Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Gases cuánticos confinados en trampas magnéticas múltiples

Capuzzi, Pablo

2002

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Capuzzi, Pablo. (2002). Gases cuánticos confinados en trampas magnéticas múltiples. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3433_Capuzzi.pdf

Cita tipo Chicago:
Capuzzi, Pablo. "Gases cuánticos confinados en trampas magnéticas múltiples". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2002.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3433_Capuzzi.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Gases cuánticos confinados en trampas magnéticas múltiples

por Pablo Capuzzi

Director de Tesis: Dra. Susana Hernández

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

№ 3 4 3 3 2

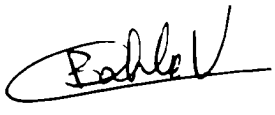
Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

27 de febrero de 2002

Resumen

A partir del descubrimiento de la condensación de Bose–Einstein en gases diluidos confinados, a mediados de 1995, una nueva rama de la física comenzó a desarrollarse fuertemente. Dentro de esta área, esta tesis abarca el estudio de las propiedades en equilibrio y de las excitaciones de un gas de átomos confinados y enfriados a temperaturas donde la degeneración cuántica juega un papel fundamental. Motivados por los hallazgos experimentales, se estudiaron sistemas con múltiples componentes bosónicas y fermiónicas. El análisis se enfocó en tres sistemas particulares: bosones en pozos dobles, fermiones puros, y mezclas fermiones-bosones. Dentro de estos temas exploramos, entre otras cosas, la dependencia de las funciones termodinámicas con la geometría de pozo doble, la influencia de la interacción en la temperatura crítica y en las excitaciones, la respuesta lineal de mezclas fermiónicas puras y mezclas bosón-fermión ante perturbaciones multipolares. En todos los casos la formulación de campo medio escogida dio resultados confiables e interesantes a la vez.

Palabras clave: Condensación de Bose-Einstein; Gases atrapados; Gases degenerados; Mezclas Bosones-Fermiones



Confined quantum gases in multiple magnetic traps

by Pablo Capuzzi

SUMMARY

Since the discovery of the Bose–Einstein condensation in dilute trapped gases in 1995, a new area in atomic physics began to develop strongly. Within this field, this PhD thesis embraces the study of the stationary properties and excitations of a confined gas which has been cooled down to a temperature where quantum degeneracy sets in. Encouraged by the latest experimental breakthroughs, we studied systems with multiple bosonic and fermionic components. The analysis was focused on three especific systems: bosons in double-well traps, pure confined fermions, and Bose-Fermi mixtures. We explored, within other topics, the dependence of the thermodynamical functions upon the trap geometry, the influence of interparticle interaction on both the critical temperature and the excitations, and the linear response of the gas mixtures against multipolar deformations of the trap. We found that the mean-field formulation yields both reliable and interesting results.

Keywords: Bose–Einstein condensation; Trapped gases; Degenerate gases; Bose-Fermi mixtures

Índice General

1 Introducción 1

2 Condensación de Bose–Einstein 7

2.1 El gas de Bose 7

2.1.1 El gas ideal 8

2.1.2 Condensación de Bose–Einstein en una trampa armónica 10

2.2 El pozo doble ideal 11

2.2.1 Trampas isótropas 15

2.2.2 Trampas asimétricas 18

2.2.3 Trampas anisótropas 19

2.3 Interacciones atómicas 21

2.3.1 Colisiones ultrafrias 21

2.3.2 Átomos más reales 23

2.3.3 Efectos sobre el espectro 24

3 Aproximación de Campo Medio 27

3.1 Introducción 27

3.2 La ecuación de Gross-Pitaevskii 29

3.2.1 El régimen Thomas-Fermi 29

3.2.2 Las excitaciones 40

3.3 Temperatura finita 43

3.3.1 El tratamiento HFB-Popov 44

3.3.2 Condensado equivalente a Temperatura cero — CETC 47

4 Impurezas en un condensado de Bose–Einstein 49

4.1 La forma del condensado 49

4.2 Una gota de ^{3}He 51

4.3 Dinámica de la impureza 53

5 Fermiones atrapados **59**
5.1 Introducción . 60
5.1.1 Cuasipartículas en el campo medio 61
5.2 Respuesta lineal — Excitaciones Colectivas 63
5.2.1 Aproximación de fases al azar 63
5.2.2 Un modelo simple 66
5.2.3 Cálculos y resultados 68
5.3 Modificaciones a temperatura finita 75

6 Mezclas degeneradas **79**
6.1 El sistema 79
6.1.1 Aproximación no colisional 81
6.2 Resultados *no colisionales* 82
6.2.1 Excitaciones GPE y Hartree-Fock 83
6.2.2 Aproximación de fases al azar para mezclas 85
6.2.3 Mezclas de helio 90
6.3 Excitaciones hidrodinámicas . . . 94
6.3.1 Resultados *colisionales* . . 95
6.4 Temperatura finita . 98

7 Conclusiones **101**

Apéndices

A Soluciones del pozo doble **105**
A.1 La ecuación de Schrödinger 105
A.2 Termodinámica semiclásica 106

B Propagadores libres **109**
B.1 Fermiones 109
B.2 Bosones 110
B.3 La aproximación de fases al azar para mezclas . 111

C Desarrollos hidrodinámicos **115**
C.1 Bosones 115
C.2 Fermiones 116
C.3 Mezclas 116

Indice de Tablas

2.1 Longitudes de dispersión aproximadas para átomos alcalinos 24

5.1 Parámetros de forma para las densidad fermiónicas en la aproximación de HF 63
5.2 Propiedades de la mezcla fermiónica a temperatura finita. 77

6.1 Parámetros de las excitaciones en mezclas de He 92
6.2 Frecuencias más bajas para los modos hidrodinámicos de mezclas con $L = 0$. 96

Índice de Figuras

2.1 Geometría de una trampa armónica doble . . 11
2.2 Espectro de energías para un pozo doble 12
2.3 Ocupación versus T en una trampa 1D 16
2.4 Ocupaciones en un pozo doble 17
2.5 C_n versus T para una trampa tridimensional. 18
2.6 Condensación de Bose en una trampa 3D asimétrica 19
2.7 Calor específico en sistemas anisótropos 20
2.8 Niveles de un pozo doble con interacciones en una aproximación semiclásica . 25

3.1 Potencial químico en 1D para un pozo doble 32
3.2 Densidades Thomas-Fermi en una dimensión 33
3.3 Espectro de excitaciones TF 34
3.4 Cálculo FFT de los niveles 1D . 35
3.5 Potencial químico en 3D . 36
3.6 Espectro TF en 3D 37
3.7 Cálculo FFT tridimensional 37
3.8 Contornos de equiprobabilidad 38
3.9 Fluctuaciones de densidad en el régimen TF 39
3.10 Excitaciones HFB a $T = 0$. 43
3.11 Fracción condensada en la aproximación HFB-Popov 46
3.12 Excitaciones a T finita. 48

4.1 Condensados dopados con Rb y Na. 52
4.2 Potenciales de interacción He-átomo alcalino 53
4.3 Corrección a los niveles de un condensado por la presencia de una impureza . 54
4.4 Dinámica de una gota de helio en un condensado de Rb. 56

5.1 Densidades fermiónicas en equilibrio 62
5.2 Factor de estructura dinámico monopolar 69

5.3 Factor de estructura dipolar . . 71
5.4 Fluctuaciones de densidad con $L = 0$ 71
5.5 Factor de estructura dinámico con $L = 0$. 72
5.6 Espectro colectivo para excitaciones con $L = 1$ y $L = 2$ 74
5.7 Fluctuaciones de densidad ante excitaciones multipolares. 74
5.8 Mezclas fermiónicas a temperatura finita 76

6.1 Energías de las excitaciones fermiónicas 84
6.2 Factor de estructura monopolar para mezclas 86
6.3 Ídem Fig. 6.2 para la respuesta dipolar 87
6.4 Densidades de transición monopolares de una mezcla de ^{40}K y ^{39}K. . . . 88
6.5 Fluctuación del modo de Kohn para la mezcla 89
6.6 Equilibrio y separación de fases de mezclas ^{4}He–^{3}He 91
6.7 Respuesta en una mezcla ^{3}He-^{4}He 92
6.8 Fluctuaciones de densidad en mezclas de He. 93
6.9 Respuesta monopolar en He 94
6.10 Fluctuaciones monopolares para mezclas en el régimen hidrodinámico 96
6.11 Excitaciones dipolares para mezclas en la aproximación colisional . . . 97
6.12 Comparación del factor de estructura en dos aproximaciones . . . 97
6.13 Perfiles de densidad a temperatura finita en mezclas fermión-bosón . . 99
6.14 Espectro monopolar a $T > 0$ y mezclas fermión-bosón 99

Capítulo 1

Introducción

La hipótesis de Louis de Broglie en 1924 de que todas las partículas materiales tienen propiedades ondulatorias es uno de los pilares más antiguos de la mecánica cuántica. Asimismo, la dualidad de las partículas, i.e. que se propaguen como ondas pero sean detectadas como partículas constituye uno de los aspectos más contraintuitivos de la física. Sin embargo, la longitud de onda de las ondas de de Broglie (λ_{dB}) es tan pequeña que el carácter ondulatorio sólo se manifiesta a escalas microscópicas. Por ejemplo, la longitud de onda de átomos a temperatura ambiente es menor que el átomo mismo, mientras que la longitud de onda de un cuerpo macroscópico es 1 000 000 000 veces menor. Esta es la razón por la cual no experimentamos las propiedades ondulatorias de la materia en la vida diaria. Esto cambia drásticamente a temperaturas extremadamente bajas, cuando el movimiento de las partículas prácticamente se detiene, λ_{dB} aumenta y las partículas empiezan a perder su distinguibilidad clásica.

Einstein, también en 1924, recibió un artículo escrito por un joven físico indio llamado Satyendra Bose en el cual se usaba la primitiva teoría cuántica de ese entonces para explicar el espectro de la luz emitida por objetos calientes (Bose, 1924). Einstein se dio cuenta de que las ideas de Bose podrían aplicarse casi de inmediato a la materia usando la interpretación ondulatoria de de Broglie. Esto lo llevó a predecir que si uno fuera capaz de enfriar un gas suficientemente, éste entraría en un nuevo estado de la materia, el cual exhibiría propiedades únicas. Este fenómeno con el tiempo se conoció como condensación de Bose-Einstein, o simplemente BEC [a].

En la imagen de de Broglie, átomos de masa M a temperatura T pueden ser vistos como paquetes de onda cuyo largo es del orden $\lambda_{\mathrm{dB}} = h/\sqrt{2\pi M k_B T}$, el cual representa la incerteza asociada con la distribución térmica de momentos. Cuando los átomos se enfrían al punto

[a] del inglés Bose-Einstein condensation o de Bose-Einstein condensate.

de que λ_{dB} es comparable con la separación entre átomos, los paquetes de onda se solapan y la indistinguibilidad entre las partículas resulta importante. A esta temperatura, los átomos comienzan a comportarse diferente de acuerdo con su naturaleza intrínseca. Ciertos átomos, ahora denominados bosones, pueden sufrir una transición de fase cuántica a partir de la cual gran cantidad de átomos pueblan el estado de menor energía, formando una nube coherente de átomos, i.e. el condensado de Bose-Einstein. Los fermiones, por otro lado, comienzan a distribuirse de manera de superponer sus funciones de onda lo menos posible, resistiendo una posible condensación y llenando lo que se conoce como mar de Fermi. Es interesante destacar que, históricamente, en el momento en que Einstein propuso su condensación, la estadística de Fermi todavía no había aparecido, e incluso Schrödinger no había escrito su famosa ecuación diferencial.

Los primeros avances experimentales en sistemas degenerados como estos vinieron con el descubrimiento de la superfluidez de los electrones en un superconductor (Kamerlingh Onnes, 1911), del ^{4}He (Kapitza, 1938; Allen y Misener, 1938) y del ^{3}He posteriormente, y con ellos las formulaciones teóricas existentes se extendieron y complicaron bastante. Sin embargo, el primero en pensar que la superfluidez era producto o estaba fuertemente conectada con la existencia de un condensado de Bose fue Fritz London. Este en 1938 (London, 1938b,a) calculó la temperatura crítica para la aparición del condensado en un gas de helio obteniendo una temperatura de alrededor de 3 K, mientras que la temperatura medida experimentalmente para la transición superfluida del *líquido* era de 2 K aproximadamente. La importancia del BEC en ese entonces fue más evidente. A diferencia, los fermiones, tales como electrones, protones y neutrones están regidos por la estadística de Fermi-Dirac, la cual gobierna la estructura y el comportamiento de sistemas tan diversos como átomos, núcleos, electrones en metales, enanas blancas y estrellas de neutrones. Sin embargo, los sistemas fermiónicos son generalmente densos y fuertemente interactuantes. La única realización de sistemas de baja densidad fermiónicos hasta hace poco habían sido las soluciones diluidas de ^{3}He líquido disuelto en ^{4}He.

Los años 50s fueron una etapa de mucho crecimiento teórico que sentaron las bases para la mayoría de las formulaciones teóricas de materia condensada actuales. Entre los científicos que más colaboraron en esa época podemos mencionar a Bogoliubov, Beliaev, y posteriormente a Landau, Gross y Pitaevskii y muchos otros. Sin embargo, en un principio mucha de esa teoría encumbrada no fue capaz, ya sea por muy complicada o por incompleta, de explicar con precisión los fenómenos que se estaban observando en esos *líquidos cuánticos*. La motivación científica de crear y estudiar sistemas de este tipo, i.e. sistemas altamente degenerados, nació de la antigua creencia de London, que los mecanismos subyacentes en la condensación de Bose son esencialmente los mismos mecanismos responsables de los misteriosos efectos de la

superconductividad y superfluidez. Pero los líquidos y los sólidos estudiados en ese entonces eran sistemas muchos más complicados de entender que los sistemas en fase gaseosa en los que pensó Einstein. Por esto, los sistemas diluidos tardarían pero demostrarían ser los candidatos perfectos para testear la validez y precisión de muchas de estas teorías desarrolladas hace más de 50 años, e incluso de manifestar la rigidez de un mar de Fermi, o las propiedades mesoscópicas y de coherencia atribuidas al BEC.

Finalmente sucedió, el 5 de junio de 1995 un grupo de investigación perteneciente a un proyecto conjunto entre la Universidad de Colorado y el NIST, denominado JILA, a cargo de Eric Cornell y Carl Wieman lograron por primera vez enfriar 2000 átomos de rubidio a una temperatura inferior a 20 partes en 1 000 000 000 grados Kelvin y así cruzar la barrera de la condensación (Anderson et al., 1995). Casi al mismo tiempo un grupo del MIT liderado por Wolfgang Ketterle (Davis et al., 1995) y un poco más tarde otro grupo de la Universidad Rice, dirigido por Randall Hulet (Bradley et al., 1995) consiguieron efectos similares con distintos tipos de átomos. La degeneración de gases fermiónicos puros llegaría 4 años después, de la mano de otro grupo perteneciente al JILA (DeMarco y Jin, 1999).

Las técnicas experimentales necesarias para alcanzar estos logros llevaron varios años de desarrollo (ver, por ejemplo, Helmerson et al., 1992; Helmerson y Phillips, 1999). Estos dispositivos se valen, en general, de la fuerza que siente un átomo neutro pero con momento magnético intrínseco al estar sometido a los campos electromagnéticos generados por láseres y bobinas magnéticas. Si bien existe bastante diversidad en la forma precisa de realizar los experimentos, lo esencial es que el proceso de enfriamiento consta por lo menos de dos etapas: en la primera se alcanza una temperatura del orden de los μK merced a la acción de haces láser contrapropagados y campos magnéticos adecuados; mientras que la etapa final depende de las colisiones entre los átomos y consiste en una evaporación controlada de los átomos más calientes del sistema. Esta última parte en el caso fermiónico se ve complicada por el principio de exclusión de Pauli. Sin embargo, los niveles de sofisticación de estos dispositivos, principalmente para bosones, son tan elevados que permiten un control virtualmente completo tanto de las condiciones del experimento como de las mediciones que se pueden realizar sobre él.

A diferencia de los superfluidos o los superconductores tradicionales, los gases utilizados a partir de 1995 además de ser diluidos están confinados, es decir sufren la acción de un pozo de potencial, pero ¿cuáles son las características especiales de estos gases degenerados?. Primero y principal, el BEC, por ejemplo, es un conjunto de partículas en un modo condensado, coherente y con propiedades cuánticas mesoscópicas. La mayoría de las propiedades tanto en equilibrio como dinámicas se pueden describir a través de una *única* función de onda para todos. Además, los condensados gaseosos tienen propiedades muy distintas a las del helio

líquido. Por ejemplo, más del 99% de los átomos están presentes en el condensado a $T = 0$, en contraste con el ^{4}He que posee menos del 10%. Otra de las características diferentes es que la condensación tiene lugar tanto en el espacio de coordenadas como en el de momentos. Además, estos gases son sistemas de tamaño finito, el número de partículas enfriadas va desde unos miles hasta algunas decenas de millones, con la excepción de los átomos de hidrógeno que han llegado hasta 10^9 partículas. Por su parte, los átomos fermiónicos al enfriarse pierden la capacidad de chocar con otros átomos idénticos, dando lugar al llamado bloqueo de Fermi. Pero por sobre todas las cosas, para ambos tipos de gases, es posible experimentalmente, examinar el comportamiento del gas directamente en el espacio y en tiempo real en una gran variedad de condiciones, lo que permite llevar a cabo comparaciones teóricas precisas.

Luego de la primera condensación de átomos de rubidio, una decena de grupos [b] alrededor del mundo empezaron a crear sus condensados propios y a medida que estos crecían los tipos de experimentos se iban actualizando (Cornell et al., 1999; Ketterle et al., 1999). En una primera etapa los experimentos se centraban en el estudio de la formación y estabilidad del BEC de una componente, pasando por la descripción de su perfil de densidades y propiedades termodinámicas. Estos experimentos confirmaron la importancia que tiene las interacciones aunque se trate de un medio altamente diluido. Las excitaciones y la respuesta del sistema fueron los pasos siguientes de estudio, éstas se lograban modificando las frecuencias naturales de la trampa y agregando nuevos láseres como medios de prueba. Con el tiempo, la geometría de los condensados se empezó a convertir en un nuevo grado de libertad del problema, se diseñaron condensados con forma de cigarro, disco, con vórtices, y hasta condensados dobles. Estos últimos fueron creados principalmente para observar las franjas de interferencia entre las dos partes. A partir de ese entonces los experimentos se diversificaron bastante, incorporando herramientas de otras ramas de la física, principalmente de la óptica cuántica no lineal. A su vez, la teoría fue acompañando todos estos descubrimientos a veces explicando las mediciones y otras, prediciendo nuevos efectos que luego serían observados. Sin embargo, todavía hoy existen algunos puntos que necesitan un estudio más profundo, entre los cuales podemos mencionar las excitaciones del BEC a temperaturas alrededor de la temperatura crítica de transición y en sistemas medianos.

Más recientemente, los experimentales se volcaron también a analizar sistemas puros de fermiones diluidos y sistemas de mezclas degeneradas en general. Estas mezclas no sólo incluían distintas especies bosónicas, sino también fermiones. El estudio de estos sistemas múltiples hoy en día es uno de los aspectos de mayor crecimiento. Aquí múltiples tiene una variedad de acepciones, por un lado múltiple significa potenciales con más de un mínimo en

[b] para una bibliografía permanentemente actualizada consultar la página web de BEC en la Universidad del Sur de Georgia en USA. `http://amo.phy.gasou.edu/bec.html` .

donde se puede formar más de un BEC simultáneamente. Otro significado dado a múltiple se refiere a la multiplicidad de especies atómicas atrapadas y efectivamente diferentes. Se han enfriado mezclas de átomos con un elemento común que merced a su polarización se comportan como dos componentes distinguibles e incapaces de intercambiarse. · También, encontramos mezclas de fermiones polarizados (DeMarco y Jin, 1999; DeMarco et al., 2001), ideales para medir los efectos del bloqueo de Pauli, y mezclas de fermiones y bosones (Schreck et al., 2001a,b; Goldwin et al., 2001).

En vista de los experimentos que se vienen desarrollando en los últimos años, hemos abierto una línea de trabajo para discutir varios aspectos relacionados. El objetivo principal de esta tesis yace en la discusión y análisis de estos tipos de gases cuánticos degenerados y confinados en trampas múltiples de varias clases. El estudio incluye tanto la descripción de los sistemas en estado estacionario como las características de sus excitaciones colectivas. El análisis se basará en técnicas relativamente sencillas, pero que gracias a la alta dilución de los sistemas actuales produce resultados de buena precisión.

La organización de la tesis es la siguiente. En el primer capítulo presentamos un análisis detallado de las propiedades termodinámicas y cuánticas de la condensación de Bose de un gas ideal confinado en un potencial con un pozo doble en una dirección. Además introducimos el modelo de interacciones necesario para describir las propiedades de los gases diluidos reales. El segundo capítulo está dedicado al tratamiento de campo medio usado para describir el gas interactuante, tanto para sistemas pequeños como para sistemas en el límite hidrodinámico. Este capítulo estudia principalmente las propiedades a temperatura cero, pero contiene una sección que discute y extiende el formalismo a temperatura finita. A continuación, en el tercer capítulo, se describe un sistema particular en donde la barrera central del pozo doble es generada por una impureza realista de átomos diferentes al condensado. A partir del capítulo 4 se incorporan los fermiones, y en primera instancia estudiamos las excitaciones colectivas en sistemas compuestos sólo por átomos idénticos pero con distinta polarización. Se describen y analizan tanto las excitaciones elementales como los modos colectivos del gas para sistemas de tamaño mediano. El capítulo siguiente estudia uno de los sistemas atrapados más generales hasta el momento, que contiene tanto bosones como fermiones. En este capítulo se extiende la aproximación no colisional del capítulo anterior para incorporar la presencia del BEC, además se incluye brevemente una descripción hidrodinámica o colisional para el sistema completo. Finalmente, en el último capítulo, presentamos las conclusiones más importantes de este trabajo e incluimos una perspectiva personal de la evolución de la investigación científica de estos sistemas.

CAPÍTULO 2

Condensación de Bose–Einstein

Como se anticipó en la Introducción, uno de los objetivos de esta tesis es el análisis de condensados dobles de Bose–Einstein. Recientemente, el estudio de estos condensados obtuvo gran atención por parte de los investigadores teóricos alrededor del mundo, debido principalmente al parecido entre estos sistemas y otros dispositivos experimentales biestables más familiares en el ámbito de la óptica cuántica. Las propiedades de las trampas dobles fueron investigadas mayoritariamente desde un punto de vista comparativo respecto de las recién mencionadas, pero teniendo en cuenta que a causa de las grandes separaciones experimentales de las dos ramas de la trampa, y a las alturas correspondientes, la función de onda del condensado es esencialmente la superposición de dos funciones de onda de condensados simples.

En este capítulo estudiaremos detalladamente los aspectos cuánticos y termodinámicos de estas trampas biestables en términos de la forma y la separación de la barrera. Con este propósito, en la Sec. 2.1 introducimos las nociones básicas del gas de Bose poniendo especial énfasis en gases confinados. La Sec. 2.2 está dedicada al estudio de las propiedades cuánticas y termodinámicas de un sistema de pozo doble en distintas configuraciones; mientras que el modelo de interacciones a utilizar y su efecto en el espectro, en una primera aproximación, se discuten en la Sec. 2.3.

2.1 El gas de Bose

La definición formal de la condensación de Bose–Einstein en un gas interactuante fue provista por Penrose y Onsager (1956), extendiendo un trabajo anterior de Penrose (1951). Estos autores generalizaron el concepto de Bogoliubov (1947) para la condensación en un gas a partir de la condición de que la matriz de densidad reducida de una partícula $D_1(\mathbf{r},\mathbf{r}') \equiv \langle\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\,\hat{\psi}(\mathbf{r}')\rangle$ no se anule para separación grande $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Aquí $\hat{\psi}$ es el operador de campo, el

cual en segunda cuantificación puede escribirse

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{n \in \mathcal{H}_0} \psi_n(\mathbf{r})\, \hat{a}_n \tag{2.1}$$

siendo $\hat{a}_n$ el operador de destrucción de una partícula en el estado $|n\rangle$, cuya función de onda es $\psi_n(\mathbf{r})$ y $\mathcal{H}_0$ el espacio de Hilbert del sistema. El efecto del operador de campo (2.1) sobre un estado de un sistema de muchos cuerpos es la destrucción de una partícula en la posición $\mathbf{r}$. Asimismo, los valores medios contienen una ruptura de simetría (Goldstone, 1961; Leggett y Sols, 1991; Leggett, 1995; Kagan y Svistunov, 1997) o conjunto restringido (Hohenberg y Martin, 1965) de manera que

$$\begin{aligned} \langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle &\equiv \Phi_0(\mathbf{r}) \neq 0 \\ \langle \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \rangle &\equiv \Phi_0^*(\mathbf{r}) \neq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

en presencia de un condensado. De esta manera, el criterio de Penrose y Onsager puede enunciarse de la siguiente forma

$$\lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\to\infty} D_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Phi_0^*(\mathbf{r})\, \Phi_0^*(\mathbf{r}') \neq 0 \tag{2.3}$$

y $\Phi_0(\mathbf{r})$ puede interpretarse como la *función de onda del condensado* (con amplitud y fase).

La condición $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle \neq 0$ describe la ruptura de la simetría de gauge asociada a la conservación del número de partículas y es análoga a la condición $\langle \hat{S}_z \rangle \equiv m \neq 0$ en un ferromagneto. Para que el valor de expectación $\langle \hat{\psi} \rangle$ no se anule, uno debe agregar al hamiltoniano términos infinitesimales que actúen como fuentes y sumideros de átomos para el condensado. La inclusión de estos términos nos permite buscar una fase termodinámica nueva utilizando las técnicas usuales para sistemas de muchos cuerpos a temperatura finita.

