resultados que se obtienen para los elementos de matriz de la parte de dos cuerpos del potencial de la interacción spin-órbita de los modelos *OGE* y *OME* son proporcionales entre sí, es decir $V_{so-2B}^1 \sim V_{so-2B}^0$. También los elementos de matriz correspondientes al potencial tensorial son proporcionales, $V_t^1 \sim V_t^0$. Esto nos permitió escribirlos en una sola columna en la tabla 5.1 ya que solo difieren en los valores numéricos de las integrales espaciales P_{2B}^1 y P_{2B}^0 en el caso de la interacción spin-órbita y de D^1 y D^0 en el caso de la interacción tensorial.

Los resultados obtenidos con este modelo dan una información limitada sobre el espectro bariónico de los estados considerados. Se pueden obtener muchos resultados interesantes si se hace una conexión de estos resultados utilizando una base de operadores de *large* N_c .

Vimos en el capítulo 4 que se pueden obtener la matriz de masa para bariones excitados con $L = 1$, de manera alternativa, a partir de una combinación lineal de los 18 operadores *CCGL* de spin-sabor [27] que se muestran en la tabla 4.3. Vimos que estos operadores fueron originalmente obtenidos para realizar un análisis en términos de la expansión en $1/N_c$ pero, como se mostrará en este capítulo, también son útiles a $N_c = 3$ fijo ya que proporcionan una base sobrecompleta para la matriz de masa de los estados bariónicos físicos.

Para realizar la conexión (*matching*) entre los resultados del modelo de quarks y la expansión en $1/N_c$, es útil agrupar a los operadores *CCGL* según cómo operan sobre la parte espacial, es decir, según su valor de ℓ ya que el potencial del modelo de quarks que consideramos está dado por una suma de V_{ss} , V_{so} y V_t que sabemos que tienen $\ell = 0, 1, 2$ respectivamente. De este modo, el operador de masa que se obtiene en el marco de una expansión en $1/N_c$ se puede escribir como

$$M = \sum_{i=1}^{18} c_i O_i = O_{\ell=0} + O_{\ell=1} + O_{\ell=2}. \quad (5.13)$$

Según la definición de los operadores dada por las ecuaciones de la tabla 4.3 cada uno de estos términos se pueden escribir como

$$O_{\ell=0} = \sum_{i=1,6,7,11,16} c_i O_i, \quad (5.14)$$

$$O_{\ell=1} = \sum_{i=2,4,5,9,10,13,14,15} c_i O_i, \quad (5.15)$$

$$O_{\ell=2} = \sum_{i=3,8,12,17,18} c_i O_i. \quad (5.16)$$

Los coeficientes c_i son parámetros que usualmente se determinan haciendo un ajuste a datos experimentales. Los elementos de matriz de los operadores *CCGL* se muestran explícitamente en el apéndice B. Eligiendo $N_c = 3$ se obtienen valores para las

matrices de masa de los operadores $O_{\ell=0,1,2}$ que se expresan como combinación lineal de coeficientes c_i . Observamos que estos elementos de matriz responden a la estructura general que se muestra en la tabla 5.2. Es decir que, los elementos de matriz correspondientes a operadores con $\ell = 0$ pueden ser parametrizados por tres parámetros $S_{1,2,3}$. En el caso de $\ell = 1$ se pueden parametrizar por cuatro parámetros $P_{1,2,3,4}$ y para $\ell = 2$ por dos parámetros $D_{1,2}$. Las relaciones entre los coeficientes c_i y los parámetros S, P, D se presentan en las ecuaciones (C.1-C.9) del apéndice C.

	$O_{\ell=0}$	$O_{\ell=1}$	$O_{\ell=2}$
${}^2N_{1/2}$	S_1	$-2P_1$	0
${}^4N_{1/2}$	S_2	$5P_2$	$5D_1$
${}^2N_{1/2} - {}^4N_{1/2}$	0	P_3	$-5D_2$
${}^2N_{3/2}$	S_1	P_1	0
${}^4N_{3/2}$	S_2	$2P_2$	$-4D_1$
${}^2N_{3/2} - {}^4N_{3/2}$	0	$\sqrt{\frac{5}{2}}P_3$	$\sqrt{\frac{5}{2}}D_2$
${}^4N_{5/2}$	S_2	$-3P_2$	D_1
${}^2\Delta_{1/2}$	S_3	$-2P_4$	0
${}^2\Delta_{3/2}$	S_3	P_4	0

Tabla 5.2: Estructura general de las matrices de masa con $\ell = 0, 1$ y 2 expresadas en términos de los operadores CCGL que aparecen en la expansión en $1/N_c$.

Ahora bien, se tienen 18 operadores independientes y el **70**-plete bariónico sin extrañeza requiere de siete masas y dos ángulos de mezcla para describir el espectro. Esto significa que los elementos de matriz de al menos 9 de los 18 operadores son necesariamente linealmente dependientes (como ya mencionamos al final de la sección 4.5). Esto implica que existen relaciones entre estos operadores *CCGL* si nos restringimos al espacio nueve-dimensional de las masas físicas y los ángulos de mezcla. Las nueve relaciones entre los operadores *CCGL* están dadas en el apéndice D con las que se observa que se pueden elegir los primeros nueve operadores $O_{1,\dots,9}$ como una base para calcular las masas de los bariones no extraños del multiplete [**70**, 1^-].

Para relacionar los resultados del modelo de quarks con lo obtenido con la base de operadores *CCGL* comparamos la tabla 5.2 y la tabla 5.1. Los valores obtenidos con

cada uno de los métodos se relacionan según

$$S_1 = m_0 + S^0 + S^1, \quad (5.17)$$

$$S_2 = m_0 - S^0 + S'^1, \quad (5.18)$$

$$S_3 = m_0 + S'^0 + S'^1, \quad (5.19)$$

$$P_1 = -P_{2B}^0 - P_{2B}^1 + 2P_{3B}^1, \quad (5.20)$$

$$P_2 = P_{2B}^0 + P_{2B}^1, \quad (5.21)$$

$$P_3 = P_{2B}^0 + P_{2B}^1 + P_{3B}^0 + P_{3B}^1, \quad (5.22)$$

$$P_4 = P_{3B}^0 - P_{3B}^1, \quad (5.23)$$

$$D_1 = D^0 + D^1, \quad (5.24)$$

$$D_2 = -D^0 - D^1. \quad (5.25)$$

Las ecuaciones (5.17)–(5.25), junto con las ecuaciones que relacionan los c_i con los S_i , P_i y D_i (C.1)–(C.9) y las expresiones para $S^{0,1}$, $S'^{0,1}$, $P^{0,1}$ y $D^{0,1}$ dadas por las ecuaciones (5.6) y (5.7), constituyen el *matching* analítico completo del modelo de quarks genérico definido por las ecuaciones (3.60)–(3.63) a la expansión de operadores de spin-sabor efectiva utilizada en los análisis de $1/N_c$ para bariones excitados.

Cabe destacar que calculando los elementos de matriz utilizando $O_{1,\dots,9}$ como base de nueve operadores independientes podemos hallar los valores de $c_{1,\dots,9}$ en función de las masas físicas y de los ángulos de mezcla. Las expresiones explícitas obtenidas se presentan en el apéndice E.

Tomando una versión simple del modelo de quarks como lo es el modelo IK se pueden chequear las expresiones halladas que se describieron en esta sección, este análisis se presenta en el apéndice F.

Tanto para el caso del modelo *OGE+OME* como para los casos más particulares que tienen interacciones solo de tipo *OGE* o solo de tipo *OME* existen restricciones sobre estos nueve operadores que implican a relaciones entre los ángulos de mezcla y las masas físicas que son independientes de los parámetros y se discutirán en la próxima sección.

5.3 Relaciones entre las masas y ángulos de mezcla

A partir de los resultados de la sección anterior se pueden obtener las relaciones entre las masas y los ángulos de mezcla en el caso general y en los casos más particulares que llamamos *OGE* y *OME*. Esto se presenta a continuación.

La parametrización general de la matriz de masa que se mostró en la tabla 5.2 involucra nueve parámetros: tres para la parte escalar, cuatros para la parte vectorial y dos para la parte tensorial de la interacción. Estos nueve parámetros se pueden resolver en términos de las masas físicas y de los ángulos de mezcla, lo que permite estudiar su dependencia con los ángulos de mezcla, este análisis se presentará en la sección 5.4.

Sin embargo, para el modelo de quarks más general $OGE+OME$ las once constantes que determinan todos los elementos de la matriz en la tabla 5.1 aparecen sólo como siete combinaciones independientes como se puede ver explícitamente de las ecuaciones (5.17)–(5.25) (y también de las relaciones dadas por las ecuaciones (5.26) y (5.29) que serán discutidas más adelante). Esto implica que deben existir dos relaciones entre las masas y los ángulos independientes de los parámetros.

Las relaciones obtenidas con el *matching* (específicamente las ecuaciones (5.17)–(5.25)) implican que los elementos de matriz de espín-orbita del modelo $OGE+OME$ satisfacen

$$P_1 + 2P_2 - P_3 + P_4 = 0. \quad (5.26)$$

Como los $P_{1,\dots,4}$ se relacionan con los c_i (ecuaciones (C.19)–(C.28)) que pueden expresarse en función de las masas de los estados físicos y los ángulos de mezcla (ver apéndice E), de esta ecuación se desprende la primera relación entre las masas y los ángulos de mezcla que llamaremos $R1$

$$\begin{aligned} R1: \quad & \frac{1}{2}(N_{1/2} - N'_{1/2})(3 \cos 2\theta_1 + \sin 2\theta_1) + (N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(-\frac{3}{5} \cos 2\theta_3 + \sqrt{\frac{5}{2}} \sin 2\theta_3 \right) \\ & = -\frac{1}{2}(N_{1/2} + N'_{1/2}) + \frac{7}{5}(N_{3/2} + N'_{3/2}) - \frac{9}{5}N_{5/2} - 2\Delta_{1/2} + 2\Delta_{3/2}, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde N_J, N'_J, Δ_J refieren a las masas físicas ¹.

Es interesante notar que la relación $R1$ se cumple para el modelo de quarks más general con interacciones de dos cuerpos, fue obtenida por primera vez en [62] (ver ecuación (5) de esta referencia). Esta misma relación se obtiene en una expansión de $1/N_c$ conservando todos los operadores $CCGL$ hasta orden $1/N_c$ y usando $N_c = 3$ para evaluar los elementos de matriz.

Por otro lado, si se expanden los elementos de matriz en un análisis en $1/N_c$ dejando de lado las correcciones de orden $1/N_c^2$ se obtiene la relación $R1'$ dada por [60, 63]

$$\begin{aligned} R1': \quad & (N_{1/2} - N'_{1/2})(13 \cos 2\theta_1 + 4\sqrt{2} \sin 2\theta_1) - 4(N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(\cos 2\theta_3 - 2\sqrt{5} \sin 2\theta_3 \right) \\ & = -3(N_{1/2} + N'_{1/2}) + 12(N_{3/2} + N'_{3/2}) - 18N_{5/2} - 24\Delta_{1/2} + 24\Delta_{3/2}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usando los valores experimentales para las masas de los bariones N y Δ que se muestran en la tabla 5.3 se pueden graficar las relaciones $R1$ y $R1'$ en el plano definido por los dos ángulos de mezcla. Las correlaciones entre los ángulos dadas por $R1$ y $R1'$ se muestran en el gráfico de la figura 5.1. Es interesante notar que, a pesar de que las expresiones analíticas $R1$ y $R1'$ parecieran muy diferentes, del gráfico recién mencionado vemos

¹Esta notación para los estados físicos se utiliza en este capítulo por simplicidad pero no es utilizada en el resto de la tesis.

que numéricamente la correlación de los ángulos al considerar $N_c = 3$ es muy similar. Esto indica que las correcciones de orden $1/N_c^2$ son chicas.

La segunda restricción que se desprende del *matching* en el caso general *OGE+OME* está dada por

$$D_1 + D_2 = 0. \quad (5.29)$$

Esta ecuación lleva a la segunda relación entre las masas y los ángulos de mezcla

$$\begin{aligned} R2: \quad & 5(N_{1/2} - N'_{1/2})(\cos 2\theta_1 + 2 \sin 2\theta_1) - 4(N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(2 \cos 2\theta_3 + \sqrt{\frac{5}{2}} \sin 2\theta_3 \right) \\ & = 5(N_{1/2} + N'_{1/2}) - 8(N_{3/2} + N'_{3/2}) + 6N_{5/2}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Las dos relaciones *R1* y *R2* aparecen graficadas como una línea llena y una línea discontinua en el panel izquierdo de la figura 5.2 donde nuevamente se usaron los valores centrales para las masas experimentales que de la tabla 5.3. Cada relación da lugar a correlaciones distintas entre los dos ángulos de mezcla (θ_1, θ_3). Sus intersecciones dan dos soluciones posibles para los ángulos de mezcla, que llamaremos sol-A = $(0.80 \pm 0.32, 0.01 \pm 0.21)$ y sol-B = $(-0.04 \pm 0.68, -0.23 \pm 0.17)$ y aparecen en el gráfico como un punto y un círculo respectivamente. Los errores se obtuvieron mediante la propagación de errores sobre los valores experimentales de las masas indicados en la tabla 5.3. Es interesante comparar estas soluciones con los ángulos de mezcla que resultan de hacer un ajuste global de los coeficientes de la expansión en $1/N_c$, en ese caso se obtienen los ángulos $(\theta_1, \theta_3) = (0.49 \pm 0.29, -0.13 \pm 0.17)$ [63]. Los valores para los ángulos del ajuste global se incluyeron como un punto más chico en el gráfico del panel izquierdo de la figura 5.2.

	$N_{1/2}(1535)$	$N'_{1/2}(1650)$	$N_{3/2}(1520)$	$N'_{3/2}(1700)$	$N_{5/2}(1675)$	$\Delta_{1/2}(1620)$	$\Delta_{3/2}(1700)$
PDG(2014)	1535 ± 10	1658 ± 13	1515 ± 5	1700 ± 50	1675 ± 5	1630 ± 30	1710 ± 40
<i>OGE</i>	1533 ± 37	1659 ± 43	1516 ± 36	1717 ± 19	1675 ± 16	1627 ± 39	1716 ± 30
<i>OME</i>	1535 ± 26	1659 ± 23	1515 ± 19	1693 ± 17	1675 ± 19	1637 ± 18	1683 ± 15

Tabla 5.3: Los valores experimentales que se muestran en la primera línea fueron extraídos de la ref. [2]. El espectro de masa obtenido de los ajustes realizados con las interacciones *OGE* y *OME*, como se describe en la sección 5.4 se muestra en las dos últimas líneas. Todas las masas están dadas en MeV.

Al considerar las incertezas sobre las masas, las curvas pasan a ser bandas como se muestra en el gráfico del panel derecho de la figura 5.2. Los gráficos de dispersión fueron obtenidos utilizando el lenguaje FORTRAN asumiendo una distribución gaussiana alrededor de los valores experimentales centrales para las masas y teniendo en cuenta las incertezas de la tabla 5.3. Los rectángulos corresponden a las soluciones sol-A y sol-B y a la solución del ajuste global con sus correspondientes barras de error dados en la tabla 5.4. Al considerar los errores en la determinación de las masas experimentales se puede ver que aparece una tercera solución en la región superior izquierda del gráfico

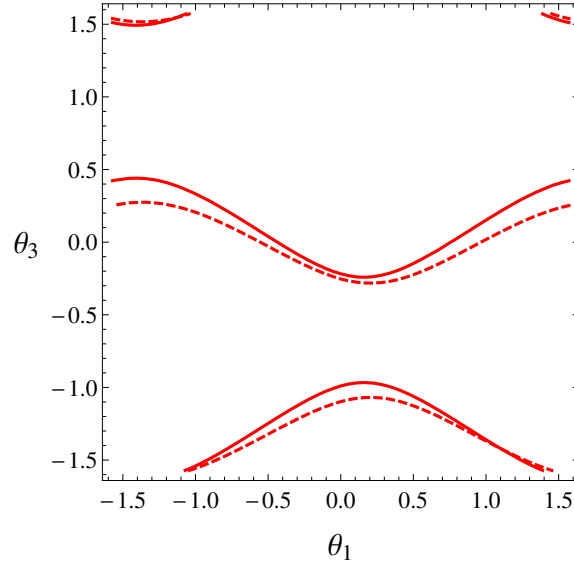


Figura 5.1: En línea llena se muestran las correlaciones entre ángulos obtenidas al imponer la relación de masas $R1$, ecuación (5.27). La línea punteada corresponde a la relación $R1'$, ecuación (5.28), que difiere de $R1$ en correcciones de orden $1/N_c^2$.

que corresponde a sol-C $\approx (-1.14, 1.50)$. Sin embargo, contrariamente a los que sucede con las soluciones sol-A y sol-B, los valores de sol-C para los ángulos de mezcla quedan excluidos por el ajuste global de la referencia [63] que incluye información sobre decaimientos bariónicos. Por lo tanto, esta solución no se consideró en nuestros análisis posteriores.

	sol-A	sol-B	OGE	OME
θ_1	0.80 ± 0.32	-0.04 ± 0.68	-0.04 ± 0.19	0.78 ± 0.28
θ_3	0.01 ± 0.21	-0.23 ± 0.17	-0.29 ± 0.17	0.11 ± 0.13

Tabla 5.4: Ángulos de mezcla (en radianes) para las dos soluciones (sol-A y sol-B) que se obtienen considerando el modelo con una interacción general del tipo $OGE+OME$ y para modelos con interacciones del tipo OGE y OME .

Ahora bien, ya mencionamos que si consideramos modelos de quarks menos generales surgen restricciones adicionales. Si consideramos el caso de un modelo sólo con interacciones del tipo OGE los parámetros con supraíndice 1 en las ecuaciones (5.17)–(5.25) se anulan por lo tanto aparece una relación adicional entre los elementos de matriz dada por

$$P_1 + P_2 = 0, \quad (5.31)$$

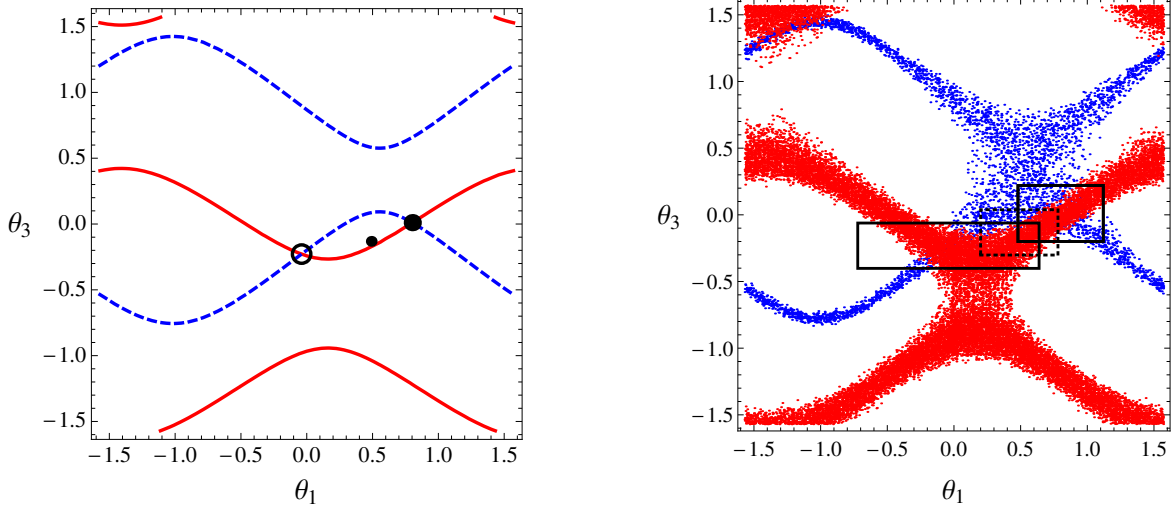


Figura 5.2: Ángulos de mezcla que cumplen con las relaciones $R1$ y $R2$, dadas por las ecuaciones (5.27) y (5.30). Panel izquierdo: Las curvas fueron obtenidas utilizando los valores centrales de las masas experimentales e indican la relación entre los ángulos θ_1 y θ_3 . La intersección indicada con un punto corresponde a sol-A = (0.80, 0.01), mientras que el círculo indica la sol-B = (-0.04, -0.23), indicado con un círculo. El punto más chico entre estas dos soluciones corresponde al ajuste global de los ángulos realizado en [63]. Panel derecho: diagrama de dispersión obtenido al incluir los errores experimentales sobre las masas bariónicas. Los rectángulos corresponden a las soluciones sol-A, sol-B y al ajuste global (en línea discontinua) de acuerdo con la tabla 5.4.

que implica una relación entre las masas y los ángulos de mezcla que puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 R3: \quad & -25(N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 + 16(N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 \\
 & = 15(N_{1/2} + N'_{1/2}) - 24(N_{3/2} + N'_{3/2}) + 18N_{5/2} .
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Es decir que en el caso OGE deben cumplirse simultáneamente las relaciones $R1$, $R2$ y $R3$. Los ángulos de mezcla que resultan de estas restricciones se muestran graficadas en la figura 5.3 junto con su correspondiente gráfico de dispersión. Se puede ver que estas relaciones combinadas excluyen a la solución sol-A.