En síntesis, el fenómeno de la condensación de Bose-Einstein tiene lugar cuando un número macroscópico de las partículas comparten el *mismo* estado de partícula independiente, digamos el estado $|0\rangle$. De esta manera al descomponer $\hat{\psi}$ en

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{a}_0\, \psi_0(\mathbf{r}) + \hat{\psi}'. \tag{2.4}$$

y como $\langle a_0^\dagger a_0 \rangle \equiv N_0 \gg 1$. podemos aproximar

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) \approx \sqrt{N_0}\, \psi_0(\mathbf{r}) + \hat{\psi}'. \tag{2.5}$$

2.1.1 El gas ideal

En un gas ideal de Bose a temperatura cero, la función de onda de N partículas es simplemente el producto

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_N) = \psi_0(\mathbf{r}_1) \cdots \psi_0(\mathbf{r}_N) \tag{2.6}$$

donde ψ_0, la función de onda del condensado, corresponde al estado de partícula independiente de menor energía del hamiltoniano de una partícula.

Las propiedades de este sistema compuesto por muchas partículas y a temperatura finita deben estudiarse en base a consideraciones de la mecánica estadística, calculando, por ejemplo, la función de partición Z. En particular, si no consideramos las interacciones, el sistema para termalizar necesitará la presencia de un reservorio. En el conjunto gran canónico la función de partición está dada por

$$Z_G = \mathrm{Tr}\left(e^{-\beta(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}\right), \tag{2.7}$$

donde $\beta = 1/k_B T$ con T la temperatura, μ es el potencial químico, $\hat{H}_0 = \sum_{n=1}^{N} \hat{h}_0(n)$ es el hamiltoniano no interactuante de todo el sistema y $\hat{N}$ el operador número de partículas. Usando una base de estados en representación de números de ocupación (Fetter y Walecka, 1971), la función de partición puede reescribirse

$$Z_G = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}\right), \tag{2.8}$$

donde ε_i son las autoenergías de partículas independientes

$$\hat{h}_0\, \phi_i = \varepsilon_i\, \phi_i, \tag{2.9}$$

con $\hat{h}_0$ el hamiltoniano correspondiente a *una* partícula en el potencial externo $V_0(\mathbf{r})$, i.e. $\hat{h}_0 = p^2/2M + V_0(\mathbf{r})$. El logaritmo natural de la Ec. (2.8) da lugar al Gran Potencial termodinámico

$$\Omega_0(T, \mu) = k_B T \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon)}\right), \tag{2.10}$$

a partir del cual se pueden extraer las distintas magnitudes termodinámicas. Por ejemplo, el número medio de partículas se obtiene diferenciando Ω_0 respecto del potencial químico, manteniendo T constante,

$$N \equiv \langle \hat{N} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} N_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}, \tag{2.11}$$

donde $N_i^{(0)}$ es la ocupación media del estado i, y el supraíndice (0) indica que se trata de un sistema no interactuante. La ecuación (2.11) define el potencial químico para un número de partículas dado. Puesto que el número de partículas debe ser positivo, es necesario que $\mu < \varepsilon_0$, siendo $i = 0$ el nivel fundamental. El número de ocupación correspondiente a esta energía representa la cantidad de partículas que comparten el estado fundamental, i.e. las partículas que forman el denominado condensado de Bose–Einstein.

A temperatura finita la mayoría de las partículas se encuentran en estados excitados, pero en un gas de Bose existe una temperatura crítica, que llamaremos T_c, a partir de la cual el

nivel fundamental comienza a poblarse masivamente. A temperaturas inferiores a T_c, μ se congela en ε_0 [a], y el número de partículas que se encuentran en los excitados está acotado. Si el número total de partículas sobrepasa esta cota, el exceso se dirige al estado fundamental dando lugar al condensado. Esta interpretación nos permite definir T_c.

La temperatura crítica puede encontrarse requiriendo que el número total de partículas sature los estados excitados, es decir,

$$N = N' \equiv N - N_0^0 = \sum_{i>0}^{\infty} N_i^{(0)}(\mu, T) \qquad \text{a } T = T_c^{(0)} \,. \tag{2.12}$$

2.1.2 Condensación de Bose–Einstein en una trampa armónica

La mayoría de los dispositivos experimentales actuales permiten aproximar el potencial confinante del gas por medio de una trampa armónica generalmente anisótropa. Por esto, supondremos

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2\right), \tag{2.13}$$

siendo M la masa de las partículas atrapadas, y ω_j la frecuencia angular de la trampa en la dirección j. La función de onda del condensado para este potencial es

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{M\tilde{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-\frac{M}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}, \tag{2.14}$$

con $\tilde{\omega}$ el promedio geométrico de las frecuencias $\tilde{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$. El espectro de energías es simplemente la suma de tres espectros similares, $\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega_x(n_x + 1/2) + \hbar\omega_y(n_y + 1/2) + \hbar\omega_z(n_z + 1/2)$. Esta expresión se simplifica considerablemente en el caso de existir simetrías de rotación alrededor de algún eje. Tanto la anisotropía del potencial como el número finito de partículas dificultan el tratamiento analítico del problema. Sin embargo, se conoce (Grossmann y Holthaus, 1995; Kirsten y Toms, 1996a) tanto series exactas como resultados aproximados de muy buena precisión. En particular, se ha mostrado que en tres dimensiones N' vale

$$N' \approx \zeta_R(3)\left(\frac{k_B T}{\hbar\tilde{\omega}}\right)^3 + \zeta_R(2)\left(\frac{k_B T}{\hbar\tilde{\omega}}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_x\omega_y} + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_x\omega_z} + \frac{\tilde{\omega}^2}{\omega_y\omega_z}\right)}_{\gamma} \frac{\mu}{\hbar\Omega} \tag{2.15}$$

donde ζ_R es la función de Riemann[b], y Ω es el promedio aritmético de las frecuencias,

$$\Omega = \frac{1}{3}(\omega_x + \omega_y + \omega_z). \tag{2.16}$$

[a] Esto es estrictamente válido sólo en el límite de muchas partículas.

[b] $\zeta_R(2) = \pi^2/6$, $\zeta_R(3) = 1.20206\ldots$

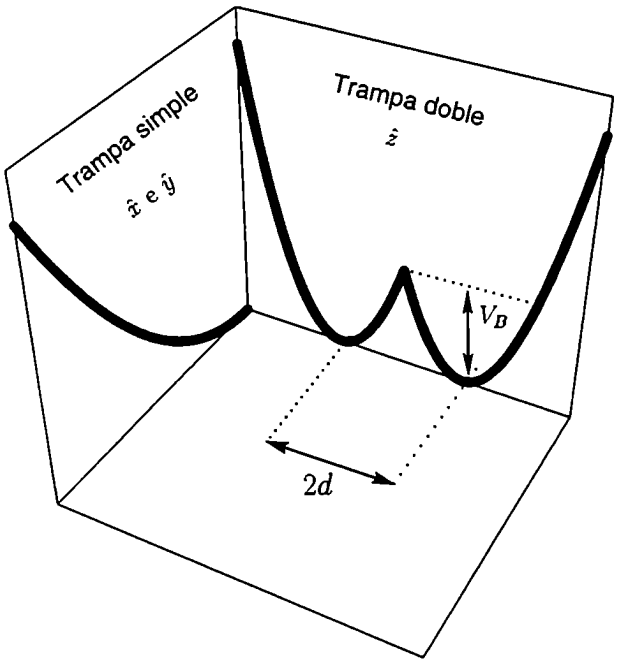


FIGURA 2.1: Geometría de una trampa armónica doble. $2d$ es la distancia entre los mínimos del pozo doble en $\hat{z}$, y V_B la altura de la barrera correspondiente. En dos o tres dimensiones el potencial agregado es una trampa armónica simple (cf. Ec.(2.19)).

De acuerdo con (2.12), la temperatura crítica se puede estimar según

$$T_c^{(0)} \approx \frac{\hbar\tilde{\omega}}{k_B}\left(\frac{N}{\zeta_R(3)}\right)^{1/3}\left(1-\frac{\gamma\zeta_R(2)}{3\zeta_R(3)^{2/3}}\frac{1}{N^{1/3}}\right). \tag{2.17}$$

Como puede observarse en la Ec. (2.17), a diferencia del resultado para sistemas homogéneos (ver, por ejemplo, Huang, 1963), la temperatura crítica aumenta con el tamaño del sistema, esto hace la definición del límite termodinámico del sistema un poco más sutil. De hecho, el límite termodinámico requiere que se mantenga constante la *densidad* mediante el debilitamiento del potencial cuando se aumenta el número de partículas (Mullin, 1997).

2.2 El pozo doble ideal

A partir de este punto nos enfocaremos en la discusión de un sistema en un pozo doble. El primer paso necesario para estudiar las propiedades termodinámicas de un pozo sin interacciones (ideal) es el cómputo de su espectro de partícula independiente. Con este fin, primero analizaremos los niveles de un potencial en una dimensión para luego extenderlo al caso tridimensional. Elegimos un tipo de potencial armónico doble particular, debido a la posibilidad de encontrar sus autofunciones y autovalores de manera semianalítica (Merzbacher, 1961). El

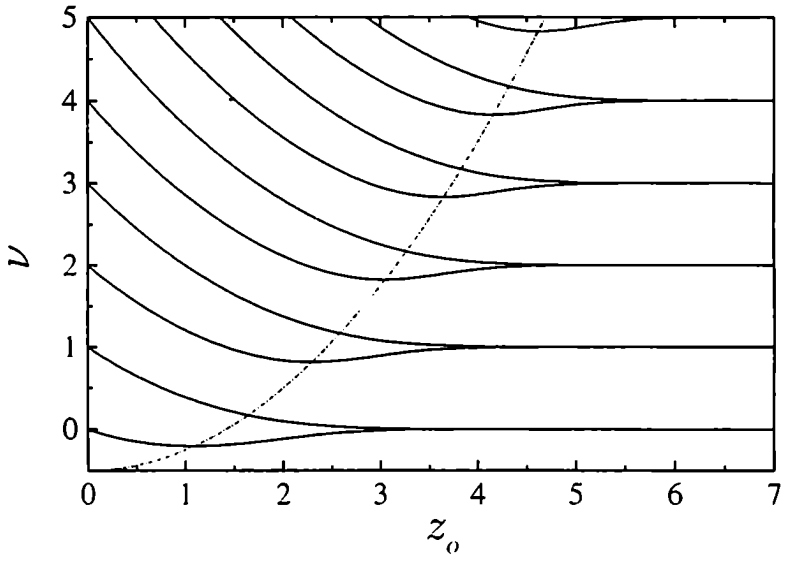


FIGURA 2.2: Espectro de autoenergías (en unidades de $\hbar\omega_z$) para un pozo doble de separación $z_0 = d\sqrt{2M\omega_z/\hbar}$. Cada línea continua corresponde a un nivel de energía distinta ε_ν. La línea rayada indica la altura de la barrera a cada z_0.

potencial

$$V_0(z) = \frac{M\omega_z^2}{2}(|z| - d)^2 \tag{2.18}$$

representa un pozo doble con una distancia $2d$ entre sus mínimos (ver Fig. 2.1) y a su vez tiene asociada una altura de barrera central $V_0(z = 0) = V_B = 1/2M\omega_z^2 d^2$.

La solución de la ecuación de Schrödinger para una partícula en el potencial $V_0(z)$ puede representarse por medio de funciones cilíndricas parabólicas $D_\nu[\sqrt{2M\omega_z/\hbar}(|z| - d)]$ y autovalores $\varepsilon_\nu = \hbar\omega_z(\nu + 1/2)$ (ver Apéndice A). Para distintas distancias d, el número cuántico ν toma valores en general *no* enteros. Como se puede observar en la Fig. 2.2, el espectro evoluciona desde una solución armónica pura ($d = 0$) hasta autovalores doblemente degenerados con la misma frecuencia, cuando d crece indefinidamente ($d \to \infty$). Similarmente, con el aumento de V_B las autofunciones comienzan a deprimirse alrededor de la barrera hasta formar dos paquetes independientes sin solapamiento para $d = \infty$.

Además del problema unidimensional, nos interesa considerar sistemas en 2D y 3D puesto que estos han sido de mayor relevancia experimental (ver, por ejemplo, Cornell et al., 1999; Ketterle et al., 1999). Así, estudiaremos trampas 2D ($\omega_y = 0$) y trampas 3D de la forma

$$V_0(\mathrm{r}) = \frac{M}{2}\left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2(|z| - d)^2\right). \tag{2.19}$$

En consecuencia, los átomos atrapados poseerán 2 (2D) ó 3 (3D) grados de libertad en total,

y sus estados serán representados por un sólo índice conjunto i. De acuerdo con la forma funcional elegida, Ec. (2.19), las autoenergías están dadas por la suma de los niveles de cada potencial unidimensional. De esta manera, el espectro total queda conformado por

$$\varepsilon_i = \hbar\left((n_x + \frac{1}{2})\,\omega_x + (n_y + \frac{1}{2})\,\omega_y + (\nu + \frac{1}{2})\,\omega_z\right), \tag{2.20}$$

donde el estado i representa a la terna de números cuánticos n_x, n_y y ν.

El cálculo numérico de los niveles de energía nos permite examinar las propiedades termodinámicas del sistema bosónico. En particular, podemos calcular la energía interna del gas, según

$$U = \sum_i N_i^{(0)} \varepsilon_i. \tag{2.21}$$

Sin embargo, previo a esto, será necesario determinar el valor del potencial químico μ de acuerdo con la relación (2.11).

Conjuntamente con la energía interna del sistema, estudiamos dos magnitudes, el calor específico a N constante (C_n), obtenido por diferenciación directa de la energía interna, y el número de ocupación de los dos niveles de energía más bajos (N_0 y N_1). Estas dos magnitudes son de reconocida importancia para identificar la transición de fase que da lugar al condensado. De hecho, a la temperatura crítica definida por la Ec. (2.12), el calor específico deberá poseer un máximo que indique el cambio de fase.

Sin realizar aproximación alguna, podemos reescribir las ecuaciones (2.11) y (2.21) de manera de involucrar la densidad de estados $g(\varepsilon)$

$$N = \int \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}\, d\varepsilon, \quad \text{y} \quad U = \int \varepsilon\, \frac{g(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}\, d\varepsilon, \tag{2.22}$$

donde la densidad de estados es

$$g(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta(\varepsilon - \varepsilon_i). \tag{2.23}$$

Es sabido que las propiedades termodinámicas de sistemas suficientemente grandes no dependen fuertemente de los detalles del espectro discreto de energías, a temperaturas mayores al espaciado de niveles ($\hbar\omega \ll k_B T$), y además en virtud de la Ec. (2.22) es conveniente utilizar directamente una expresión aproximada para la densidad de estados. Si bien existen métodos muy precisos y elegantes que recurren, por ejemplo, al cálculo de funciones de partición canónicas (Kirsten y Toms, 1996b) para deducir densidades de estado, hemos elegido una manera más sencilla pero con una clara interpretación semiclásica.

La densidad de estados puede encontrarse con un procedimiento similar al empleado para el gas libre. El volumen en el espacio de fases entre superficies de energía ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ es

proporcional al número de estados en ese intervalo de energías. El número de estados con momento entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ y posición entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ es

$$dN\Big|_\varepsilon = \frac{d^D p\, d^D r}{h^D}\Big|_\varepsilon \tag{2.24}$$

donde D es la dimensión del espacio, teniendo en cuenta que a una dada energía, los impulsos posibles están limitados por la relación $\varepsilon = \mathbf{p}^2/2M + V_0(\mathbf{r})$. En una dimensión arbitraria D el diferencial volumétrico de momentos, para simetría esférica, puede escribirse

$$d^D p = C_D\, p^{D-1}\, dp \tag{2.25}$$

donde $C_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$ [c]. La densidad de estados calculada de acuerdo con esta prescripción, introducida por Bagnato et al. (1987), nos lleva a

$$g_D(\varepsilon) = \frac{C_D}{h^D} 2^{D/2-1}\, M^{D/2} \int d^D r\, (\varepsilon - V_0(\mathbf{r}))^{D/2-1}, \tag{2.26}$$

donde la integral (2.26) debe realizarse sobre el dominio clásicamente *accesible* para una partícula con energía ε. Además, en virtud de la relación

$$g_D(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon d\varepsilon'\, g_{D-1}(\varepsilon - \varepsilon')\, g_1(\varepsilon'), \tag{2.27}$$

simplemente tenemos que calcular la densidad de estados en una dimensión para el potencial de pozo doble, que llamaremos g_1. De esta manera, el caso 3D se estudiará convolucionando g_1 con

$$g_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{(\hbar\omega_z)^2} \tag{2.28}$$

para $\omega_x = \omega_y = \omega_z$.

La densidad de estados en una dimensión resulta,

$$g_1(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{2}{\hbar\omega_z} & \text{si } \varepsilon < V_B, \\ \dfrac{1}{\hbar\omega_z}\left[1 + \dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{V_B}{\varepsilon}}\right)\right] & \text{si } \varepsilon \geq V_B. \end{cases} \tag{2.29}$$

Con lo cual, convolucionando g_1 con $g(\varepsilon) = 1/\hbar\omega_z$, se obtiene

$$g_2(\varepsilon) = \begin{cases} 2\dfrac{\varepsilon}{(\hbar\omega_z)^2} & \text{si } \varepsilon < V_B, \\ \dfrac{1}{(\hbar\omega_z)^2}\left[\varepsilon + \varepsilon\dfrac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\dfrac{V_B}{\varepsilon}}\right) + \dfrac{2}{\pi}\sqrt{V_B}\sqrt{\varepsilon - V_B}\right] & \text{si } \varepsilon \geq V_B. \end{cases} \tag{2.30}$$

[c] $C_D = 2, 2\pi, 4\pi$ para una, dos o tres dimensiones, respectivamente.

El resultado tridimensional es

$$g_3(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^2}{(\hbar\omega_z)^3} & \text{si } \varepsilon < V_B, \\ \dfrac{1}{2(\hbar\omega_z)^3}\left[\varepsilon^2 + \dfrac{2}{\pi}\varepsilon^2 \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{V_B}{\varepsilon}}\right) + \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{V_B}}{\pi}\sqrt{\varepsilon - V_B}\,(5\varepsilon - 2V_B)\right] & \text{si } \varepsilon \geq V_B. \end{cases} \tag{2.31}$$

Las expresiones (2.29), (2.30) y (2.31) proveen fórmulas sencillas para las densidades de estados en sistemas con pozos dobles armónicos, pero sufren de una falencia. Estas no pueden reproducir de manera precisa el número de partículas en los niveles inferiores donde las densidades de estados son cero. Es por esto que en las ecuaciones que definen N y U hemos separado explícitamente los dos niveles más bajos. Así, las expresiones semiclásicas que usaremos serán más precisamente

$$N = N_0 + N_1 + \int_{\varepsilon_1^+}^{\infty} \frac{g_D(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}\, d\varepsilon \tag{2.32a}$$

para el número de partículas en D dimensiones, y

$$U = N_0\,\varepsilon_0 + N_1\,\varepsilon_1 + \int_{\varepsilon_1^+}^{\infty} \varepsilon \frac{g_D(\varepsilon)}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}\, d\varepsilon \tag{2.32b}$$

donde ε_1^+ indica una energía infinitesimalmente mayor a ε_1.

Parte de las integraciones involucradas en las Ecs. (2.32) pueden realizarse analíticamente, los resultados pueden consultarse en la Sección A.2 del Apéndice A.

Como ya mencionamos, en las Ecs. (2.32) separamos explícitamente las poblaciones N_0 del estado fundamental y N_1 del primer excitado, puesto que a medida que la altura de la barrera V_B aumenta, estos niveles de energía se acercan indefinidamente (cf. Fig. 2.2).

En las próximas secciones comentaremos los resultados para la condensación de Bose–Einstein de un gas ideal confinado por un pozo doble en una, dos y tres dimensiones, y comparemos los resultados exactos con el método semiclásico de las densidades de estados, en función de número de partículas N y la separación d. A pesar de la ruptura de simetría producida por el pozo doble, llamaremos potencial isótropo a aquél que posea $\omega_x = \omega_y = \omega_z = \omega$ en 1D, 2D ó 3D, y anisótropo en cualquier otro caso.

2.2.1 Trampas isótropas

El cálculo del calor específico en un potencial simple muestra que la trampa 1D tiene un aumento característico en el número de ocupación alrededor de una temperatura $T_c^{(0)}$ definida por (Ketterle y van Druten, 1996)

$$N = \frac{k_B\, T_c^{(0)}}{\hbar\,\omega_z} \ln\left(\frac{2k_B\, T_c^{(0)}}{\hbar\omega_z}\right) \tag{2.33}$$

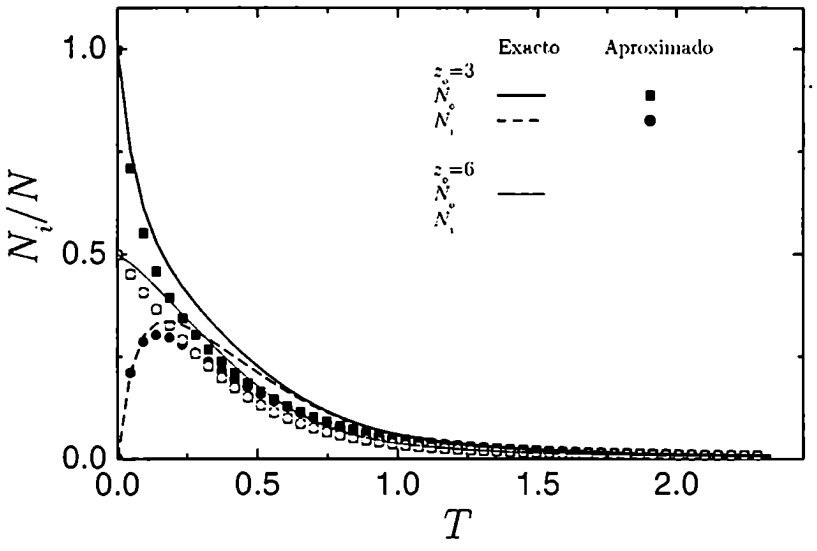


FIGURA 2.3: Números de ocupación en función de la temperatura (en unidades de $T_c^{(0)}$) para una trampa armónica doble en una dimensión con 10^4 partículas. Con curvas se señalan los resultados exactos, mientras que con símbolos destacamos los resultados de acuerdo con la aproximación semiclásica. z_0 corresponde a la separación de las ramas del potencial en unidades del oscilador armónico en la dirección z, i.e. $z_0 = d\sqrt{2M\omega_z/\hbar}$

sin embargo, ésta es la pseudotransición usual que no está acompañada por un máximo en el calor específico (Capuzzi y Hernández, 1999b). Este fenómeno también se observa en el caso de nuestro pozo doble. Los resultados pueden verse en la Fig. 2.3 para varias separaciones en función de z_0.

Consideremos el caso tridimensional. En la Fig. 2.4 graficamos los números de ocupación N_0 y N_1 en función de la temperatura, para algunos valores de z_0 y N. En ella podemos observar una transición bastante brusca, en el caso de muchas partículas, a una temperatura un poco menor que la correspondiente a un trampa simple isótropa a las mismas frecuencias (cf. Ec. (2.17)). De hecho, esta temperatura disminuye al aumentar la barrera entre las partes del potencial. Por otro lado, cuanto mayor es el valor de z_0, más parecidos son los números de ocupación N_0 y N_1 incluso a temperaturas bastante menores que $T_c^{(0)}$; este hecho refleja la casi degeneración del estado fundamental y el primer excitado para grandes valores de z_0. Esto puede verse en la Fig. 2.4, en ella elegimos $N = 10^4$ y algunos valores de V_B que permiten apreciar la disminución de la temperatura crítica que ocurre a medida que los pozos se separan. En conclusión, el efecto de la trampa doble sobre la temperatura de transición puede entenderse en términos de la partición que realiza la trampa. Cuanto mayor

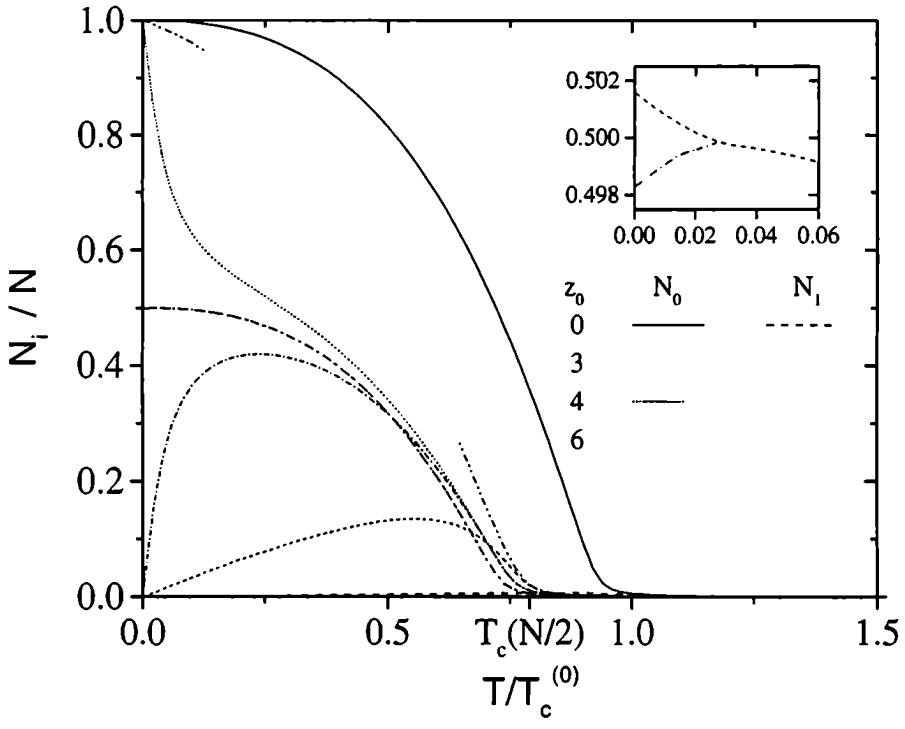


FIGURA 2.4: Números de ocupación para el fundamental y el primer excitado para 10^4 átomos y varias alturas de barrera. Las distintas curvas corresponden a distintos valores de z_0 como se indica en el gráfico. El recuadro superior muestra las ocupaciones para $z_0 = 6$ y $T \approx 0$.

es la barrera central, y puesto que no existen interacciones entre partículas, más similar es el problema a dos trampas con $N/2$ partículas entre sí. Por lo tanto la temperatura crítica se acerca al valor de (2.17) con la mitad de las partículas.

La existencia de la transición es evidente si analizamos la curva del calor específico. La figura 2.5 corresponde a los mismos parámetros que la Fig. 2.4, con líneas se muestran los resultados numéricos y con símbolos señalamos los cálculos realizados en la aproximación semiclásica. El acuerdo entre el cálculo exacto y el aproximado es casi perfecto a las temperaturas más bajas, mientras que para altas temperaturas sólo para un gran número de partículas. En ese caso la aproximación semiclásica encuentra la transición con una precisión aceptable, excepto por una pequeña sobrestimación de la temperatura crítica y la altura del máximo, sin embargo esta separación es perceptible sólo cuando se consideran pocos átomos.

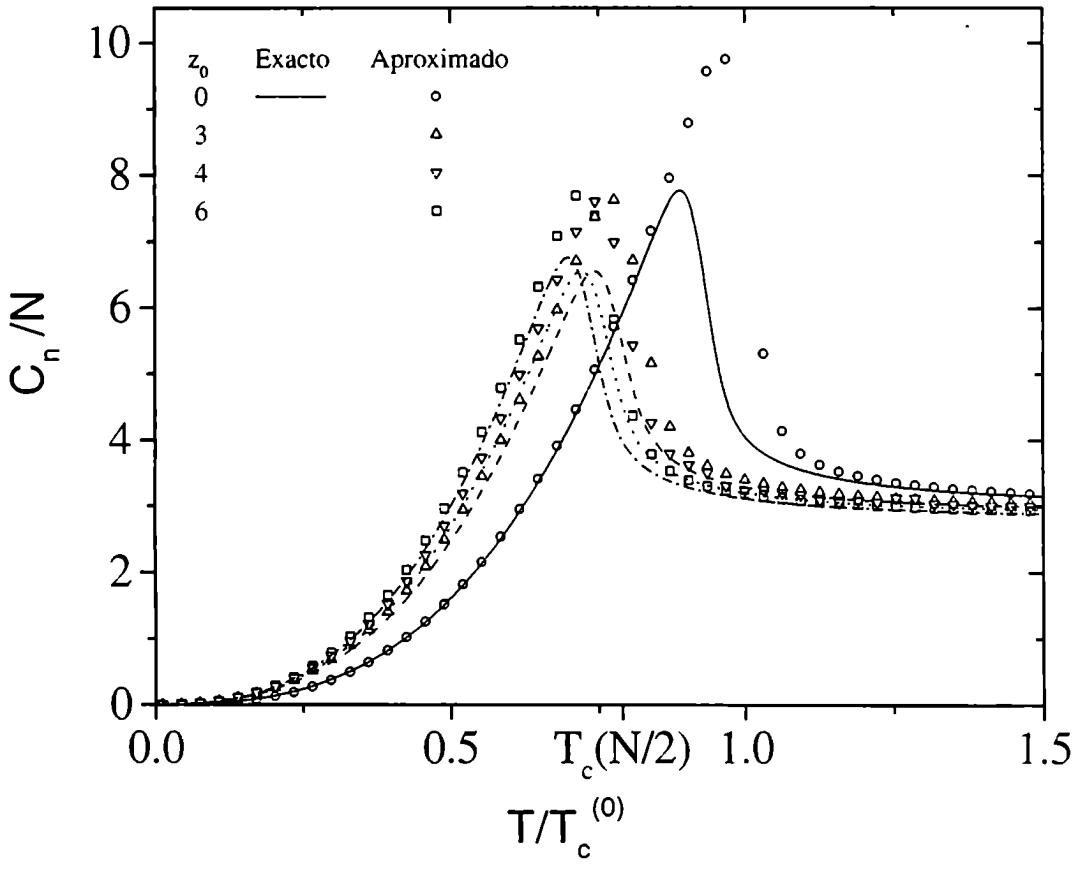


FIGURA 2.5: Calor específico (C_n) en función de la temperatura bajo las mismas condiciones que en la Fig. 2.4. Las líneas indican el resultado del cálculo exacto, mientras que con símbolos se señalan los resultados en la aproximación semiclásica.

2.2.2 Trampas asimétricas

Cuando las dos ramas del potencial que separa el sistema no poseen la misma frecuencia angular, el cálculo de las autofunciones y autoenergías se hace más complicado. Sin embargo, este fenómeno puede ocurrir en los experimentos, por lo cual hemos analizado algunas de sus características más relevantes. En particular, consideramos el potencial asimétrico en 1D

$$V_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} M \omega_2^2 (z - d_2)^2 & \text{si } z > 0, \\ \frac{1}{2} M \omega_1^2 (z + d_1)^2 & \text{si } z < 0. \end{cases} \tag{2.34}$$

y su extensión a tres dimensiones.

Puesto que el potencial debe ser continuo en $z = 0$, la separación y las frecuencias a cada lado no son independientes, sino que $\omega_1 d_1 = \omega_2 d_2$. El cálculo de los niveles se realiza de manera similar al problema con simetría, pero debido a que los autoestados no pueden

clasificarse de acuerdo con su paridad, el procedimiento es más lento. Por otro lado, la densidad de estados unidimensional es igualmente sencilla de calcular, valiendo

$$g_1(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right) & \text{si } \varepsilon < V_B, \\ \frac{1}{2\hbar}\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)\left[1+\frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right)\right] & \text{si } \varepsilon \geq V_B. \end{cases} \tag{2.35}$$

El análisis de la condensación de Bose–Einstein tridimensional presenta características particulares. La diferencia en las frecuencias de las ramas del potencial se traduce en la existencia de dos temperaturas críticas diferentes, y en poblaciones diferentes para el nivel fundamental de cada rama. En la Fig. 2.6 graficamos, para $\Delta \equiv \sqrt{d_1/d_2} = 0, 0.4$ y 0.8 y distintos z_0 del lado de z positivo, el calor específico y la ocupación del estado fundamental a temperatura finita.

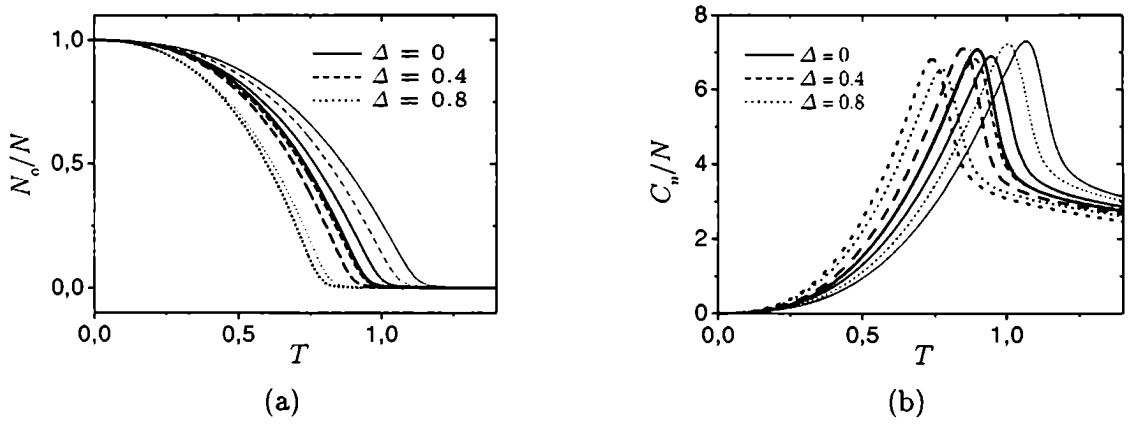
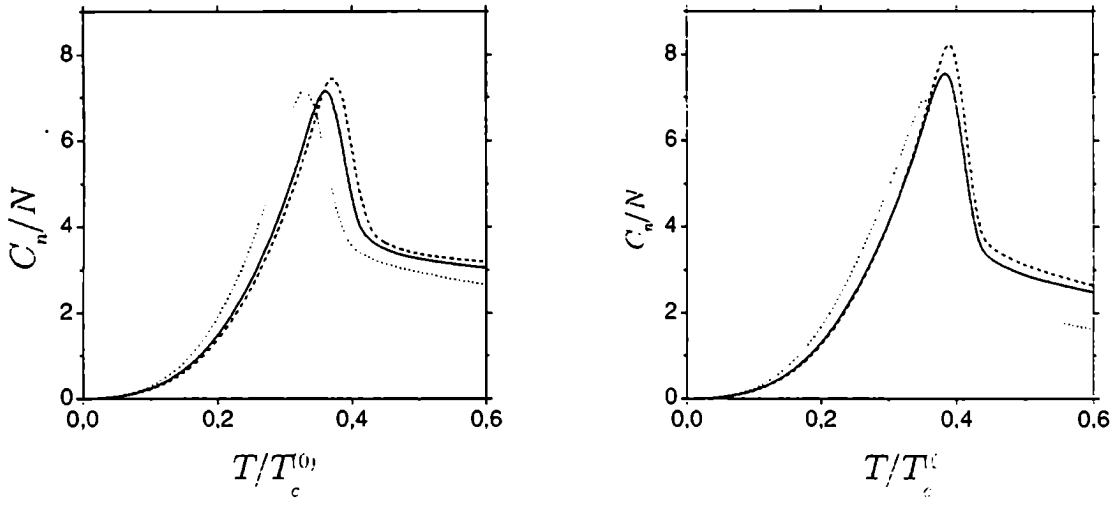


FIGURA 2.6: Condensación de Bose en una trampa 3D asimétrica con 10^4 partículas. (a) Muestra la ocupación del fundamental en función de T (en unidades de $T_c^{(0)}$), en (b) graficamos el calor específico correspondiente. Las distintas curvas corresponden a distintos valores de z_0 y Δ (ver texto). Las líneas gruesas, medias y finas corresponden a $z_0 = 6,3$ y 0 respectivamente; los diferentes tipos de líneas corresponden a diferentes Δ como se indica en el gráfico.

2.2.3 Trampas anisótropas

La primera realización de trampas doble fue llevada a cabo en el MIT (Andrews et al., 1997). En general las configuraciones experimentales poseen una geometría no isótropa. La falta de isotropía del potencial produce pocos cambios en los resultados de las magnitudes termodinámicas siempre que consideremos un número elevado de partículas ($N \gtrsim 10^5$). En estos casos las propiedades están dominadas por el primer término de la densidad de estados, el cual es función del promedio geométrico de las distintas frecuencias solamente. En la



(a) $N = 10^4$ y $z_0 = 1$ (b) $N = 10^5$ y $z_0 = 1$

FIGURA 2.7: Calor específico en sistemas no isótropos similares a los experimentales. Las líneas continuas, punteadas y rayadas corresponden respectivamente a las geometrías del MIT, JILA y a una trampa isótropa con igual media geométrica que MIT.

Fig. 2.7 mostramos las curvas de calor específico para sistemas con 10^4 y 10^5 partículas y geometrías similares a las de las trampas del MIT, y del JILA (Anderson et al., 1995). Es decir, consideramos $\omega_z/\omega_{x,y} = \sqrt{8}$ para la trampa del MIT, y $\omega_z/\omega_x = 3.2$ y $\omega_z/\omega_y = 1.8$ para la del JILA. Además de estas trampas anisótropas analizamos el resultado de una trampa isótropa con igual $\tilde{\omega}$ que la correspondiente al MIT.

La trampa doble del MIT está caracterizada por una gran separación entre los pozos del potencial e *independientemente* por una barrera de altura regulable. Entonces, uno podría preguntarse hasta qué punto los resultados que hemos presentado son sensibles a la elección independiente de la separación d y la altura V_B y por lo tanto realizar un cálculo más detallado específicamente para esta trampa. Entre las posibilidades más sencillas, uno podría citar (i) la combinación de dos trampas armónicas unidas suavemente con un potencial cuártico, (ii) o una similar a la usada pero con una constante en el centro hasta cierto valor. Los resultados obtenidos muestran que la propiedades termodinámicas del gas ideal no cambian demasiado respecto de lo ya presentado; en otros palabras, la temperatura crítica y la forma general de los números de ocupación y calor específico no son sensibles al desacoplamiento de d y V_B.

2.3 Interacciones atómicas

El modelo de gas de Bose no interactuante de las secciones anteriores no resulta suficiente para explicar los hallazgos experimentales de los últimos años (ver Introducción), por esta razón es necesario discutir de qué manera la interacción entra en juego. La física de las colisiones tiene un papel fundamental para entender las propiedades de los gases enfriados. En primer lugar, las colisiones garantizan la termalización del sistema, lo cual es esencial para enfriar el gas. Segundo, las interacciones entre los átomos determinan los perfiles en equilibrio y la dinámica del condensado. Finalmente, las colisiones limitan la densidad máxima alcanzable, puesto que los choques inelásticos tienden a desarmar un condensado.

2.3.1 Colisiones ultrafrias

Cuando dos partículas interactúan a través de un potencial central $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, el centro de masa del sistema realiza un movimiento independiente del desplazamiento relativo entre ambas partículas. El problema de movimiento relativo se reduce al de una partícula de masa reducida $M = M_1 M_2/(M_1 + M_2)$ y velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \tag{2.36}$$

donde $\mathbf{R}$ es la coordenada relativa, y M_1 y M_2 son las masas de cada partícula. Esta partícula efectiva está caracterizada por un momento lineal $\mathbf{p} = M\,\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}$, y energía $E = \hbar^2 k^2/2M$.

La solución asintótica ($R \to \infty$) del movimiento relativo está dada por la función de onda de dispersión, en la aproximación de Bohr,

$$\psi_{\mathbf{k}}^{+} \sim e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} + \frac{f(k,\theta)}{R} e^{i\,kR}, \tag{2.37}$$

donde $f(k,\theta)$ se conoce como amplitud de dispersión y θ es el ángulo que forma $\mathbf{R}$ con la dirección $\hat{z}$.

La amplitud $f(k,\theta)$ puede expandirse en *ondas parciales* de momento angular definido (ver, e.g., Sakurai, 1994)

$$f(k,\theta) = \frac{1}{2\,i\,k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2\,i\,\delta_l} - 1)\, P_l(\cos\theta), \tag{2.38}$$

donde $l = 0, 1, 2, \ldots$ para la onda parcial $s, p, d, \ldots$, δ_l es el cambio de fase para la onda l y P_l son polinomios de Legendre de orden l.

En las expresiones anteriores hemos asumido que las dos partículas que interactuaban eran distinguibles. Sin embargo, si las partículas son bosones idénticos, debemos simetrizar la función de onda total (S), mientras que si fueran fermiones idénticos deberíamos antisimetrizarla

(A). La simetrización de la función de onda total, se traduce en una simetrización acorde en la función de onda del movimiento relativo, pero ante una reflexión en la coordenada relativa, i.e. $\mathbf{R} \to -\mathbf{R}$, por lo tanto tenemos que escribir

$$\psi^{+}_{\substack{S\\A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi^{+}(\mathbf{R}) \pm \psi^{+}(-\mathbf{R})\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi^{+}(R,\theta,\phi) \pm \psi^{+}(R,\pi-\theta,\phi+\pi)\right] \tag{2.39}$$

o asintóticamente,

$$\psi^{+}_{\substack{S\\A}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\begin{matrix}\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})\\ i\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{R})\end{matrix} + \frac{1}{ik}\sum_{\substack{l\ \text{par}\\ l\ \text{impar}}}(2l+1)(e^{2i\delta_l}-1)P_l(\cos\theta)\right]. \tag{2.40}$$

De aquí podemos obtener las secciones eficaces totales para dispersión de partículas idénticas

$$\sigma_{\substack{S\\A}} = \frac{8\pi}{k^2}\sum_{\substack{l\ \text{par}\\ l\ \text{impar}}}(2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{2.41}$$

A temperaturas inferiores al μK muy pocas ondas parciales contribuyen a la dispersión total. El momento angular típico de la colisión es $M v b \sim l\hbar$, siendo b el parámetro de impacto. A medida que v tiende a cero, debido al enfriamiento, $b \sim l/v$ se hace cada vez más grande y puesto que el potencial de interacción tiene un rango finito, sólo las ondas parciales por debajo de cierto límite son significativas. Además, a bajas energías, las secciones eficaces se comportan como

$$\sigma_l \sim k^{4l} \sim E^{2l}. \tag{2.42}$$

Esto implica que para *fermiones*, la contribución dominante cae como E^2, ya que la onda s está prohibida (cf. Ec. (2.41)). La sección eficaz de onda s para bosones idénticos es $\sigma_0 = 8\pi a^2$, donde $a = -\lim_{k\to 0}(\delta_0(k)/k)$ es la denominada *longitud de dispersión* de onda s.

Dependiendo del potencial real que se considere, a puede ser positiva o negativa; para a positiva, la dispersión es la misma que la producida por una esfera rígida de radio a. Los potenciales reales de átomos alcalinos poseen un carozo duro, son muy profundos (10^3K para ^{133}Cs), tienen un mínimo a una distancia r_{12} del orden de los 6 Å (para Cs), y contienen muchos estados ligados correspondientes a estados moleculares de dos átomos. Esto provoca que haya desventajas en utilizar el potencial exacto en cualquier cálculo teórico (ver, por ejemplo, Castin, 2001) relativo a la condensación de Bose. La idea es, por lo tanto, reemplazar el potencial exacto con algún potencial modelo que tenga la mismas propiedades de dispersión a bajas temperaturas, que se pueda tratar en la aproximación de Bohr y así utilizarlo en formulaciones de campo medio.

El modelo más sencillo que satisface estos requerimientos es el pseudopotencial de rango cero introducido por Fermi (Huang, 1963). El efecto de este pseudopotencial en una función de onda de dos cuerpos es,

$$\langle \mathbf{r}_1\, \mathbf{r}_2 | V | \psi_{1\,2} \rangle \equiv g\, \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \left[\frac{\partial}{\partial r_{1\,2}} \left(r_{1\,2}\, \psi_{1\,2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right) \right]_{r_{1\,2}=0} . \tag{2.43}$$

El factor g es la constante de acoplamiento

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a \tag{2.44}$$

donde a es la longitud de onda s *real*. Si bien el operador de regularización es necesario, es usual hablar directamente de un potencial de contacto, y expresarlo como

$$V(\mathbf{r}) = g\, \delta(\mathbf{r}). \tag{2.45}$$

2.3.2 Átomos más reales

Debido a la estructura interna de los átomos, las características del proceso de dispersión son mucho más complejas. En su interior los átomos poseen diferentes partículas las cuales dan lugar a ricas estructuras de niveles y spines que presentan un complicado panorama de interacciones mutuas. Sin embargo, al poseer un sólo electrón fuera de capa cerrada, los elementos alcalinos tienen una estructura un poco más sencilla.

En su estado fundamental, los átomos alcalinos poseen tanto spin electrónico $\mathbf{s}$, con $s = 1/2$, y spin nuclear $\mathbf{i}$. Estos spines se acoplan para dar lugar a un momento total $\mathbf{f} = \mathbf{s} + \mathbf{i}$ con $f = i \pm 1/2$. Al estudiar las colisiones debemos considerar por lo tanto, spines total electrónicos y nucleares, $\mathbf{S}$ ($S = 0, 1$) y $\mathbf{I}$ respectivamente, así como los spines $\mathbf{F} = \mathbf{S} + \mathbf{I}$. Los hamiltonianos de interacción poseen diferentes contribuciones provenientes de los variados constituyentes de los átomos. Esta estructura complicada de spines modifica la física de las colisiones. En particular, existirá un potencial diferente de acuerdo con el estado de spin del sistema. De manera general, se suele escribir,

$$V(R) = P_T\, V_T(R) + P_S\, V_S(R) \tag{2.46}$$

donde P_S y P_T son los operadores de proyección en los subespacios del singlete ($S = 0$) y triplete ($S = 1$) respectivamente, y V_S y V_T son los potenciales de interacción correspondientes. Por esto, es convención citar al menos *dos* longitudes de dispersión diferentes para cada par de átomos: la longitud de dispersión del triplete a_T y las del singlete a_S. La longitud de triplete se aplica a colisiones en sistema con el spin doblemente polarizado. Sin embargo, la mayoría de las colisiones incluyen una mezcla de estados singletes y tripletes por lo cual la longitud de dispersión efectiva debe indicarse en cada caso particular.

TABLA 2.1: Longitudes de dispersión aproximadas para átomos alcalinos idénticos. Los datos fueron extraídos de Heinzen (1999).

Átomo	a_T (nm)	a_S (nm)
^{6}Li	-114 ± 13	2.4 ± 0.2
^{7}Li	$1.47 < a < 0.38$	1.85 ± 0.2
^{23}Na	$2.38 < a < 9.80$	1.01 ± 0.1
^{39}K	$-60 < a < -3.2$	$6.99 < a < 7.62$
^{40}K	$10.26^{+6}_{-1.9}$	$5.56^{+0.11}_{-0.16}$
^{41}K	$1.32 < a < 3.18$	$4.23 < a < 4.65$
^{85}Rb	$-52 < a < -3.2$	$240 < a < \infty$
^{87}Rb	$4.5 < a < 7.41$	4.92 ± 0.26
^{133}Cs	$-58.2 < a < -10.6$	-208 ± 0.89

2.3.3 Efectos sobre el espectro

Los efectos de la interacción en el cálculo de las propiedades de un condensado pueden estudiarse de manera muy sencilla en una primera aproximación semiclásica. Considerando la interacción a través de su perfil de densidades ρ_0 y con el potencial de contacto (2.45), podemos completar el hamiltoniano

$$h = h_0 + g\,\rho_0(\mathbf{r}), \tag{2.47}$$

y calcular una densidad de estados efectiva a diferentes temperaturas. Modificando la expresión (2.24) para incorporar el número de ocupación de Bose a temperatura finita,

$$dN = \frac{1}{h^3}\frac{1}{e^{\beta(h_0-\mu)}-1}\,d^3p\,d^3r, \tag{2.48}$$

obtenemos una aproximación para la densidad condensada.

$$\begin{aligned}\rho_0(\mathbf{r}) = \frac{dN}{dV} &= \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}^3}\sum_{t=1}^{\infty}\exp\left\{\beta\, t\,[\mu - V_0(\mathbf{r})]\right\}\frac{1}{t^{3/2}} \\ &= \frac{1}{\lambda_{\mathrm{dB}}^3}\,g_{3/2}\left(e^{-\beta[V_0(\mathbf{r})-\mu]}\right),\end{aligned} \tag{2.49}$$

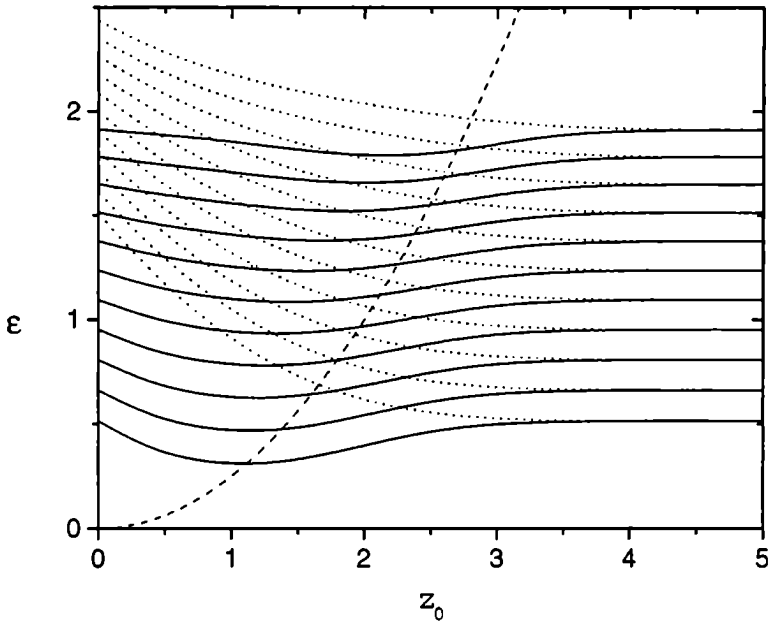


FIGURA 2.8: Energías del estado fundamental y primer estado excitado (líneas continuas y punteadas, respectivamente) del sistema interactuante en un pozo doble isótropo, en función de z_0, para varias longitudes de onda s, desde $a \approx 0$ hasta $a \approx 60$ nm (de abajo hacia arriba) en pasos de 6 nm. La línea rayada indica la altura de la barrera V_B. Las energías están dadas en unidades de $\hbar\omega_z$.

donde g_n es la función de Bose[d] y λ_{dB} la longitud de onda térmica de de Broglie,

$$\lambda_{\mathrm{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2\,\pi\,M\,k_B\,T}}. \tag{2.50}$$

Finalmente, luego de la inclusión de la densidad (2.49), el problema es equivalente al no interactuante pero con una densidad de estados calculada a partir del potencial efectivo

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}) &= V_0(\mathbf{r}) + g\,\frac{1}{\Lambda^3}\,g_{3/2}\left(e^{\beta[\varepsilon_0 - V_0(\mathbf{r})]}\right) \\ &\approx V_0(\mathbf{r}) + \frac{g}{\Lambda^3}\,e^{\beta[\varepsilon_0 - V_0(\mathbf{r})]}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

En la Fig. 2.8 vemos la dependencia del nivel fundamental y del primer excitado con la separación de la barrera a una temperatura $T = 0.26T_c^{(0)}$ y $N = 100$. Los niveles presentan dos tendencias: para z_0 pequeños, a medida que aumenta la interacción (g), los niveles se acercan, generando un espectro más degenerado y por lo tanto una mayor densidad de estados, la cual requiere un enfriado más intenso para alcanzar la condensación. Por otro lado, si z_0 es suficientemente grande ($z_0 \gtrsim 3$), el estado fundamental y el primer excitado ya están casi degenerados; en este caso, el efecto de la interacción, como se ve en la figura, es levantar todo el espectro uniformemente. Como consecuencia, las partículas que ocupaban el estado excitado del gas ideal pueden ser transferidas al estado fundamental del sistema *interactuante* sin costo, y así dar lugar a un aumento a la temperatura crítica.