Consideremos ahora el caso OME . Además de las ecuaciones (5.26) y (5.29) que se cumplen en el caso general $OGE+OME$, se obtienen dos relaciones adicionales, una para la parte escalar y otra para la parte vectorial de la interacción dadas por

$$S_2 - S_3 = 0, \tag{5.33}$$

$$P_1 + P_2 + 2P_4 = 0. \tag{5.34}$$

Estas restricciones dan lugar a las relaciones que llamaremos $R4$ y $R5$ respectivamente y están dadas por

$$\begin{aligned} R4: & \quad - (N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 - 2(N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 \\ & = -(N_{1/2} + N'_{1/2}) - 2(N_{3/2} + N'_{3/2}) - 6N_{5/2} + 4\Delta_{1/2} + 8\Delta_{3/2}, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} R5: & \quad - 25(N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 + 16(N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 \\ & = 15(N_{1/2} + N'_{1/2}) - 24(N_{3/2} + N'_{3/2}) + 18N_{5/2} + 80\Delta_{1/2} - 80\Delta_{3/2}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

En la figura 5.4 aparecen graficadas simultáneamente las relaciones $R1$, $R2$, $R4$ y $R5$ con el gráfico de dispersión correspondiente.

Es interesante notar que la relación $R4$ que se cumple para el caso OME , también se obtiene si se considera el caso general de una interacción $OGE+OME$ en la que la parte de spin-spin se puede describir como una función espacial delta de Dirac de cero alcance (con esta consideración este término coincide con el término de la interacción spin-spin en el modelo IK). En este caso en el que se tiene una interacción spin-spin de contacto, es fácil ver que la integral $I_4^{0,1}$ se anula, lo que implica $S^0 = -S'^0$. Esto se traduce en la relación $S_2 = S_3$, que corresponde a la ecuación (5.33). Es decir que $R4$ debe cumplirse también para este caso más general en el que la interacción es del tipo $OGE+OME$. El área central de color naranja en el gráfico de dispersión de la figura 5.4 corresponde a la región en la que $R4$ se cumple teniendo en cuenta los errores experimentales. El área en el plano de los ángulos de mezcla definida por la restricción $R4$ se superpone con los rectángulos que corresponden a las soluciones sol-A y sol-B y los valores del ajuste global la figura 5.2, todas estas soluciones son compatibles con un modelo con una interacción spin-spin de corto alcance independiente del sabor.

Finalmente, si definimos la precisión (en %) como

$$100 \times |LHS - RHS| / (LHS + RHS), \quad (5.37)$$

donde LHS (RHS) corresponde a los términos a la izquierda (derecha) de la ecuación $LHS = RHS$, correspondiente a cada una de las cinco ecuaciones $R1, \dots, R5$, podemos estimar el grado en el que se cumplen estas relaciones. Para evitar cancelaciones, las ecuaciones $LHS = RHS$ asociadas a las relaciones $R1, \dots, R5$ se obtienen reordenando los términos de cada relación de modo tal que, al evaluar las masas y los ángulos, los valores de todos los términos dentro de LHS , RHS sean positivos. Un valor para la precisión de menos del 1% indica que la relación se cumple para valores típicos para las masas y los *splittings*.

Las precisiones de $R1, \dots, R5$ para cada una de las soluciones para los ángulos de mezcla halladas se muestran en la tabla 5.5. Se puede ver que las relaciones $R1$ y $R2$ se satisfacen para las tres soluciones obtenidas. La relación $R3$, que corresponde al caso OGE , se cumple mejor en el caso de las soluciones sol-B y sol-C, mientras que las relaciones del caso OME ($R4$ y $R5$) se muestran más compatibles con la sol-A. Es interesante notar que, contrariamente a $R5$, la relación $R4$ se satisface bien tanto para

la sol-A como para la sol-B. Como ya mencionamos antes $R4$ también corresponde a un modelo general de tipo $OGE+OME$ con una interacción spin-spin de corto alcance.

	(θ_1, θ_3)	$R1$	$R2$	$R3$ (OGE)	$R4$ (OME)	$R5$ (OME)
sol-A	(0.80, 0.01)	0.00	0.00	1.89	0.35	0.52
sol-B	(-0.04, -0.23)	0.00	0.00	0.17	0.15	1.08
sol-C	(-1.14, 1.50)	0.15	0.23	0.01	2.01	1.22

Tabla 5.5: precisión (en %) de las relaciones entre las masas $R1, \dots, R5$.

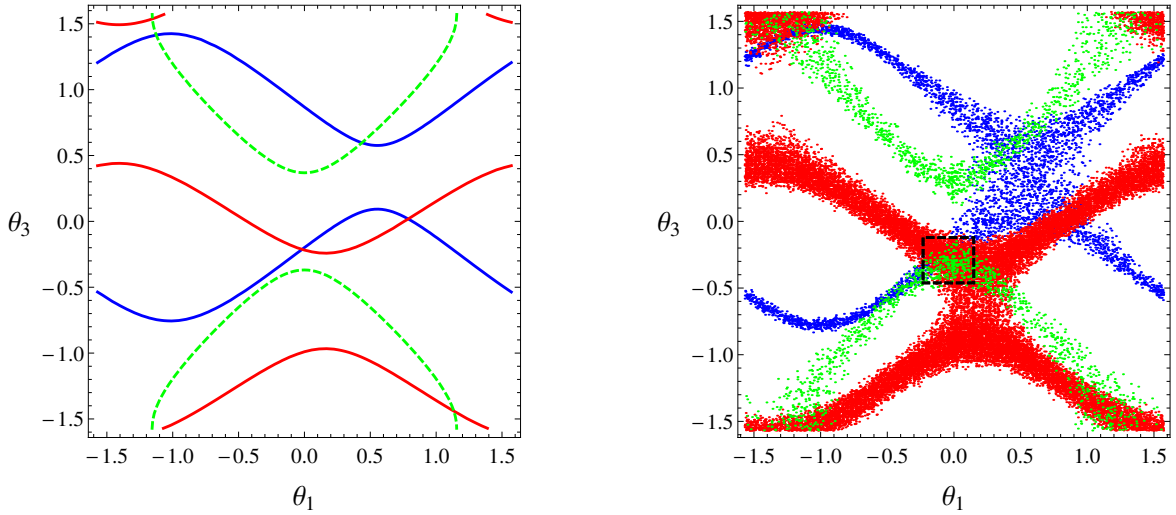


Figura 5.3: Ángulos de mezcla para el caso OGE dados por la relación $R3$, ecuación (5.32) (línea punteada verde) y los ángulos de mezcla correspondientes a las correlaciones $R1$, ecuación (5.27) (en rojo) y $R2$, ecuación (5.30) (en azul) del caso general $OGE+OME$. En el panel izquierdo se usaron los valores centrales de las masas experimentales mientras que en el gráfico del panel derecho se muestran los diagramas de dispersión obtenidos al considerar los errores experimentales dados en la tabla 5.4.

5.4 Ángulos de mezcla y ajustes a los datos experimentales

En esta sección estudiaremos los ajustes de las matrices de masa para bariones excitados con $L = 1$ y los valores obtenidos para los ángulos de mezcla.

Como se mostró en la sección 5.3, obtuvimos dos relaciones entre las masas y los ángulos de mezcla $R1$ y $R2$ para el caso de una interacción general del tipo $OGE+OME$

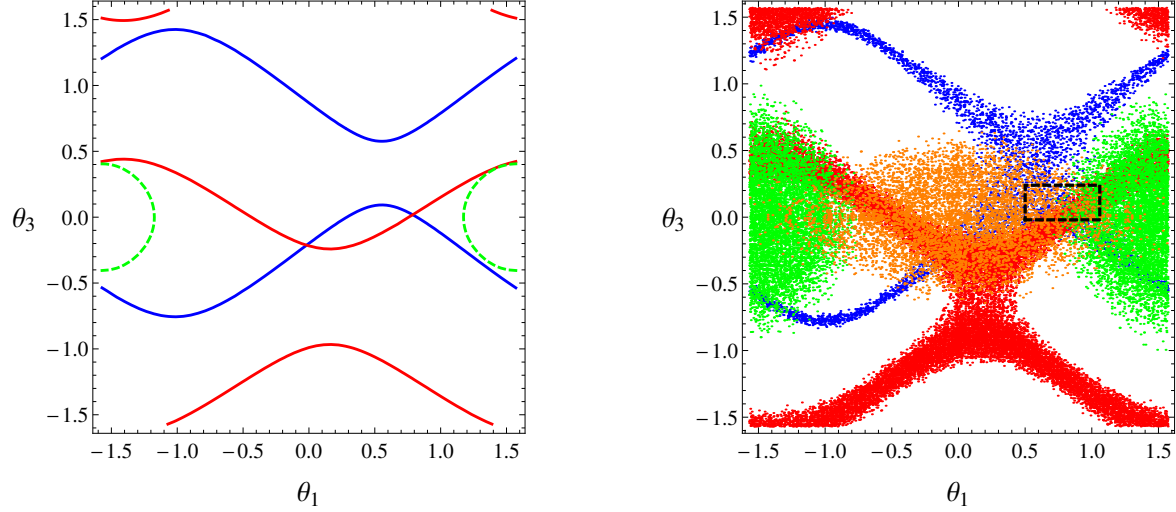


Figura 5.4: Ángulos de mezcla para el caso *OME* dados por la relación *R4*, ecuación (5.35) (en naranja) y por la relación *R5*, ecuación (5.36) (en verde) y los ángulos de mezcla correspondientes a las correlaciones *R1*, ecuación (5.27) (en rojo) *R2*, ecuación (5.30) (en azul) del caso general *OGE+OME*. En el panel izquierdo se usaron los valores centrales de las masas experimentales. *R4* no aparece en este gráfico ya que esta relación no se cumple para los valores centrales. En el gráfico del panel derecho se muestran los diagramas de dispersión obtenidos al considerar los errores experimentales dados en la tabla 5.4.

dada por las ecuaciones (3.61), (3.62) y (3.63). Estas relaciones provienen de las dos restricciones dadas por las ecuaciones (5.26) y (5.29) dejando sólo siete parámetros libres que se pueden ajustar a las siete masas y los dos ángulos de mezcla obtenidos en la sección anterior que llamamos sol-A y sol-B. En el caso de un modelo más restrictivo, vimos que, además de las relaciones *R1* y *R2*, aparecen condiciones adicionales que deberán cumplirse. En el caso *OGE* la relación adicional está dada por la ecuación (5.31) (que corresponde a la relación *R3*), lo que permite hacer un ajuste de los seis parámetros libres a los valores empíricos de las siete masas bariónicas. En el caso *OME* aparecen dos relaciones adicionales que se muestran en las ecuaciones (5.33) y (5.34) (asociadas con *R4* y *R5*), dejando sólo cinco parámetros libres para ajustar a los datos experimentales. Los ángulos del ajuste serán los obtenidos al diagonalizar las matrices de masa correspondientes en ambos casos. Estimaremos los errores de los ángulos de mezcla obtenidos por propagación de errores teniendo en cuenta las expresiones para las matrices de cambio de base dadas por la ecuación (5.11).

Antes de discutir los resultados del ajuste, es conveniente redefinir los parámetros de la parte escalar de la interacción como

$$S_1 = S_0 - \Delta S_{12}, \quad S_2 = S_0 + \Delta S_{12}, \quad S_3 = S_0 + \Delta S_3. \quad (5.38)$$

De esta manera S_0 es la contribución del operador unidad independiente del espín y queda separada explícitamente. Esta contribución está asociada a la masa promedio del multiplete, corresponde a escalas de energía mucho mayores a las diferencias de masas y no contribuye a los *splittings*.

Los resultados de los ajustes de los modelos $OGE+OME$, OGE y OME a los datos experimentales se presentan en la tabla 5.6. Los valores de estos parámetros se obtuvieron teniendo en cuenta los datos experimentales minimizando la función χ^2 que cuantifica la bondad del ajuste a los datos para un dado conjunto de parámetros. Para ajustarlos utilizamos el programa MINUIT [64] implementado en lenguaje de programación FORTRAN que minimiza el χ^2 en forma iterativa. En la tabla se muestra el valor de χ^2 por grado de libertad, indicado como χ_{dof}^2 . En esta tabla los números en itálica corresponden a los parámetros que no fueron ajustados sino que se determinaron a partir de las relaciones que permiten expresarlos en función de los parámetros libres en cada caso.

	S_0	ΔS_{12}	ΔS_3	P_1	P_2	P_3	P_4	D_1	D_2	χ_{dof}^2
sol-A	1606 ± 5	65 ± 11	77 ± 27	-28 ± 9	-5 ± 4	-11 ± 18	27 ± 14	-10 ± 3	10 ± 3	0.00
sol-B	1603 ± 9	75 ± 8	81 ± 28	-3.6 ± 5	-0.4 ± 3.2	23 ± 14	27 ± 12	-4 ± 6	4 ± 6	0.00
<i>OGE</i>	1607 ± 6	74 ± 9	80 ± 28	-0.4 ± 3	0.4 ± 3	30 ± 17	30 ± 14	-5 ± 4	5 ± 4	0.22
<i>OME</i>	1605 ± 4	63 ± 12	63 ± 12	-26 ± 16	-5 ± 4	-20 ± 10	15 ± 6	-8 ± 2	8 ± 2	0.53

Tabla 5.6: Los ajustes obtenidos con las soluciones del modelo general sol-A y sol-B tienen siete parámetros libres. Los ajustes con los valores dados por los modelos OGE y OME tiene seis y cinco parámetros libres respectivamente. Los valores numéricos en itálica indican qué parámetros no han sido ajustados sino que fueron obtenidos a partir de las relaciones de los modelos. Todos los valores están dados en MeV.

Considerando estas suposiciones generales sobre la forma de la interacción quark-quark, al realizar los ajustes se obtienen valores típicos de 80 MeV, 30 MeV y 10 MeV para las componentes del operador de masa con $\ell = 0, 1, 2$ respectivamente y una masa promedio de $S_0 \approx 1600$ MeV. Las predicciones para el espectro bariónico obtenidas con un modelo OGE y las correspondientes a un modelo OME se muestran en la tabla 5.3 donde se puede observar que coinciden con los valores experimentales. Ambos modelos admiten un ajuste que incluye los datos observados sin que haya una tensión perceptible entre los parámetros.

Todos los ángulos de mezcla obtenidos que aparecen en la tabla 5.4 se muestran resumidos en un gráfico en la figura 5.5 donde además se incluyen los valores del ajuste global de [63] ya mencionado con la etiqueta GG_S , en este análisis global se utilizó la expansión en $1/N_c$ y contiene datos sobre decaimientos fuertes y electromagnéticos. Vemos que las dos soluciones generales sol-A y sol-B se pueden asociar a dos tipos de interacciones quark-quark distintas que llamamos OGE y OME . Teniendo en cuenta los errores experimentales, el ajuste global a los ángulos de mezcla no permite distinguir entre estas dos posibilidades.

Las dos soluciones sol-A y sol-B difieren en características de sus interacciones tensorial y de spin-órbita. En la figura 5.6 se muestra cómo la parametrización con

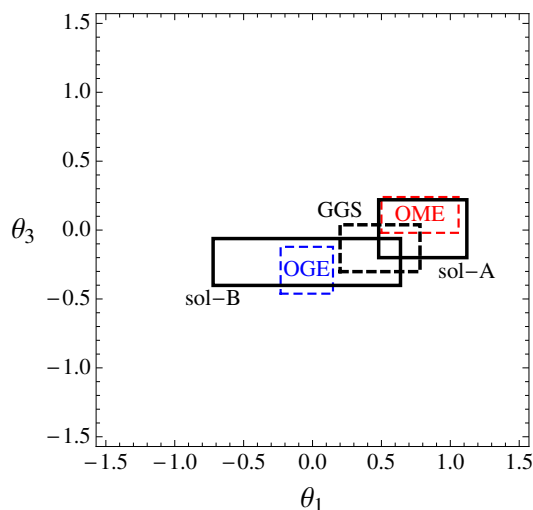


Figura 5.5: Ángulos de mezcla para las soluciones del caso general sol-A y sol-B, y para las soluciones obtenidas con los modelos *OME* y *OGE*. Los valores graficados se muestran también en la tabla 5.4. Se incluye también la solución *GGS* del ajuste global [63].

S , P y D de la matriz de masa depende de los ángulos de mezcla. En los gráficos de contorno se incluyeron la curva correspondiente a $R1$ (curva roja), las soluciones sol-A y sol-B como un punto un círculo respectivamente y los ángulos *GGS* como un punto más chico. Los gráficos de la figura 5.6 se puede ver que los parámetros S , P y D son funciones suaves de los ángulos, contrariamente a lo que sucede con los coeficientes c_i de la expansión de operadores en $1/N_c$ como se verá en la próxima sección. En particular, queda en evidencia que P_4 es independiente de los ángulos de mezcla. En el panel izquierdo de la figura 5.7 se gráfica la restricción sobre $D_1 + D_2$ dada por la ecuación (5.29), se puede ver que se trata de una función que varía lentamente con los ángulos. En el panel derecho aparece graficada la relación $\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ ya que permite visualizar la magnitud de la interacción tensorial. Podemos ver que la solución sol-B está cerca de una región con una componente tensorial chica, mientras que sol-A se aleja de esa región. En la figura 5.8 se muestra el gráfico de $\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2}$ donde se puede ver que tanto sol-A como sol-B tienen elementos de matriz correspondientes a la parte de spin-órbita de intensidades similares.

De los ajustes que obtuvimos en la tabla 5.6 se observa que $\Delta S_{12} \approx \Delta S_3$ (es decir, $S_2 \approx S_3$ y se cumple la relación *R4*), lo que sugiere una interacción de contacto en el término independiente del sabor como ya fue discutido en la sección 5.3. Esta conclusión es válida independientemente de la estructura de la interacción de spin-sabor.

Los valores obtenidos a partir del ajuste de los parámetros puede entenderse cualitativamente notando que existen combinaciones de masa particulares que son independientes de los ángulos de mezcla. Discutiremos este aspecto en lo que sigue.

Por otro lado, los parámetros P_4 y ΔS_3 están determinados por los *splittings* y por

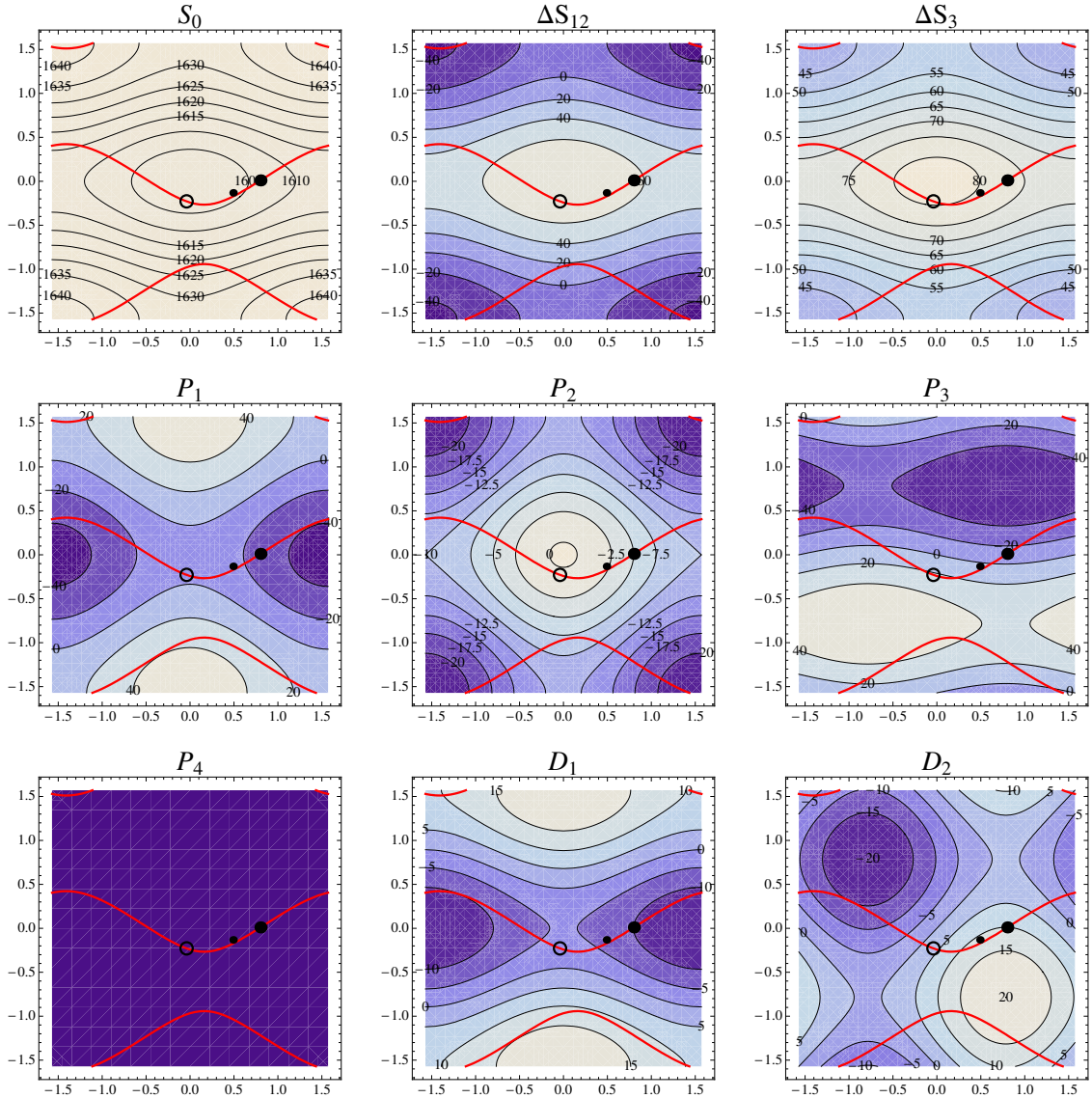


Figura 5.6: Elementos de matriz como función de los ángulos de mezcla (θ_1, θ_3). También se muestran los ángulos de mezcla para la solución sol-A (punto) y sol-B (círculo). El punto más chico en el medio corresponde a la solución *GGs* del ajuste global [63]. La curva en rojo corresponde a la correlación entre los ángulos dada por R_1 , ecuación (5.27).

el promedio ponderado por el espín de las masas de $\Delta_{3/2}$ y $\Delta_{1/2}$ de modo que

$$P_4 = \frac{\Delta_{3/2} - \Delta_{1/2}}{3}, \quad (5.39)$$

$$\Delta S_3 = \frac{2\Delta_{3/2} + \Delta_{1/2}}{3}, \quad (5.40)$$

lo que resulta en $P_4 \approx 27$ MeV y $\Delta S_3 = S_3 - S_0 \approx 78$ MeV usando los valores

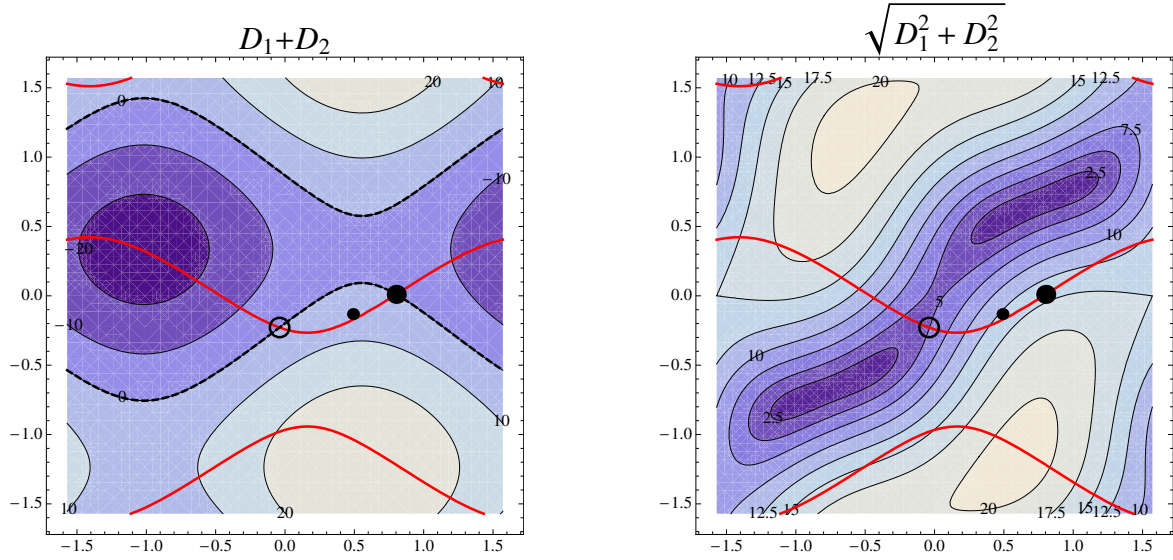


Figura 5.7: Vínculo $D_1 + D_2$ en el plano de ángulos de mezcla (izq.) y la magnitud de la interacción tensorial $\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$ (der.). La relación $R1$ y las soluciones sol-A, sol-B y GGS aparecen como en los gráficos de la figura 5.6.