[d] $g_n(x) = \sum_{t=1}^{\infty} 1/t^x$

Capítulo 3

Aproximación de Campo Medio

En este capítulo analizaremos las características que presenta un condensado de Bose-Einstein cuando existen interacciones entre sus componentes y además se encuentra sometido a una trampa armónica doble. Por esto, dedicamos la primera sección a una breve introducción del marco teórico de campo medio utilizado. Luego, en la sección 3.2, describimos las soluciones estacionarias y las excitaciones a temperatura nula del sistema; mientras que en la sección 3.3 se analizan las modificaciones necesarias cuando se considera el sistema a temperatura finita.

3.1 Introducción

La ecuación *exacta* para la evolución del operador de campo $\hat{\psi}$ en la representación de Heisenberg es

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\mathbf{r},t) = \left[\hat{h}_0 + \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}',t)V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}',t)d^3r'\right]\hat{\psi}(\mathbf{r},t), \tag{3.1}$$

donde $h_0 = p^2/2M + V_0(\mathbf{r})$ y V es el potencial de interacción entre partículas. La ecuación (3.1) puede obtenerse a partir del hamiltoniano de muchos cuerpos

$$\hat{H} = \int\left(\frac{\hbar^2}{2M}\nabla\hat{\psi}^\dagger\cdot\nabla\hat{\psi} + \hat{\psi}^\dagger V_0(\mathbf{r})\hat{\psi}\right)d^3r + \frac{1}{2}\int\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}^{\dagger\prime}V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\hat{\psi}\hat{\psi}'\,d^3r'd^3r. \tag{3.2}$$

Suponiendo el potencial de contacto (2.45), se obtiene la expresión simplificada

$$\hat{H} = \int\left(\frac{\hbar^2}{2M}\nabla\hat{\psi}^\dagger\cdot\nabla\hat{\psi} + \hat{\psi}^\dagger V_0(\mathbf{r})\hat{\psi}\right)d^3r + \frac{g}{2}\int\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})d^3r \tag{3.3}$$

y por lo tanto la evolución del sistema está regida por

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_0(\mathbf{r}) + g\,\hat{\rho}(\mathbf{r},t)\right]\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r},t) \tag{3.4}$$

donde $\hat{\rho} = \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}$ es el operador densidad de partículas, $\langle\hat{\rho}\rangle = \rho(\mathbf{r})$.

La condensación de Bose tiene lugar cuando un número macroscópico de partículas ocupan el *mismo* estado de partícula independiente. De hecho, puesto que el sistema es altamente diluido, la mayoría de las partículas forman parte del condensado y por lo tanto es usual proponer una forma aproximada específica para el operador de campo,

$$\begin{aligned}\hat{\psi} &= \hat{a}_0\,\psi_0(\mathbf{r}) + \hat{\Psi} \\ &\approx \sqrt{N_0}\,\psi_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde hemos reemplazado el operador $\hat{a}_0$ por el número $\sqrt{N_0}$ (Bogoliubov, 1947) y además descartamos las ocupaciones en otros niveles ($\hat{\Psi}$). La calificación de número a los operadores $\hat{a}_0$ y $\hat{a}_0^\dagger$ resulta plausible al comparar los valores medios sus productos, es decir

$$\begin{aligned}\langle \hat{a}_0^\dagger\,\hat{a}_0\rangle = N_0, \qquad \langle \hat{a}_0\,\hat{a}_0^\dagger\rangle = N_0 + 1 \quad \text{con lo cual,} \\ \langle [\hat{a}_0^\dagger, \hat{a}_0]\rangle = 1 \lll N_0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dentro de esta aproximación el operador de campo $\hat{\psi}$ es simplemente un campo *clásico*, la función de onda del condensado, que cumple con la ecuación diferencial

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_0(\mathbf{r}) + g\,N_0\,|\psi_0|^2\right)\psi_0(\mathbf{r},t) \tag{3.7}$$

Similarmente, el valor medio del hamiltoniano (3.3) es directamente una funcional de ψ_0,

$$E[\psi_0, N_0] = N_0\int \psi_0^*\left[\frac{\hat{p}^2}{2M} + V_0(\mathbf{r})\right]\psi_0\,d^3r + \frac{g}{2}\int \rho_0^2(\mathbf{r})\,d^3r, \tag{3.8}$$

donde $\rho_0(\mathbf{r}) = N_0\,|\psi_0|^2$ es la densidad de partículas.

La solución estacionaria de (3.1) corresponde a un mínimo de la funcional $E[\psi_0, N_0]$ para un número *fijo* de partículas N_0, y está dada por la denominada ecuación de Gross-Pitaevskii (GPE) o ecuación de Schrödinger no lineal (Pitaevskii, 1961; Gross, 1961, 1963)

$$\mu\,\psi_0(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_0(\mathbf{r}) + g\,N_0\,|\psi_0|^2\right]\psi_0(\mathbf{r}). \tag{3.9}$$

En el cálculo variacional μ surgió como el multiplicador de Lagrange asociado a la conservación del número de partículas. Su denominación como potencial químico es, sin embargo, consistente con la definición usual

$$\mu = \frac{\mathrm{d}\langle \hat{H}\rangle}{\mathrm{d}N}. \tag{3.10}$$

A temperatura cero, y suponiendo un condensado casi puro $N_0 \simeq N$, la definición (3.10) da lugar a

$$\begin{aligned}\mu &\simeq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}N_0}\,E[\psi_0, N_0] \\ &= \int d^3r\left[\frac{\hbar^2}{2M}\,|\nabla\psi_0|^2 + V_0\,|\psi_0|^2 + g\,N_0\,|\psi_0|^4\right], \end{aligned} \tag{3.11}$$

que coincide con lo obtenido al integrar (3.9) previa multiplicación por ψ_0^*.

De este cálculo sencillo podemos ver, entre otras cosas, que al haber interacciones ($g \neq 0$), el potencial químico no es la energía por partícula, E_0/N_0; en particular, para interacciones repulsivas, resulta $\mu > E_0/N_0$.

3.2 La ecuación de Gross-Pitaevskii

La función de onda de un condensado a $T = 0$ se describe en forma precisa por la ecuación independiente del tiempo (3.9). Esta nos determina el perfil de densidad, el campo de velocidades y el potencial químico de un gas de Bose diluido, atrapado y a $T = 0$. La dinámica de este sistema está dada por la Ec. (3.7) y puede deducirse también a partir de la funcional de energía (3.8) (ver, por ejemplo, Castin, 2001). Además, si suponemos que las partículas sufren un potencial externo arbitrario podemos reescribir (3.7) como

$$ih\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\mathbf{r},t) = \frac{-h^2}{2M}\nabla^2\psi_0(\mathbf{r},t) + \widetilde{V}_0(\mathbf{r},t)\,\psi_0(\mathbf{r},t) + g\,N_0\,|\psi_0(\mathbf{r},t)|^2\,\psi_0(\mathbf{r},t) \tag{3.12}$$

donde $\widetilde{V}_0(\mathbf{r},t)$ representa el potencial atrapante general dependiente del tiempo. Esta ecuación ha sido ampliamente usada para describir una variedad de fenómenos entre los cuales podemos mencionar: la expansión balística de condensados, respuesta a perturbaciones armónicas de gran y de pequeña amplitud (Kagan et al., 1996, 1997a,b), nucleación de vórtices, etc. Incluso la Ec. (3.12) ha sido generalizada a sistemas con muchas componentes, sistemas que ganan y pierden partículas, y a situaciones fuera del equilibrio.

La resolución matemática de esta ecuación no es trivial en un caso general debido al término no lineal proporcional a g y a la no homogeneidad del sistema, producto de la trampa. Sin embargo, algunos métodos tradicionales sirven para estudiar sistemas no muy lejanos de soluciones estacionarias.

El propósito principal de esta sección es usar la GPE para discutir las excitaciones colectivas de un condensado puro sujeto a una trampa doble. Estas constituyen los bloques fundamentales para comprender una evolución arbitraria del sistema. Asimismo, esta información será muy útil cuando consideremos el problema a temperaturas finitas y tengamos en cuenta los efectos de las partículas fueras del condensado. De esta manera seremos capaces de mejorar la aproximación semiclásica del capítulo anterior.

3.2.1 El régimen Thomas-Fermi

Las interacciones repulsivas entre partículas tienden a expandir el condensado y de esta manera el radio medio, R_0, es mayor que el correspondiente a la misma trampa pero sin interacciones. En particular, hemos visto en el capítulo anterior que cuando no hay interacciones la

función de onda del condensado en una trampa armónica simple es una función gaussiana con radio $d_0 = \sqrt{h/M\omega}$. Para ganar intuición en estos sistemas, podemos estudiar los efectos de las interacciones. Estos pueden tratarse considerando el parámetro adimensional $R \equiv R_0/d_0$ y su participación en la funcional de energía, Ec. (3.8).

Puesto que el estado fundamental no tiene nodos, la energía cinética por partícula puede estimarse como

$$\frac{\langle T\rangle}{N_0} \sim \frac{\hbar^2}{M\,R_0^2} = \frac{\hbar\omega}{R^2}, \tag{3.13}$$

mientras que

$$\frac{\langle V_0\rangle}{N_0} \sim \hbar\omega R^2, \tag{3.14}$$

y la energía de interacción es

$$\begin{aligned}\frac{\langle V\rangle}{N_0} &\sim g\,\rho_0 \sim \frac{\hbar^2\,a}{M}\rho_0 = \frac{\hbar\omega}{R^3}\,\frac{N_0\,a}{d_0},\\ &\equiv \frac{\hbar^2}{2\,M\,\xi^2},\end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $\xi = 1/\sqrt{2\,a\,\rho_0}$ define una nueva escala de longitud, llamada *longitud de curado*[a]. Esta es la distancia que tarda la densidad en volver a su valor de volumen cuando se encuentra una pared.

Con esto, la energía total por partícula puede reescribirse

$$\frac{E_0}{N_0} \sim \hbar\omega\left(\frac{1}{R^2} + R^2 + \frac{N_0\,a}{d_0}\,\frac{1}{R^3}\right). \tag{3.16}$$

Con los valores experimentales actuales, $a/d_0 \sim 10^{-3}$ y $N_0 \sim 10^3 - 10^7$, el parámetro $N_0\,a/d_0$ puede estar entre $1 - 10^4$. Así, cuando el número de átomos en la trampa es suficientemente grande, el tamaño característico del condensado R_0 empieza a ser mucho mayor que la longitud de curado, i.e. $R_0 \gg \xi$. En este caso, el perfil de densidad se suaviza y el término de energía cinética puede despreciarse (cf. Ec. (3.16)). Esta aproximación es la que se conoce como *aproximación de Thomas-Fermi* (Huse y Siggia, 1982; Baym y Pethick, 1996). En ésta el equilibrio mecánico del condensado proviene del balance entre las interacciones repulsivas y el confinamiento de la trampa, y su densidad se calcula a partir de la GPE aproximada

$$\mu\,\psi_0 = V_0(\mathbf{r})\,\psi_0 + g\,N_0\,|\psi_0|^2\,\psi_0. \tag{3.17}$$

Simultáneamente, el valor de μ se obtiene a partir de la normalización de la densidad, i.e. requiriendo $\int |\psi_0(\mathbf{r})|^2\,d^3r = 1$. Cabe remarcar que los argumentos para despreciar la energía cinética necesitan de una interacción efectivamente repulsiva, $g > 0$. Es decir, si bien los átomos pueden tener $g > 0$ o $g < 0$, no tiene sentido una aproximación TF para $g < 0$.

[a] del inglés *healing length*

La situación dependiente del tiempo es menos trivial, pero admite un análisis similar. Es claro que ignorar toda la energía cinética en un problema no estacionario es una aproximación muy brusca e inútil. Es más, en los experimentos de expansión balística del condensado, la energía de interacción es convertida gradualmente en la energía cinética de la nube que se expande. La manera más usual de proceder en este caso es reescribir la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo, Ec. (3.12), en términos hidrodinámicos, i.e. en función de la densidad y la velocidad local, con la definición usual

$$\mathbf{j} = \mathbf{v}\,\rho_0 = \frac{N_0\,\hbar}{2\,i\,M}\left[\psi_0^*\,\nabla\psi_0 - \psi_0\,\nabla\psi_0^*\right], \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{j}$ es la corriente de probabilidad asociada a la función de onda ψ_0. De esta manera puede reescribirse la Ec. (3.12) en una ecuación de continuidad

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + \nabla\cdot[\rho_0\mathbf{v}] = 0, \tag{3.19a}$$

y una ecuación de momentos,

$$M\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left[\frac{1}{2}\,M\,v^2 + V_0(\mathbf{r}) + g\,\rho_0(\mathbf{r}) - \frac{\hbar^2}{2M}\frac{\nabla^2\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}}\right] = 0. \tag{3.19b}$$

La aproximación hidrodinámica consiste en despreciar el término de presión cuántica en la ecuación de momentos, $\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\sqrt{\rho_0}/\sqrt{\rho_0}$, para obtener la ecuación de Gross-Pitaevskii en el régimen de Thomas-Fermi. Una vez conseguida esta ecuación, los modos de oscilación alrededor del equilibrio se pueden obtener directamente linealizando las ecuaciones alrededor de la solución de equilibrio de TF. Así se llega a una ecuación, originalmente encontrada por Stringari (1996), para la evolución de una perturbación de la densidad

$$M\,\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} = g\,\nabla\cdot\left[\rho_0^0\,\nabla\delta\rho\right] \tag{3.20}$$

donde $\delta\rho$ es la fluctuación, $\delta\rho(\mathbf{r},t) = \rho_0(\mathbf{r},t) - \rho_0^0(\mathbf{r})$, y ρ_0^0 la solución TF estacionaria,

$$\rho_0^0(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{\mu - V_0(\mathbf{r})}{g} & \text{si } \mu > V_0(\mathbf{r}), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{3.21}$$

La sencillez de la ecuación (3.20) ha posibilitado que se encuentren soluciones analíticas no sólo en los casos que la trampa presenta alta simetría sino también en problemas completamente anisótropos (Fliesser et al., 1997a,b). Además, en la medida que se consideren frecuencias bien diferentes alrededor de los distintos ejes, las trampas tridimensionales podrán ser tratadas como efectivamente de menor dimensión. Por ejemplo, si una de las frecuencias es mucho mayor o mucho menor que las otras dos, el sistema será unidimensional o bidimensional, respectivamente.

Excitaciones colectivas en 1D

La versión en una dimensión de la GPE en la aproximación de TF se puede escribir (cf. Ec. (3.20))

$$M\,\Omega^2\delta\rho = -\frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu - V_0(z))\frac{\partial}{\partial z}\delta\rho\right], \tag{3.22}$$

donde hemos usado la separación

$$\delta\rho(\mathbf{r},t) = \delta\rho\, e^{-i\Omega t} \tag{3.23}$$

para encontrar las autofrecuencias Ω, correspondientes a los modos $\delta\rho$.

Después de un cambio de variables adecuado, la ecuación (3.22) es exactamente la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Legendre $P_n(\sqrt{M\omega_z^2/2\mu_0}\,z)$, con autovalores $\Omega_n^2 = \omega_z^2\, n(n+1)/2$ (Ho y Ma, 1997). El potencial químico μ_0 en este caso, vale,

$$\mu_0 = \frac{\hbar\omega_z}{2}\left(6\pi N\frac{a}{a_z}\right)^{2/3} \tag{3.24}$$

con $a_z = \sqrt{\hbar/M\omega_z}$ la longitud característica de un oscilador de frecuencia ω_z y masa M.

El propósito es encontrar las soluciones de la Ec. (3.22) cuando el potencial atrapante es el doble pozo (2.18). En este caso, y dentro de la aproximación TF, el cociente entre el potencial químico μ y el correspondiente al pozo simple (μ_0) , satisface las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu_0} &= \frac{1}{2^{2/3}} \qquad \text{si} \quad V_B \geq \mu, \\ \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{3/2} + \frac{3}{2}\left(\frac{V_B}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{V_B}{\mu_0}\right)^{3/2} &= 1 \qquad \text{si } V_B < \mu\,, \end{aligned} \tag{3.25}$$

donde el efecto de la barrera está incluido en el cociente V_B/μ_0.

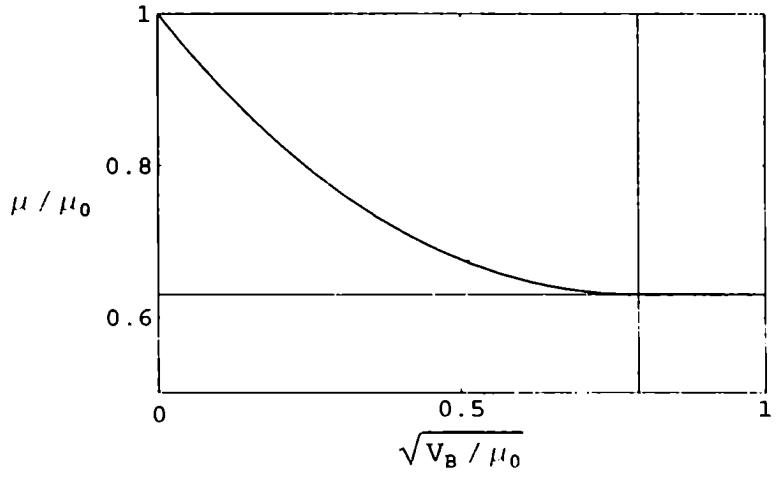


FIGURA 3.1: Potencial químico en 1D para el potencial doble en el límite de Thomas-Fermi. Las líneas horizontales y verticales, respectivamente, indican el potencial químico y la altura de barrera para una separación completa de las ramas, i.e. $d = \infty$.

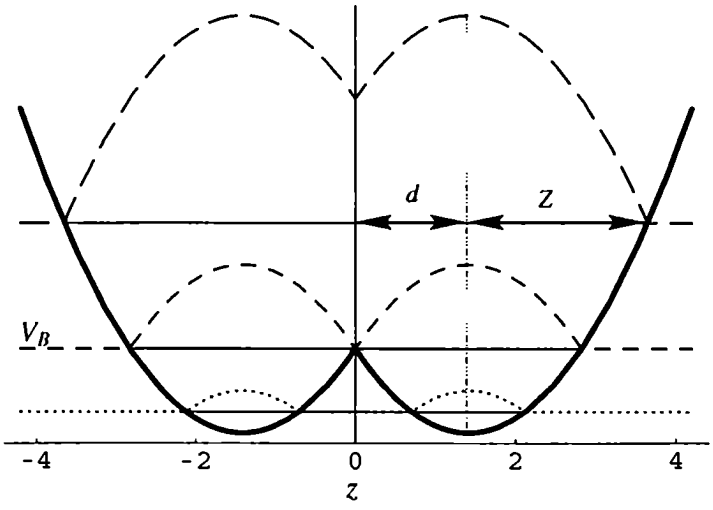


FIGURA 3.2: Perfiles de densidad TF (en unidades arbitrarias). Las líneas continuas horizontales indican valores de potenciales químicos, para los cuales, en líneas rayadas, se grafican las densidades. Los perfiles se han movido verticalmente hasta μ para facilitar su visualización.

La variación de μ/μ_0 se muestra en la Fig. 3.1 en función de $\sqrt{V_B/\mu_0} = z_0/Z_0$, con Z_0 el tamaño del condensado simple. Asimismo, en la Fig. 3.2 se grafican tres densidades TF correspondientes a $\mu = 5/2V_B, V_B$ y $1/4V_B$, respectivamente.

Para encontrar las soluciones de (3.22) procedemos de una manera similar al cálculo de autovalores del doble pozo sin interacción. En otras palabras, buscamos soluciones de la forma

$$\Omega_\nu^2 = \frac{\omega_z^2}{2}\nu(\nu+1) \tag{3.26}$$

para los autovalores, y

$$\delta\rho_\nu = P_\nu\left[\sqrt{M\omega_z^2/2\mu}(|z|-d)\right], \tag{3.27}$$

con P_ν la función generalizada de Legendre (Gradstein y Rhyzhik, 1994). Para obtener las soluciones adecuadas, notamos (i) que el operador en el miembro derecho de la Ec. (3.22) tiene una paridad bien definida, y (ii) que la condición que garantiza valores reales de Ω es la no divergencia de la fluctuación de densidad en el borde del condensado. Teniendo en cuenta esto, construimos las autofunciones (3.27) separadamente para z positivo y negativo, e imponemos la paridad de las soluciones acorde con

$$P_\nu[-\sqrt{M\,\omega_z^2/2\mu}\,d] = 0 \quad \text{para soluciones impares y,} \tag{3.28a}$$

$$P'_\nu[-\sqrt{M\,\omega_z^2/2\mu}\,d] = 0 \quad \text{para las pares.} \tag{3.28b}$$

Cuando la altura de la barrera alcanza el valor del potencial químico, la Ec. (3.22) está bien definida en *dos* dominios separados (cf. Fig. 3.2), y por lo tanto podemos construir las

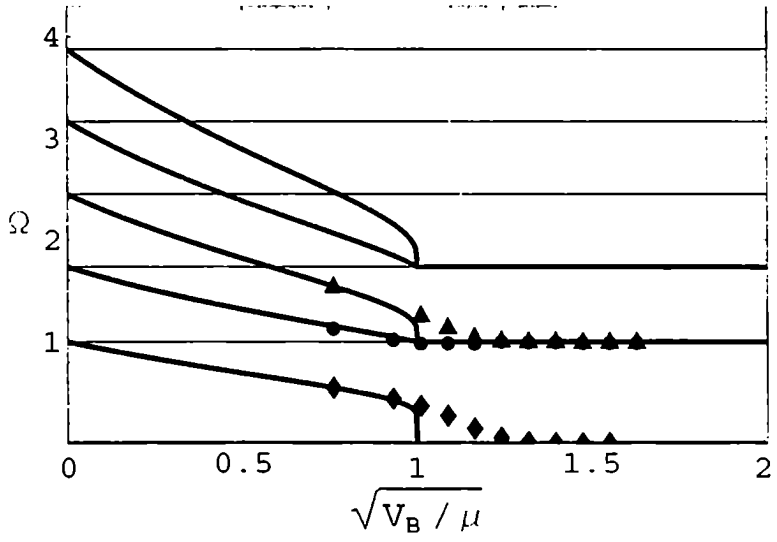


FIGURA 3.3: Espectro de excitaciones (en unidades de ω_z) para la ecuación hidrodinámica (3.22) en función del parámetro adimensional $\sqrt{V_B/\mu}$. Las líneas sólidas horizontales indican el espectro para un oscilador simple. Algunos autovalores provistos por el cálculo FFT se muestran con símbolos.

fluctuaciones de densidad como superposiciones simétricas y antisimétricas de las soluciones exactas de trampa simple:

$$\delta\rho_{\substack{\text{par}\\\text{impar}}} = \mathcal{N}\left\{\delta\rho_0(z-d)\Theta(z) \pm \delta\rho_0(-z-d)\Theta(-z)\right\}, \tag{3.29}$$

donde $\delta\rho_0$ es una solución de la trampa simple para la mitad de las partículas, $\Theta(z)$ es la función escalón y $\mathcal{N}$ una constante de normalización apropiada. De esta manera, una vez que el condensado es separado en dos el espectro de excitaciones para cualquier barrera mayor es igual al espectro simple, pero doblemente degenerado.

La forma del espectro como función de la separación $\sqrt{V_B/\mu} = d/Z$ puede observarse en la Fig. 3.3. Para analizar la diferencia entre el espectro exacto y este resultado hidrodinámico, integramos numéricamente la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo y agregamos sus resultados a la figura.

Este proceso se realiza en dos etapas: primero construimos el condensado resolviendo el problema independiente del tiempo por medio del método de descensos rápidos (ver, por ejemplo, Dalfovo y Stringari, 1996; Press et al., 1992) para luego agregarle un poco de ruido azaroso al perfil ρ_0. Una vez conseguido esto, seguimos la evolución de la densidad perturbada y calculamos la transformada de Fourier rápida (FFT) de $\rho_0(z=d,t)$. Esta nos provee el espectro de excitaciones.