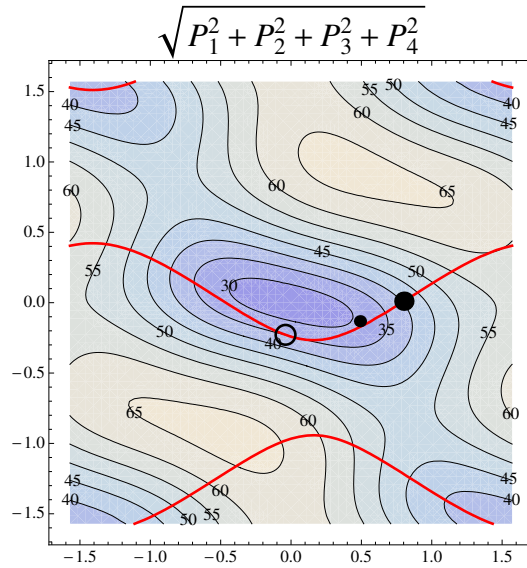


Figura 5.8: Magnitud de la interacción spin-órbita $\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2}$ en el plano de ángulos de mezcla. La relación $R1$ y las soluciones sol-A, sol-B y GGS aparecen como en los gráficos de la figura 5.6.

experimentales para las masas bariónicas que se muestran en la tabla 5.3.

Tomando la traza de la matriz de masa para $J = 1/2$ y $J = 3/2$ se obtiene una relación muy simple dada por

$$N_{1/2} + N'_{1/2} = N_{3/2} + N'_{3/2}, \quad (5.41)$$

que es independiente de los ángulos de mezcla y se satisface para los valores de masas observados como $3193 \pm 16 \text{ MeV} = 3220 \pm 50 \text{ MeV}$. Por lo tanto, es de esperar que esta relación sea válida también en el caso de los modelos a los que se le realizó el ajuste a los datos experimentales. En términos de los parámetros S , P y D esto implica que debe cumplirse

$$3D_1 = P_1 - P_2. \quad (5.42)$$

Esta restricción se satisface de distinta manera para cada uno de los ajustes realizado. En el caso de los ajustes sol-B y OGE, tanto P_1 como P_2 son chicos lo que resulta en un valor chico para el parámetro D_1 . Por otro lado, en los casos de sol-A y OME P_2 es chico pero P_1 es grande lo que implica un valor mayor para D_1 .

Otra relación empírica que se satisface bien es

$$N_{5/2} = \frac{2\Delta_{3/2} + \Delta_{1/2}}{3}, \quad (5.43)$$

ya que al considerar los valores observados resulta en $1675 \pm 5 \text{ MeV} = 1683 \pm 28 \text{ MeV}$. En términos de los parámetros para los elementos de matriz esta relación implica

$$S_2 - S_3 = 3P_2 - D_1. \quad (5.44)$$

Usando la relación $S_2 = S_3$, que se cumple dentro de los errores, para todos los ajustes realizados obtenemos una relación aproximada dada por $D_1 = 3P_2$ que explica el hecho de que el elemento de matriz de spin-órbita P_2 es chico en todos los casos correlacionándolo con los valores típicos hallados para los elementos de matriz tensoriales $D_{1,2}$.

5.5 Relación con la expansión en $1/N_c$

En esta sección traduciremos las relaciones sobre los elementos de matriz de la sección anterior para obtener restricciones sobre los coeficientes c_i y obtener una visión sobre su significado físico. De este modo podemos conectar la expansión en $1/N_c$ de QCD con los resultados de un modelo general de quarks.

Eliendo una base de nueve operadores independientes de la expansión en $1/N_c$ podemos expresar los elementos de matriz $S_{1,2,3}$, $P_{1,2,3,4}$, $D_{1,2}$ en términos de los coeficientes de operadores c_i ($i = 1, 9$). Las ecuaciones que relacionan estas dos parametrizaciones están dadas explícitamente en el apéndice C (ecuaciones (C.10)–(C.18)). En la figura 5.9 se muestran los gráficos de los nueve operadores $c_{1,\dots,9}$ que muestran sus dependencias con los ángulos de mezcla. Observamos que todos los coeficientes dependen de ambos ángulos y que los coeficientes c_3 y c_8 tienen las dependencias más pronunciadas y son muy sensibles a pequeños cambios en los valores de los ángulos. Esto no es lo que sucede con los parámetros S , P y D que se analizaron en la sección anterior donde se mostró que todos los elementos de matriz son funciones suaves que varían lentamente con los ángulos θ_1 y θ_3 (ver figura 5.6).

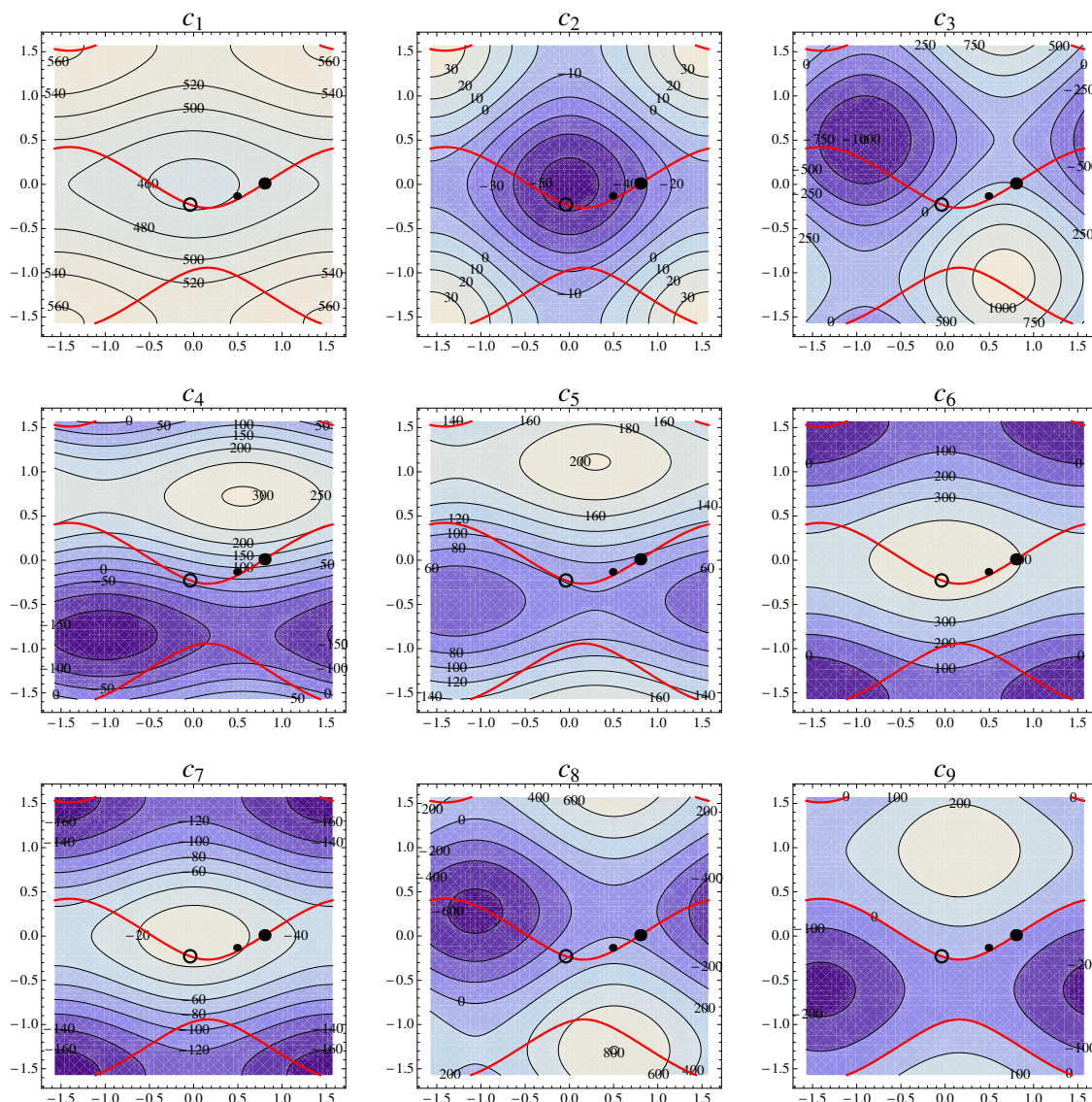


Figura 5.9: Coeficientes de los operadores como función de los ángulos de mezcla (θ_1, θ_3). También se muestran los ángulos de mezcla para la solución sol-A (punto) y sol-B (círculo). El punto más chico en el medio corresponde a la solución *GGS* del ajuste global [63]. La curva en rojo corresponde a la correlación entre los ángulos dada por *R1*, ecuación (5.27).

En la tabla 5.7 se presentan los valores que se obtienen para los coeficientes c_i correspondientes a cada uno de los casos discutidos, es decir, sol-A y sol-B y al caso de una interacción general del tipo *OGE+OME* y a los modelos más particulares *OGE* y *OME*. Los resultados se muestran junto con los resultados de otros dos análisis [60,63], que denotamos *FG* y *GGS* respectivamente. Los valores en *itálica* indican coeficientes que no han sido ajustados sino que fueron determinados mediante restricciones que se

discutirán a continuación.

	sol-A	sol-B	<i>OGE</i>	<i>OME</i>	FG	GGs
c_1	467 ± 10	458 ± 9	460 ± 9	472 ± 12	463 ± 2	497 ± 5
c_2	-33 ± 28	-52 ± 22	-61 ± 22	-10 ± 8	-36 ± 12	-24 ± 20
c_3	241 ± 76	85 ± 132	116 ± 104	200 ± 52	313 ± 69	96 ± 42
c_4	132 ± 48	16 ± 27	0	124 ± 41	65 ± 31	38 ± 39
c_5	95 ± 49	81 ± 42	88 ± 47	62 ± 29	71 ± 18	59 ± 37
c_6	408 ± 60	460 ± 50	456 ± 51	367 ± 75	443 ± 10	283 ± 36
c_7	-27 ± 64	-12 ± 65	-11 ± 65	0	-20 ± 31	4 ± 13
c_8	-60 ± 20	-21 ± 33	-29 ± 26	-50 ± 13	0	2 ± 7
c_9	0	0	0	0	0	0
θ_1	0.80 ± 0.32	-0.04 ± 0.68	-0.04 ± 0.19	0.78 ± 0.28	0.52 ± 0.13	0.49 ± 0.29
θ_3	0.01 ± 0.21	-0.23 ± 0.17	-0.29 ± 0.17	0.11 ± 0.13	-0.12 ± 0.09	-0.13 ± 0.17

Tabla 5.7: Ajustes para los coeficientes de la expansión en operadores (en MeV) y ángulos de mezcla (en radianes). Las últimas dos columnas muestran los resultados de las referencias [60, 63], respectivamente. Los números en itálica corresponden a los parámetros que no fueron ajustados sino que se determinaron a partir de las restricciones que se imponen en cada modelo.

En lo que sigue compararemos los valores de los coeficientes c_i obtenidos del análisis global *GGs* de la referencia [63], donde, recordamos que, se realizó un ajuste utilizando la expansión en $1/N_c$ y teniendo en cuenta además valores experimentales sobre decaimientos fuertes y electromagnéticos de los bariones.

La primera relación general, dada por la ecuación (5.26), corresponde a $c_9 = 0$ y ha sido utilizada como restricción en las referencias [60, 63] ya que corresponde a desprestigiar a las contribuciones del operador O_9 que es un operador de mayor orden en la expansión en $1/N_c$. La segunda relación general, ecuación (5.29), corresponde a $c_3 + 4c_8 = 0$. Para el caso del ajuste *GGs* esta relación se traduce en $104 \pm 50 \text{ MeV} = 0$ que, en principio, indica que la relación no se cumple. Sin embargo, la relación $D_1 + D_2$ en términos de c_i está dada por la ecuación (C.8) que en la base $O_{1\dots 9}$ se reduce a la relación $c_3 + 4c_8 = 144(D_1 + D_2)$. El factor numérico grande en esta ecuación hace que, para el caso *GGs*, esta relación dé como resultado $D_1 + D_2 = 0.7 \pm 0.3 \text{ MeV}$ lo que indica que la relación $D_1 + D_2 = 0$ se viola muy poco ya que es una función que varía lentamente con θ_1 y θ_3 (ver panel izquierdo de la figura 5.7).

Si restringimos la interacción general de tipo *OGE+OME* a un modelo con interacción de tipo *OGE* se debe cumplir la relación de la ecuación (5.31) que es equivalente a la restricción $c_4 = 0$, que se satisface dentro de los errores como $38 \pm 39 \text{ MeV} = 0$. En el caso *OME* vimos que se tienen dos relaciones. La primera relación está dada por la ecuación (5.33) e implica $c_7 = 0$ que también se satisface ya que se traduce en $4 \pm 13 \text{ MeV} = 0$. La segunda relación para el caso *OME* aparece en la ecuación (5.34) y se reduce a $9c_4 = -12c_2 + 16c_5$ que lleva a $342 \pm 351 \text{ MeV} = 1232 \pm 639 \text{ MeV}$ con lo que se ve que esta relación también se cumple para los valores de los coeficientes ajustados con el análisis global.

Vemos que, tanto las relaciones generales, como las relaciones de los modelos particulares *OGE* y *OME* son compatibles con los valores obtenidos para los coeficientes de la expansión en $1/N_c$ a partir del análisis global *GGG*. Esto es consistente con lo que fue observado para los ángulos de mezcla, como se discutió en la sección 5.4 y aparece resumido en la figura 5.5

Si consideramos la interacción general *OGE+OME* con una interacción de contacto independiente del sabor para la parte de spin-spin del potencial, entonces también se cumple $S_2 = S_3$ que implica $c_7 = 0$. Esta condición se satisface bien para todos los ajustes realizados lo que sugiere que la parte independiente del sabor del término hiperfino del potencial consiste en una interacción de corto alcance.

Finalmente, consideramos las restricciones dadas por las relaciones empíricas antes mencionadas definidas por ecuaciones (5.41) y (5.43). La relación entre las trazas de las matrices de masa dada por la ecuación (5.41) implica $3c_3 + 8c_5 = -12c_2 + 9c_4$ y se satisface ya que se traduce en $760 \pm 322 \text{ MeV} = 642 \pm 427$ para los valores de *GGG*. La relación entre $N_{5/2}$ y las Δ dada por la ecuación (5.43) resulta en $-3c_2 + \frac{1}{6}c_3 = 2c_5 + \frac{1}{3}c_8$ que también se satisface dentro de los errores como $88 \pm 60 \text{ MeV} = 119 \pm 74 \text{ MeV}$.

Todas estas correlaciones entre coeficientes de operadores no son evidentes cuando uno realiza un ajuste al espectro de masas a ciegas. El ajuste de un modelo de quarks general a los operadores efectivos de spin-sabor en una expansión en $1/N_c$ revela estas relaciones y aporta una visión sobre su significado dinámico.

5.6 Conclusiones

En este capítulo consideramos un modelo de quarks no-relativista muy general, definido por las ecuaciones (3.60)–(3.63), que incluye interacciones quark-quark tanto dependientes como independientes del sabor. Se mostró que con este modelo el espectro de masas observado para los bariones con $L = 1$ sin extrañeza establece fuertes restricciones sobre los dos ángulos de mezcla para los estados con $J = 1/2, 3/2$. Estas restricciones son independientes de la forma particular de las componentes correspondientes a las partes de spin-spin, spin-órbita y tensorial de la interacción quark-quark efectiva. Esto se manifiesta expresándolas como las soluciones (sol-A y sol-B) de las relaciones entre las masas empíricas y los ángulos de mezcla que llamamos *R1* y *R2* (ecuaciones (5.27) y (5.30)) y que son independientes de los parámetros.

Al restringir la forma de las interacciones a términos exclusivamente dependientes o exclusivamente independientes del sabor (*OGE* u *OME*), se siguen obteniendo cada una de las dos soluciones que se tienen en el caso general *OGE+OME*, dentro de una buena aproximación. En el caso *OGE* se obtiene una relación adicional *R3*, ecuación (5.32), que es compatible con sol-B, mientras que, en el caso *OME* se tienen dos relaciones independientes de los parámetros que llamamos *R4* y *R5* (ver ecuaciones (5.35) y (5.36) y son compatibles con la solución sol-A.

Sólo la primera de las dos relaciones *OGE+OME* (*R1*) había sido obtenida antes en [62] en donde se consideró la interacción más general de dos cuerpos. La correlación

entre los ángulos de mezcla que implica esta relación fue discutida en el análisis hecho dentro del marco de la expansión en $1/N_c$ en [56] y después en [60, 63] con la relación dada por $R1'$ (ecuación (5.28)) despreciando los operadores de orden $1/N_c^2$ asociados a fuerzas de tres cuerpos. Esta relación sola no es suficiente para determinar los ángulos de mezcla a partir del espectro de masas sin imponer restricciones adicionales.

En ajuste global de la referencia [63] se incluyeron restricciones adicionales de la expansión en $1/N_c$ y datos experimentales sobre los decaimientos que dan como resultado los ángulos de mezcla GGS que se utilizaron para comparar con las relaciones que se obtuvieron del ajuste al modelo de quarks general $OGE+OME$. Teniendo en cuenta los errores experimentales actuales no es posible excluir ninguna de las dos soluciones generales para los ángulos de mezcla, sol-A y sol-B, cada una de estas soluciones se aproxima a las soluciones de los modelos más restrictivos OME y OGE respectivamente. Esto se resume en el gráfico de la figura 5.5.

Con el ajuste de la expansión de operadores en $1/N_c$ al modelo de quarks no-relativista se obtuvieron expresiones analíticas para todos los coeficientes de los operadores en términos de las integrales de la parte radial de la interacción, cuyas expresiones se dejaron sin especificar, en su forma general, dadas por la ecuaciones (5.7). La relación explícita entre esta parametrización de la matriz de masa y la base de $1/N_c$ utilizada en [60, 63] está dada por las ecuaciones (C.10)–(C.18) del apéndice C, estableciendo así, junto con las ecuaciones (5.6), (5.7) y (5.17)–(5.25), la correspondencia analítica con una extensa clase de modelos de interacción.

El hecho de mostrar explícitamente cómo un análisis de QCD basado en la expansión en $1/N_c$ está relacionado con un cálculo dentro de un modelo es muy útil para obtener una visión de la dinámica responsable por los valores de los coeficientes y de los ángulos de mezcla ajustados. Además, este análisis revela correlaciones entre los coeficientes que de otro modo pasan inadvertidos cuando se realiza un ajuste y los relaciona con las propiedades de la interacción efectiva quark-quark, como fue discutido en la sección 5.5.

Capítulo 6

Bariones excitados de paridad positiva en *large* N_c

6.1 Introducción

En este capítulo se presenta un análisis del espectro de bariones no extraños en el límite de $N_c \rightarrow \infty$ considerando la mezcla de configuraciones. Para esto, extendimos el análisis de *large* N_c para poder incluir mezclas de configuraciones y estudiamos los estados de paridad positiva pertenecientes a multipletes de $SU(6) \times O(3)$ contenidos en la banda $\mathcal{N} = 2$ [65].

Vimos que, en el caso de un modelo con un potencial armónico las bandas $\mathcal{N} = 0$ y $\mathcal{N} = 1$ tienen estados que pertenecen a un solo multiplete de $SU(6) \times O(3)$ dados por $[56, 0^+]$ y $[70, 1^-]$ respectivamente. El caso de la banda $\mathcal{N} = 2$ es más complejo en el sentido en que tiene estados que pertenecen a cinco multipletes degenerados con distintas simetrías de spin-sabor dados por $[56', 0^+]$, $[56, 2^+]$, $[70, 0^+]$, $[70, 2^+]$ y $[20, 1^+]$. En el marco de los modelos de quarks, esta degeneración de los multipletes se puede romper al considerar interacciones hiperfinas. En *large* N_c QCD , en vez de la simetría de spin-sabor $SU(6)$ se tiene la simetría contraída $SU(6)_c$, es decir que en un análisis en este límite, los estados no se ordenan en multipletes de $SU(6)$ sino que la estructura que respetan se debe a la simetría contraída, esta estructura se identifica con el número K de modo que para cada valor $K = 0, 1, 2, \dots$ existen infinitos estados con spin e isospin creciente (torres). Entonces, si se consideran multipletes de $SU(6)$ en *large* N_c se espera que éstos se mezclen entre sí, es decir que haya mezcla de configuraciones, siempre que pertenezcan a la misma torre de *large* N_c .

Como se mencionó en la introducción de esta tesis, los multipletes correspondientes a la banda $\mathcal{N} = 2$, han sido estudiados en el marco de la expansión en $1/N_c$ de QCD [37–39], sin embargo en ninguno de estos trabajos se consideró la mezcla de configuraciones. En este capítulo analizamos el espectro de bariones de la banda $\mathcal{N} = 2$ considerando todas las mezclas entre los multipletes $[56', 0^+]$, $[56, 2^+]$, $[70, 0^+]$ y $[70, 2^+]$ en el marco de *large* N_c QCD , es decir que se consideran, tanto mezcla de estados con distinta simetría de spin-sabor, como mezclas entre multipletes con

distinto L . En este análisis no incluimos a estados del multiplete $[20, 1^+]$ ya que su correspondencia con los estados físicos observados en $N_c = 3$ aún no es clara.

6.2 Operador de masa

Como vimos en el capítulo 4, en *large* N_c podemos construir un operador de masa para bariones excitados haciendo una expansión en operadores, estos son los 18 operadores de la tabla 4.2 que llamamos *CCGL*. Cada uno de estos operadores (y sus elementos de matriz) se pueden clasificar según su dependencia en N_c . El Hamiltoniano para estados excitados en el límite de *large* N_c es una combinación lineal de los operadores *CCGL* de orden más bajo y puede escribirse como [66]

$$H = c_1 \mathbb{1} + c_2 \ell \cdot s + c_3 \frac{1}{N_c} \ell^{(2)} \cdot g \cdot G_c + \mathcal{O}(1/N_c). \quad (6.1)$$

Ahora bien, el Hamiltoniano de la ecuación (6.1) no permite todas las mezcla de configuraciones ya que los elementos de matriz no-diagonales se anulan si los estados considerados tienen distinto valor de L . Para estudiar la mezcla de configuraciones es necesario considerar un caso más general reemplazando el operador de momento angular ℓ por un operador vectorial arbitrario ξ de modo que el Hamiltoniano resulta

$$H = \tilde{c}_1 \mathbb{1} + \tilde{c}_2 \xi \cdot s + \tilde{c}_3 \frac{1}{N_c} \xi^{(2)} \cdot g \cdot G_c + \mathcal{O}(1/N_c). \quad (6.2)$$

Es importante recordar que la ecuación (6.2) es válida para cada representación por separado, esto implica que los coeficientes \tilde{c}_i toman valores numéricos diferentes para cada representación. Es decir, que los valores de los coeficientes serán distintos según el multiplete que se considere o según la mezcla de multipletes. Por esta razón, los coeficientes se notan como \tilde{c}_i^{MSL} para los multipletes $[70, L]$, \tilde{c}_i^{SL} para $[56, L]$ donde $L = 0, 2$ y $\tilde{c}_i^{Sym_L, Sym'_{L'}}$ donde $Sym = MS, S$ cuando se consideren mezclas entre las representaciones de distinta simetría. La etiqueta S (MS) corresponde a un multiplete simétrico (mixto-simétrico).

6.3 Bariones de la banda $\mathcal{N} = 2$ en *large* N_c

Vimos en el capítulo 3 que para $N_c = 3$ existen tres representaciones de spin-sabor: un **56**-plete completamente simétrico, un **70**-plete mixto-simétrico y un **20**-plete completamente antisimétrico. También se presentó la generalización de los bariones excitados de *QCD* con N_c quarks.

En la tabla 3.6 del capítulo 3 se presentaron los estados no extraños de N_c quarks para los casos de $L = 0, 1, 2$. Es decir que los estados de $SU(6)$ que corresponden a la

banda $\mathcal{N} = 2$ son

$$\begin{aligned}
S_0 &\supset {}^2N_{1/2}, {}^4\Delta_{3/2} \\
MS_0 &\supset {}^2N_{1/2}, {}^4N_{3/2}, {}^2\Delta_{1/2}, {}^4\Delta_{3/2}, {}^6\Delta_{5/2} \\
S_2 &\supset {}^2N_{3/2}, {}^2N_{5/2}, {}^4\Delta_{1/2}, {}^4\Delta_{3/2}, {}^4\Delta_{5/2}, {}^4\Delta_{7/2} \\
MS_2 &\supset {}^2N_{3/2}, {}^2N_{5/2}, {}^4N_{1/2}, {}^4N_{3/2}, {}^4N_{5/2}, {}^4N_{7/2}, {}^2\Delta_{3/2}, {}^2\Delta_{5/2}, \\
&{}^4\Delta_{1/2}, {}^4\Delta_{3/2}, {}^4\Delta_{5/2}, {}^4\Delta_{7/2}, {}^6\Delta_{1/2}, {}^6\Delta_{3/2}, {}^6\Delta_{5/2}, {}^6\Delta_{7/2}, {}^6\Delta_{9/2},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

donde los estados con $I = 1/2$ y $I = 3/2$ se indican como ${}^{2S+1}N_J$ y ${}^{2S+1}\Delta_J$ respectivamente y donde S_0 , MS_0 , S_2 y MS_2 corresponden a los multipletes $[\mathbf{56}', 0^+]$, $[\mathbf{70}, 0^+]$, $[\mathbf{56}, 2^+]$ y $[\mathbf{70}, 2^+]$ respectivamente cuando $N_c = 3$. Estos estados en *large* N_c se ubican en torres según su número K , donde $\vec{J} = \vec{K} + \vec{I}$. Los valores de K que corresponden a cada multiplete pueden hallarse fácilmente teniendo en cuenta que $\vec{K} = \vec{L}$ para las representaciones simétricas y $\vec{K} = \vec{L} + \vec{1}$ para las representaciones mixta-simétricas [25]. Entonces, los estados de la ecuación (6.3) aparecen en las torres

$$\begin{aligned}
K = 0 &: N_{1/2}, \Delta_{3/2}, \dots, \\
K = 1 &: N_{1/2}, N_{3/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}, \dots, \\
K = 2 &: N_{3/2}, N_{5/2}, \Delta_{1/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}, \Delta_{7/2}, \dots, \\
K = 3 &: N_{5/2}, N_{7/2}, \Delta_{3/2}, \Delta_{5/2}, \Delta_{7/2}, \Delta_{9/2}, \dots
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Los estados omitidos corresponden a estados con $I > 3/2$. Como este esquema surge de la simetría $SU(6)_c$ (y no $SU(6)$) los estados dentro de cada torre contienen mezcla de distintas representaciones irreducibles de $SU(6)$.

6.4 Matrices de masa y clasificación en torres

Teniendo los estados de la banda $\mathcal{N} = 2$, se obtuvieron las matrices de masa que resultan del cálculo explícito a partir del Hamiltoniano de la ecuación (6.2). Para calcular las masas de los estados de simétricos y mixto-simétricos de esta banda fue necesario calcular los elementos de matriz de los 11 estados con isospin $1/2$ y los 19 estados con isospin $3/2$ y sus mezclas para los tres operadores que aparecen en el Hamiltoniano. Las expresiones explícitas de cada uno de los elementos de matriz, se presentan en las tablas G.1–G.4 del apéndice G, donde también se muestran detalles sobre los cálculos realizados. Los elementos de matriz que se obtienen dependen de N_c . Dado que este análisis se realizó en el marco del límite de *large* N_c , sólo los términos de orden más bajo son relevantes. Al tomar el límite de $N_c \rightarrow \infty$ se obtienen las matrices de masa de los estados de la banda $\mathcal{N} = 2$. Por ejemplo, para el caso de los

estados $N_{3/2}$ se obtiene la matriz

$$M_{N_{3/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{MS_0} N_c & 0 & -c_3^{MS_0 MS_2} & -c_3^{MS_0 MS_2} \\ & c_1^{S_2} N_c & c_2^{S_2 MS_2} & -c_2^{S_2 MS_2} \\ & & c_1^{MS_2} N_c - c_2^{MS_2} & -\frac{1}{2} c_2^{MS_2} - c_3^{MS_2} \\ & & & c_1^{MS_2} N_c - c_2^{MS_2} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

que se muestra en la base $\{^4 N_{3/2}^{MS_0}, ^2 N_{3/2}^{S_2}, ^2 N_{3/2}^{MS_2}, ^4 N_{3/2}^{MS_2}\}$ donde el supraíndice indica la representación a la cual pertenece cada estado. Los coeficientes c_i que aparecen en esta matriz son proporcionales a los coeficientes \tilde{c}_i del Hamiltoniano y están dados por

$$\begin{aligned} c_1^{rep} &= \tilde{c}_1^{rep}, \\ c_2^{MS_2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} R_{1,2,2} \tilde{c}_2^{MS_2}, \\ c_3^{MS_2} &= \frac{7}{16} R_{2,2,2} \tilde{c}_3^{MS_2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde $R_{1,2,2} = \frac{1}{\sqrt{30}} \langle 2 || \xi || 2 \rangle$, $R_{2,2,2} = \frac{1}{\sqrt{105}} \langle 2 || \xi^{(2)} || 2 \rangle$, $R_{2,0,2} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \langle 0 || \xi^{(2)} || 2 \rangle$.

A partir de la matrices de masa se obtienen los autovectores correspondientes que se pueden asociar a cada una de las torres K . Para la matriz de $N_{3/2}$ dada en la ecuación (6.5) los autovectores hallados son

$$\begin{pmatrix} N_{3/2}^{K=1} \\ N_{3/2}^{K=2} \\ N_{3/2}^{K=1'} \\ N_{3/2}^{K=2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{S_2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{S_2} \\ -\eta_{MS_0} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\eta_{S_2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

donde las filas indican la composición de cada vector, por ejemplo

$$|N_{3/2}^{K=1}\rangle = |^4 N_{3/2}^{MS_0}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} |^2 N_{3/2}^{MS_2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} |^4 N_{3/2}^{MS_2}\rangle. \quad (6.8)$$

En el límite en el que no hay mezcla ($\eta_X = 0$) los autovectores de la ecuación (6.7) están normalizados. En el caso general se tuvo en cuenta que estas expresiones requieren de un factor de normalización dado por $\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{1+\eta_X^2}}$. Los parámetros η_X pueden tener una dependencia en N_c que depende de las relaciones entre los coeficientes c_1 para cada representación. Las expresiones de las ocho matrices correspondientes a los estados restantes se muestran en la sección G.2 del apéndice G junto con sus respectivos autovectores.

6.5 Interpretación como mezcla de dos niveles

A partir de las matrices de masa se obtuvieron los 30 autovalores correspondientes a cada uno de los estados físicos. Encontramos que, en el límite de *large* N_c aparecen

solo seis niveles de energía. Estos estados degenerados responden a la estructura de torres de *large* N_c que identificaremos con $K = 0, 1, 1', 2, 2', 3$. Hallamos dos torres correspondientes a cada uno de los $K = 1$ y $K = 2$ con valores independientes entre sí para las masas. Los estados se organizan en torres de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
m_0 &= m_{N_{1/2}^{K=0}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=0}} , \\
m'_1 &= m_{N_{1/2}^{K=1'}} = m_{N_{3/2}^{K=1'}} = m_{\Delta_{1/2}^{K=1'}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=1'}} = m_{\Delta_{5/2}^{K=1'}} , \\
m'_2 &= m_{N_{3/2}^{K=2'}} = m_{N_{5/2}^{K=2'}} = m_{\Delta_{1/2}^{K=2'}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=2'}} = m_{\Delta_{5/2}^{K=2'}} = m_{\Delta_{7/2}^{K=2'}} , \\
m_1 &= m_{N_{1/2}^{K=1}} = m_{N_{3/2}^{K=1}} = m_{\Delta_{1/2}^{K=1}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=1}} = m_{\Delta_{5/2}^{K=1}} , \\
m_2 &= m_{N_{3/2}^{K=2}} = m_{N_{5/2}^{K=2}} = m_{\Delta_{1/2}^{K=2}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=2}} = m_{\Delta_{5/2}^{K=2}} = m_{\Delta_{7/2}^{K=2}} , \\
m_3 &= m_{N_{5/2}^{K=3}} = m_{N_{7/2}^{K=3}} = m_{\Delta_{3/2}^{K=3}} = m_{\Delta_{5/2}^{K=3}} = m_{\Delta_{7/2}^{K=3}} = m_{\Delta_{9/2}^{K=3}} ,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

donde la masas de cada nivel están dadas por

$$\begin{aligned}
m_0 &= N_c c_1^{S_0} , \\
m'_1 &= \bar{m}_{11'} - \delta_{11'} , \\
m'_2 &= \bar{m}_{22'} - \delta_{22'} , \\
m_1 &= \bar{m}_{11'} + \delta_{11'} , \\
m_2 &= \bar{m}_{22'} + \delta_{22'} , \\
m_3 &= N_c c_1^{MS_2} + c_2^{MS_2} - \frac{2}{7} c_3^{MS_2} ,
\end{aligned} \tag{6.10}$$

donde los valores de $m_{KK'}$ y $\delta_{KK'}$ dependen de N_c y de los coeficientes c_i de los operadores *CCGL* en el Hamiltoniano.

El resultado obtenido de la ecuación (6.9) no es evidente. La mezcla preserva las degeneraciones observadas en el caso sin mezclas. Como se puede ver en todas las matrices de masa (ver sección G.2 del apéndice G) y en particular, en la matriz en la ecuación (6.5), las expresiones de estas matrices son no-triviales. Estas se presentan con distintas dimensiones y contienen estados de distintos K , sin embargo solo estados de igual K se mezclan.

En el caso más general la diagonalización explícita de las matrices da como resultado los seis valores de masas distintos dados por la ecuación (6.9) donde

$$\bar{m}_{11'} = \frac{1}{2} (c_1^{MS_0} + c_1^{MS_2}) N_c - \frac{3}{4} c_2^{MS_2} - \frac{1}{2} c_3^{MS_2} , \tag{6.11}$$

$$\bar{m}_{22'} = \frac{1}{2} (c_1^{S_2} + c_1^{MS_2}) N_c - \frac{1}{4} c_2^{MS_2} + \frac{1}{2} c_3^{MS_2} , \tag{6.12}$$

$$\delta_{11'} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (c_1^{MS_0} - c_1^{MS_2}) N_c + \frac{3}{4} c_2^{MS_2} + \frac{1}{2} c_3^{MS_2} \right]^2 + 2 (c_3^{MS_0 MS_2})^2} , \tag{6.13}$$

$$\delta_{22'} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} (c_1^{S_2} - c_1^{MS_2}) N_c + \frac{1}{4} c_2^{MS_2} - \frac{1}{2} c_3^{MS_2} \right]^2 + 2 (c_3^{S_2 MS_2})^2} . \tag{6.14}$$

Dada la complejidad de las matrices de masa, este resultado es sorprendentemente simple. Si se observa la estructura general de los autovectores, se puede ver que solo

ciertos subconjuntos de estados de spin-sabor se mezclan entre sí en el límite de *large* N_c , a saber, aquellos con igual K . Por lo tanto, todos nuestros resultados pueden entenderse como mezclas de dos niveles. Para ver esto, pasamos a analizar el caso simple de una matriz de 2×2 .

Estudiamos el caso de una matriz de 2×2 simétrica definida como

$$\begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

con autovectores y autovalores que se pueden leer del apéndice H. Ahora bien, si consideramos que x es chico respecto de los valores de a y b podemos hacer una expansión en x . Existen tres casos distintivos que deben ser considerados por separado:

- (1) Si $a - b \sim \mathcal{O}(x^0)$ entonces la mezcla es débil ya que los autovectores normalizados son $(1 + \mathcal{O}(x^2), \mathcal{O}(x))$ y $(\mathcal{O}(x), 1 + \mathcal{O}(x^2))$. Es decir que se puede entender como un caso en el que se tienen perturbaciones de los autovectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las energías en este caso adquieren correcciones de orden $\mathcal{O}(x^2)$. (Las expresiones explícitas tanto para los autovectores como para los autovalores en este caso están dados por las ecuaciones (H.6) - (H.9) del apéndice H),
- (2) Si $a - b \sim \mathcal{O}(x^1)$ la mezcla es fuerte ya que los autovectores son del tipo (α, β) donde $\alpha, \beta \sim \mathcal{O}(x^0)$. En el sentido de teoría de perturbaciones, estos estados están lejos de los estados con autovectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las energías en este caso tienen correcciones de orden $\mathcal{O}(x^1)$. (Las expresiones de los autovectores y los autovalores de la expansión en este caso se muestran en el apéndice H, ecuaciones (H.10) - (H.13)),
- (3) En el caso de $a - b \sim \mathcal{O}(x^2)$ la mezcla también es fuerte y las energías se ven corregidas de modo que $\lambda_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm x + \mathcal{O}(x^2)$. Este último caso no tiene relevancia en este trabajo ya que, como se verá, esta situación no puede ocurrir con los valores para los elementos de matriz hallados, pero se lo menciona por completitud.

Para analizar cómo afecta a los resultados la mezcla de configuraciones, comparamos los niveles de energía hallados (ecuación (6.10)) con los que se obtienen sin mezcla que están dados por

$$\begin{aligned} \tilde{m}_0 &= N_c c_1^{S_0}, \\ \tilde{m}'_1 &= N_c c_1^{MS_2} - \frac{3}{2} c_2^{MS_2} - c_3^{MS_2}, \\ \tilde{m}'_2 &= N_c c_1^{MS_2} - \frac{1}{2} c_2^{MS_2} + c_3^{MS_2}, \\ \tilde{m}_1 &= N_c c_1^{MS_0}, \\ \tilde{m}_2 &= N_c c_1^{S_2}, \\ \tilde{m}_3 &= N_c c_1^{MS_2} + c_2^{MS_2} - \frac{2}{7} c_3^{MS_2}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Es decir que para $K = 0, 3$ los valores para las masas son iguales en los dos casos. Se puede ver que para $K = 1, 2$, las masas de los bariones en los casos con mezcla y sin

mezcla se relacionan entre sí siguiendo

$$m_{K,K'} = \frac{\tilde{m}_K + \tilde{m}_{K'}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tilde{m}_K - \tilde{m}_{K'}}{2}\right)^2 + \mu_K^2}, \quad (6.17)$$

donde $\mu_1 = -\sqrt{2}c_3^{MS_0MS_2}$ y $\mu_2 = -\sqrt{2}c_3^{S_2MS_2}$. Los valores \tilde{m}_K se relacionan con los parámetros $\tilde{m}_{KK'}$ y $\delta_{KK'}$ utilizados para describir las masas en el caso general (ecuaciones (6.10) y (6.11)) según

$$\tilde{m}_{KK'} = \frac{\tilde{m}_K + \tilde{m}_{K'}}{2}, \quad (6.18)$$

$$\delta_{KK'} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{m}_K - \tilde{m}_{K'}}{2}\right)^2 + \mu_K^2}. \quad (6.19)$$

Entonces, la magnitud de la diferencia $\tilde{m}_K - \tilde{m}_{K'}$ determinará si se trata de una mezcla débil o fuerte y el orden de las correcciones a las energías. El caso $(\tilde{m}_K - \tilde{m}_{K'}) \sim \mathcal{O}(N_c)$ corresponde a una mezcla débil mientras que $(\tilde{m}_K - \tilde{m}_{K'}) \sim \mathcal{O}(N_c^0)$ corresponde a una mezcla fuerte. Estas diferencias están asociadas a diferencias entre coeficientes c_1 de la expansión en operadores para cada representación (ver ecuaciones (6.16)). Estos dos casos corresponden, respectivamente, a $(c_1^{MS_0} - c_1^{MS_2}) \sim \mathcal{O}(N_c^0)$ o $(c_1^{MS_0} - c_1^{MS_2}) \sim \mathcal{O}(1/N_c)$ para $K = 1$ y a $(c_1^{S_2} - c_1^{MS_2}) \sim \mathcal{O}(N_c^0)$ o $(c_1^{MS_0} - c_1^{MS_2}) \sim \mathcal{O}(1/N_c)$ para $K = 2$.