El espectro se ejemplifica en la Fig. 3.4 para cuatro valores de V_B/μ y un acoplamiento $Na/a_z = 10$. Para barreras muy bajas, el espectro corresponde a una sola trampa, pero a medida que se separan los mínimos, dos ramas casi degeneradas se pueden distinguir. Debemos

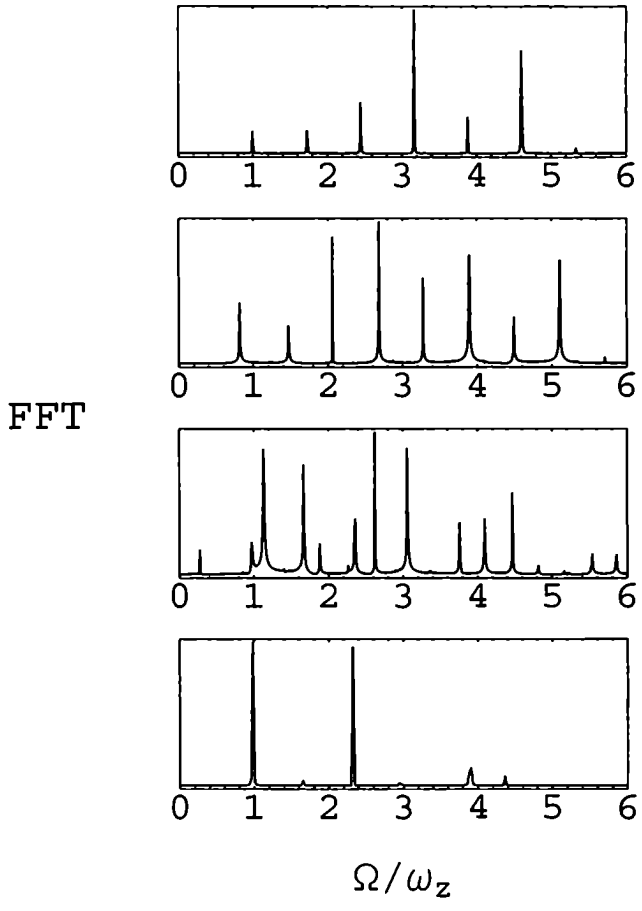


FIGURA 3.4: Transformada de Fourier rápida de la evolución de la densidad perturbada en límite TF, para $\sqrt{V_B/\mu} = 0, 0.4, 1.09$ y 3.9 (desde arriba hasta abajo). La intensidad de los picos está en unidades arbitrarias.

aclarar también, que si bien la pendiente de la curva correspondiente a excitaciones impares posee una discontinuidad notoria cuando $V_B = \mu$, el cálculo FFT evoluciona suavemente a través de ella.

Excitaciones en 3D

Consideremos el potencial confinante con simetría de revolución alrededor del eje z

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M \omega_r^2 r^2 + \frac{1}{2} M \omega_z^2 (|z| - d)^2 \tag{3.30}$$

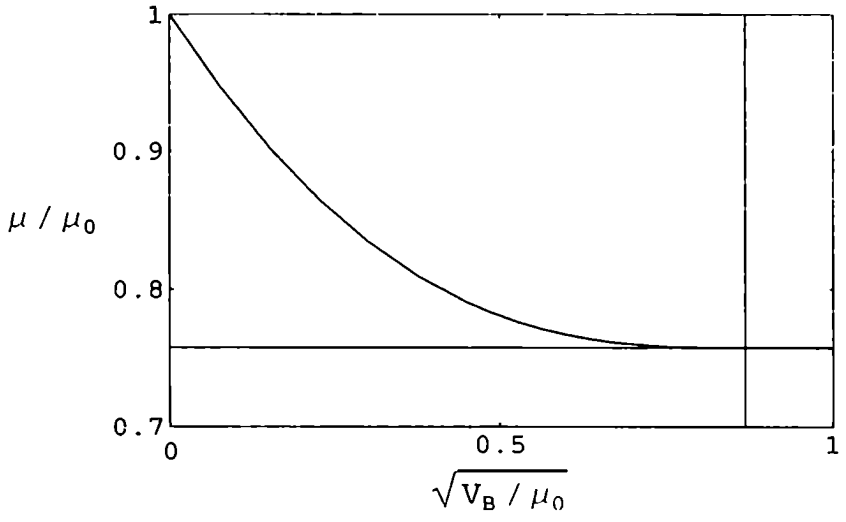


FIGURA 3.5: Ídem Fig. 3.1 para la trampa doble en tres dimensiones.

con una relación de aspecto $\lambda = \omega_z/\omega_r$. El potencial químico está dado por

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \frac{1}{2^{2/5}} \qquad \text{si} \quad V_B > \mu,$$

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{5/2} + \frac{15}{8}\left(\frac{V_B}{\mu_0}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{2} - \frac{5}{4}\left(\frac{V_B}{\mu_0}\right)^{3/2}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{V_B}{\mu_0}\right)^{5/2} = 1 \qquad \text{si } V_B < \mu; \tag{3.31}$$

donde μ_0 es el potencial químico para una trampa simple

$$\mu_0 = \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2}\left(15\,N\,\frac{a}{\tilde{a}}\right)^{2/5} \tag{3.32}$$

La longitud de oscilador $\tilde{a}$ es la correspondiente para una trampa isótropa de frecuencia $\tilde{\omega}$. El cociente μ/μ_0 se muestra en la Fig. 3.5.

Debido a la definición diferente de la fuerza para z positivo o negativo, los métodos usuales (Stringari, 1996, 1998; Fliesser et al., 1997b) para trampas simples pero anisótropas no son útiles. En este caso, es conveniente expandir $\delta\rho(r,z)$ en una base esférica $P^{(2n)}(r)r^l Y_{lm}(\hat{r})$ (Stringari, 1996), y diagonalizar la matriz que representa el operador $\nabla\cdot[(V_0-\mu)\nabla]/M$. El único cuidado que debe tenerse es usar una base correctamente ortonormalizada en el dominio del condensado.

Para un l determinado, el espectro resultante puede designarse de acuerdo con su número cuántico magnético m, y en orden creciente de energía (con el índice k). En la Fig. 3.6 se observa este espectro, para (a) $m = 0$ y (b) $m = 1$. La tendencia es similar a la obtenida en el caso unidimensional, es decir, los niveles se van mezclando gradualmente de a dos correspondientes a autofunciones pares e impares hasta alcanzar la degeneración doble para

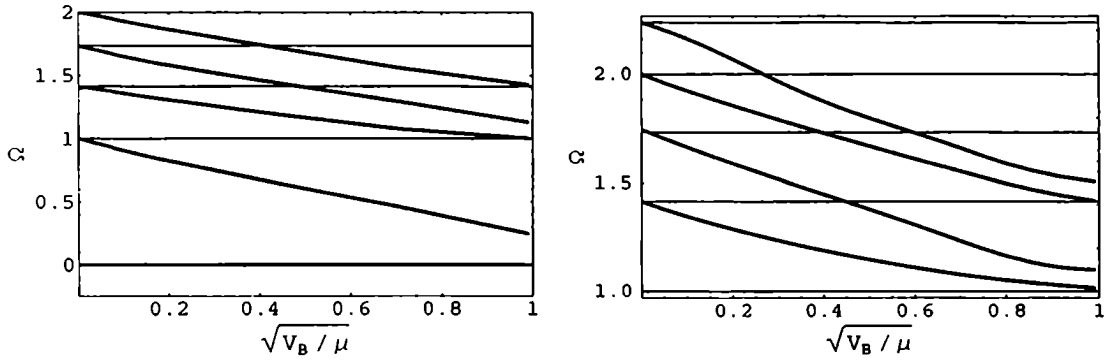


FIGURA 3.6: Espectro hidrodinámico en 3D (en unidades de ω). (a) $m = 0$ y (b) $m = 1$. Las líneas horizontales corresponden al espectro 3D para una trampa simple.

$V_B \to \infty$. También observamos la aparente discontinuidad de los niveles alrededor de $V_B = \mu$. Nuevamente las autoenergías provistas por este cálculo pueden compararse con las obtenidas a través de la solución exacta de la ecuación de Gross-Pitaevskii. En la Fig. 3.7 se muestra un espectro típico obtenido de esta manera para una barrera débil de $V_B \approx 0.02\mu$, algunos autovalores se indican en la abscisa para resaltar el buen acuerdo entre ambos métodos, a pesar de la aproximación TF. Sin embargo, la manera en que es generada la excitación en el procedimiento que incluye la FFT no nos permite controlar exactamente qué modos son excitados y con qué importancia relativa. De esta manera, existen frecuencias que no podemos ver claramente en el espectro FFT para una condición inicial arbitraria.

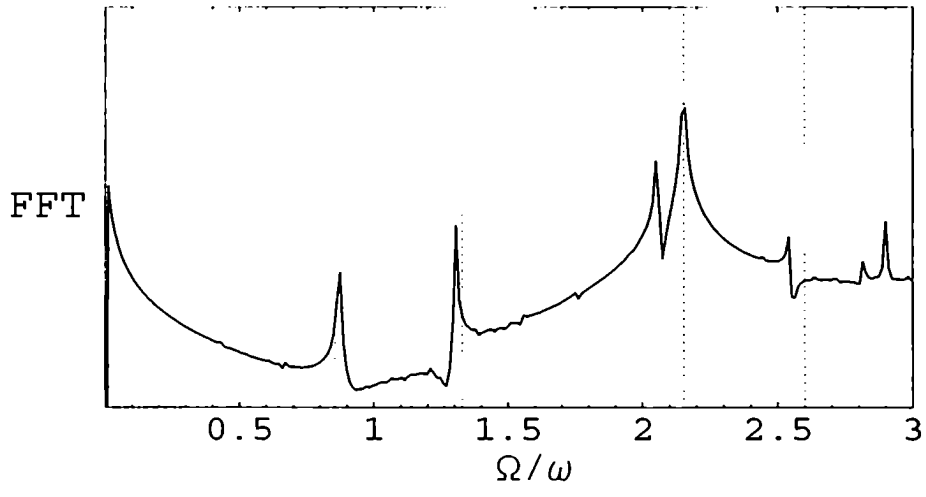
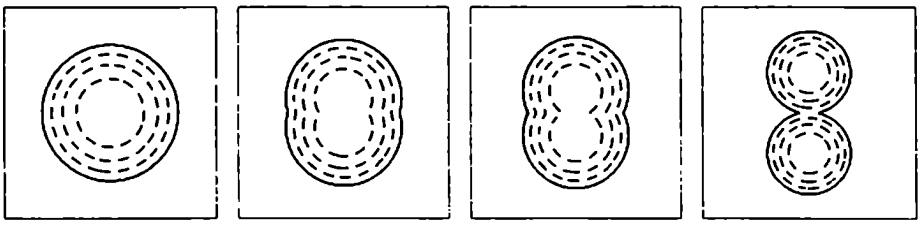


FIGURA 3.7: Espectro tridimensional calculado a partir de una FFT a la solución exacta de GPE para $\sqrt{V_B/\mu} = 0.14$ en función de Ω. Las líneas punteadas verticales muestran algunos de los modos hidrodinámicos obtenidos por diagonalización de la Ec. (3.20). La altura de los picos está en unidades arbitrarias y escala logarítmica.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 3.8: Contornos de equiprobabilidad para cuatro separaciones de las ramas del potencial. Para cada geometría se incluyen 4 contornos diferentes correspondientes a $\rho_0/\rho_{\max} = 0, 1/4, 1/2$ y $3/4$; de afuera hacia adentro.

La forma de las perturbaciones como función de las coordenadas dentro del condensado merece algunos comentarios. Para analizar los patrones de densidad procedimos de la siguiente manera: para un condensado dado, caracterizado por su valor de μ, consideramos los contornos de equiprobabilidad, $\rho_{\rm TF}(r,z) = \rho_0$, donde ρ_0 es una constante que toma distintos valores, se anula en el borde del condensado y aumenta hacia el centro de la trampa (ver Fig. 3.8). En la Fig. 3.9a, dibujamos cuatro recuadros que corresponden al primer nivel impar con $m = 0$ y para diferentes d. Cada uno de estos contiene curvas $\delta\rho[r(z), z]$ en función de z para valores particulares de ρ_0. Las figuras 3.9(b–d), respectivamente, muestran los mismos tipos de gráficos para el primer nivel par con $m = 0$ y para los primeros pares e impares con $m = 1$. Para otros niveles de energía se obtienen gráficos similares.

Las diferencias más importantes entre la descripción de la dinámica colectiva de un pozo doble y los resultados de trampas simples pueden entenderse en términos de las propiedades del sistema unidimensional. El comportamiento de las energías de excitación a medida que los pozos se separan puede interpretarse de una manera simple y clásica que ilustra el efecto de la barrera. La ecuación hidrodinámica (3.22) es la ecuación de ondas de una perturbación de densidad $\delta\rho$ que viaja dentro de un condensado con una velocidad local $v(z) = \sqrt{(\mu - V_0(z))/M}$. Con esta interpretación, podemos estimar el tiempo τ empleado por la perturbación para ir de un pozo al otro, y el período de oscilación completo T,

$$\tau = \int_{-d}^{d} dz \, \frac{1}{v(z)} = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_z} \arcsin\left(\frac{V_B}{\mu}\right), \tag{3.33}$$

$$T = 2\int_{-d-Z}^{d+Z} dz \, \frac{1}{v(z)} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_z}\left[1 + \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{V_B}{\mu}\right)\right] = T_0 + 2\tau \tag{3.34}$$

donde T_0 es el período de la órbita de energía μ en un potencial armónico simple de frecuencia ω. Cuando V_B es suficientemente bajo, la fluctuación oscila esencialmente alrededor del condensado en la órbita clásica de período T_0; en particular, cuando V_B iguala μ, la excitación requiere el doble de tiempo para atravesar el condensado doble. Al crecer V_B la perturbación

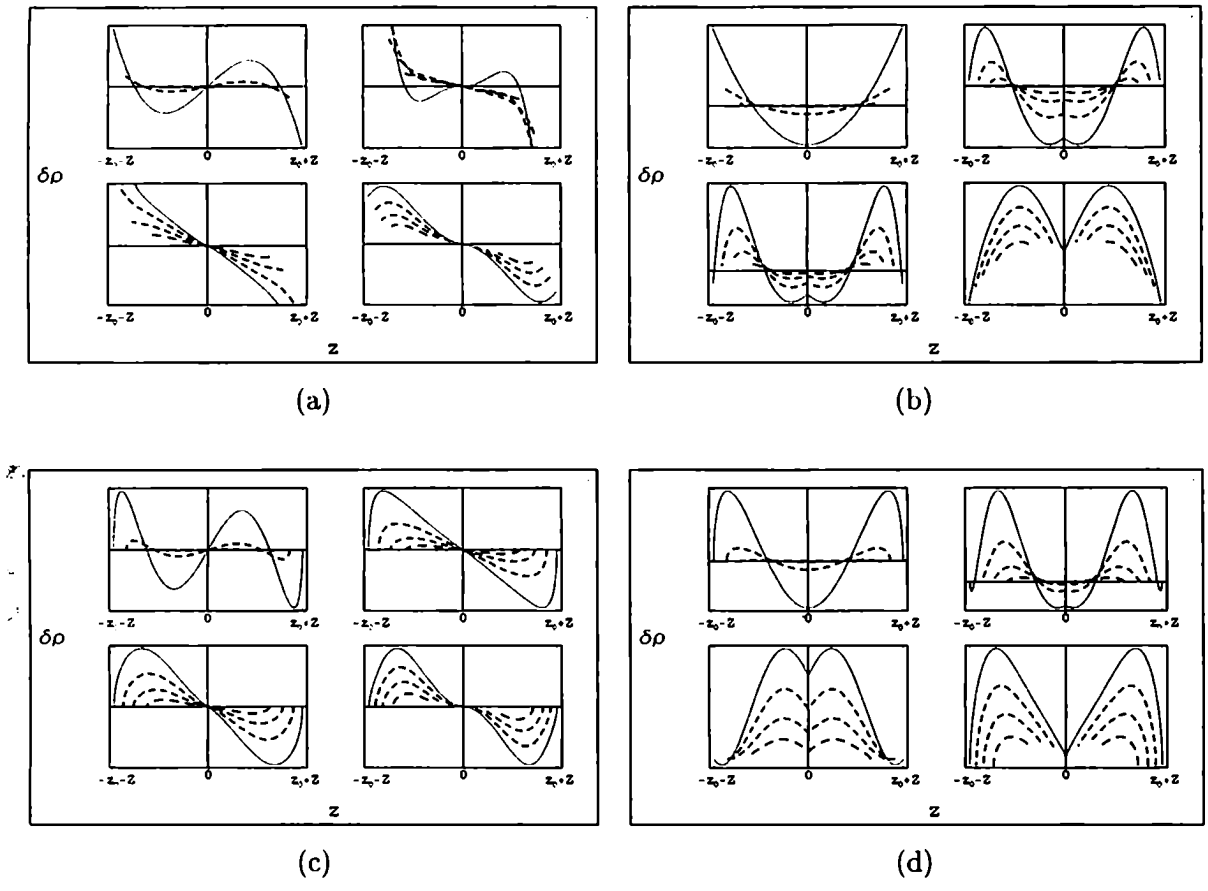


FIGURA 3.9: Fluctuaciones de densidad $\delta\rho[r(z), z]$ en función de z (en unidades arbitrarias). En cada recuadro se muestran la evolución desde el problema de trampa simple hasta el caso límite $V_B \sim \mu$ con los valores $\sqrt{V_B/\mu} = 0.01, 0.26, 0.43$, y 0.99. Cada curva en cada recuadro interior corresponde a los valores $\rho_0/\rho_{\max} = 0, 1/4, 1/2$ y $3/4$; las líneas sólidas marcan el borde del condensado. (a), (b), (c) y (d) corresponden respectivamente a $m = 0$ impar, $m = 0$ par , $m = 1$ impar y $m = 1$ par.

se retrasa un tiempo 2τ. La disminución de las autoenergías pueden entenderse en términos de este aumento del tiempo de oscilación clásico debida a la aparición de una barrera.

El resultado más inesperado del cálculo TF es, a simple vista, la discontinuidad de los niveles impares a medida que nos acercamos a $\mu = V_B$. De hecho, al contrastar estos resultados con el espectro exacto, para el cual algunos resultados fueron mostrados en la Fig. 3.3, vemos que esta discontinuidad no aparece. La explicación de esta discrepancia es sencilla: , proyectamos la ecuación (3.22) sobre un autoestado e integramos, obtenemos

$$\Omega_\nu^2 = \frac{1}{M} \int dz \left| \frac{d\,\delta\rho_\nu}{dz} \right|^2 \left(\mu - V_0(z)\right), \tag{3.35}$$

donde la integración debe realizarse dentro del dominio del condensado TF. Si $\mu < V_B$, el condensado está separado en dos partes sin solapamiento y la región alrededor de $z = 0$ está excluida del dominio de integración. Esta exclusión no es importante para estados pares, ya que el gradiente de densidad se anula en $z = 0$; sin embargo, esto no es cierto para los niveles impares.

Este hecho también puede interpretarse fácilmente si uno excita al condensado y genera una fluctuación. Si la fluctuación es par, oscilará entre los límites de cada pozo sin ser afectada por la otra. En cambio, si la perturbación es antisimétrica, el pico de un lado tiene como imagen una depresión en el otro y por lo tanto la evolución temporal hará oscilar este patrón de un lado al otro, cruzando la barrera.

El caso tridimensional nos permitió analizar la formas de las fluctuaciones más detalladamente (Capuzzi y Hernández, 1999a). En particular, podemos mencionar que: los modos con $m = 0$ poseen una fluctuación de densidad no nula en los bordes externos del condensado ($z = \pm(z_0 + Z)$), mientras que en $z = 0$, en donde la interfase interna crece al aumentar la separación, la densidad se anula o no de acuerdo a si es impar o par. En cambio, en los dos casos, los modos con $m = 1$ tienden a concentrar las fluctuaciones en valores de z lejos de los bordes, tanto internos ($z \approx 0$) como externos ($z \approx \pm(z_0 + Z)$).

3.2.2 Las excitaciones

Si bien la aproximación de Thomas-Fermi es un excelente método para analizar las excitaciones de condensados con gran población, su validez está restringida hasta aquellos niveles con $\hbar\Omega < \mu$. Por otro lado, el planteo y la resolución de los modos de excitación exactos es posible sin tener que recurrir a costosas evoluciones temporales, como se hizo con el cálculo de la transformada de Fourier rápida.

Entre las razones principales para hacer este análisis, podemos mencionar:

- Puesto que la ecuación de Gross-Pitaevskii es no lineal es determinante verificar la estabilidad de cada estado estacionario de la Ec. (3.9). Es decir, debemos considerar la posibilidad de que una pequeña perturbación $\delta\psi_0$ desestabilice el sistema fuera de ψ_0, y por lo tanto la ψ_0 encontrada no represente una solución física. (Fetter, 1972)

- Como subproducto de este análisis, obtenemos la respuesta lineal ante débiles perturbaciones armónicas. (Ruprecht et al., 1996)

- Otra consecuencia importante es el tratamiento a temperatura finita de Bogoliubov (ver Sec. 3.3.1) el cual da una buena descripción aproximada de las partículas fuera del condensado a bajas temperaturas.

Existen varias maneras equivalentes de deducir las ecuaciones para estos modos, aquí seguiremos el trabajo de Edwards et al. (1996) y Ruprecht et al. (1996) los cuales hacen hincapié en la respuesta del sistema. Para esto supondremos que el potencial total, $\widetilde{V}_0(\mathbf{r},t)$ en la Ec. (3.12), es la suma del potencial atrapante más perturbaciones externas de frecuencia ω_p, i.e.

$$\widetilde{V}_0(\mathbf{r},t) = V_0(\mathbf{r}) + f_+(\mathbf{r})\, e^{-i\omega_p t} + f_-(\mathbf{r})\, e^{i\omega_p t}, \tag{3.36}$$

donde $f_-(\mathbf{r})$ y $f_+(\mathbf{r})$ son las amplitudes de la perturbación con frecuencia angular ω_p. La respuesta lineal predicha por la GPE corresponde a una oscilación alrededor de una solución de equilibrio y puede encontrarse proponiendo un condensado dependiente del tiempo de la forma

$$\psi_0(\mathbf{r},t) = e^{-i\mu t/\hbar}\left[N_0^{1/2}\,\psi_0^0(\mathbf{r}) + u(\mathbf{r})\, e^{-i\omega_p t} + v(\mathbf{r})^*\, e^{i\omega_p t}\right], \tag{3.37}$$

donde $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ son las correcciones al condensado estacionario ψ_0^0 con potencial químico μ. Después de introducir la forma (3.37) en la Ec. (3.12), reteniendo los términos a primer orden en u, v y $f_\pm$, e igualando potencias iguales de $e^{\pm i\omega_p t}$ obtenemos tres ecuaciones. La primera es la ecuación de Gross-Pitaevskii estacionaria (3.9) para el condensado ψ_0^0 y potencial químico μ. Las otras dos ecuaciones están acopladas y dan lugar a las excitaciones

$$\left[h_0 - \mu + 2g\,N_0\,|\psi_0^0|^2\right]u(\mathbf{r}) + g\,N_0\,(\psi_0^0)^2\,v(\mathbf{r}) = \hbar\omega_p\,u(\mathbf{r}) - N_0^{1/2}\,f_+(\mathbf{r})\,\psi_0^0, \tag{3.38a}$$

$$-g\,N_0\,(\psi_0^{0*})^2\,u(\mathbf{r}) - \left[h_0 - \mu + 2g\,N_0\,|\psi_0^0|^2\right]v(\mathbf{r}) = \hbar\omega_p\,v(\mathbf{r}) + N_0^{1/2}\,f_-(\mathbf{r})\,\psi_0^0. \tag{3.38b}$$

La solución a estas ecuaciones, i.e. la respuesta lineal del sistema, se puede encontrar usando una expansión en los modos normales del condensado, determinados por

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GP}}\,\bar{u}_k(\mathbf{r}) = \hbar\Omega_k\,\bar{u}_k(\mathbf{r}) \tag{3.39}$$

donde $\vec{u} = \binom{u}{v}$ y

$$\mathcal{L}_{\rm GP} = \begin{pmatrix} h_0 - \mu + 2\,g\,N_0\,|\psi_0^0|^2 & g\,N_0\,(\psi_0^0)^2 \\ -g\,N_0\,(\psi_0^{0*})^2 & -\left[h_0 - \mu + 2\,g\,N_0\,|\psi_0^0|^2\right] \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Las ecuaciones (3.39) definen los modos de cuasipartículas y frecuencias de un condensado atrapado en la aproximación de Bogoliubov. Es por esto que se las conoce como ecuaciones de Hartree-Fock-Bogoliubov (HFB) o Bogoliubov-DeGennes y fueron originalmente deducidas por Pitaevskii (1961) con el objeto de investigar las excitaciones de una línea de vórtice en un condensado de Bose uniforme. Para condensados de Bose homogéneos (i.e. $V_0 = 0$), $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ son ondas planas y el espectro Ω_k es continuo. Por otro lado, para un gas atrapado, las excitaciones están confinadas y el espectro es discreto. Las soluciones de esta ecuación representan las fluctuaciones del condensado inducidas por los campos externos $f_\pm(\mathbf{r})$. Cuando se apagan las perturbaciones, la evolución del condensado puede suceder sólo a las autoenergías $\hbar\,\Omega_k$. En general, una fluctuación transitoria ($f_\pm$) cercana a una resonancia Ω_k producirá una respuesta predominantemente a la misma frecuencia. Por otro lado, con respecto a la estabilidad del condensado puesto que una perturbación libre evoluciona con $e^{i\,\Omega_k\,t}$, para garantizar la estabilidad dinámica del sistema debemos tener $\mathrm{Im}(\Omega_k) = 0$, i.e., Ω_k debe formar un espectro *real*.

Si bien el cálculo de los modos HFB para un problema tridimensional y con geometría esférica (trampa isótropa) no es analítico, hace un par de años (Dodd et al., 1998) pudo llevarse a cabo para varias configuraciones experimentales y se consiguió un acuerdo muy bueno con las mediciones. Sin embargo, a medida que uno incluye complicaciones en la geometría, como por ejemplo trampas dobles, el costo computacional del cálculo aumenta notablemente. Esto se debe principalmente a que las ecuaciones diferenciales de $u(\mathbf{r})$ y $v(\mathbf{r})$ dejan de ser separables en las coordenadas usuales. Además, el aumento del número de partículas está acompañado por un aumento en la base mínima necesaria para describir correctamente las excitaciones. Estos hechos impusieron severas limitaciones en nuestros cálculos, por lo cual estos sólo fueron realizados para configuraciones con relativamente pocas partículas.