Para ver que se obtienen resultados análogos a los casos (1) y (2) que se describieron para la matriz simétrica general de la ecuación (6.15) podemos hacer un cambio de base para cada matriz. Lo mostraremos explícitamente para el caso de la matriz más grande que, además, contiene estados de todos los valores de K en lo que sigue.

La matriz de masa para los estados $\Delta_{3/2}$ está dada por la expresión (G.20) del apéndice G. En el caso sin mezcla los autovectores están dados por las filas de la siguiente matriz

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{3\sqrt{7}}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & -\frac{\sqrt{7}}{5} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Con esta matriz podemos hacer un cambio de base de la matriz de $\Delta_{3/2}$ a la base de

autoestados sin mezcla. Se obtiene

$$\tilde{S}M_{\Delta_{3/2}}\tilde{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_0 & & & & & \\ & \tilde{m}_{1'} & & \mu_1 & & \\ & & \tilde{m}_{2'} & & \mu_2 & \\ & \mu_1 & & \tilde{m}_1 & & \\ & & \mu_2 & & \tilde{m}_2 & \\ & & & & & \tilde{m}_3 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

en la base de autoestados de K dada por $\{ \Delta_{3/2}^{K=0}, \Delta_{3/2}^{K=1}, \Delta_{3/2}^{K=2}, \Delta_{3/2}^{K=1'}, \Delta_{3/2}^{K=2'}, \Delta_{3/2}^{K=3} \}$ y donde los valores omitidos corresponden a elementos de matriz nulos. Los autoestados en la base K están dados por las filas de la matriz T que se puede expresar como

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & \eta_{MS_0} & & \\ & & 1 & & \eta_{S_2} & \\ -\eta_{MS_0} & & & 1 & & \\ & & -\eta_{S_2} & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Finalmente, la matriz S que se obtiene de $S = T\tilde{S}$ está formada por filas de los autovectores de la matriz en la base original y está dada por la ecuación (G.21). Es decir que la composición de los estados está dada por

$$\begin{aligned} |\Delta_{3/2}^{K=0}\rangle &= |^4\Delta_{3/2}^{S_0}\rangle, \\ |\Delta_{3/2}^{K=1'}\rangle &= |^4\Delta_{3/2}^{MS_0}\rangle + \eta_{MS_0} \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}|^2\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{5}|^4\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \frac{3\sqrt{7}}{10}|^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle \right), \\ |\Delta_{3/2}^{K=2'}\rangle &= |^4\Delta_{3/2}^{S_2}\rangle + \eta_{S_2} \left(\frac{1}{2}|^2\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|^4\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}|^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle \right), \\ |\Delta_{3/2}^{K=1}\rangle &= -\eta_{MS_0}|^4\Delta_{3/2}^{MS_0}\rangle + \frac{1}{2\sqrt{5}}|^2\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \frac{2\sqrt{2}}{5}|^4\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \frac{3\sqrt{7}}{10}|^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle, \\ |\Delta_{3/2}^{K=2}\rangle &= -\eta_{S_2}|^4\Delta_{3/2}^{S_2}\rangle + \frac{1}{2}|^2\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|^4\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}|^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle, \\ |\Delta_{3/2}^{K=3}\rangle &= -\sqrt{\frac{7}{10}}|^2\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle - \frac{\sqrt{7}}{5}|^4\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle + \frac{1}{5\sqrt{2}}|^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\rangle, \end{aligned} \quad (6.23)$$

donde en el caso de mezcla débil los parámetros η están dados por

$$\begin{aligned} \eta_{MS_0} &= \frac{-\mu_1}{N_c (c_1^{MS_2} - c_1^{S_2})} + \dots, \\ \eta_{S_2} &= \frac{-\mu_2}{N_c (c_1^{MS_2} - c_1^{MS_0})} + \dots, \end{aligned} \quad (6.24)$$

y en el caso de la mezcla fuerte están dados por

$$\begin{aligned}\eta_{MS_0} &= \frac{2\mu_1}{\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{1'} + \sqrt{(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_{1'})^2 + 4\mu_1^2}} + \dots, \\ \eta_{S_2} &= \frac{2\mu_2}{\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{2'} + \sqrt{(\tilde{m}_2 - \tilde{m}_{2'})^2 + 4\mu_2^2}} + \dots,\end{aligned}\tag{6.25}$$

Con estos resultados se ve que en el caso de la mezcla fuerte corresponde al caso (2) que describimos para la matriz de 2×2 donde los niveles de energía adquieren correcciones de orden N_c^0 debidas a la mezcla de configuraciones. Estas últimas observaciones conciernen a las mezclas entre los multipletes MS_2 y S_2 , sin embargo, es fácil ver que se observan exactamente las mismas propiedades para la mezcla de MS_2 y MS_0 . Además, como se mencionó antes, se puede ver que este efecto característico de este tipo de matrices se obtiene para todas las matrices consideradas.

6.6 Conclusiones

En este capítulo, se describió el cálculo explícito para estados de la banda $\mathcal{N} = 2$ en la base de operadores de quarks usando el mismo operador de masa para todos los estados definido por la ecuación (6.2) [65]. Se observó que el patrón de mezcla es mucho más simple que el obtenido con un modelo de quarks con interacciones hiperfinas (ver por ejemplo la referencia [47]). Esto sucede porque solo estados de igual número K pueden mezclarse en el límite de *large* N_c .

Para los estados considerados, la mezcla puede describirse con tan solo dos parámetros relacionados con la mezcla de estados de las representaciones mixta-simétricas con $L = 0$ y $L = 2$ y con la mezcla de las representaciones simétrica y mixta-simétrica con $L = 2$.

El cálculo explícito del espectro obtenido con el operador de masa de *large* N_c a primer orden responde a la estructura de torres esperada en este límite aun considerando la mezcla de configuraciones. Los estados de isospin más bajo que conforman las torres halladas corresponden a 11 estados con $I = 1/2$ y 19 de $I = 3/2$ que forman grupos de estados degenerados con $K = 0, 1, 1', 2, 2', 3$. Las expresiones explícitas de los elementos de matriz calculados que se muestran en el apéndice G muestran que los estados espurios que aparecen cuando $N_c > 3$ se desacoplan de los estados físicos. Esta es una característica general de *large* N_c QCD conocida [67]. Por otro lado, es interesante destacar el hecho de que solo los operadores que actúan sobre el *core* (operadores S_c, T_c, G_c) permiten la mezcla entre estados simétricos y mixto-simétricos, es decir que un operador de masa que contiene únicamente operadores simétricos S, T, G no mezclaría estados de distinta simetría de spin-sabor.

Los cálculos explícitos que se describieron en este capítulo constituyen verificaciones no-triviales para el método de operadores basado en una aproximación de Hartree que

considera una descripción a través de una combinación de operadores actuando solo sobre el *core* y otros actuando solo sobre el quark excitado. Finalmente, este trabajo resulta un primer paso hacia un método que permita incluir los efectos subdominantes de las mezclas de configuraciones en un análisis de los estados excitados en el marco *large N_c QCD*.

Capítulo 7

Conclusiones generales

En esta tesis se estudió el espectro bariónico no extraño en el marco de la expansión en $1/N_c$ de QCD . El objetivo de estos estudios fue obtener una mejor comprensión teórica de la fenomenología de los bariones excitados de manera independiente de las particularidades de un modelo. Un resultado importante de este trabajo [59] consistió en establecer de manera explícita la conexión entre el análisis en términos de operadores efectivos usados habitualmente en la expansión en $1/N_c$ y una extensa clase de modelos de quarks. Esto proporciona una imagen dinámica que puede explicar los valores de los coeficientes de la expansión en $1/N_c$. También permite entender correlaciones entre los coeficientes y explicar jerarquías entre ellos que no son evidentes en un análisis que solamente usa la expansión en $1/N_c$. Un segundo resultado importante [65] es que se incorporó por primera vez la mezcla de configuraciones en un cálculo explícito del espectro de bariones en el límite de *large* N_c .

Para obtener estos resultados, por un lado, se estudiaron las masas de los primeros bariones excitados, que corresponden a estados de la banda $\mathcal{N} = 1$, para un modelo de quarks general y se analizó su relación con resultados obtenidos con el método de *large* N_c QCD . Por otro lado, se estudió el espectro de los estados de la banda $\mathcal{N} = 2$ en el límite de *large* N_c considerando las mezclas de configuraciones.

Como se describió en la Introducción, los primeros capítulos de esta tesis sientan las bases teóricas de los estudios que se discutieron en el presente trabajo. En particular, en el capítulo 4 se introdujo la simetría de spin-sabor contraída $SU(2N_f)_c$ del límite de $N_c \rightarrow \infty$ y se presentaron los operadores $CCGL$. La construcción del operador de masas en términos de operadores $CCGL$ y las implicaciones de la simetría contraída en el espectro de bariones son dos ingredientes fundamentales en la discusión realizada en los siguientes dos capítulos.

En el capítulo 5 se presentó el análisis detallado que realizamos sobre los estados bariónicos no extraños de la banda $\mathcal{N} = 1$ utilizando la base de operadores de spin-sabor de la expansión en $1/N_c$ que resulta lo suficientemente general como para incorporar los detalles de los distintos modelos para las interacciones entre quarks, en los distintos valores numéricos que pueden tomar los coeficientes de los operadores efectivos. El Hamiltoniano dado por las ecuaciones (3.60)–(3.63) describe un modelo de quarks no-

relativista general que incluye interacciones quark-quark de tipo spin-spin, spin-órbita y tensorial, tanto dependientes como independientes del sabor. En el caso particular en el que todos los términos que son dependientes (independientes) del sabor se anulan, las interacciones del modelo son las características de un modelo de tipo OGE (OME) cuyas interacciones están dadas por el intercambio de un gluón (mesón). Es decir que el modelo general, que llamamos $OGE+OME$, permite distinguir entre los dos casos extremos OGE y OME . Se calcularon las masas para los estados no extraños del multiplete de $O(3) \times SU(6)$ correspondiente a $[70, 1^-]$ utilizando el modelo general, sin especificar una forma determinada para la dependencia orbital de las interacciones. A partir de estos resultados, encontramos que el espectro hallado impone relaciones entre los ángulos de mezcla de los estados con $J = 1/2, 3/2$. Estas relaciones son independientes de la forma de las interacciones de spin-spin, spin-órbita y tensorial. Esto se puede observar de las expresiones (5.27) y (5.30) que fueron obtenidas en el caso más general $OGE+OME$, de donde además, se puede ver que estas relaciones no involucran ningún parámetro del modelo. Las restricciones halladas resultan en dos soluciones para los valores de los ángulos de mezcla, sol-A y sol-B (ver figura 5.2). Al considerar casos más particulares del modelo se obtienen relaciones entre las masas y los ángulos adicionales. Las restricciones halladas para los casos más extremos dados por los modelos OGE y OME son compatibles con las soluciones sol-A y sol-B. Por un lado, en el caso OGE se obtiene la relación $R3$ de la ecuación (5.32) que es compatible con la solución sol-B (ver figura 5.3). Por otro lado, en el caso OME se obtienen dos relaciones adicionales $R4$ y $R5$ (ecuaciones (5.35) y (5.36)) que son compatibles con la solución sol-A como se puede ver en el gráfico de la figura 5.4. Solo una de estas relaciones fue obtenida con anterioridad. Esta relación corresponde a la primera restricción hallada para el caso general $OGE+OME$ que llamamos $R1$, y fue obtenida en [62] considerando un modelo con las interacciones más generales de dos cuerpos. Sin embargo, esta relación no es suficiente para determinar los ángulos de mezcla a partir del espectro de masas sin imponer restricciones adicionales. En la referencia [63] se consideró la relación $R1$ (en la forma de la ecuación (5.28)) imponiendo restricciones obtenidas a partir de un análisis en $1/N_c$ y de datos experimentales de decaimientos a través de un ajuste global que resultan en los valores para los ángulos de mezcla que llamamos GGS . Dentro de las incertezas experimentales, la solución GGS es compatible con las dos soluciones sol-A y sol-B, por lo que no permite excluir ninguna de las dos posibilidades más extremas para la dependencia o independencia del sabor de la interacción entre quarks (ver figura 5.5). Estos resultados independientes de los detalles de las interacciones se conectaron con la expansión $1/N_c$ para obtener una perspectiva sobre la dinámica responsable por los valores de los coeficientes. Los operadores de la expansión en $1/N_c$ utilizados fueron construidos con operadores *core*-quark excitado, que actúan sobre el *core* (S_c, T_c, G_c) y el quark excitado (s, t, g), definidos en términos de los generadores de la simetría $SU(2N_f)$ [24,27]. Este *matching* permitió obtener expresiones analíticas para los coeficientes de la expansión. Estas relaciones están dadas en (C.10)–(C.18) del apéndice C. De este modo, los parámetros del modelo de quarks general (5.6), (5.7) y (5.17)–(5.25), que se expresan en función de

integrales radiales sin determinar, permiten obtener una relación entre los coeficientes y magnitudes con significado físico. Las relaciones $R1, \dots, 5$ halladas se traducen en relaciones entre coeficientes c_i que en un análisis de *large* N_c , donde los c_i son ajustados a los datos experimentales, pasan desapercibidas.

Por último, se estudiaron los estados de los multipletes simétricos y mixto-simétricos de $SU(2N_f)$, cuyos estados físicos están asociados a la banda $\mathcal{N} = 2$, en el marco de *large* N_c QCD . En el límite de $N_c \rightarrow \infty$ los bariones forman torres de estados degenerados que se pueden identificar con el número $K = 0, 1, \dots$. Las torres de estados en *large* N_c determinan cómo se mezclan los estados que se obtienen de los modelos de quarks y que pertenecen a representaciones irreducibles de $SU(2N_f) \times O(3)$. Estudios anteriores sobre la banda $\mathcal{N} = 2$, no incluyeron cálculos que tengan en cuenta mezclas entre estados de distintos multipletes $SU(2N_f) \times O(3)$. En el trabajo [65] que se presentó en el capítulo 6 extendimos el análisis de *large* N_c QCD para incluir mezclas de configuraciones por primera vez y analizar los estados de espín y sabor más bajos asociados a los estados físicos correspondientes a los bariones no extraños. El cálculo se realizó utilizando el mismo operador de masa para todos los estados, dado por la ecuación (6.2) y obtenido a partir de una expansión en $1/N_c$ a orden más bajo usando operadores *core*-quark excitado. Con este operador de masa, se obtuvo explícitamente el espectro de estos bariones. Los resultados muestran que los 11 estados de $I = 1/2$ y los 19 estados de $I = 3/2$ considerados aparecen ordenados en seis torres con $K = 0, 1, 1', 2, 2', 3$. Las mezclas se pueden describir con solo dos parámetros asociados a las mezclas de los multipletes MS_0 y MS_2 y de los multipletes S_2 y MS_2 . Todos los elementos de matriz hallados se muestran en el apéndice G de donde se puede ver además, que los estados espurios se desacoplan completamente de los asociados a estados físicos como se espera en *large* N_c . El cálculo explícito realizado muestra que las mezclas son más sencillas de lo que se esperaría en un modelo de quarks y que los estados se mezclan según la simetría contraída de *large* N_c . Estos resultados proveen pruebas de autoconsistencia no-triviales y demuestran que los análisis basados en la construcción de operadores *core*-quark excitado describen correctamente la estructura de simetría presente a bajas energías en *large* N_c QCD . Los cálculos realizados a primer orden que se presentaron en el capítulo 6, constituyen un primer paso hacia la inclusión sistemática de los efectos de las mezclas de configuraciones en los análisis de *large* N_c QCD .

Apéndice A

Funciones de onda con $L = 1$

En este apéndice se presentan explícitamente las funciones de onda de cada uno de los siete estados del multiplete de spin-sabor de simetría mixta con $L = 1$. Estas funciones se pueden expresar como

$$\begin{aligned} |N_{1/2}, 1/2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\sqrt{2} \left(\chi_{-1/2}^\rho \phi_{1/2}^\rho - \chi_{-1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\lambda \right) \Psi_{11}^\lambda + \sqrt{2} \left(\chi_{-1/2}^\rho \phi_{1/2}^\lambda + \chi_{-1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\rho \right) \Psi_{11}^\rho \right. \\ &\quad \left. - \left(\chi_{1/2}^\rho \phi_{1/2}^\rho - \chi_{1/2,1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\lambda \right) \Psi_{10}^\lambda - \left(\chi_{1/2}^\rho \phi_{1/2}^\lambda + \chi_{1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\rho \right) \Psi_{10}^\rho \right], \\ |N_{3/2}, 3/2\rangle &= \frac{1}{2} \left[\left(\chi_{1/2}^\rho \phi_{1/2}^\rho - \chi_{1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\lambda \right) \Psi_{11}^\lambda + \left(\chi_{1/2}^\rho \phi_{1/2}^\lambda + \chi_{1/2}^\lambda \phi_{1/2}^\rho \right) \Psi_{11}^\rho \right], \\ |N'_{1/2}, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \chi_{3/2}^{3/2} \left(\phi_{1/2}^\rho \Psi_{1-1}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{1-1}^\lambda \right) - \sqrt{\frac{1}{3}} \chi_{1/2}^{3/2} \left(\phi_{1/2}^\rho \Psi_{10}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{10}^\lambda \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{1}{6}} \chi_{-1/2}^{3/2} \left(\phi_{1/2}^\rho \Psi_{11}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{11}^\lambda \right) \right], \\ |N'_{3/2}, 3/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\sqrt{\frac{3}{5}} \chi_{3/2}^{3/2} \left(\phi_{1/2}^\rho \Psi_{10}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{10}^\lambda \right) + \sqrt{\frac{2}{5}} \chi_{1/2}^{3/2} \left(\phi_{1/2}^\rho \Psi_{11}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{11}^\lambda \right) \right], \\ |N'_{5/2}, 5/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{3/2}^{3/2} \left[\phi_{1/2}^\rho \Psi_{11}^\rho + \phi_{1/2}^\lambda \Psi_{11}^\lambda \right], \\ |\Delta_{1/2}, 1/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{3/2}^{3/2} \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \left(\chi_{1/2}^\rho \Psi_{10}^\rho + \chi_{1/2}^\lambda \Psi_{10}^\lambda \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\chi_{-1/2}^\rho \Psi_{11}^\rho + \chi_{-1/2}^\lambda \Psi_{11}^\lambda \right) \right), \\ |\Delta_{3/2}, 3/2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{3/2}^{3/2} \left(\chi_{1/2}^\rho \Psi_{11}^\rho + \chi_{1/2}^\lambda \Psi_{11}^\lambda \right), \end{aligned}$$

donde las funciones espaciales están dadas por las ecuaciones (3.35) y (3.36) del capítulo 3. Las funciones de espín están dadas por

$$\chi_{3/2}^{3/2} = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, \quad (\text{A.1})$$

$$\chi_{1/2}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle), \quad (\text{A.2})$$

$$\chi_{1/2}^{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{6}} (|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - 2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle), \quad (\text{A.3})$$

$$\chi_{1/2}^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle). \quad (\text{A.4})$$

Las proyecciones de espín restantes pueden obtenerse aplicando los operadores de subida y de bajada. Las funciones de isospín ϕ son análogas a las funciones de espín, basta reemplazar \uparrow por u y \downarrow por d .

Apéndice B

Elementos de matriz de operadores $CCGL$ para $L = 1$

En este apéndice se presentan los elementos de matriz de los 18 operadores $CCGL$ obtenidos en la referencia [27]. En la tabla B.1 se presentan los valores para los operadores que se eligieron como base independiente de los cálculos en el capítulo 5. Los elementos de matriz correspondientes a los nueve operadores restantes se muestran en la tabla B.2.