En la figura 3.10 mostramos las frecuencias de excitación más bajas en función de $\sqrt{V_B/\mu}$ (cf. Fig. 3.6) para $m = 0$ y 1, y distintos números de partículas. Como puede verse, a medida que N aumenta, el espectro se acerca al límite TF. Asimismo, a partir de que la barrera supera el potencial químico ($\sqrt{V_B/\mu} > 1$), las frecuencias se acercan a los valores correspondientes a trampas simples. Esto puede observarse más claramente en el espectro con $m = 0$, donde los niveles más bajos terminan en $\Omega = 0, \omega$ correspondientes a los niveles más bajos de un oscilador. Por otro lado, las excitaciones con $m = 1$ no tienden a los valores del pozo simple en el limite TF, la explicación de esta diferencia reside en el todavía escaso

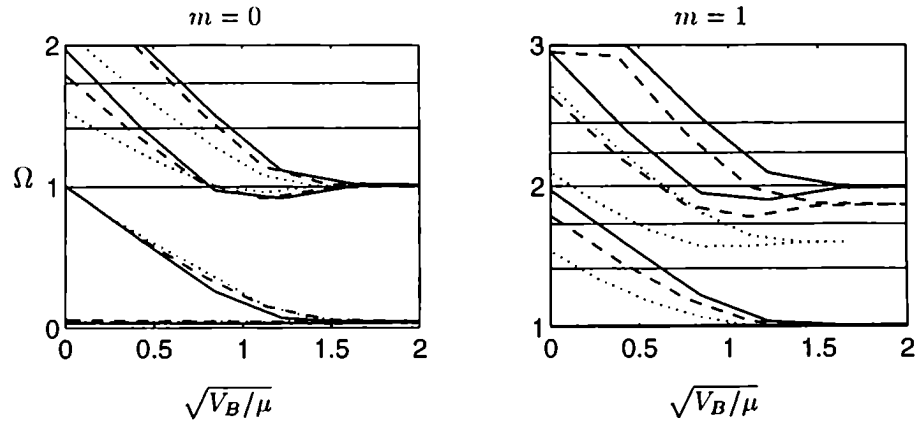


FIGURA 3.10: Excitaciones de la GPE (en unidades de ω) en función de la barrera de potencial. Las curvas continua, rayada, y punteada corresponden a $N = 10^2, 10^3$ y 10^4 respectivamente. En los cálculos se utilizó $a/a_z = 10^{-3}$ que corresponde aproximadamente a partículas de ^{87}Rb en una trampa de frecuencia $\omega \approx 20\,\mathrm{s}^{-1}$. Las líneas sólidas horizontales indican algunas de las frecuencias en el límite TF.

número de partículas consideradas, sin embargo, es evidente del gráfico que la tendencia es la correcta, pues a medida que aumenta N las energías se acercan a los valores TF (líneas horizontales sólidas en el gráfico).

3.3 Temperatura finita

En la Sección 3.2 hemos estudiado las excitaciones colectivas de un gas de Bose atrapado en un pozo doble y a temperatura cero. En ese caso todos los átomos se encontraban en el condensado y no había colisiones, la fuerza que sufría una partícula era el resultado del campo medio creado por las demás. Este campo medio produce oscilaciones del sistema, conocidas como cuasipartículas de Bogoliubov, las cuales son análogas a los fonones del sonido cero en fermiones.

A temperatura finita, sin embargo, el condensado y la nube térmica pueden oscilar. Los tratamientos de campo medio han sido extensamente utilizados para predecir las propiedades de las excitaciones colectivas bajo condiciones no colisionales, las cuales se alcanzan a temperaturas bajas y para una densidad de nube térmica pequeña. En estos casos, las oscilaciones se parecen a las de $T = 0$. Dentro de esta aproximación no colisional, el método más usado ha sido el denominado Hartree-Fock-Bogoliubov en la aproximación de Popov (Popov, 1987). En este esquema la componente térmica se considera como un baño térmico estático que modifica las excitaciones del condensado, pero no provee mecanismos de disipación.

Si bien la teoría de HFB-Popov es una aproximación razonable para el espectro de excitaciones para todas las temperaturas (Griffin, 1996), la teoría parece desviarse de los resultados

experimentales para $T \gtrsim 0.6T_c$ (Dodd et al., 1998). Esto es debido, probablemente, a las limitaciones naturales de esta teoría, como por ejemplo:

- supone que el condensado se mueve a través de una nube térmica *estática*, y
- no tiene en cuenta completamente los efectos del medio, el condensado de Bose, en las colisiones atómicas. En particular, esto puede significar, que (i) los estados intermedios pueden estar ocupados, lo que significaría una modificación de la amplitud de dispersión; y (ii) el espectro de los estados iniciales, intermedios y finales es diferente. (Proukakis et al., 1998; Stoof et al., 1996; Bijlsma y Stoof, 1997)

En las próximas secciones discutiremos las propiedades de las excitaciones colectivas a temperatura finita utilizando este y otros métodos similares.

3.3.1 El tratamiento HFB-Popov

La teoría de Hartree-Fock-Bogoliubov-Popov (HFB-Popov) es una extensión de la aproximación de campo medio para temperatura finita que provee un tratamiento autoconsistente tanto de la partículas *en* el condensado como de las componentes térmicas del mismo. Asimismo, describe la respuesta lineal de pequeña amplitud ante fluctuaciones mecánicas a temperatura finita. El gas atrapado es descripto como un sistema en equilibrio termodinámico dentro del conjunto gran canónico, caracterizado por la variables N, el número *total* de átomos, T la temperatura, y N_0 o μ. El hamiltoniano gran canónico es (cf. Ec. (3.3))

$$\hat{K} \equiv \hat{H} - \mu \hat{N} = \int \hat{\psi}^\dagger (\hat{h}_0 - \mu) \hat{\psi}\, d^3r + \frac{g}{2} \int \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\, \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\, \hat{\psi}(\mathbf{r})\, \hat{\psi}(\mathbf{r})\, d^3r. \tag{3.41}$$

De manera similar al caso de temperatura cero, el operador de campo $\hat{\psi}$ se separa en una función de onda del condensado más un operador, que en este caso retendremos, el cual representará las partículas excitadas. Luego de insertar $\hat{\psi} = N_0^{1/2} \psi_0 + \hat{\Psi}$ en el hamiltoniano (3.41) y tratando los términos cúbicos y cuárticos dentro de la aproximación de campo medio, el hamiltoniano gran canónico se reduce a la suma de cuatro términos $\hat{K}_{\text{HFB-P}} = K_0 + \hat{K}_1 + \hat{K}_1^\dagger + \hat{K}_2$. El primer término, $\hat{K}_0$, es la funcional $E_0[\psi_0, N_0] - \mu$ (cf. Ec. (3.8)), el segundo y tercero son proporcionales a $\hat{\Psi}$ y $\hat{\Psi}^\dagger$ respectivamente y el cuarto, $\hat{K}_2$ es cuadrático. Los términos lineales en $\hat{\Psi}$ y $\hat{\Psi}^\dagger$ se anulan idénticamente si ψ_0 satisface la ecuación de Gross-Pitaevskii generalizada

$$\left\{ h_0 + g \left[N_0 |\psi_0|^2 + 2\tilde{\rho}(\mathbf{r}) \right] \right\} \psi_0 = \mu \psi_0 \tag{3.42}$$

donde $\tilde{\rho}$ es la densidad de partículas no condensadas. Esta ecuación describe el condensado sometido tanto a la interacción con sus partículas como con la nube de excitaciones térmicas

$\tilde{\rho}$, notar que el factor 2 proviene de considerar el término directo y el de intercambio para el potencial de contacto de onda s.

El término $\hat{K}_2$ es

$$\hat{K}_2 = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\,\mathcal{L}\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r + \frac{N_0\,g}{2}\int [\psi_0(\mathbf{r})]^2\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\,\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r + \frac{N_0\,g}{2}\int [\psi_0^*(\mathbf{r})]^2\hat{\Psi}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\,d^3r \tag{3.43}$$

donde $\mathcal{L} \equiv h_0 + 2\,g\,\rho(\mathbf{r}) - \mu$, y $\rho(\mathbf{r}) = N_0\,|\psi_0|^2 + \tilde{\rho}(\mathbf{r})$ es la densidad *total* de partículas. Este término puede diagonalizarse usando la transformación de Bogoliubov (Bogoliubov, 1947) para sistemas no uniformes

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_j \left[u_j(\mathbf{r})\hat{\alpha}_j - v_j^*(\mathbf{r})\hat{\alpha}_j^\dagger\right], \tag{3.44}$$

si las amplitudes de cuasipartículas u y v satisfacen las ecuaciones acopladas de HFB-Popov

$$\mathcal{L}\,u_j(\mathbf{r}) - N_0\,g\,|\psi_0(\mathbf{r})|^2\,v_j(\mathbf{r}) = E_j\,u_j(\mathbf{r}), \tag{3.45a}$$

$$\mathcal{L}\,v_j(\mathbf{r}) - N_0\,g\,|\psi_0(\mathbf{r})|^2\,u_j(\mathbf{r}) = -E_j\,v(\mathbf{r}). \tag{3.45b}$$

Los operadores $\hat{\alpha}_j$ y $\hat{\alpha}_j^\dagger$ son operadores de creación y aniquilación que cumplen con las reglas de conmutación usuales para bosones.

La densidad fuera del condensado es $\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \langle\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle$, y por lo tanto puede escribirse en término de las amplitudes de cuasipartículas, como

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_j{}' \left\{\left[|u_j(\mathbf{r})|^2 + |v_j(\mathbf{r})|^2\right] N_j + |v_j(\mathbf{r})|^2\right\}, \tag{3.46}$$

siendo $N_j = (e^{\beta E_j} - 1)^{-1}$ el número de ocupación de Bose Einstein, la sumatoria primada indica que no se debe sumar el término con $j = 0$, pues corresponde al condensado. De manera similar se puede calcular el valor medio de cualquier magnitud en la aproximación HFB-P recurriendo a la expresión del operador de campo $\hat{\psi}$, al hamiltoniano $K_{\text{HFB-P}}$ y a las soluciones de u y v. Además, la función de partición gran canónica, Ec. (2.7) en la página 9, puede escribirse fácilmente,

$$\begin{aligned} Z_G &= e^{-\beta\,\tilde{K}_0}\,\mathrm{Tr}\left(e^{-\beta\sum_j{}' E_j\,\hat{\alpha}_j^\dagger\hat{\alpha}_j}\right), \\ &= e^{-\beta\,\tilde{K}_0}\prod_j{}'\left(1 - e^{-\beta\,E_j}\right), \end{aligned} \tag{3.47}$$

donde

$$\tilde{K}_0 = N_0\int \psi_0^*(\mathbf{r})\left(\hat{h}_0 - \mu\right)\psi_0(\mathbf{r})\,d^3r + \frac{1}{2}\,g\,N_0^2\int |\psi_0|^4\,d^3r - \sum_j E_j\int |v_j(\mathbf{r})|^2\,d^3r. \tag{3.48}$$

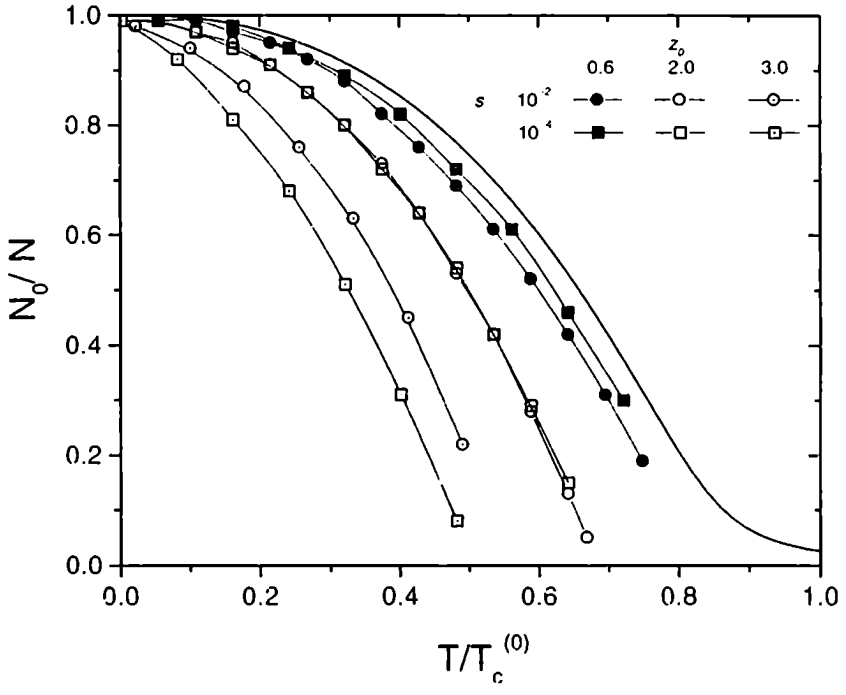


FIGURA 3.11: Número de ocupación del estado fundamental de un doble pozo tridimensional en la aproximación HFB-Popov y con $N = 100$. Cada línea con símbolos corresponde a un valor diferente del par $(z_0, s \equiv a/a_z)$, la línea continua corresponde a $(z_0 = 0, s = 0)$.

De igual manera que el caso no interactuante, conseguida la función de partición podemos calcular el gran potencial termodinámico y a partir de ella las distintas magnitudes termodinámicas mediante diferenciales adecuadas.

En resumen, las Ecs. (3.45) describen un condensado sujeto a interacciones con si mismo y con la nube térmica, siendo esta nube generada por las excitaciones térmicas de las cuasi-partículas del condensado[b]. Para solucionar este problema uno debe resolver la ecuación de Gross-Pitaevskii (3.42) acoplada con Ec. (3.45) usando densidades autoconsistentes $\rho_0(\mathbf{r})$ y $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ para un número fijo de partículas

$$N = N_0 + \int \tilde{\rho}(\mathbf{r})\, d^3r. \tag{3.49}$$

Con este fin, usamos el procedimiento descripto por Hutchinson et al. (1997), y expandimos $\hat{h}_0$ en una base de autofunciones del oscilador armónico en dos dimensiones en el plano (x, y) por una base discretizada del pozo doble en la dirección z. Para ilustrar este procedimiento, en la Fig. 3.11 graficamos la fracción de partículas en el condensado en función de la temperatura para 100 partículas y varias alturas de barreras y parámetros de interacción g. En

[b]También existe una contribución no térmica a $\tilde{\rho}$, denominada "depresión" cuántica, dado por el último término de Ec. (3.46).

la figura podemos observar que el sistema alcanza la condensación a temperaturas menores de la temperatura correspondiente para una trampa simple sin interacciones. Sin embargo, dependiendo del valor de z_0, observamos dos comportamientos diferentes. Cuando z_0 es pequeño, la temperatura de condensación disminuye al aumentar la interacción, de acuerdo con el resultado para trampas simples (Bagnato et al., 1987; Giorgini et al., 1996). Por el contrario, si z_0 es suficientemente grande, un aumento en a produce una temperatura crítica mayor. Este efecto ya había sido comentado en la Sección 2.3.3 (pág. 24) en base a una aproximación semiclásica.

Aunque es posible realizar este cálculo, a medida que aumentamos el número de partículas y la temperatura, las bases necesarias para expandir el problema se hacen demasiado grandes. Sin embargo, en vista de la magra depresión que tiene el condensado a temperatura cero, podemos recurrir a una nueva aproximación sobre el esquema HFB-Popov.

3.3.2 Condensado equivalente a Temperatura cero — CETC

Varios trabajos (Hutchinson et al., 1997; Dodd et al., 1997, 1998) han mostrado que para los experimentos actuales, el término de depresión cuántica de un condensado pequeño es prácticamente nulo, i.e., $\int \tilde{\rho}|_{T\approx 0}\, d^3r = \sum_j \int |v_j(\mathbf{r})|^2\, d^3r \ll N_0$. Esto permite tener en cuenta la aproximación

$$v_j(\mathbf{r}) \equiv 0, \tag{3.50}$$

la cual es equivalente a la aproximación de Hartree-Fock usada por Houbiers y Stoof (1996); Bergeman (1997). Si aplicamos esta aproximación a la Ec. (3.45a), e ignoramos las contribuciones de $\tilde{\rho}$ a ρ, obtenemos una ecuación de Schrödinger usual para $u_j(\mathbf{r})$,

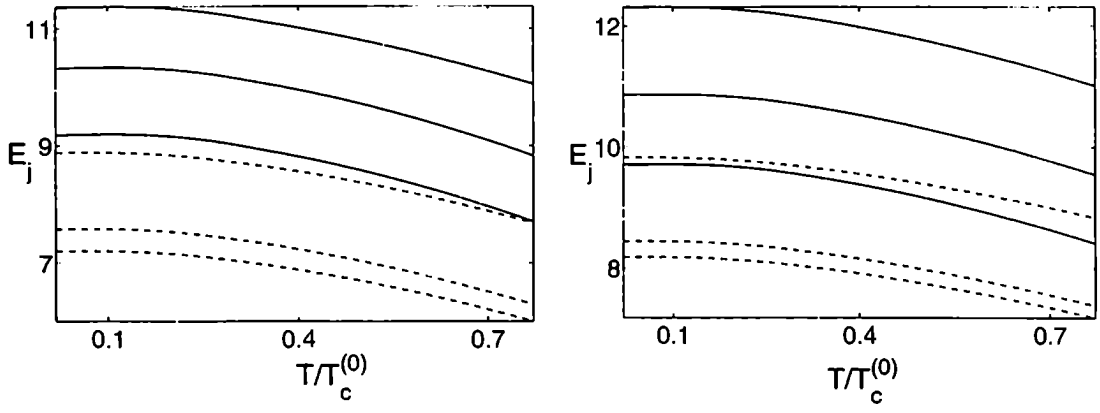
$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2 + V_{\rm ef}(\mathbf{r})\right] u_j(\mathbf{r}) = E_j\, u_j(\mathbf{r}), \tag{3.51}$$

donde el potencial efectivo está dado por

$$V_{\rm ef}(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r}) + 2\,g\,N_0\,|\psi_0(\mathbf{r})|^2 - \mu, \tag{3.52}$$

y corresponde a una trampa externa más la interacción repulsiva causada por el condensado. Cuando la fracción no condensada es pequeña, las amplitudes de las cuasipartículas correspondientes a los niveles más bajos son expulsadas de la zona que ocupa el condensado. Para el condensado, debido a esto, podemos ignorar la contribución de $\tilde{\rho}$ en la ecuación de Gross-Pitaevskii generalizada, Ec. (3.42), y por lo tanto determinar la función de onda a partir de la GPE tradicional. La diferencia está en que la Ec. (3.9) se resuelve para un número de partículas menor al total, i.e. $N_0 = N - N'$.

Usando esta aproximación realizamos varios cálculos en el doble pozo. En la Fig. 3.12 graficamos los niveles más bajos, para $m = 0$ y $m = 1$ en función de la temperatura y



(a) (b)

FIGURA 3.12: Niveles de energía (en unidades de $\hbar\omega_z$) a temperatura finita y en la aproximación CETC. Las curvas continuas (rayadas) corresponden al pozo doble con $z_0 = 1(3)$. En (a) y (b) se muestran las excitaciones con $m = 0$ y $m = 1$ respectivamente.

para $N = 10^4$. La disminución de las energías de excitación es consecuencia directa de la interacción *repulsiva* entre las partículas, que favorece la descondensación. Así, al aumentar la temperatura, el sistema se excita más fácilmente y la fracción condensada, N_0, y la temperatura de transición, T_c, disminuyen.

Capítulo 4

Impurezas en un condensado de Bose–Einstein

Desde que la condensación de Bose–Einstein se logró en 1995 se ha creído que los condensados son frágiles ante perturbaciones e inclusión de agentes externos. En este capítulo estudiaremos, dentro de un modelo sencillo, un condensado conteniendo una impureza macroscópica con la cual los átomos del condensado interactúan. Para esto, en la primera sección discutiremos como se modifica el perfil de densidades del condensado. En la sección 4.2 se describe una impureza formada por átomos de ^{3}He, mientras que en la Sec. 4.3 presentamos un modelo aproximado para la dinámica del sistema.

4.1 La forma del condensado

Supongamos que los átomos del condensado interactúan con una impureza a través de un potencial de tipo Lennard-Jones (LJ) $V_{\rm LJ}$ con carozo finito. Si la impureza se encuentra localizada en la posición $\mathbf{R}$, los átomos del gas sentirán un potencial externo total

$$V(\mathbf{r}) = \frac{M}{2}\omega^2 r^2 + 4\,\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}\right)^{6}\right], \tag{4.1}$$

para $|\mathbf{r}-\mathbf{R}| \geq r_c$ y

$$V(\mathbf{r}) = \frac{M}{2}\omega^2 r^2 + V_{\rm LJ}(r_c) \tag{4.2}$$

si $|\mathbf{r}-\mathbf{R}| < r_c$, con r_c suficientemente pequeño para garantizar que el potencial químico μ está por debajo de $V_{\rm LJ}(r_c)$. Para una impureza atómica, i.e. una molécula o una gota pequeña, los valores típicos de ϵ y σ son algunos K y unos pocos Å (o fracciones), respectivamente.

Para estudiar la forma que toma el condensado en estas condiciones, recurrimos a la aproximación de Thomas-Fermi. Los puntos de retorno clásicos $\mathbf{r}_{1,2}$ para una partícula con energía μ en el potencial V están definidos por a relación

$$\mu = V(\mathbf{r}_{1,2}). \tag{4.3}$$

Además, consideraremos que la gota está quieta en el centro de la trampa, $\mathbf{R} = \mathbf{0}$; y puesto que el condensado posee un tamaño de varios micrones, y μ es apenas cercano a μK, podemos asumir que $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$, respectivamente, coinciden con los puntos de retorno de un potencial LJ puro y una trampa armónica pura. Con esto, obtenemos

$$\mathbf{r}_1 = \sigma \left(\frac{2\epsilon}{\mu}\right)^{1/6} \left(\sqrt{1+\frac{\mu}{\epsilon}} - 1\right)^{1/6} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}_2 = \left(\frac{2\mu}{M\omega^2}\right)^{1/2} \tag{4.4}$$

Finalmente, la densidad de Thomas-Fermi vale

$$\rho_{\mathrm{TF}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu - V_0(\mathbf{r}) - V_{\mathrm{LJ}}(\mathbf{r})}{g} \Theta(\mu - V_0 - V_{\mathrm{LJ}}). \tag{4.5}$$

Vale la pena remarcar que para un potencial LJ altamente localizado y con un mínimo profundo, la densidad (4.5) presenta un pico de gran altura el cual podría invalidar la aproximación TF. Sin embargo, cálculos explícitos realizados con la ecuación de Gross-Pitaevskii convalidan esta aproximación.

Como es usual, el potencial químico μ está fijo a través de la conservación del número de partículas,

$$N = \int_{r_1}^{r_2} \rho_{\mathrm{TF}}\, d^3r = N_0(\mu,\omega) + N_{\mathrm{LJ}}(\mu,\omega,\sigma,\epsilon) \tag{4.6}$$

$$N_0 = \int_0^{r_2} \frac{\mu - V_0}{g}\, d^3r = \frac{8\pi}{15\,g}\left(\frac{2}{M\omega^2}\right)^{3/2} \mu^{5/2}, \tag{4.7}$$

el número de átomos contenidos solamente por la trampa y

$$N_{\mathrm{LJ}} = -\int_0^{r_1} \frac{\mu - V_0}{g}\, d^3r - \int_{r_1}^{r_2} \frac{V_{\mathrm{LJ}}}{g}\, d^3r \tag{4.8}$$

la cantidad de partículas expulsadas por el carozo de la impureza.

Teniendo en cuenta que el potencial LJ es despreciable en r_2 y que $\mu/\epsilon \ll 1$, obtenemos

$$N_{\mathrm{LJ}}(\mu,\omega,\sigma,\epsilon) = \frac{4\pi}{g}\left(-\frac{\mu\sigma^3}{3} + \frac{M\omega^2}{10}\sigma^5 + \frac{8}{9}\epsilon\sigma^3\right). \tag{4.9}$$

Introduciendo las escalas típicas para la energía y la distancia, $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\hbar\omega$, $\tilde{\mu} = \mu/\hbar\omega$, $d_0 = \sqrt{\hbar/M\omega}$, podemos reescribir la Ec. (4.9)

$$N_{\mathrm{LJ}} = \frac{\sigma^3}{3\,d_0^2\,a}\left(\frac{8\,\tilde{\epsilon}}{3} - \tilde{\mu}\right) + \frac{\sigma^5}{10\,d_0^4\,a} \approx \frac{8}{9}\frac{\sigma^3}{d_0^2\,a}\,\tilde{\epsilon}. \tag{4.10}$$

La última igualdad vale en virtud de que $\widetilde{\epsilon}$ es alrededor de seis órdenes de magnitud más grande que $\widetilde{\mu}$, mientras que σ es comparable con la longitud de dispersión a. Mas aún, la Ec. (4.10) muestra que el número de partículas excluidas es de orden uno e independiente del número total de átomos en el condensado. Estas consideraciones nos permitieron (Capuzzi et al., 2000) obtener una expresión aproximada para el potencial químico

$$\mu \approx \mu_0 \left\{ 1 + \frac{\sigma}{\kappa^3} \left[\frac{1}{(15N)^{3/5}} - \frac{\sigma^2}{25\kappa^2 N} - \frac{16}{45\pi N} \frac{\widetilde{\epsilon}}{(\kappa/d_0)^2} \right] \right\} \tag{4.11}$$

donde μ_0 es el potencial químico sin la impureza y κ es una nueva escala de longitud definida de acuerdo con

$$\kappa^5 = d_0^4 \, a, \tag{4.12}$$

la cual para $a \approx 10^{-3} \, d_0$ vale $\kappa \simeq 0.25 d_0$. Para los tamaños y energías en consideración, esto da

$$\mu \approx \mu_0 \left(1 - \frac{0.004}{N} \right). \tag{4.13}$$

De esta expresión podemos concluir que no deben esperarse modificaciones en el potencial químico por la presencia de la impureza. Por otro lado, si el carozo de la impureza σ se hace comparable con d_0, las hipótesis que dieron lugar a las Ecs. (4.10) y (4.11) dejan de valer y deberíamos hacer un análisis más cuidadoso.

4.2 Una gota de ^{3}He

En esta sección describimos un modelo más específico en el cual la impureza, caracterizada por las coordenadas $(\mathbf{R}, \mathbf{P})$, es una gota pequeña de ^{3}He cuyo perfil de densidades $\rho_3(\mathbf{r}_{\mathrm{He}})$ se calcula en el marco de la teoría de la funcional de la densidad (Garcias et al., 1998). El gas atrapado está compuesto por átomos alcalinos y la interacción ^{3}He-alcalino, $V_{3\text{-a}}$, es conocida (Patil, 1991). El hamiltoniano total se puede escribir

$$H[\rho(\mathbf{r}), \mathbf{R}, \mathbf{P}] = \int \left[\frac{\hbar^2}{2M} \left| \nabla \sqrt{\rho(\mathbf{r})} \right|^2 + V_0(\mathbf{r}) \, \rho(\mathbf{r}) + \frac{g}{2} \rho^2(\mathbf{r}) \right] d^3 r + \frac{P^2}{2M_3} + \iint \rho(\mathbf{r}) \, \rho_3(\mathbf{r}_{\mathrm{He}}) \, V_{3\text{-a}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\mathrm{He}}) \, d^3 r \, d^3 r_{\mathrm{He}}. \tag{4.14}$$

donde $\rho(\mathbf{r})$ es la densidad del condensado.

En la Ec. (4.14), hemos tratado a la impureza como un objeto clásico sin estructura y con energía cinética $P^2/2M_3$, también reconocemos que el primer término de la ecuación es la funcional de energía de Gross-Pitaevskii (cf. Ec. (3.8) en la página 28). Este hamiltoniano da lugar a una GPE con el potencial efectivo

$$V_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}) = V_0(\mathbf{r}) + \int \rho_3(\mathbf{r}_{\mathrm{He}}) \, V_{3\text{-a}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{\mathrm{He}}) \, d^3 r_{\mathrm{He}}. \tag{4.15}$$

En la Ec. (4.14) hemos ignorado el efecto directo de la trampa, de origen magnético en general, sobre la impureza puesto que nuestro interés está concentrado en los efectos causados por la interacciones *mutuas* entre el condensado y la gota.

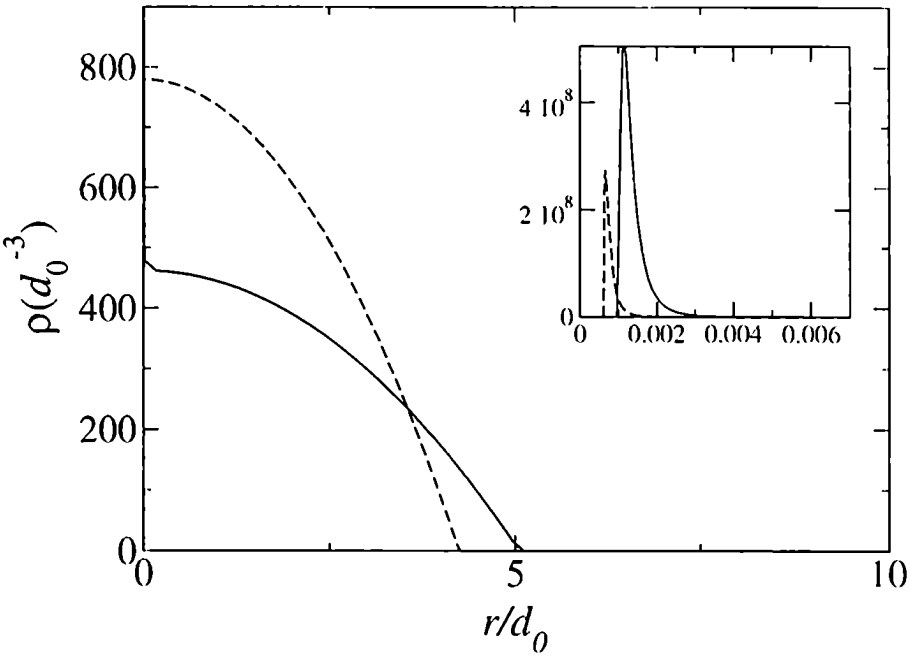


FIGURA 4 1: Perfiles de densidad de condensados de Rubidio (línea llena) y Sodio (línea rayada) para 10^5 partículas. El recuadro muestra una ampliación de la densidad alrededor del mínimo del potencial de la gota.

Asumiendo que la impureza permanece en reposo en $\mathbf{R} = 0$, realizamos una serie de cálculos para resolver la GPE con $V_{\rm ef}$ para condensados de Rb, Na, Li, e hidrógeno polarizado. Una gota típica consistente con nuestras hipótesis contiene 30 átomos de helio; y de acuerdo con Barranco et al. (1997), éste es el número par más pequeño para el cual la gota está ligada y posee un momento magnético elevado.

Los perfiles de densidad y potenciales externos efectivos para los átomos en el condensado, se muestran en las Figs. 4.1 y 4.2 para condensados de Rb y Na con $N = 10^5$ partículas. En la figura 4.1 observamos que para radios mayores al carozo de la gota, la densidad del condensado es similar a la de la trampa simple; el efecto de la impureza sólo puede verse en una escala mucho menor. La gota hace un agujero del tamaño del carozo en la densidad del condensado, y al mismo tiempo desarrolla un pico alrededor del mínimo de potencial. Esto puede entenderse si uno compara la energía del mínimo, de aproximadamente -10^{-2}K con la escala impuesta por el condensado a través del potencial químico ($\mu \sim 1$ nK). Asimismo, debemos remarcar que tanto el agujero en la densidad como la altura del máximo disminuyen al aumentar N. Esto puede entenderse teniendo en cuenta que el potencial químico es proporcional a $N^{2/5}$.

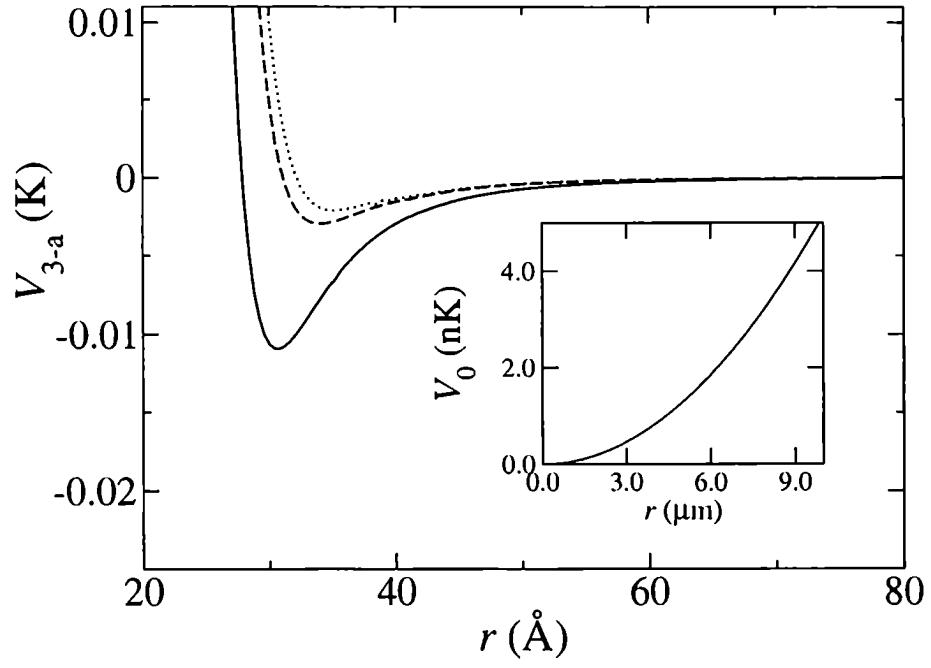


FIGURA 4.2: Potenciales externos sentidos por los átomos. Las líneas sólidas, rayadas y punteadas corresponden a Rb, Na y Li, respectivamente. El recuadro muestra trampas armónicas comunes para los átomos de Rb y $\omega = 100\ s^{-1}$. Notar que la escala d_0 es aproximadamente 10^4 Å.

La existencia de la solución de la ecuación de Gross-Pitaevskii no es suficiente para garantizar la estabilidad del condensado con una gota de helio adentro, sin embargo los modos de excitación sí. Por esto, hemos calculado las frecuencias de estos modos en la aproximación hidrodinámica de la Sección 3.2.1. En la Fig. 4.3 se grafican, en función del potencial químico, las correcciones a los modos de excitación $\chi^2 = 100(\Omega^2 - \Omega_0^2)/\Omega_0^2$, con Ω_0^2 las frecuencias de excitación en una trampa armónica pura. Podemos observar que las correcciones son completamente despreciables para valores grandes de N. Las modificaciones son mayores para $l = 1$ que para $l = 0$, y para un determinado valor del momento angular, el corrimiento en frecuencias aumenta con el número cuántico radial (n). Esto puede interpretarse en vista de que el pico en la densidad del condensado es del tamaño del radio de la impureza, así su movimiento sólo puede captarse a longitudes de onda pequeñas --i.e. $\lambda \leq \lambda_{crit} \approx \sigma$— en otras palabras, por las excitaciones de más alta energía, las cuales son más sensibles a su presencia.

4.3 Dinámica de la impureza

La presencia de un condensado de Bose-Einstein altera la dinámica de una partícula en el medio de una trampa magnética. En esta sección analizaremos los efectos del acoplamiento de la impureza y el condensado, en la dinámica de la impureza. Para simplificar los cálculos

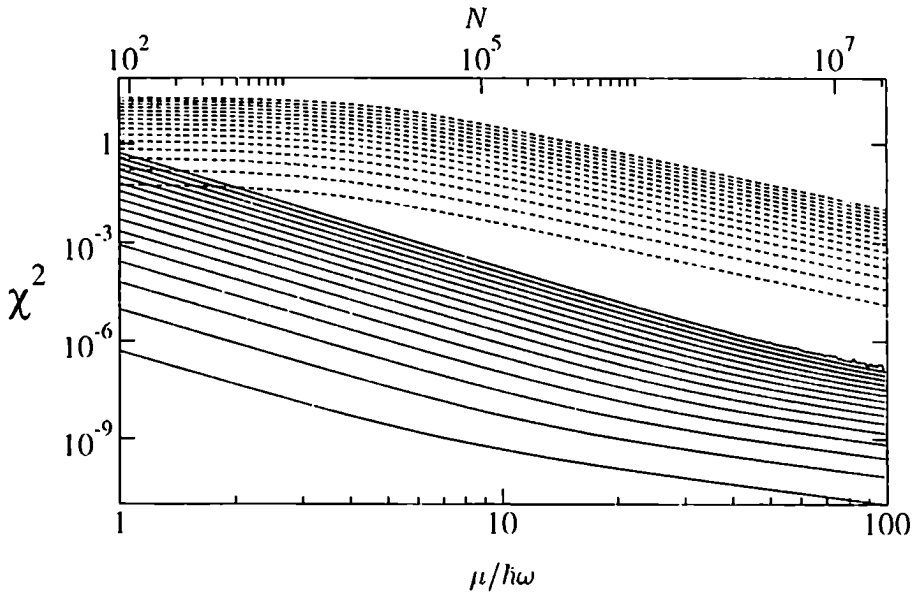


FIGURA 4.3: Gráfico log-log de χ^2, la corrección relativa a las autofunciones del condensado (ver el texto). Las líneas llenas (rayadas) corresponden a excitaciones con $l = 0(1)$. Las distintas líneas dentro del mismo estilo indican los distintos números cuánticos radiales n, correspondiendo un n menor a una línea más abajo.

construimos un potencial efectivo gota-condensado. Integramos $V_{3\text{-a}}$ con la densidad ρ_3 (c.f. Ec. (4.15)) y ajustamos el resultado a un potencial de L.J. Obtenemos así, los parámetros $\sigma = 27$ Å y $\epsilon = 0.011$ K. La dinámica generada por el hamiltoniano (4.14) está contenida en la ecuación de Gross-Pitaevskii para la densidad $\rho(\mathbf{r})$ en presencia del potencial externo (4.15), junto con la ecuación de movimiento clásica

$$M_3 \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\nabla_{\mathbf{R}} \int d^3r\, V_{\text{L-J}}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)\, \rho(\mathbf{r}). \tag{4.16}$$

para la gota.

En este punto es posible incorporar una simplificación adicional para la resolución numérica de este sistema acoplado. Puesto que la impureza es un objeto macroscópico con respecto a cada átomo, uno podría asumir que su movimiento tiene lugar con un tiempo característico mucho mayor que el necesario para equilibrar el condensado, es decir, la dinámica bosónica podría pensarse adiabática con respecto al movimiento de la impureza. Esta hipótesis puede apoyarse por el hecho de que una perturbación bien localizada, como por ejemplo una gota, sólo puede excitar los modos de frecuencia más alta pero con poca amplitud. Además, elegimos describir la forma de este condensado instantáneo por medio de su aproximación TF, Ec. (4.5). La evolución se resuelve iterativamente de acuerdo a la secuencia:

(i) calcular la fuerza ejercida por el condensado con la gota de Helio localizada inicialmente en $(\mathbf{R}_0, \mathbf{P}_0)$,

(ii) dejar que la gota sufra un pequeño desplazamiento $\Delta\mathbf{R}$, de acuerdo a la Ec. (4.16), durante un intervalo Δt,

(iii) recalcular el nuevo perfil bosónico de acuerdo a la aproximación TF para una gota en $\mathbf{R}_0 + \Delta\mathbf{R}$,

(iv) volver a (i)

Hemos verificado que este esquema es estable y conservativo; además, encontramos que al reemplazar la densidad verdadera $\rho(\mathbf{r}, t)$ en la Ec. (4.16) por la versión TF, $\rho_{\rm TF}[\mathbf{r}, \mathbf{R}(t)]$, la integral de Jacobi (Goldstein, 1959)

$$E = \frac{1}{2} M_3 \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)^2 - \int \mathbf{F}(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2} M_3 \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)^2 + \mathcal{W}_F, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}) = -\int \rho_{\rm TF}(\mathbf{r}, \mathbf{R})\, \nabla_{\mathbf{R}} V_{\rm LJ}(|\mathbf{r} - \mathbf{R}|)\, d^3r \tag{4.18}$$

es una primera integral del movimiento. La conservación numérica de esta cantidad corrobora la estabilidad del método.

Para ilustrar este tipo de movimiento, mostramos la energía potencial $\mathcal{W}_F$ en la Fig. 4.4(a), la dinámica en el espacio de fases en la parte (b) y en (c) la coordenada z de la gota en función del tiempo. La impureza comenzó su movimiento en la posición $\mathbf{R}_0 = d_0\,\hat{z} \approx 2.8\mu\text{m}\ \hat{z}$ sin velocidad y dentro de un condensado de Rubidio con 10^5 partículas.

Debido a las hipótesis utilizadas para calcular el potencial de interacción y la dinámica, es posible extraer una formula analítica aproximada para el coeficiente restitutivo k de la fuerza de interacción (4.18) en la dirección z. Integramos la Ec. (4.18) dentro del dominio TF, calculamos $\partial F_z(z)/\partial z|_{z=0}$, y expandimos el resultado para ϵ grande y σ pequeño; así encontramos

$$k = M\,\omega^2\, \frac{\sigma^3}{d_0^2\, a} \left[\frac{8\widetilde{\epsilon} + 3\widetilde{\mu}}{9} - \frac{8}{3}\widetilde{\epsilon} \left(\frac{\sigma}{r_2}\right)^3 + \frac{8\widetilde{\epsilon} - \widetilde{\mu}}{4} \left(\frac{\sigma}{r_2}\right)^6 + \ldots \right] \tag{4.19}$$

y a orden dominante, podemos calcular el período aproximado

$$\tau_{\rm ap} = 2\pi \sqrt{\frac{M_3}{k}} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{M_3}{M}\, \frac{d_0^2\, a}{\sigma^3}\right)^{1/2} \frac{6\,\pi}{(8\widetilde{\epsilon} + 3\widetilde{\mu})^{1/2}}. \tag{4.20}$$

De esta expresión podemos ver que el tiempo de oscilación depende muy levemente del potencial químico, o número de partículas, del condensado. Para verificar esto, hemos realizado

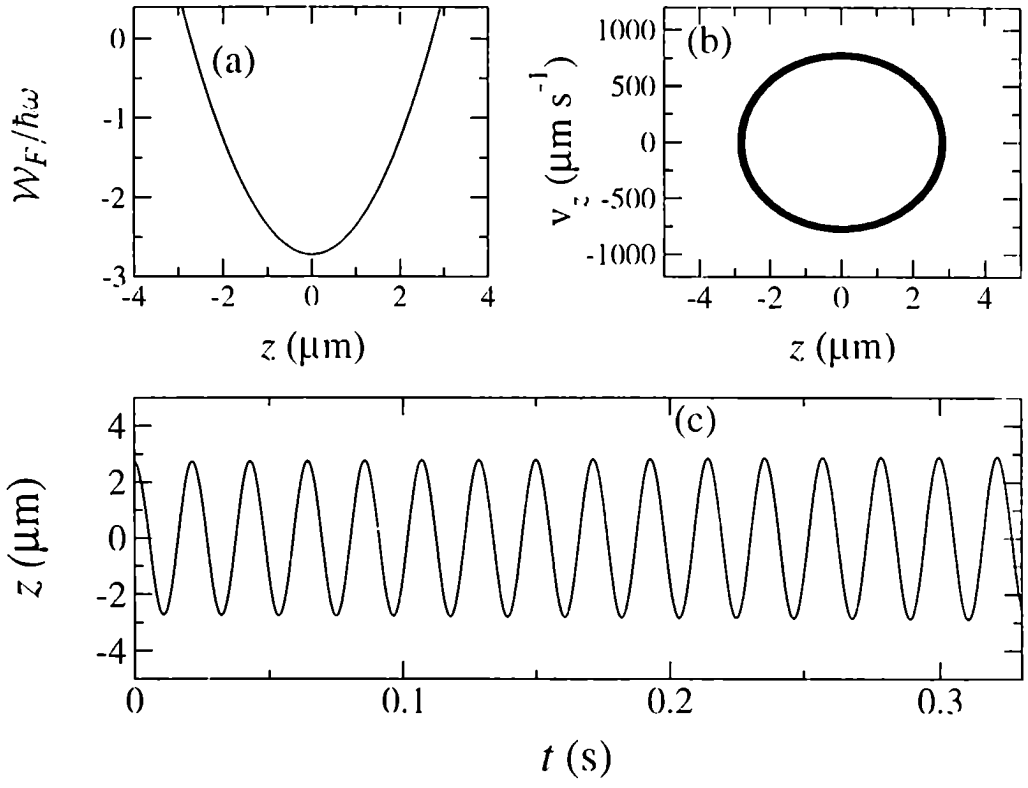


FIGURA 4.4: Dinámica de una gota de He en un condensado de Rubidio. (a) Energía potencial W_F de la gota en la posición z, (b) dinámica en el espacio de fases, y (c) movimiento a lo largo del eje z.

varios cálculos con las mismas condiciones iniciales y menor cantidad de partículas. Encontramos que para un número de partículas entre 10^3 y 10^5 el período está dentro de nuestra imprecisión numérica, siendo $\tau = (21.4 \pm 0.1)$ ms, mientras que la Ec. (4.20) predice un valor $\tau_{\rm ap} = 21.6$ ms con una desviación inferior a 1 ppm en todo el rango de N considerado.

La estabilidad del condensado se mantuvo, a pesar de que el núcleo repulsivo de la impureza excluyó una pequeña porción del volumen de la trampa. Por otro lado, la impureza misma es sensible al BEC, el cual le impone un movimiento oscilatorio alrededor del centro de la trampa. Esto es debido a la fuerza restauradora que le causan los bosones en promedio. Es importante destacar que si bien la longitud de dispersión de la interacción bosón-impureza es positiva, la cola atractiva del potencial es responsable por la existencia de la fuerza restitutiva macroscópica. De hecho hemos verificado que los cambios de fase de las ondas s y p corresponden predominantemente a repulsión, pero debe recordarse que mientras la impureza es pensada como un centro dispersor macroscópico, las longitudes de dispersión caracterizan las colisiones con partículas bosónicas *individuales*. El movimiento del centro es debido a la acción combinada del BEC, el cual favorece fuertemente la parte atractiva de la interacción.

Hasta este momento, solamente consideramos el movimiento en una dimensión de la gota.

De hecho, puesto que la fuerza en la gota es central, su momento angular se conserva y la dinámica en 3D no es mucho más complicada. Otra característica para recordar es que la fuerza restitutiva *no es* estrictamente lineal; sin embargo, dentro de este modelo y debido a las escalas tan diferentes entre el condensado y la gota, la linealidad constituye una excelente aproximación. En particular, pudimos observar que las órbitas en 3D aparecen cerradas dentro del tiempo de vida del condensado, indicando que la rotación inducida por los términos no lineales en la fuerza no es importante. Asimismo, el período de estas órbitas es característico del sistema y no se ve afectado por las distintas condiciones iniciales.

Finalmente, queremos enfatizar que todas las consideraciones en este capítulo son dependientes del modelo. Un acoplamiento diferente no daría lugar necesariamente el mismo resultado, como puede leerse en el trabajo de Chin y Forbert (1999), donde una interacción puramente repulsiva da lugar a la expulsión de la impureza. Sin embargo, que estos resultados sean distintos muestra que la dinámica de la impureza en el medio de un BEC no es un tema trivial y por lo tanto merecería una investigación más profunda, la cual requeriría en cualquier caso una descripción apropiada de la interacción.

Capítulo 5

Fermiones atrapados

Luego de la observación de la condensación de Bose–Einstein en átomos de ^{87}Rb, ^{23}Na y ^{7}Li (Anderson et al., 1995; Davis et al., 1995; Bradley et al., 1997) se sumó el estudio de gases fermiónicos atrapados y en el régimen degenerado.

A densidades del espacio de fases similares a las alcanzadas por los experimentos de condensación bosónica, el comportamiento de un gas de Fermi se desvía notablemente de su contraparte bosónica. Sin embargo, los experimentos con fermiones son más dificultosos, principalmente por dos razones. Primero, hay pocos isótopos fermiónicos naturales. En particular, entre los átomos alcalinos sólo encontramos al ^{40}K y al ^{6}Li. De hecho, el potasio natural está compuesto por tres isótopos ^{39}K (93.26%), ^{41}K (6.73%) y ^{40}K (0.012%). Los átomos de ^{39}K y ^{41}K son bosones, mientras que ^{40}K es un fermión. La segunda complicación es que la técnica final de enfriado, enfriado por evaporación, no es suficientemente eficiente para fermiones polarizados debido a que la dispersión de onda s está suprimida (ver Sec. 2.3). Es por esto que se han desarrollado diferentes técnicas: una posibilidad es atrapar átomos en distintos estados de spin de manera de permitir colisiones de onda s. Otra alternativa es el enfriado simpático de los fermiones por interacción con átomos bosónicos previamente enfriados.

Teniendo en cuenta estos antecedentes, en este capítulo estudiaremos las propiedades, principalmente a temperatura cero, de un gas compuesto por átomos fermiónicos. Para esto, en la primera sección introduciremos el sistema físico considerado y expondremos los resultados conocidos más importantes. La sección 5.2 contiene un estudio detallado de las excitaciones colectivas producidas dentro de este sistema por agentes externos. Finalmente, en la sección 5.3 se comentarán las diferencias más importantes que encontramos a temperatura finita.

5.1 Introducción

El sistema de estudio contiene dos componentes fermiónicas polarizadas en distintos niveles de la estructura del ^{40}K. En una trampa magnética, el potencial confinante es proporcional al momento magnético de la partícula atrapada, y éste a la proyección del spin σ. Es por esto que consideraremos, en principio, distintos potenciales externos para cada tipo de átomo y los denotaremos por V_1 para la especie con spin σ_1 y V_2 para un átomo con σ_2. Los potenciales de interacción utilizados serán modelados con pseudopotenciales de Fermi, i.e. potenciales de contacto (2.45). Además, puesto que estamos considerando átomos idénticos sujetos a este potencial, el principio de exclusión de Pauli prohibe colisiones entre estados con igual polarización. En resumen, describiremos cada especie a través de un hamiltoniano de campo medio distinto, a saber (cf. Ec. (3.3))

$$H_1 = \frac{P_1^2}{2M} + \overbrace{\frac{1}{2} M \omega_1^2 r^2}^{V_1} + g_f \rho_2(r) \tag{5.1a}$$

para la especie σ_1, y

$$H_2 = \frac{P_2^2}{2M} + \underbrace{\frac{1}{2} M \omega_2^2 r^2}_{V_2} + g_f \rho_1(r) \tag{5.1b}$$

para σ_2. $\rho_{1,2}$ son las densidades de partículas para cada especie, y g_f es la intensidad de la interacción cruzada, proveniente del potencial de contacto, $g_f = 4\pi a_f \hbar^2/M$ siendo a_f la longitud de dispersión de onda s para fermiones polarizados. Estos hamiltonianos nos proveerán las excitaciones de cuasipartículas necesarias para armar la densidad dentro de un marco de Hartree Fock.