	$\langle \mathcal{O}_1 \rangle$ $N_c \langle \mathbf{1} \rangle$	$\langle \mathcal{O}_2 \rangle$ $\langle \ell s \rangle$	$\langle \mathcal{O}_3 \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle \ell^{(2)} g G_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_4 \rangle$ $\langle \ell s + \frac{4}{N_c+1} \ell t G_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_5 \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle \ell S_c \rangle$
$N_{1/2}$	N_c	$-\frac{1}{3N_c}(2N_c - 3)$	0	$+\frac{2}{N_c+1}$	$-\frac{1}{3N_c^2}(N_c + 3)$
$N'_{1/2}$	N_c	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{48N_c}(N_c + 1)$	0	$-\frac{5}{3N_c}$
$N'_{1/2} - N_{1/2}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	$-\frac{5}{48N_c}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}(2N_c - 1)$	$-\frac{1}{N_c+1}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	$+\frac{1}{3N_c}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$
$N_{3/2}$	N_c	$+\frac{1}{6N_c}(2N_c - 3)$	0	$-\frac{1}{N_c+1}$	$+\frac{1}{6N_c^2}(N_c + 3)$
$N'_{3/2}$	N_c	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{12N_c}(N_c + 1)$	0	$-\frac{2}{3N_c}$
$N'_{3/2} - N_{3/2}$	0	$-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	$+\frac{1}{96N_c}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}(2N_c - 1)$	$-\frac{1}{2(N_c+1)}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	$+\frac{1}{6N_c}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$
$N'_{5/2}$	N_c	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{48N_c}(N_c + 1)$	0	$+\frac{1}{N_c}$
$\Delta_{1/2}$	N_c	$+\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3N_c}$
$\Delta_{3/2}$	N_c	$-\frac{1}{6}$	0	0	$+\frac{2}{3N_c}$

	$\langle \mathcal{O}_6 \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle S_c^2 \rangle$	$\langle \mathcal{O}_7 \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle s S_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_8 \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle \ell^{(2)} s S_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_9 \rangle$ $\frac{N_c+1}{N_c} \langle \mathcal{O}_4 \rangle + \langle \mathcal{O}_5 \rangle + \frac{8}{N_c^2} \langle \ell^i g^{ja} \{ S_c^j, G_c^{ia} \} \rangle$
$N_{1/2}$	$+\frac{1}{2N_c^2}(N_c + 3)$	$-\frac{1}{4N_c^2}(N_c + 3)$	0	$-\frac{1}{3N_c^3}(17N_c - 3)$
$N'_{1/2}$	$+\frac{2}{N_c}$	$+\frac{1}{2N_c}$	$+\frac{5}{6N_c}$	$+\frac{5}{3N_c^2}$
$N'_{1/2} - N_{1/2}$	0	0	$+\frac{5}{12N_c}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	$-\frac{1}{3N_c^2}\sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$
$N_{3/2}$	$+\frac{1}{2N_c^2}(N_c + 3)$	$-\frac{1}{4N_c^2}(N_c + 3)$	0	$+\frac{1}{6N_c^3}(17N_c - 3)$
$N'_{3/2}$	$+\frac{2}{N_c}$	$+\frac{1}{2N_c}$	$-\frac{2}{3N_c}$	$+\frac{2}{3N_c^2}$
$N'_{3/2} - N_{3/2}$	0	0	$-\frac{1}{24N_c}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	$-\frac{1}{6N_c^2}\sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$
$N'_{5/2}$	$+\frac{2}{N_c}$	$+\frac{1}{2N_c}$	$+\frac{1}{6N_c}$	$-\frac{1}{N_c^2}$
$\Delta_{1/2}$	$+\frac{2}{N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	0	$+\frac{4}{3N_c^2}$
$\Delta_{3/2}$	$+\frac{2}{N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	0	$-\frac{2}{3N_c^2}$

Tabla B.1: Elementos de matriz de los nueve operadores CCGL linealmente independientes para $N_c = 3$ para los estados bariónicos de $L = 1$ sin extrañeza. Las sexta y séptima fila corresponden a elementos de matriz fuera de la diagonal.

	$\langle \mathcal{O}_{10} \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle \ell g T_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{11} \rangle$ $\frac{1}{N_c} \langle t T_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{12} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle \ell^{(2)} t \{S_c, G_c\} \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{13} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle (\ell s) S_c^2 \rangle$
$N_{1/2}$	$-\frac{1}{12N_c^2} (N_c + 3)$	$-\frac{1}{4N_c^2} (N_c + 3)$	0	$+\frac{1}{6N_c^2} (N_c + 3)$
$N'_{1/2}$	$+\frac{5}{6N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	$-\frac{5}{24N_c^2} (N_c + 1)$	$-\frac{5}{3N_c^2}$
$N'_{1/2} - N_{1/2}$	$+\frac{1}{3N_c} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	0	$+\frac{5}{24N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}} (N_c + 1)$	$-\frac{2}{3N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$
$N_{3/2}$	$+\frac{1}{24N_c^2} (N_c + 3)$	$-\frac{1}{4N_c^2} (N_c + 3)$	0	$-\frac{1}{12N_c^3} (N_c + 3)$
$N'_{3/2}$	$+\frac{1}{3N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	$+\frac{1}{6N_c^2} (N_c + 1)$	$-\frac{2}{3N_c^2}$
$N'_{3/2} - N_{3/2}$	$+\frac{1}{6N_c} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	0	$-\frac{1}{48N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}} (N_c + 1)$	$-\frac{1}{3N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$
$N'_{5/2}$	$-\frac{1}{2N_c}$	$-\frac{1}{N_c}$	$-\frac{1}{24N_c^2} (N_c + 1)$	$+\frac{1}{N_c^2}$
$\Delta_{1/2}$	$+\frac{1}{6N_c}$	$+\frac{1}{2N_c}$	0	$+\frac{2}{3N_c^2}$
$\Delta_{3/2}$	$-\frac{1}{12N_c}$	$+\frac{1}{2N_c}$	0	$-\frac{1}{3N_c^2}$

	$\langle \mathcal{O}_{14} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle \{ \ell S_c, s S_c \} \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{15} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle (\ell S_c) (t T_c) \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{16} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle g S_c T_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{17} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle \ell^{(2)} S_c S_c \rangle$	$\langle \mathcal{O}_{18} \rangle$ $\frac{1}{N_c^2} \langle \ell^{(2)} g S_c T_c \rangle$
$N_{1/2}$	$+\frac{2}{3N_c^3} (N_c + 3)$	$+\frac{1}{3N_c^3} (N_c + 3)$	$+\frac{1}{4N_c^3} (N_c + 3)$	0	0
$N'_{1/2}$	$-\frac{5}{3N_c^2}$	$+\frac{5}{3N_c^2}$	$-\frac{1}{2N_c^2}$	$+\frac{5}{6N_c^2}$	$-\frac{5}{6N_c^2}$
$N'_{1/2} - N_{1/2}$	$-\frac{1}{6N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	$-\frac{1}{3N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	0	$-\frac{5}{6N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$	$-\frac{5}{12N_c^2} \sqrt{\frac{N_c+3}{2N_c}}$
$N_{3/2}$	$-\frac{1}{3N_c^3} (N_c + 3)$	$-\frac{1}{6N_c^3} (N_c + 3)$	$+\frac{1}{4N_c^3} (N_c + 3)$	0	0
$N'_{3/2}$	$-\frac{2}{3N_c^2}$	$+\frac{2}{3N_c^2}$	$-\frac{1}{2N_c^2}$	$-\frac{2}{3N_c^2}$	$+\frac{2}{3N_c^2}$
$N'_{3/2} - N_{3/2}$	$-\frac{1}{12N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	$-\frac{1}{6N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	0	$+\frac{1}{12N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$	$+\frac{1}{24N_c^2} \sqrt{\frac{5(N_c+3)}{N_c}}$
$N'_{5/2}$	$+\frac{1}{N_c^2}$	$-\frac{1}{N_c^2}$	$-\frac{1}{2N_c^2}$	$+\frac{1}{6N_c^2}$	$-\frac{1}{6N_c^2}$
$\Delta_{1/2}$	$+\frac{8}{3N_c^2}$	$-\frac{2}{3N_c^2}$	$-\frac{1}{2N_c^2}$	0	0
$\Delta_{3/2}$	$-\frac{4}{3N_c^2}$	$+\frac{1}{3N_c^2}$	$-\frac{1}{2N_c^2}$	0	0

Tabla B.2: Misma tabla que B.1 para los operadores $\mathcal{O}_{10, \dots, 18}$.

Apéndice C

Relación entre coeficientes y la parametrización

En este apéndice se presentan las expresiones analíticas que conectan los resultados descritos en el capítulo 5 con los estudios en la expansión en $1/N_c$. En el caso de $N_c = 3$, los coeficientes en $O_{\ell=0,1,2}$ se relacionan con los elementos de matriz dados en la tabla 5.2 como

$\ell = 0$:

$$c_1 - \frac{1}{6}c_{11} + \frac{1}{18}c_{16} = \frac{1}{3}(2S_1 - S_3) , \quad (\text{C.1})$$

$$c_6 + \frac{1}{2}c_{11} - \frac{1}{3}c_{16} = -3S_1 + S_2 + 2S_3 , \quad (\text{C.2})$$

$$c_7 - c_{11} = 2(S_2 - S_3) , \quad (\text{C.3})$$

$\ell = 1$:

$$c_2 - \frac{1}{6}c_{10} + \frac{2}{9}c_{13} + \frac{4}{9}c_{14} - \frac{2}{9}c_{15} = -2(2P_2 + P_4) , \quad (\text{C.4})$$

$$c_4 - \frac{1}{3}c_{10} - \frac{2}{3}c_{14} + \frac{4}{9}c_{15} = 4(P_2 - P_3 + P_4) , \quad (\text{C.5})$$

$$c_5 - \frac{1}{4}c_{10} - \frac{1}{18}c_{13} - \frac{11}{18}c_{14} + \frac{1}{9}c_{15} = P_1 - P_2 - P_3 + 4P_4 , \quad (\text{C.6})$$

$$c_9 - \frac{1}{6}c_{13} - \frac{5}{6}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} = 3(P_1 + 2P_2 - P_3 + P_4) , \quad (\text{C.7})$$

$\ell = 2$:

$$c_8 + \frac{1}{4}c_3 - \frac{1}{3}c_{18} - \frac{4}{3}c_{12} + \frac{4}{3}c_{17} = 36(D_1 + D_2) , \quad (\text{C.8})$$

$$c_3 - \frac{4}{3}c_{12} + \frac{4}{3}c_{17} = 24(D_1 + 2D_2) . \quad (\text{C.9})$$

Nótese que los términos a la derecha de la igualdad en las ecuaciones (C.7) y (C.8) se anulan en el caso del modelo $OGE+OME$.

Los operadores O_1 a O_9 pueden ser elegidos como una base independiente para los estados físicos de $N_c = 3$. Pidiendo $c_{10} = \dots = c_{18} = 0$ se pueden expresar los coeficientes $c_{1\dots 9}$ en términos de la parametrización de las matrices de masa

$$c_1 = \frac{1}{3}(2S_1 - S_3) , \quad (\text{C.10})$$

$$c_2 = -2(2P_2 + P_4) , \quad (\text{C.11})$$

$$c_3 = 24(D_1 + 2D_2) , \quad (\text{C.12})$$

$$c_4 = 4(P_2 - P_3 + P_4) , \quad (\text{C.13})$$

$$c_5 = P_1 - P_2 - P_3 + 4P_4 , \quad (\text{C.14})$$

$$c_6 = -3S_1 + S_2 + 2S_3 , \quad (\text{C.15})$$

$$c_7 = 2(S_2 - S_3) , \quad (\text{C.16})$$

$$c_8 = 6(5D_1 + 4D_2) , \quad (\text{C.17})$$

$$c_9 = 3(P_1 + 2P_2 - P_3 + P_4) . \quad (\text{C.18})$$

Invirtiendo las relaciones generales dadas en las ecuaciones (C.1)-(C.9) obtenemos

$$S_0 = 3c_1 + \frac{1}{2}c_6 - \frac{1}{4}c_{11} , \quad (\text{C.19})$$

$$S_1 = 3c_1 + \frac{1}{3}c_6 - \frac{1}{6}c_7 - \frac{1}{6}c_{11} + \frac{1}{18}c_{16} , \quad (\text{C.20})$$

$$S_2 = 3c_1 + \frac{2}{3}c_6 + \frac{1}{6}c_7 - \frac{1}{3}c_{11} - \frac{1}{18}c_{16} , \quad (\text{C.21})$$

$$S_3 = 3c_1 + \frac{2}{3}c_6 - \frac{1}{3}c_7 + \frac{1}{6}c_{11} - \frac{1}{18}c_{16} , \quad (\text{C.22})$$

$$P_1 = \frac{1}{6}c_2 - \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{9}c_5 + \frac{8}{27}c_9 + \frac{1}{36}c_{10} - \frac{1}{54}c_{13} - \frac{2}{27}c_{14} - \frac{1}{27}c_{15} , \quad (\text{C.23})$$

$$P_2 = -\frac{1}{6}c_2 - \frac{1}{9}c_5 + \frac{1}{27}c_9 + \frac{1}{18}c_{10} - \frac{1}{27}c_{13} - \frac{1}{27}c_{14} + \frac{1}{27}c_{15} , \quad (\text{C.24})$$

$$P_3 = -\frac{1}{3}c_2 - \frac{1}{4}c_4 + \frac{1}{9}c_5 - \frac{1}{27}c_9 + \frac{1}{9}c_{10} - \frac{2}{27}c_{13} - \frac{1}{54}c_{14} - \frac{1}{27}c_{15} , \quad (\text{C.25})$$

$$P_4 = -\frac{1}{6}c_2 + \frac{2}{9}c_5 - \frac{2}{27}c_9 - \frac{1}{36}c_{10} - \frac{1}{27}c_{13} - \frac{4}{27}c_{14} + \frac{1}{27}c_{15} , \quad (\text{C.26})$$

$$D_1 = -\frac{1}{36}c_3 + \frac{1}{18}c_8 - \frac{1}{27}c_{12} + \frac{1}{27}c_{17} - \frac{1}{54}c_{18} , \quad (\text{C.27})$$

$$D_2 = \frac{5}{144}c_3 - \frac{1}{36}c_8 - \frac{1}{108}c_{12} + \frac{1}{108}c_{17} + \frac{1}{108}c_{18} . \quad (\text{C.28})$$

Resulta conveniente eliminar la contribución del operador unidad a los elementos de matriz de la interacción spin-spin definiendo los parámetros $\Delta S_{12}, \Delta S_3$, ver ecuación (5.38). En función de los coeficientes de la expansión estos parámetros están

dados por

$$\Delta S_{12} = \frac{1}{6}c_6 + \frac{1}{6}c_7 - \frac{1}{12}c_{11} - \frac{1}{18}c_{16} , \quad (\text{C.29})$$

$$\Delta S_3 = \frac{1}{6}c_6 - \frac{1}{3}c_7 + \frac{5}{12}c_{11} - \frac{1}{18}c_{16} . \quad (\text{C.30})$$

Apéndice D

Relaciones entre operadores

En este apéndice se presentan explícitamente las relaciones entre los operadores *CCGL* que se cumplen para N_c arbitrario en un espacio de dimensión nueve definido por los siete elementos de matriz diagonales y dos elementos fuera de la diagonal relevantes para los estados físicos de $N_c = 3$. Las relaciones, clasificadas según las propiedades de transformación de los operadores, están dadas por

$\ell = 0$:

$$\frac{N_c + 3}{2N_c^2(N_c - 1)} O_1 - \frac{1}{(N_c - 1)} O_6 + O_7 + O_{11} = 0, \quad (\text{D.1})$$

$$-\frac{N_c + 3}{2N_c^3(N_c - 1)} O_1 + \frac{N_c + 1}{2N_c(N_c - 1)} O_6 + O_{16} = 0, \quad (\text{D.2})$$

$\ell = 1$:

$$\frac{1}{2N_c} O_2 + \frac{N_c + 1}{4N_c} O_4 + \frac{1}{4} O_5 + O_{10} = 0, \quad (\text{D.3})$$

$$-\frac{2}{N_c^2} O_2 + \frac{N_c - 1}{4N_c^2} O_5 + \frac{N_c - 1}{4N_c} O_9 + O_{13} = 0, \quad (\text{D.4})$$

$$-\frac{4}{N_c^2} O_2 + \frac{3(N_c + 1)}{2N_c^2} O_4 + \frac{4N_c - 1}{2N_c^2} O_5 + \frac{2N_c - 1}{2N_c} O_9 + O_{14} = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$\frac{2}{N_c^2} O_2 - \frac{N_c + 1}{N_c^2} O_4 - \frac{N_c - 1}{2N_c^2} O_5 - \frac{N_c - 1}{2N_c} O_9 + O_{15} = 0, \quad (\text{D.6})$$

$\ell = 2$:

$$\frac{4}{N_c + 1} O_{12} + O_{17} = 0, \quad (\text{D.7})$$

$$-\frac{8}{N_c(N_c - 1)} O_3 - \frac{2}{N_c - 1} O_8 + O_{17} = 0, \quad (\text{D.8})$$

$$\frac{1}{N_c} O_8 + O_{18} = 0. \quad (\text{D.9})$$

Apéndice E

Dependencia angular de los coeficientes

En este apéndice se presentan las expresiones explícitas de los coeficientes c_i de la expansión en $1/N_c$ en función de los ángulos de mezcla θ_1, θ_3 . Eligiendo $\{O_1, \dots, O_9\}$ como base de operadores independiente se obtienen $c_1 \dots c_9$ en términos de los ángulos y las masas físicas,

$$c_1 = \frac{1}{9} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 + \frac{2}{9} (N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 + \frac{1}{9} (N_{1/2} + N'_{1/2}) + \frac{2}{9} (N_{3/2} + N'_{3/2}) - \frac{1}{9} (\Delta_{1/2} + 2\Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.1})$$

$$c_2 = \frac{1}{6} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 + \frac{2}{15} (N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 - \frac{1}{6} (N_{1/2} + N'_{1/2}) - \frac{2}{15} (N_{3/2} + N'_{3/2}) + \frac{3}{5} N_{5/2} + \frac{2}{3} (\Delta_{1/2} - \Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.2})$$

$$c_3 = (N'_{1/2} - N_{1/2}) \left(\cos 2\theta_1 + 4 \sin 2\theta_1 \right) - (N'_{3/2} - N_{3/2}) \left(\frac{8}{5} \cos 2\theta_3 + 4\sqrt{\frac{2}{5}} \sin 2\theta_3 \right) + N'_{1/2} + N_{1/2} - \frac{8}{5} (N'_{3/2} + N_{3/2}) + \frac{6}{5} N_{5/2} , \quad (\text{E.3})$$

$$c_4 = -\frac{1}{6} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \left(\cos 2\theta_1 + 2 \sin 2\theta_1 \right) - (N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(\frac{2}{15} \cos 2\theta_3 + \frac{5}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \sin 2\theta_3 \right) + \frac{1}{6} (N_{1/2} + N'_{1/2}) + \frac{2}{15} (N_{3/2} + N'_{3/2}) - \frac{3}{5} N_{5/2} - \frac{4}{3} (\Delta_{1/2} - \Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.4})$$

$$c_5 = -\frac{1}{4} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \left(\frac{1}{2} \cos 2\theta_1 + \frac{1}{3} \sin 2\theta_1 \right) + (N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(\frac{1}{5} \cos 2\theta_3 - \frac{1}{6} \sqrt{\frac{5}{2}} \sin 2\theta_3 \right) \\ - \frac{5}{24} (N_{1/2} + N'_{1/2}) + \frac{2}{15} (N_{3/2} + N'_{3/2}) + \frac{3}{20} N_{5/2} - \frac{4}{3} (\Delta_{1/2} - \Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.5})$$

$$c_6 = -\frac{7}{12} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 - \frac{7}{6} (N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 - \frac{5}{12} (N_{1/2} + N'_{1/2}) \\ - \frac{5}{6} (N_{3/2} + N'_{3/2}) + \frac{1}{2} N_{5/2} + \frac{2}{3} (\Delta_{1/2} + 2\Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.6})$$

$$c_7 = -\frac{1}{6} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \cos 2\theta_1 - \frac{1}{3} (N_{3/2} - N'_{3/2}) \cos 2\theta_3 + \frac{1}{6} (N_{1/2} + N'_{1/2}) \\ + \frac{1}{3} (N_{3/2} + N'_{3/2}) + N_{5/2} - \frac{2}{3} (\Delta_{1/2} + 2\Delta_{3/2}) , \quad (\text{E.7})$$

$$c_8 = - (N_{1/2} - N'_{1/2}) \left(\frac{5}{4} \cos 2\theta_1 + 2 \sin 2\theta_1 \right) + 2 (N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(\cos 2\theta_3 + \sqrt{\frac{2}{5}} \sin 2\theta_3 \right) \\ + \frac{5}{4} (N_{1/2} + N'_{1/2}) - 2 (N_{3/2} + N'_{3/2}) + \frac{3}{2} N_{5/2} , \quad (\text{E.8})$$

$$c_9 = -\frac{1}{4} (N_{1/2} - N'_{1/2}) \left(3 \cos 2\theta_1 + \sin 2\theta_1 \right) + \frac{1}{2} (N_{3/2} - N'_{3/2}) \left(\frac{3}{5} \cos 2\theta_3 - \sqrt{\frac{5}{2}} \sin 2\theta_3 \right) \\ + \frac{7}{10} (N_{3/2} + N'_{3/2}) - \frac{1}{4} (N_{1/2} + N'_{1/2}) - \frac{9}{10} N_{5/2} - \Delta_{1/2} + \Delta_{3/2} . \quad (\text{E.9})$$

Apéndice F

El *matching* para el modelo de Isgur-Karl

El modelo de Isgur-Karl es un modelo particular del modelo *OGE* considerado en esta tesis. En este apéndice presentamos los resultados que se obtienen evaluando los parámetros del modelo general de modo de obtener el modelo de Isgur-Karl. Esto nos permite poder verificar nuestros resultados.

El modelo de Isgur-Karl [35] está definido por el Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{IK} = H_0 + \mathcal{H}_{\text{hyp}}, \quad (\text{F.1})$$

donde H_0 contiene al potencial confinante y a los términos cinéticos de los quarks. Este Hamiltoniano es simétrico ante transformaciones de espín y de sabor. La interacción hiperfina \mathcal{H}_{hyp} está dada por

$$\mathcal{H}_{\text{hyp}} = A \sum_{i < j} \left[\frac{8\pi}{3} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \delta^{(3)}(\vec{r}_{ij}) + \frac{1}{r_{ij}^3} (3\vec{s}_i \cdot \hat{r}_{ij} \vec{s}_j \cdot \hat{r}_{ij} - \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j) \right], \quad (\text{F.2})$$

donde A determina la magnitud de la interacción ¹ y $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ es la distancia entre los quarks i, j . El primer término es corresponde a una interacción de contacto spin-spin y el segundo término describe una interacción tensorial entre dos dipolos. Ambos términos son independientes del sabor. Este Hamiltoniano de interacción es una aproximación de la interacción dada por el intercambio de un gluón, despreciando la interacción spin-órbita. Toda la espectroscopía de los bariones con $L = 1$ está determinada por una única constante δ , definida como $\delta = A \frac{2\alpha_s^3}{\sqrt{2\pi}} \simeq 300$ MeV, junto con la masa promedio del multiplete $m_0 \simeq 1610$ MeV. La matriz de masa está dada

¹En la referencia [35], A está tomado como $A = \frac{2\alpha_s}{3m^2}$.

por

$$M_{1/2} = m_0 + \frac{1}{4}\delta \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{F.3})$$

$$M_{3/2} = m_0 + \frac{1}{4}\delta \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad (\text{F.4})$$

$$M_{5/2} = m_0 + \frac{1}{5}\delta, \quad (\text{F.5})$$

$$\Delta_{1/2} = \Delta_{3/2} = m_0 + \frac{1}{4}\delta. \quad (\text{F.6})$$

Los ángulos de mezcla son independientes de las masas hadrónicas y están dadas por

$$\theta_1^{IK} = \arctan\left(\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)\right) = 0.55, \quad \theta_3^{IK} = \arctan\left(-\frac{\sqrt{10}}{14 + \sqrt{206}}\right) = -0.11. \quad (\text{F.7})$$

El *matching* a los operadores de la expansión en $1/N_c$ realizado en la referencia [33] resulta en $c_1 = \frac{1}{3}m_0 - \frac{1}{4}\delta = 462$ MeV, $c_6 = \frac{3}{2}\delta = 450$ MeV, $c_8 = -\frac{6}{5}\delta = -360$ MeV, $c_{17} = \frac{9}{10}\delta = 270$ MeV, todos los demás coeficientes se anulan. El correspondiente $\chi^2 = 33$ es grande ya que, debido a la ausencia de interacción de tipo spin-órbita, el modelo de Isgur-Karl no logra describir la separación de masas entre $\Delta_{1/2}(1620)$ y $\Delta_{3/2}(1700)$ y la masa obtenida para $N_{1/2}(1535)$ resulta muy baja. Esto explica por qué los valores para los ángulos $(\theta_1^{IK}, \theta_3^{IK})$ se encuentran fuera del rectángulo del caso *OGE* en el gráfico de la figura 5.3, que ha sido obtenido a partir de un ajuste con un valor de χ^2 mucho más chico.

Evaluando las integrales radiales de la ecuaciones (5.7), se obtienen los siguientes valores para los elementos de matriz de nuestra parametrización

$$S_1 = m_0 - \frac{1}{4}\delta = 1535 \text{ MeV}, \quad (\text{F.8})$$

$$S_2 = S_3 = m_0 + \frac{1}{4}\delta = 1685 \text{ MeV}, \quad (\text{F.9})$$

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 0, \quad (\text{F.10})$$

$$D_1 = -D_2 = -\frac{1}{20}\delta = -15 \text{ MeV}, \quad (\text{F.11})$$

que en términos de los parámetros definidos en la ecuación (5.38) corresponden a

$$S_0 = m_0 = 1610 \text{ MeV}, \quad (\text{F.12})$$

$$\Delta S_{12} = \Delta S_3 = \frac{1}{4}\delta = 75 \text{ MeV}. \quad (\text{F.13})$$

De este modo el modelo de Isgur-Karl constituye una verificación analítica simple para nuestras expresiones generales.

Apéndice G

Elementos de matriz de $\mathcal{O}_{1,2,3}$ para bariones de la banda $\mathcal{N} = 2$

En este apéndice se presentan los detalles de los cálculos de los elementos de matriz de los operadores *CCGL* de orden más bajo $\mathcal{O}_{1,2,3}$ con un operador orbital genérico ξ en el caso de los multipletes pertenecientes a la banda $\mathcal{N} = 2$ dados por $[56', 0^+]$, $[56, 2^+]$, $[70, 0^+]$ y $[70, 2^+]$.

Para realizar los cálculos explícitos de las masas de los bariones fue necesario calcular los elementos de matriz de los operadores *CCGL* $\mathcal{O}_{1,2,3}$. Para llevar a cabo estos cálculos se utilizaron los elementos de matriz para los generadores de $SU(6)$ que actúan sobre el *core* de $N_c - 1$ quarks de los bariones en *large* N_c [27]

$$\begin{aligned} \langle S'_c = I'_c; m'_1, \alpha'_1 | G_c^{ia} | S_c = I_c; m_1, \alpha_1 \rangle = & \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2I_c + 1}{2I'_c + 1}} \sqrt{(N_c + 1)^2 - (I'_c - I_c)^2 (I'_c + I_c + 1)^2} \\ & \times \left(\begin{array}{c|c} S_c & 1 \\ m_1 & i \end{array} \middle| \begin{array}{c} S'_c \\ m'_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_c & 1 \\ \alpha_1 & a \end{array} \middle| \begin{array}{c} I'_c \\ \alpha'_1 \end{array} \right), \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

$$\langle S'_c = I'_c; m'_1, \alpha'_1 | T_c^a | S_c = I_c; m_1, \alpha_1 \rangle = \sqrt{I_c(I_c + 1)} \left(\begin{array}{c|c} I_c & 1 \\ \alpha_1 & a \end{array} \middle| \begin{array}{c} I_c \\ \alpha'_1 \end{array} \right) \delta_{I'_c I_c} \delta_{S'_c S_c} \delta_{m'_1 m_1}, \quad (\text{G.2})$$

$$\langle S'_c = I'_c; m'_1, \alpha'_1 | S_c^i | S_c = I_c; m_1, \alpha_1 \rangle = \sqrt{I_c(I_c + 1)} \left(\begin{array}{c|c} S_c & 1 \\ m_1 & i \end{array} \middle| \begin{array}{c} S_c \\ m'_1 \end{array} \right) \delta_{I'_c I_c} \delta_{S'_c S_c} \delta_{\alpha'_1 \alpha_1}. \quad (\text{G.3})$$

Los operadores $\mathcal{O}_{1,2,3}$ también involucran a los operadores que actúan sobre el quark excitado de la función de onda bariónica. Se pueden obtener los elementos de matriz de los s, t, g en términos de los de S_c, T_c, G_c notando que el quark excitado es equivalente a un *core* de un quark con espín e isospin 1/2. Por lo tanto, basta reemplazar cada $N_c - 1$ por 1 y cada $S_c = I_c$ y $S'_c = I'_c$ por 1/2.

Con la ayuda de las ecuaciones (G.1–G.3) y la definición para los elementos de matriz reducidos dada por el teorema de Wigner-Eckart (ecuación (5.1)), obtuvimos

los siguientes expresiones para los elementos de matriz

$$\begin{aligned} \langle \xi \cdot s \rangle &= \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{I'I} \delta_{I_3 I_3} (-1)^{l'+1/2+S'-S} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{(2S'+1)(2S+1)} \langle l' || \xi || l \rangle \\ &\times \sum_{l_s=l \pm 1/2} (-1)^{l_s} (2l_s+1) \begin{Bmatrix} l_s & \frac{1}{2} & l' \\ 1 & l & \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \sum_{\eta=\pm 1} c_{\rho\eta} c_{\rho'\eta} \begin{Bmatrix} I_c & \frac{1}{2} & S' \\ l & J & l_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I_c & \frac{1}{2} & S \\ l & J & l_s \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

$$\begin{aligned} \langle \xi^{(2)} \cdot (g \cdot G_c) \rangle &= \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{I'I} \delta_{I_3 I_3} (-1)^{J-2I+l+S} \frac{3}{8} \sqrt{5} \sqrt{(2S'+1)(2S+1)} \langle l' || \xi^{(2)} || l \rangle \\ &\times \begin{Bmatrix} 2 & l & l' \\ J & S' & S \end{Bmatrix} \sum_{\eta'\eta} c_{\rho'\eta'} c_{\rho\eta} (-1)^{(1+\eta')/2} \sqrt{(2I'_c+1)(2I_c+1)} \\ &\times \sqrt{(N_c+1)^2 - \left(\frac{\eta'-\eta}{2}\right)^2} (2I+1)^2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ I'_c & I & I_c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} I'_c & I_c & 1 \\ S' & S & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

donde $\rho = S - I = \pm 1, 0$ y $\eta/2 = I_c + I = \pm 1/2$ y los coeficientes $c_{\rho\eta}$ dependen de la simetría de los estados considerados al calcular el elemento de matriz

$$c_{\pm, \pm}^{MS} = 1, \quad (\text{G.6})$$

$$c_{\pm, \mp}^{SYM} = c_{\pm, \mp}^{SYM} = c_{\pm, \mp}^{MS} = 0, \quad (\text{G.7})$$

$$c_{0,-}^{SYM} = c_{0,+}^{MS} = \sqrt{\frac{S(N_c+2(S+1))}{N_c(2S+1)}}, \quad (\text{G.8})$$

$$c_{0,+}^{SYM} = -c_{0,-}^{MS} = \sqrt{\frac{(S+1)(N_c-2S)}{N_c(2S+1)}}, \quad (\text{G.9})$$

donde los supraíndices SYM y MS corresponden a representaciones simétricas y mixtasimétricas respectivamente.

Las ecuaciones (G.4) y (G.5) evaluadas en $\xi = \ell$ corresponde a las ecuaciones (A7) y (A9) de la referencia [27].

G.1 Para N_c arbitrario

En las tablas G.1-G.4 se presentan los elementos de matriz de los operadores $CCGL$ $\mathcal{O}_{1,2,3}$ con un operador orbital genérico ξ en el caso de N_c arbitrario para los estados no-extraños pertenecientes a las representaciones $[\mathbf{56}', 0^+]$, $[\mathbf{56}, 2^+]$, $[\mathbf{70}, 0^+]$ y $[\mathbf{70}, 2^+]$, donde recordamos que

$$\begin{aligned} R_{1,2,2} &= \frac{1}{\sqrt{30}} \langle 2 || \xi || 2 \rangle, \\ R_{2,2,2} &= \frac{1}{\sqrt{105}} \langle 2 || \xi^{(2)} || 2 \rangle, \\ R_{20,2} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \langle 0 || \xi^{(2)} || 2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

G.2 En el límite de *large* N_c

En lo que sigue, presentamos las matrices de masa que se obtienen con el Hamiltoniano dado por la ecuación (6.2) para los estados asociados con la banda $\mathcal{N} = 2$. Estos elementos de matriz se obtienen tomando el límite de $N_c \rightarrow \infty$ para los valores de las tablas G.1–G.4.

Estados con $I = 1/2$

En el límite de *large* N_c la matriz de masa para los estados $N_{1/2}$ puede escribirse como

$$M_{N_{1/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{S_0} N_c & 0 & 0 \\ & c_1^{MS_0} N_c & \sqrt{2} c_3^{MS_0 MS_2} \\ & & c_1^{MS_2} N_c - \frac{3}{2} c_2^{MS_2} - c_3^{MS_2} \end{pmatrix} \quad (\text{G.11})$$

donde usó la base $\{^2N_{1/2}^{S_0}, ^2N_{1/2}^{MS_0}, ^4N_{1/2}^{MS_2}\}$ para expresar esta matriz. Los autovectores de esta matriz están dados por

$$\begin{pmatrix} N_{1/2}^{K=0} \\ N_{1/2}^{K=1} \\ N_{1/2}^{K=1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\eta_{MS_0} \\ 0 & \eta_{MS_0} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{G.12})$$

En el caso de los estados $N_{3/2}$, la matriz de masa en el límite de *large* N_c está dada por

$$M_{N_{3/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{MS_0} N_c & 0 & -c_3^{MS_0 MS_2} & -c_3^{MS_0 MS_2} \\ & c_1^{S_2} N_c & c_2^{S_2 MS_2} & -c_2^{S_2 MS_2} \\ & & c_1^{MS_2} N_c - c_2^{MS_2} & -\frac{1}{2} c_2^{MS_2} - c_3^{MS_2} \\ & & & c_1^{MS_2} N_c - c_2^{MS_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.13})$$

en la base $\{^4N_{3/2}^{MS_0}, ^2N_{3/2}^{S_2}, ^4N_{3/2}^{MS_2}, ^4N_{3/2}^{MS_2}\}$. Los autovectores de esta matriz son

$$\begin{pmatrix} N_{3/2}^{K=1} \\ N_{3/2}^{K=2} \\ N_{3/2}^{K=1'} \\ N_{3/2}^{K=2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{MS_0} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{S_2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \eta_{S_2} \\ -\eta_{MS_0} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\eta_{S_2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.14})$$

En el caso de $N_{5/2}$ obtenemos

$$M_{N_{5/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{S_2} N_c & -\frac{2}{3} c_2^{S_2 MS_2} & -\frac{\sqrt{14}}{3} c_2^{S_2 MS_2} \\ & c_1^{MS_2} N_c + \frac{2}{3} c_2^{MS_2} & -\frac{\sqrt{14}}{6} c_2^{MS_2} + \frac{\sqrt{14}}{6} c_3^{MS_2} \\ & & c_1^{MS_2} N_c - \frac{1}{6} c_2^{MS_2} + \frac{5}{7} c_3^{MS_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.15})$$

usando la base $\{^2N_{5/2}^{S_2}, ^2N_{5/2}^{MS_2}, ^4N_{5/2}^{MS_2}\}$. A esta matriz le corresponden los siguientes autovectores

$$\begin{pmatrix} N_{5/2}^{K=2} \\ N_{5/2}^{K=2'} \\ N_{5/2}^{K=3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{3}\eta_{S_2} & \frac{\sqrt{7}}{3}\eta_{S_2} \\ -\eta_{S_2} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{7}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{7}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.16})$$

En el caso de $N_{7/2}$ el elemento de matriz resulta

$$m_{N_{7/2}^{K=3}} = c_1^{MS_2} N_c + c_2^{MS_2} - \frac{2}{7}c_3^{MS_2} \quad (\text{G.17})$$

Estados con $I = 3/2$

La matriz para $\Delta_{1/2}$ es

$$M_{\Delta_{1/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{MS_0} N_c & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}c_3^{MS_0MS_2} & \frac{3}{\sqrt{5}}c_3^{MS_0MS_2} \\ c_1^{S_2} N_c & & \frac{3}{\sqrt{5}}c_2^{S_2MS_2} & -\frac{1}{\sqrt{5}}c_2^{S_2MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{3}{5}c_2^{MS_2} + \frac{4}{5}c_3^{MS_2} & & & -\frac{3}{10}c_2^{MS_2} - \frac{3}{5}c_3^{MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{7}{5}c_2^{MS_2} - \frac{4}{5}c_3^{MS_2} & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{G.18})$$

en la base $\{^2\Delta_{1/2}^{MS_0}, ^4\Delta_{1/2}^{S_2}, \Delta_{1/2}^{MS_2}, ^6\Delta_{1/2}^{MS_2}\}$ y sus autovectores están dados por

$$\begin{pmatrix} \Delta_{1/2}^{K=1} \\ \Delta_{1/2}^{K=2} \\ \Delta_{1/2}^{K=1'} \\ \Delta_{1/2}^{K=2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\eta_{MS_0} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\eta_{MS_0} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\eta_{S_2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}}\eta_{S_2} \\ -\eta_{MS_0} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 0 & -\eta_{S_2} & -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.19})$$

En el caso de los estados $\Delta_{3/2}$ obtuvimos

$$M_{\Delta_{3/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{S_0} N_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1^{MS_0} N_c & 0 & -\frac{1}{\sqrt{10}}c_3^{MS_0MS_2} & \frac{4}{5}c_3^{MS_0MS_2} & \frac{3}{5}\sqrt{\frac{7}{2}}c_3^{MS_0MS_2} \\ c_1^{S_2} N_c & & -\frac{1}{\sqrt{2}}c_2^{S_2MS_2} & \frac{2}{\sqrt{5}}c_2^{S_2MS_2} & -\sqrt{\frac{7}{10}}c_2^{S_2MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c + \frac{1}{2}c_2^{MS_2} & & \frac{5}{2\sqrt{10}}c_2^{MS_2} - \frac{1}{\sqrt{10}}c_3^{MS_2} & & \frac{3}{\sqrt{35}}c_3^{MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{2}{5}c_2^{MS_2} & & & & -\frac{3}{10}\sqrt{\frac{7}{2}}c_2^{MS_2} - \frac{3}{7}\sqrt{\frac{7}{2}}c_3^{MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{11}{10}c_2^{MS_2} - \frac{2}{7}c_3^{MS_2} & & & & \end{pmatrix}, \quad (\text{G.20})$$

usando la base $\{^4\Delta_{3/2}^{S_0}, ^4\Delta_{3/2}^{MS_0}, ^4\Delta_{3/2}^{S_2}, ^2\Delta_{3/2}^{MS_2}, ^4\Delta_{3/2}^{MS_2}, ^6\Delta_{3/2}^{MS_2}\}$. Los autovectores están

dados por

$$\begin{pmatrix} \Delta_{3/2}^{K=0} \\ \Delta_{3/2}^{K=1} \\ \Delta_{3/2}^{K=2} \\ \Delta_{3/2}^{K=1'} \\ \Delta_{3/2}^{K=2'} \\ \Delta_{3/2}^{K=3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{5}}\eta MS_0 & -\frac{2\sqrt{2}}{5}\eta MS_0 & -\frac{3\sqrt{7}}{10}\eta MS_0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}\eta S_2 & -\sqrt{\frac{2}{5}}\eta S_2 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}}\eta S_2 \\ 0 & -\eta MS_0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{3\sqrt{7}}{10} \\ 0 & 0 & -\eta S_2 & \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{7}{10}} & -\frac{\sqrt{7}}{5} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{G.21})$$

Para $\Delta_{5/2}$ obtuvimos

$$M_{\Delta_{5/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{MS_0} N_c & 0 & \sqrt{\frac{3}{5}}c_3^{MS_0 MS_2} & -\frac{1}{5}\sqrt{21}c_3^{MS_0 MS_2} & -\frac{1}{5}\sqrt{14}c_3^{MS_0 MS_2} \\ c_1^{S_2} N_c & -\frac{1}{3}\sqrt{7}c_2^{S_2 MS_2} & \frac{1}{3\sqrt{5}}c_2^{S_2 MS_2} & -\frac{1}{5}\sqrt{6}c_2^{S_2 MS_2} & -\frac{1}{5}\sqrt{6}c_2^{S_2 MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{1}{3}c_2^{MS_2} & \frac{5}{6}\sqrt{\frac{7}{5}}c_2^{MS_2} + \frac{1}{7}\sqrt{\frac{7}{5}}c_3^{MS_2} & 2\sqrt{\frac{6}{35}}c_3^{MS_2} & -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}c_2^{MS_2} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}c_3^{MS_2} & -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}c_2^{MS_2} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}c_3^{MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c - \frac{1}{15}c_2^{MS_2} - \frac{4}{7}c_3^{MS_2} & -\frac{4}{7}c_3^{MS_2} & -\frac{4}{7}c_3^{MS_2} & c_1^{MS_2} N_c - \frac{3}{5}c_2^{MS_2} + \frac{2}{7}c_3^{MS_2} & c_1^{MS_2} N_c - \frac{3}{5}c_2^{MS_2} + \frac{2}{7}c_3^{MS_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.22})$$

usando la base $\{6\Delta_{3/2}^{MS_0}, 4\Delta_{3/2}^{S_2}, 2\Delta_{3/2}^{MS_2}, 4\Delta_{3/2}^{MS_2}, 6\Delta_{3/2}^{MS_2}\}$. Los autovectores de esta matriz están dados por

$$\begin{pmatrix} \Delta_{5/2}^{K=1} \\ \Delta_{5/2}^{K=2} \\ \Delta_{5/2}^{K=1'} \\ \Delta_{5/2}^{K=2'} \\ \Delta_{5/2}^{K=3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}}\eta MS_0 & \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{2}}\eta MS_0 & \frac{\sqrt{7}}{5}\eta MS_0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}\eta S_2 & -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{5}}\eta S_2 & \sqrt{\frac{3}{5}}\eta S_2 \\ -\eta MS_0 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{5}} & \frac{1}{5}\sqrt{\frac{21}{2}} & \frac{\sqrt{7}}{5} \\ 0 & -\eta S_2 & \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}} & -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{14}{5}} & -\frac{8\sqrt{2}}{15} & \frac{\sqrt{3}}{5} \end{pmatrix} \quad (\text{G.23})$$

La matriz para $\Delta_{7/2}$ es

$$M_{\Delta_{7/2}} = \begin{pmatrix} c_1^{S_2} N_c & -\frac{2}{\sqrt{5}}c_2^{S_2 MS_2} & -\sqrt{\frac{6}{5}}c_2^{S_2 MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c + \frac{2}{5}c_2^{MS_2} + \frac{8}{35}c_3^{MS_2} & -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}c_2^{MS_2} + \frac{18}{35}\sqrt{\frac{3}{2}}c_3^{MS_2} & -\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}c_2^{MS_2} + \frac{18}{35}\sqrt{\frac{3}{2}}c_3^{MS_2} \\ c_1^{MS_2} N_c + \frac{1}{10}c_2^{MS_2} + \frac{17}{35}c_3^{MS_2} & c_1^{MS_2} N_c + \frac{1}{10}c_2^{MS_2} + \frac{17}{35}c_3^{MS_2} & c_1^{MS_2} N_c + \frac{1}{10}c_2^{MS_2} + \frac{17}{35}c_3^{MS_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.24})$$

con base $\{4\Delta_{3/2}^{S_2}, 4\Delta_{3/2}^{MS_2}, 6\Delta_{3/2}^{MS_2}\}$ cuyos autovectores están dados por

$$\begin{pmatrix} \Delta_{7/2}^{K=2} \\ \Delta_{7/2}^{K=2'} \\ \Delta_{7/2}^{K=3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{2}{5}}\eta S_2 & \sqrt{\frac{3}{5}}\eta S_2 \\ -\eta S_2 & \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.25})$$

Finalmente el elemento de matriz del estado $\Delta_{9/2}$ es

$$m_{\Delta_{9/2}^{K=3}} = c_1^{MS_2} N_c + c_2^{MS_2} - \frac{2c_3^{MS_2}}{7}. \quad (\text{G.26})$$

	\mathcal{O}_1	\mathcal{O}_2	\mathcal{O}_3
${}^2N_{1/2}^{S_0}$	N_c	0	0
${}^2N_{1/2}^{MS_0}$	N_c	0	0
${}^4N_{1/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{3}{2}R1_{2,2}$	$-\frac{7}{16N_c}(N_c+1)R2_{2,2}$
${}^2N_{1/2}^{S_0} - {}^2N_{1/2}^{MS_0}$	0	0	0
${}^2N_{1/2}^{S_0} - {}^4N_{1/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{2(N_c-1)}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^2N_{1/2}^{MS_0} - {}^4N_{1/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{1}{N_c}(2N_c-1)\sqrt{\frac{2(N_c+3)}{3N_c}}R2_{0,2}$
${}^4N_{3/2}^{MS_0}$	N_c	0	0
${}^2N_{3/2}^{S_2}$	N_c	$-\frac{3}{2N_c}R1_{2,2}$	0
${}^2N_{3/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{1}{2N_c}(2N_c-3)R1_{2,2}$	0
${}^4N_{3/2}^{MS_2}$	N_c	$-R1_{2,2}$	0
${}^4N_{3/2}^{MS_0} - {}^2N_{3/2}^{S_2}$	0	0	$\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4N_{3/2}^{MS_0} - {}^2N_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}N_c}(2N_c-1)\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4N_{3/2}^{MS_0} - {}^4N_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{2}{\sqrt{3}N_c}(N_c+1)R2_{0,2}$
${}^2N_{3/2}^{S_2} - {}^2N_{3/2}^{MS_2}$	0	$\frac{1}{2N_c}\sqrt{3(N_c+3)(N_c-1)}R1_{2,2}$	0
${}^2N_{3/2}^{S_2} - {}^4N_{3/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3(N_c-1)}{N_c}}R1_{2,2}$	$\frac{7}{32N_c}\sqrt{\frac{3(N_c-1)}{N_c}}R2_{2,2}$
${}^2N_{3/2}^{MS_2} - {}^4N_{3/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}R1_{2,2}$	$-\frac{7}{32N_c}(2N_c-1)\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}R2_{2,2}$
${}^2N_{5/2}^{S_2}$	N_c	$\frac{1}{N_c}R1_{22}$	0
${}^2N_{5/2}^{MS_2}$	N_c	$\frac{1}{3N_c}(2N_c-3)R1_{22}$	0
${}^4N_{5/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{1}{6}R1_{22}$	$\frac{5}{16N_c}(N_c+1)R2_{22}$
${}^2N_{5/2}^{S_2} - {}^2N_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{3N_c}\sqrt{(N_c+3)(N_c-1)}R1_{22}$	0
${}^2N_{5/2}^{S_2} - {}^4N_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}}R1_{22}$	$-\frac{1}{16N_c}\sqrt{\frac{21}{2}}\sqrt{\frac{N_c-1}{N_c}}R2_{22}$
${}^2N_{5/2}^{MS_2} - {}^4N_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}R1_{22}$	$\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{(2N_c-1)}{16N_c}\sqrt{\frac{N_c+3}{N_c}}R2_{22}$
${}^4N_{7/2}^{MS_2}$	N_c	$R1_{22}$	$-\frac{1}{8N_c}(N_c+1)R2_{22}$

Tabla G.1: Elementos de matriz para estados con $I = 1/2$ para N_c arbitrario.

	\mathcal{O}_1	\mathcal{O}_2	\mathcal{O}_3
${}^2\Delta_{1/2}^{MS_0}$	N_c	0	0
${}^4\Delta_{1/2}^{S_2}$	N_c	$-\frac{9}{2N_c}R1_{22}$	$\frac{21}{8N_c^2}R2_{22}$
${}^4\Delta_{1/2}^{MS_2}$	N_c	$\frac{3}{10N_c}(15 - 2N_c)R1_{22}$	$\frac{7}{40N_c^2}(2N_c^2 + 2N_c - 15)R2_{22}$
${}^6\Delta_{1/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{7}{5}R1_{22}$	$-\frac{7}{20N_c}(N_c + 1)R2_{22}$
${}^2\Delta_{1/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{1/2}^{S_2}$	0	0	$-\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^2\Delta_{1/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{1/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{15}N_c}(2N_c + 5)\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^2\Delta_{1/2}^{MS_0} - {}^6\Delta_{1/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{2}{N_c}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{1/2}^{S_2} - {}^4\Delta_{1/2}^{MS_2}$	0	$\frac{3}{2N_c}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R1_{22}$	$-\frac{7}{8N_c^2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{22}$
${}^4\Delta_{1/2}^{S_2} - {}^6\Delta_{1/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{22}$	$\frac{21}{32N_c}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{22}$
${}^4\Delta_{1/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{1/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{10}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{22}$	$-\frac{21}{160N_c}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{22}$

Tabla G.2: Elementos de matriz para estados con $I = 3/2$ y $J = 1/2$ para N_c arbitrario.

	\mathcal{O}_1	\mathcal{O}_2	\mathcal{O}_3
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0}$	N_c	0	0
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_0}$	N_c	0	0
${}^4\Delta_{3/2}^{S_2}$	N_c	$-\frac{3}{N_c}R1_{2,2}$	0
${}^2\Delta_{3/2}^{MS_2}$	N_c	$\frac{1}{2}R1_{2,2}$	0
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{1}{5N_c}(2N_c - 15)R1_{2,2}$	0
${}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{11}{10}R1_{2,2}$	$-\frac{1}{8N_c}(N_c + 1)R2_{2,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0} - {}^4\Delta_{3/2}^{MS_0}$	0	0	0
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0} - {}^4\Delta_{3/2}^{S_2}$	0	0	$\frac{4\sqrt{3}}{N_c^2}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0} - {}^2\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}N_c}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0} - {}^4\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{4}{\sqrt{5}N_c^2}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_0} - {}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{3}{N_c}\sqrt{\frac{7}{10}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{3/2}^{S_2}$	0	0	$-\frac{4}{\sqrt{5}N_c^2}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_0} - {}^2\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{1}{\sqrt{30}N_c}(2N_c + 5)\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{4}{5\sqrt{3}N_c^2}(2N_c^2 + 2N_c - 15)R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_0} - {}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{1}{5N_c}\sqrt{\frac{21}{2}}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_2} - {}^2\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{2,2}$	$\frac{7}{32N_c}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{2,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{S_2} - {}^4\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	$\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R1_{2,2}$	0
${}^4\Delta_{3/2}^{S_2} - {}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21}{10}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{2,2}$	$\frac{3}{32N_c}\sqrt{\frac{105}{2}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{2,2}$
${}^2\Delta_{3/2}^{MS_2} - {}^4\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{2,2}$	$-\frac{7}{32\sqrt{10}N_c}(2N_c + 5)\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{2,2}$
${}^2\Delta_{3/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{3}{16N_c}\sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{2,2}$
${}^4\Delta_{3/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{3/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{10}\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{2,2}$	$-\frac{3}{32N_c}\sqrt{\frac{7}{2}}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{2,2}$

Tabla G.3: Elementos de matriz para estados con $I = 3/2$ y $J = 3/2$ para N_c arbitrario.

	\mathcal{O}_1	\mathcal{O}_2	\mathcal{O}_3
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_0}$	N_c	0	0
${}^4\Delta_{5/2}^{S_2}$	N_c	$-\frac{1}{2N_c}R1_{22}$	$-\frac{15}{8N_c^2}R2_{22}$
${}^2\Delta_{5/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{1}{3}R1_{22}$	0
${}^4\Delta_{5/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{1}{30N_c}(2N_c - 15)R1_{22}$	$-\frac{1}{8N_c^2}(2N_c^2 + 2N_c - 15)R2_{22}$
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_2}$	N_c	$-\frac{3}{5}R1_{22}$	$\frac{1}{8N_c}(N_c + 1)R2_{22}$
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{5/2}^{S_2}$	0	0	$\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{21}{5}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_0} - {}^2\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{2}{\sqrt{5}N_c}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{0,2}$
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_0} - {}^4\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{7}}{5N_c}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{0,2}$
${}^6\Delta_{5/2}^{MS_0} - {}^6\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	0	$-\frac{2}{5N_c}\sqrt{\frac{14}{3}}(N_c + 1)R2_{0,2}$
${}^4\Delta_{5/2}^{S_2} - {}^2\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{22}$	$-\frac{\sqrt{21}}{32N_c}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{22}$
${}^4\Delta_{5/2}^{S_2} - {}^4\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	$\frac{1}{2\sqrt{15}N_c}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R1_{22}$	$\frac{\sqrt{15}}{8N_c^2}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{22}$
${}^4\Delta_{5/2}^{S_2} - {}^6\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{22}$	$\frac{3}{16N_c}\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{22}$
${}^2\Delta_{5/2}^{MS_2} - {}^4\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	$\frac{\sqrt{35}}{6}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{22}$	$\frac{1}{32N_c}\sqrt{\frac{7}{5}}(2N_c + 5)\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{22}$
${}^2\Delta_{5/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	0	$\frac{1}{4N_c}\sqrt{\frac{21}{10}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{22}$
${}^4\Delta_{5/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{5/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{22}$	$-\frac{1}{16N_c}\sqrt{\frac{3}{2}}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{22}$
${}^4\Delta_{7/2}^{S_2}$	N_c	$\frac{3}{N_c}R1_{22}$	$\frac{3}{4N_c^2}R2_{22}$
${}^4\Delta_{7/2}^{MS_2}$	N_c	$\frac{1}{5N_c}(2N_c - 15)R1_{22}$	$\frac{1}{20N_c^2}(2N_c^2 + 2N_c - 15)R2_{22}$
${}^6\Delta_{7/2}^{MS_2}$	N_c	$\frac{1}{10}R1_{22}$	$\frac{17}{80N_c}(N_c + 1)R2_{22}$
${}^4\Delta_{7/2}^{S_2} - {}^4\Delta_{7/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{1}{N_c}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R1_{22}$	$-\frac{1}{4N_c^2}\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{(N_c + 5)(N_c - 3)}R2_{22}$
${}^4\Delta_{7/2}^{S_2} - {}^6\Delta_{7/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R1_{22}$	$-\frac{27}{16\sqrt{10}N_c}\sqrt{\frac{N_c-3}{N_c}}R2_{22}$
${}^4\Delta_{7/2}^{MS_2} - {}^6\Delta_{7/2}^{MS_2}$	0	$-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R1_{22}$	$\frac{9}{80N_c}\sqrt{\frac{3}{2}}(2N_c - 3)\sqrt{\frac{N_c+5}{N_c}}R2_{22}$
${}^6\Delta_{9/2}^{MS_2}$	N_c	$R1_{22}$	$-\frac{1}{8N_c}(N_c + 1)R2_{22}$

Tabla G.4: Elementos de matriz para estados con $I = 3/2$ y $J = 5/2, 7/2, 9/2$ para N_c arbitrario.

Apéndice H

Mezcla de dos niveles

En este apéndice presentamos las propiedades de la expansión en un parámetro x de una matriz de 2×2 que es particularmente útil para analizar las matrices de masa que se obtuvieron en el capítulo 6.

La matriz de interés está dada por

$$\begin{pmatrix} a & x \\ x & b \end{pmatrix}, \quad (\text{H.1})$$

y tiene autovalores

$$\lambda_1 = \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + x^2}, \quad (\text{H.2})$$

$$\lambda_2 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + x^2}, \quad (\text{H.3})$$

cuyos autovectores (sin normalizar) están dados por

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{a-b}{2} \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + x^2}, x \right), \quad (\text{H.4})$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(-x, \frac{a-b}{2} \sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + x^2} \right). \quad (\text{H.5})$$

Como se mencionó en la sección 6.5 de esta tesis, existen tres casos distintivos a la hora de hacer una expansión en x de esta matriz. Dos de estos casos son los relevantes para este trabajo:

(1) En el caso en que $a - b \sim \mathcal{O}(x^0)$ los autovalores están dados por

$$\lambda_1 = a + \frac{x^2}{a-b} + \mathcal{O}(x^4), \quad (\text{H.6})$$

$$\lambda_2 = b - \frac{x^2}{a-b} + \mathcal{O}(x^4), \quad (\text{H.7})$$

y los autovectores son

$$\mathbf{e}_1 = \left(1 - \frac{x^2}{2(a-b)^2} + \mathcal{O}(x^4), \frac{x}{a-b} + \mathcal{O}(x^3) \right), \quad (\text{H.8})$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(-\frac{x}{a-b} + \mathcal{O}(x^3), 1 - \frac{x^2}{2(a-b)^2} + \mathcal{O}(x^4) \right). \quad (\text{H.9})$$

(2) En el caso en que $a - b \sim \mathcal{O}(x^1)$ los autovalores están dados por

$$\lambda_1 = a + \frac{1}{2} \left(\sqrt{(a-b)^2 + 4} - (a-b) \right) x + \mathcal{O}(x^4), \quad (\text{H.10})$$

$$\lambda_2 = b - \frac{1}{2} \left(\sqrt{(a-b)^2 + 4} - (a-b) \right) x + \mathcal{O}(x^4), \quad (\text{H.11})$$

y los autovectores son

$$\mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{2} \left(a - b + \sqrt{(a-b)^2 + 4} \right) + \mathcal{O}(x^4), 1 \right), \quad (\text{H.12})$$

$$\mathbf{e}_2 = \left(\frac{1}{2} \left(a - b - \sqrt{(a-b)^2 + 4} \right) + \mathcal{O}(x^4), 1 \right). \quad (\text{H.13})$$

Bibliografía

- [1] F. Halzen and A. D. Martin, New York, Usa: Wiley (1984) 396p
- [2] C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group], Chin. Phys. C **40**, no. 10, 100001 (2016). doi:10.1088/1674-1137/40/10/100001
- [3] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
- [4] J. Gasser and H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984). doi:10.1016/0003-4916(84)90242-2
- [5] E. E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Lett. B **255**, 558 (1991). doi:10.1016/0370-2693(91)90266-S
- [6] C. W. Bauer, D. Pirjol and I. W. Stewart, Phys. Rev. D **65**, 054022 (2002) doi:10.1103/PhysRevD.65.054022 [hep-ph/0109045].
- [7] Ver por ej. R. Gupta, hep-lat/9807028.
- [8] R. G. Edwards, J. J. Dudek, D. G. Richards and S. J. Wallace, Phys. Rev. D **84**, 074508 (2011) [arXiv:1104.5152 [hep-ph]].
- [9] R. G. Edwards *et al.* [Hadron Spectrum Collaboration], Phys. Rev. D **87**, no. 5, 054506 (2013) [arXiv:1212.5236 [hep-ph]].
- [10] E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979) doi:10.1016/0550-3213(79)90232-3
- [11] J. L. Gervais and B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **52**, 87 (1984).
- [12] J. L. Gervais and B. Sakita, Phys. Rev. D **30**, 1795 (1984).
- [13] K. Bardakci, Nucl. Phys. B **243**, 197 (1984).
- [14] R. F. Dashen and A. V. Manohar, Phys. Lett. B **315**, 425 (1993) [hep-ph/9307241].
- [15] E. E. Jenkins, Phys. Lett. B **315**, 441 (1993) [hep-ph/9307244].
- [16] C. Carone, H. Georgi and S. Osofsky, Phys. Lett. B **322**, 227 (1994) [hep-ph/9310365].

-
- [17] M. A. Luty and J. March-Russell, Nucl. Phys. B **426**, 71 (1994) [hep-ph/9310369].
- [18] R. F. Dashen, E. E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Rev. D **51**, 3697 (1995) [hep-ph/9411234].
- [19] R. F. Dashen, E. E. Jenkins and A. V. Manohar, Phys. Rev. D **49**, 4713 (1994) [Phys. Rev. D **51**, 2489 (1995)] [hep-ph/9310379].
- [20] E. E. Jenkins, AIP Conf. Proc. **623**, 36 (2002) doi:10.1063/1.1489736 [hep-ph/0111338].
- [21] S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **27**, 949 (1962). doi:10.1143/PTP.27.949
- [22] S. R. Coleman and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **6**, 423 (1961). doi:10.1103/PhysRevLett.6.423
- [23] E. E. Jenkins and R. F. Lebed, Phys. Rev. D **62**, 077901 (2000) doi:10.1103/PhysRevD.62.077901 [hep-ph/0005038].
- [24] J. L. Goity, Phys. Lett. B **414**, 140 (1997) [hep-ph/9612252].
- [25] D. Pirjol and T. M. Yan, Phys. Rev. D **57**, 1449 (1998) [hep-ph/9707485].
- [26] D. Pirjol and T. M. Yan, Phys. Rev. D **57**, 5434 (1998) [hep-ph/9711201].
- [27] C. E. Carlson, C. D. Carone, J. L. Goity and R. F. Lebed, Phys. Rev. D **59**, 114008 (1999) [hep-ph/9812440].
- [28] C. L. Schat, J. L. Goity and N. N. Scoccola, Phys. Rev. Lett. **88**, 102002 (2002) [hep-ph/0111082].
- [29] J. L. Goity, C. L. Schat and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **66**, 114014 (2002) [hep-ph/0209174].
- [30] N. Matagne and F. Stancu, Rev. Mod. Phys. **87**, 211 (2015) [arXiv:1406.1791 [hep-ph]].
- [31] D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. D **78**, 034026 (2008) [arXiv:0709.0714 [hep-ph]].
- [32] H. Collins and H. Georgi, Phys. Rev. D **59**, 094010 (1999) [arXiv:hep-ph/9810392].
- [33] L. Galeta, D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. D **80**, 116004 (2009) [arXiv:0906.0699 [hep-ph]].
- [34] D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. D **82**, 114005 (2010) [arXiv:1007.0964 [hep-ph]].
- [35] N. Isgur and G. Karl, Phys. Lett. B **72**, 109 (1977).
- [36] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).

- [37] J. L. Goity, C. Schat and N. N. Scoccola, Phys. Lett. B **564**, 83 (2003) [hep-ph/0304167].
- [38] N. Matagne and F. Stancu, Phys. Lett. B **631**, 7 (2005) doi:10.1016/j.physletb.2005.09.076 [hep-ph/0505118].
- [39] N. Matagne and F. Stancu, Phys. Rev. D **74**, 034014 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.034014 [hep-ph/0604122].
- [40] J. L. Goity, hep-ph/0504121.
- [41] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [42] E. E. Jenkins, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **48**, 81 (1998) doi:10.1146/annurev.nucl.48.1.81 [hep-ph/9803349].
- [43] S. Capstick and W. Roberts, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S241 (2000) doi:10.1016/S0146-6410(00)00109-5 [nucl-th/0008028].
- [44] R. H. Dalitz, Proc. II Hawaii Topical Conf. Particle Physics, 1967, eds. S. Pakvasa, S.F. Tuan (University of Hawaii Press, Honolulu 1968) pp. 325-466
- [45] D. Faiman and A. W. Hendry, Phys. Rev. **173**, 1720 (1968). doi:10.1103/PhysRev.173.1720
- [46] A. De Rujula, H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [47] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **19**, 2653 (1979) Erratum: [Phys. Rev. D **23**, 817 (1981)]. doi:10.1103/PhysRevD.23.817.2, 10.1103/PhysRevD.19.2653
- [48] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Addison-Wesley Publishing Company Inc. 1962).
- [49] F. Stancu, Oxford Stud. Nucl. Phys. **19**, 1 (1996).
- [50] C. Itzykson and M. Nauenberg, Rev. Mod. Phys. **38**, 95 (1966). doi:10.1103/RevModPhys.38.95
- [51] R. F. Lebed, Czech. J. Phys. **49**, 1273 (1999) doi:10.1023/A:1022820227262 [nucl-th/9810080].
- [52] T. D. Cohen and R. F. Lebed, Phys. Rev. D **68**, 056003 (2003) doi:10.1103/PhysRevD.68.056003 [hep-ph/0306102].
- [53] N. Matagne, hep-ph/0701061.
- [54] A. Manohar and H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984).

-
- [55] L. Y. Glozman and D. O. Riska, Phys. Rept. **268**, 263 (1996) [arXiv:hep-ph/9505422].
- [56] D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. D **67**, 096009 (2003) [hep-ph/0301187].
- [57] A. V. Manohar, hep-ph/9802419.
- [58] T. Cook and B. Sakita, J. Math. Phys. **8**, 708 (1967)
- [59] C. Willemyns and C. Schat, Phys. Rev. D **93**, no. 3, 034007 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.93.034007 [arXiv:1511.02215 [nucl-th]].
- [60] I. P. Fernando and J. L. Goity, Phys. Rev. D **91**, no. 3, 036005 (2015) [arXiv:1410.1384 [hep-ph]].
- [61] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton Univ. Press, Princeton, 1974).
- [62] D. Pirjol and C. Schat, Phys. Rev. Lett. **102**, 152002 (2009) [arXiv:0811.1345 [hep-ph]].
- [63] E. G. de Urreta, J. L. Goity and N. N. Scoccola, Phys. Rev. D **89**, no. 3, 034024 (2014) [arXiv:1311.3356 [hep-ph]].
- [64] F. James, *MINUIT*, Function Minimization and Error Analysis, [<http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/>].
- [65] C. Willemyns and C. Schat, arXiv:1703.04098 [nucl-th].
- [66] C. E. Carlson, C. D. Carone, J. L. Goity and R. F. Lebed, Phys. Lett. B **438**, 327 (1998) doi:10.1016/S0370-2693(98)00992-7 [hep-ph/9807334].
- [67] T. D. Cohen and R. F. Lebed, Phys. Rev. D **74**, 036001 (2006) doi:10.1103/PhysRevD.74.036001 [hep-ph/0604175].