Debido al principio de exclusión de Pauli, los átomos de un gas fermiónico degenerado no ocupan un estado de partícula independiente común, y por lo tanto no existe una ecuación de Gross-Pitaevskii para los fermiones. En su lugar, y en una primera aproximación (Molmer, 1998b), podemos describir las partículas de manera semiclásica. Cada partícula está caracterizada por su momento y posición, pero tendremos en cuenta que en una porción del espacio de fases $d^3r\, d^3k$ sólo se pueden acomodar $d^3r\, d^3k/(2\pi)^3$ fermiones. Es decir, para una densidad $\rho_\sigma(\mathbf{r})$, las partículas podrán tener números de onda entre $0 \leq k \leq k_\sigma(\mathbf{r})$ (Huang, 1963), donde

$$\frac{4}{3}\pi k_\sigma^3(\mathbf{r}) = (2\pi)^3 \rho_\sigma(\mathbf{r}). \tag{5.2}$$

En la posición $\mathbf{r}$ los átomos más energéticos tendrán una energía igual a $\hbar^2 k_\sigma(\mathbf{r})^2/2M$ más el potencial externo de la trampa. De esta manera podemos escribir, para un átomo de

la especie σ,

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma(\mathbf{r}) &= \frac{\hbar^2 k_\sigma^2(\mathbf{r})}{2M} + V_\sigma(\mathbf{r}), \\ &= \frac{\hbar^2 (6\pi)^{2/3}}{2M} \rho_\sigma^{2/3}(\mathbf{r}) + V_\sigma(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $\varepsilon_\sigma(\mathbf{r})$ es la energía local de *esa* partícula en la posición $\mathbf{r}$. Si ahora consideramos las dos especies con su interacción mutua, la funcional de energía *total* del sistema toma la forma

$$\begin{aligned}E[\rho_1,\rho_2] = \int d^3r \Bigg[&\frac{3}{5}\frac{\hbar^2 (6\pi)^{2/3}}{2M} \rho_1^{5/3} + \frac{3}{5}\frac{\hbar^2 (6\pi)^{2/3}}{2M} \rho_2^{5/3} + V_1(\mathbf{r})\rho_1(\mathbf{r}) \\ &+ V_2(\mathbf{r})\rho_2(\mathbf{r}) + g_f\, \rho_1(\mathbf{r})\, \rho_2(\mathbf{r}) \Bigg] \end{aligned} \tag{5.4}$$

Esta funcional de energía provee el tipo de aproximación de Thomas-Fermi para fermiones. Al contrario del caso bosónico, la aproximación no desprecia la contribución de energía cinética, sino que establece un valor correspondiente a un equilibrio termodinámico local.

5.1.1 Cuasipartículas en el campo medio

Las excitaciones elementales de este sistema, definido por los hamiltonianos de campo medio (5.1), pueden calcularse dentro de la aproximación de Hartree-Fock (HF). El espectro HF resulta de la solución del sistema acoplado, en coordenadas esféricas,

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2M r^2} + \frac{M\omega_\sigma^2 r^2}{2} + g_f\, \rho_{\sigma'}(r) \right\} u_{nl}^\sigma(r) = \varepsilon_{nl}^\sigma\, u_{nl}^\sigma(r) \tag{5.5}$$

para especies $\sigma \neq \sigma'$, y densidades parciales

$$\rho_\sigma(r) = \sum_{nl} (2l+1) \frac{|u_{nl}^\sigma(r)|^2}{4\pi r^2} N(\varepsilon_{nl}^\sigma), \tag{5.6}$$

donde $N(\varepsilon)$ son los números de ocupación de Fermi–Dirac. Las autofunciones completas para el estado $\nu \equiv (nlm)$ se escriben

$$\phi_\nu^\sigma(\mathbf{r}) = \frac{u_{nl}^\sigma(r)}{r} Y_{lm}(\hat{r}). \tag{5.7}$$

A temperatura cero, los números de ocupación son funciones escalón que limitan las sumas hasta estados por debajo del mar de Fermi ε_F^σ. Estos satisfacen las ecuaciones para el número de partículas de cada especie, $N_\sigma = \sum_\nu \Theta(\varepsilon_F^\sigma - \varepsilon_\nu^\sigma)$. Además, en la Ec. (5.6), hemos supuesto que el número de partículas de cada especie es tal que siempre se forma una capa cerrada de l.

En los cálculos consideraremos tanto trampas iguales como diferentes para las especies 1 y 2, y así tendremos en cuenta las correspondientes proyecciones magnéticas de los átomos. El procedimiento numérico para encontrar este espectro consiste en

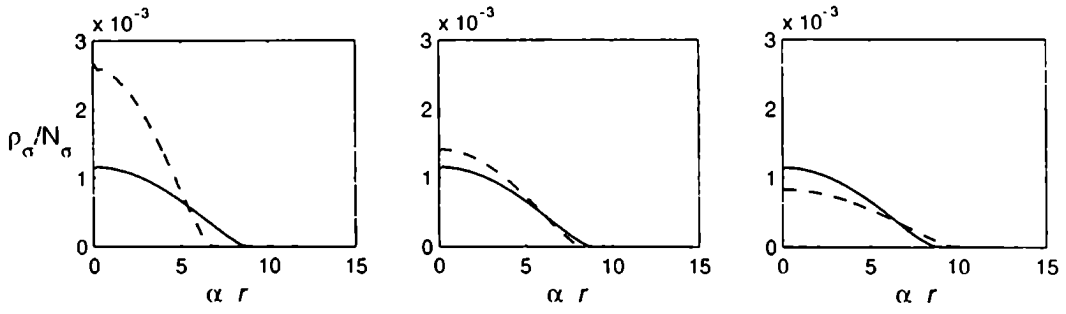


FIGURA 5.1: Densidades fermiónicas en equilibrio. Los gráficos a izquierda, centro y derecha muestran los perfiles de densidad para $N_1 = 10^4$ y $N_1/N_2 = 0.3, 1, 3$ respectivamente. En cada recuadro la línea continua destaca la densidad de partículas σ_1 y la línea rayada la de partículas tipo 2. α es la unidad del oscilador armónico de la componente 1.

(i) proponer una densidad ρ_σ inicial, usualmente formada con autoestados del oscilador armónico 3D sin interacción,

(ii) diagonalizar la Ec. (5.5) para $\sigma = 1, 2$,

(iii) armar las densidades ρ_σ de acuerdo a la Ec. (5.6) y volver a (i).

Este ciclo se debe repetir hasta que se consiga la autoconsistencia en los niveles de energía. La primer salida de este algoritmo son las densidades ρ_σ para cada valor de $N_{1,2}$ y ω_σ elegidos. En la Fig. 5.1 se muestran los primeros resultados para $\omega_1/\omega_2 \neq 1$ y distintos valores de N.

En resumen, el cálculo HF nos provee las excitaciones de partícula independiente que determinan la forma del sistema estacionario. Además, a partir de estas excitaciones elementales podemos construir las funciones de correlación de densidad que dan lugar a los modos colectivos. Los resultados para las densidades de partículas se sintetizan en la Tabla 5.1. En ésta, mostramos en función de la concentración de partículas, los parámetros de forma más importantes relacionados a la densidad de probabilidad esférica $P_\sigma(r)$ definida por

$$P_\sigma(r) = \frac{r^2 \rho_\sigma(r)}{N_\sigma}. \tag{5.8}$$

En particular, listamos la probabilidad máxima P_{max}, la cual se alcanza en R_{max}, la ubicación del borde de la densidad R_{borde}, y el ancho a media altura (FWHM). Estos parámetros serán útiles para comprender algunas de las propiedades de las fluctuaciones de densidad, descriptas en la próxima sección.

TABLA 5.1: Parámetros de forma de las densidades de probabilidad HF (ver texto) para $N_1 \simeq 10^4$ y varias concentraciones. Todas las distancias están expresadas en unidades del oscilador armónico de frecuencia ω_1, $\alpha^{-1} \approx 1.9\,\mu$m.

	$\Delta = 0.3$		$\Delta = 1$		$\Delta = 3$	
Parámetro	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2	σ_1	σ_2
P_{max}	0.017	0.022	0.017	0.018	0.017	0.015
$\alpha\, R_{\mathsf{max}}$	5.64	4.28	5.64	5.24	5.64	6.28
$\alpha\, R_{\mathsf{borde}}$	8.71	6.59	8.75	8.17	8.79	9.86
$\alpha\,$FWHM	5.04	3.92	5.04	4.72	4.96	5.68

5.2 Respuesta lineal — Excitaciones Colectivas

Puesto que los átomos en los dos niveles hiperfinos forman un gas fermiónico muy diluido, no es obvio que cuando el sistema sea excitado por un campo externo de baja frecuencia, las interacciones de onda s sean capaces de equilibrar localmente el gas atrapado y así permitirle desarrollar modos de oscilación hidrodinámicos. En particular, se ha mostrado que para el ^{40}K (Brunn y Clark, 1999), es necesario enfriar alrededor de 10^8 átomos para alcanzar el régimen hidrodinámico en la fase degenerada cuántica a $T = 0$. Por lo tanto es importante concentrarse en el estudio de las excitaciones *no colisionales* en estos sistemas, es decir, excitaciones que no son producto de las colisiones entre las cuasipartículas sino que surgen de la evolución coherente del campo medio ante una fluctuación.

5.2.1 Aproximación de fases al azar

Consideramos nuestro sistema fermiónico de dos componentes descripto por los hamiltonianos (5.1), las partículas están sujetas a una perturbación externa representada por un potencial escalar $U_\sigma(\mathbf{r}, t)$ y supondremos que el acoplamiento entre este campo y los operadores de densidad es lineal, i.e. utilizamos un hamiltoniano de interacción

$$\hat{H}(t) = \int d^3r \sum_\sigma \hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r})\, U_\sigma(\mathbf{r}, t) \tag{5.9}$$

Las oscilaciones de densidad producidas, a primer orden en la perturbación, valen

$$\delta\rho_\sigma(\mathbf{r},t) = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \int d^3r' \left\langle \left[\hat{\rho}_{\sigma'}(\mathbf{r}',t'), \hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r},t)\right]\right\rangle U_{\sigma'}(\mathbf{r}',t')$$
$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3r' \sum_{\sigma'} G^{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t')\, U_{\sigma'}(\mathbf{r}',t'). \tag{5.10}$$

donde $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{r},t)$ es el operador de densidad en la representación de Heisenberg. La ecuación (5.10) *define* los propagadores de partícula-hueco (ph) o correlación densidad-densidad, $G^{\sigma\sigma'}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$.

El sistema de excitaciones libres (no interactuantes) al ser perturbado por un campo externo genera excitaciones partícula-hueco (ph) cuya interacción modifica las características de las fluctuaciones de densidad. Las propiedades espectrales del sistema no homogéneo *libre* están contenidas en el propagador de ph $G_0^{\sigma'\sigma}(\Omega)$, el cual está evaluado en el estado de referencia Hartree Fock. Una de las formas más usuales de calcular el propagador interactuante es la aproximación de fases al azar (ApFA) (Fetter y Walecka, 1971). Este tratamiento incorpora ciertos diagramas en la interacción ph pero a todo orden en la interacción, también esta aproximación puede verse como una aproximación lineal a ecuaciones de Hartree-Fock dependientes del tiempo. La ecuación integral de la ApFA para el propagador interactuante, también conocido como vestido, en notación matricial es

$$G^{\sigma'\sigma}(\Omega) = G_0^{\sigma'\sigma}(\Omega) + \sum_{\tau\tau'} G_0^{\sigma'\tau}(\Omega)\cdot V_{\rm ph}^{\tau\tau'}\cdot G^{\tau'\sigma}(\Omega) \tag{5.11}$$

donde $V_{\rm ph}^{\tau\tau'}$ es la interacción partícula-hueco entre partículas de spin τ y τ'. Este potencial se obtiene por diferenciación funcional de la energía, en particular,

$$V_{\rm ph}^{\tau\tau'}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\partial^2 E[\rho_1,\rho_2]}{\partial\rho_\tau(\mathbf{r})\,\partial\rho_{\tau'}(\mathbf{r}')} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau = \tau' \\ g_f\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') & \text{si } \tau \neq \tau' \end{cases} \tag{5.12}$$

El sistema bajo estudio es inhomogéneo (Bertsch y Tsai, 1975; Casas y Stringari, 1990; Calbi y Hernández, 2000) y polarizado (Hernández et al., 1997a,b; Gatica et al., 1999), por lo tanto el desarrollo aquí expuesto mezclará estos dos formalismos. De aquí en más consideraremos la situación relevante en nuestro caso, excitaciones longitudinales que involucran la propagación de pares ph con el mismo estado de spin. Estas fueron creadas por operadores multipolares simétricos (s) o antisimétricos (a) respecto del spin, de la forma

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{r}) &= U_2(\mathbf{r}) \qquad \text{para excitaciones simétricas } (s), \\ U_1(\mathbf{r}) &= -U_2(\mathbf{r}) \qquad \text{para excitaciones antisimétricas } (a), \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$U_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} r^L Y_{L0}(\theta,\phi), & L \neq 0, \\ r^2, & L = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

donde L es la multipolaridad de la perturbación. Notar que, de acuerdo con la interacción y los hamiltonianos de campo medio (5.1), sólo las colisiones entre átomos en diferentes estados hiperfinos están permitidas. El propagador libre de partícula-hueco para una fluctuación longitudinal de la densidad es diagonal en el spin y por lo tanto la Ec. (5.11) se puede separar en dos sistemas de ecuaciones equivalentes, característicos de los medios polarizados. Estos, en representación de coordenadas, se escriben

$$G^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_0^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \int G_0^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\, V_{\rm ph}^{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\, G^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}')\, d^3r_1\, d^3r_2, \tag{5.15a}$$

$$G^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \int G_0^{\sigma'\sigma'}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)\, V_{\rm ph}^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\, G^{\sigma\sigma}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r})\, d^3r_1\, d^3r_2. \tag{5.15b}$$

El propagador libre se escribe

$$G_0^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\Omega) = \sum_{\nu\nu'} \phi_{\nu'}^{\sigma}(\mathbf{r})\,[\phi_{\nu}^{\sigma}(\mathbf{r})]^*\,[\phi_{\nu'}^{\sigma}(\mathbf{r}')]^*\,\phi_{\nu}^{\sigma}(\mathbf{r}')\,\chi_{\nu\nu'}^{\sigma}(\Omega), \tag{5.16}$$

donde $\phi_\nu^\sigma(\mathbf{r})$ son las autofunciones (5.7) con autovalores ε_ν^σ , y $\chi_{\nu\nu'}^\sigma$ son las susceptibilidades en términos de los números de ocupación de Fermi-Dirac $N(\varepsilon)$,

$$\chi_{\nu\nu'}^{\sigma} = \frac{N(\varepsilon_\nu^\sigma) - N(\varepsilon_{\nu'}^\sigma)}{\Omega - (\varepsilon_{\nu'}^\sigma - \varepsilon_\nu^\sigma) + i\,\eta} \qquad \text{con } \eta = 0^+. \tag{5.17}$$

Aquí el índice ν indica la terna de números cuánticos esféricos (nlm). En sistemas inhomogéneos es conveniente expandir los propagadores libres y vestidos en términos multipolares (Bertsch y Tsai, 1975),

$$G^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\Omega) = \sum_L G_L^{\sigma'\sigma}(r,r',\Omega) P_L(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}') \tag{5.18}$$

con $P_L(x)$ polinomios de Legendre. Las expresiones para las componentes multipolares $G_{0\,L}^{\sigma\sigma}(r,r',\Omega)$ se dan en el Apéndice B.

Puesto que las Ecs. (5.15) son ecuaciones matriciales, una vez que discretizemos la posición, conviene primero mapearla en un sistema menor vectorial para las densidades de transición, definidas como

$$\begin{aligned} \delta\rho_L^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\Omega) &= \int G^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\Omega)\, r'^L\, Y_{L0}(\hat{\mathbf{r}})\, d^3r \\ &= \frac{4\pi}{2L+1}\,\delta\rho_L^{\sigma'\sigma}(r,\Omega)\, Y_{L0}(\hat{r}), \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde, por lo tanto,

$$\delta\rho_{L0}^{\sigma'\sigma}(r,\Omega) = \int r'^{2+L}\, G_L^{\sigma'\sigma}(r,r',\Omega)\, dr'. \tag{5.20}$$

La susceptibilidad multipolar puede computarse como

$$\chi_L^{\sigma'\sigma}(\Omega) = \int r^L Y_{L0}^* \delta\rho_{L0}^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\Omega)\, d^3r = \frac{4\pi}{2L+1} \int r^{2+L} \delta\rho_L^{\sigma'\sigma}(r,\Omega)\, dr. \tag{5.21}$$

Finalmente, si insertamos el potencial ph correspondiente, Ec. (5.12), obtenemos las ecuaciones acopladas

$$\delta\rho_L^{\sigma\sigma}(r,\Omega) = \delta\rho_{0\,L}^{\sigma\sigma} + g_f \frac{4\pi}{2L+1} \int r'^2 G_{0\,L}^{\sigma\sigma}(r,r',\Omega)\, \delta\rho_L^{\sigma'\sigma}(r',\Omega)\, dr', \tag{5.22a}$$

$$\delta\rho_L^{\sigma'\sigma}(r,\Omega) = g_f \frac{4\pi}{2L+1} \int r'^2 G_{0\,L}^{\sigma'\sigma'}(r,r',\Omega)\, \delta\rho_L^{\sigma\sigma}(r',\Omega)\, dr'. \tag{5.22b}$$

En vista de las Ecs. (5.13), consideraremos fluctuaciones de densidad simétricas y antisimétricas para cada especie atómica

$$\delta\rho_\sigma^{(s,a)} = \frac{\delta\rho^{\sigma\sigma} \pm \delta\rho^{\sigma\sigma'}}{2}. \tag{5.23}$$

Esta representación nos permite distinguir lo que llamaremos, como es usual para los líquidos de Fermi, fluctuaciones de densidad (simétricas) y de spin (antisimétricas) (Noziéres y Pines, 1990). De hecho, un operador multipolar (s) tenderá a producir una fluctuación de la densidad total proporcional a $\delta\rho_{\sigma_1}^s + \delta\rho_{\sigma_2}^s$, mientras que las perturbaciones fuera de fase creadas por el operador antisimétrico inducirán una fluctuación de spin proporcional a $\delta\rho_{\sigma_1}^a + \delta\rho_{\sigma_2}^a$. Además, esta distinción nos permite analizar la influencia de una dada fluctuación en su propia propagación, como en las oscilaciones de la otra especie.

El procedimiento numérico consiste en resolver versiones discretizadas de las Ecs. (5.22), computar las susceptibilidades (5.21) y construir los factores de estructura dinámica $S^{(s,a)} = -\mathrm{Im}[\chi^{(s,a)}]/\pi$ en ambos canales (Hernández et al., 1997a,b), donde

$$\chi_L^{(s,a)} = \frac{1}{4}\left(\chi_L^{\sigma\sigma} + \chi_L^{\sigma'\sigma'} \pm \chi_L^{\sigma\sigma'} \pm \chi_L^{\sigma'\sigma}\right). \tag{5.24}$$

El espectro colectivo de excitaciones está marcado por los polos de la parte real de la respuesta, o los picos correspondientes en el factor de estructura.

5.2.2 Un modelo simple

Con el objeto de empezar a tener una comprensión básica de las distintas excitaciones presentes en el gas de dos componentes, vamos a introducir un modelo sencillo para el propagador no interactuante el cual nos proporcionará algunos resultados analíticos interesantes. Supongamos que cada una de las especies posee solamente *una* excitación elemental de frecuencia ω_σ. En ese caso, el propagador libre se puede escribir

$$G_0^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = F^\sigma(\mathbf{r})[F^\sigma(\mathbf{r}')]^* \left(\frac{1}{\omega - \omega_\sigma + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega_\sigma + i\eta}\right), \tag{5.25}$$

siendo $F^\sigma(\mathbf{r})$ la función de onda de un par partícula-hueco excitado. Al reemplazar la Ec. (5.25) en el sistema de ecuaciones (5.15) nos damos cuenta de que los propagadores se pueden escribir como

$$G^{\sigma\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = F^\sigma(\mathbf{r})\chi_0^\sigma[\Gamma^{\sigma\sigma}(\mathbf{r}')]^*, \qquad \text{y} \qquad G^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = g_f\, F^{\sigma'}(\mathbf{r})\, \chi_0^{\sigma'}[\Gamma^{\sigma'\sigma}(\mathbf{r}')]^*, \tag{5.26}$$

donde

$$\Gamma^{\sigma\sigma} = F^{\sigma\sigma} + \tilde{g}_f^*\, \chi_0^{\sigma'}\, \Gamma^{\sigma'\sigma} \qquad \text{y} \qquad \Gamma^{\sigma'\sigma} = \tilde{g}_f^*\, \chi_0^{\sigma}\, \Gamma^{\sigma\sigma} \tag{5.27}$$

representan funciones de onda de partícula-hueco vestidas. Estas dependen de la interacción renormalizada

$$\tilde{g}_f = g_f \int [F^\sigma(\mathbf{r})]^*\, F^{\sigma'}(\mathbf{r})\, d^3r \equiv \langle \sigma\, \sigma | V_{\rm ph} | \sigma'\, \sigma' \rangle. \tag{5.28}$$

El sistema (5.27) tiene una solución algebraica sencilla a partir de la cual se pueden calcular las susceptibilidades

$$\chi^{\sigma\sigma} = \frac{\chi_0^\sigma\, |\theta^\sigma|^2}{D}, \qquad \chi^{\sigma'\sigma} = \tilde{g}_f\, \frac{\chi_0^\sigma\, \chi_0^{\sigma'}\, [\theta^\sigma]^*\, \theta^{\sigma'}}{D}. \tag{5.29}$$

donde

$$D(\omega) = 1 - |\tilde{g}_f|^2\, \chi_0^\sigma(\omega)\, \chi_0^{\sigma'}(\omega) \qquad \text{y} \qquad \theta^\sigma = \int U_1(\mathbf{r})\, F^\sigma(\mathbf{r})\, d^3r \tag{5.30}$$

es el elemento de matriz del operador de transición.

La aparición de un denominador común $D(\omega)$ en las Ecs. (5.29) muestra que las soluciones de la ApFA describen fluctuaciones colectivas del sistema como un todo. Los ceros de D en la Ec. (5.30) se pueden encontrar fácilmente, dando como resultado

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm \left| \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2} \right|^2 \left[1 + \frac{16\, |\tilde{g}_f|^2\, \omega_1\, \omega_2}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \right]^{1/2} \tag{5.31}$$

Asumiendo, por ejemplo, $\omega_1 \geq \omega_2$ y al orden más bajo en la interacción, se encuentra

$$\omega_1 \leq \quad \omega_>^2 = \omega_1^2 + \frac{4\, |\tilde{g}_f|^2\, \omega_1\, \omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \qquad \text{y} \qquad \omega_<^2 = \omega_1^2 - \frac{4\, |\tilde{g}_f|^2\, \omega_1\, \omega_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \quad \leq \omega_2 \tag{5.32}$$

mostrando que, dentro de la validez de la aproximación, los modos colectivos se dirigen en direcciones opuestas al aumentar el acoplamiento. En el caso complementario, $\tilde{g}_f$ grande y/o ω_σ cercanas, obtenemos

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} \pm |\tilde{g}_f| \sqrt{\omega_1\, \omega_2} \left[1 + \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}{32 |\tilde{g}_f|^2\, \omega_1\, \omega_2} \right]. \tag{5.33}$$

Cuando las dos especies poseen los mismos parámetros del potencial, este modelo ilustra la fragmentación de la excitación elemental en dos estados colectivos con energías

$$\omega_0 = \omega_\sigma \pm |\tilde{g}_f|, \tag{5.34}$$

en este caso las susceptibilidades valen

$$\chi^{(s,a)}(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{\sigma=\sigma_1,\sigma_2} \frac{\chi_0^\sigma |\theta^\sigma|^2}{2(1 \pm \tilde{g}_f \chi_0^\sigma)}. \tag{5.35}$$

El resultado importante en este punto es que si bien ambas frecuencias (5.34) corresponden a polos de *cada* sumando de la Ec. (5.35), una evaluación explícita muestra que $\omega_\sigma + |\tilde{g}_f|$ tiene amplitud cero en la frecuencia antisimétrica mientras que $\omega_\sigma - |\tilde{g}_f|$ tiene amplitud cero en el canal simétrico. Por lo tanto, la frecuencia mayor y menor, respectivamente, pueden atribuirse completamente a fluctuaciones simétricas y antisimétricas.

En síntesis, este modelo extremadamente sencillo da lugar a la fragmentación del espectro en dos, de acuerdo con la Ec. (5.31); en el caso particular de frecuencias iguales y el límite de acoplamiento débil, pudimos identificar claramente energías de excitación *diferentes* en los canales a y s.

5.2.3 Cálculos y resultados

Trampas y poblaciones idénticas

En primer lugar expondremos los resultados en el caso que las dos componentes poseen el mismo potencial (MP), i.e. $V_1 = V_2$, y el mismo número de átomos. En estas condiciones las ecuaciones ApFA para las fluctuaciones de densidad (5.22) pueden desacoplarse para $\delta\rho_\sigma^{(s)}$ y $\delta\rho_\sigma^{(a)}$, llevando a

$$\delta\rho^{(s,a)} = \delta\rho_0^{(s,a)}(r) \pm g_f \frac{4\pi}{2L+1} \int r'^2 G_{0\,L}(r,r',\Omega)\, \delta\rho^{(s,a)}(r') \tag{5.36}$$

donde suprimimos el índice σ, es decir, $\delta\rho^{(s,a)} \equiv \delta\rho_\sigma^{(s,a)}$ y $G_{0\,L} \equiv G_{0\,L}^{\sigma\sigma}$ para ambas especies σ. Estas ecuaciones son idénticas a las ecuaciones ApFA para una única componente que interactúa a través un potencial de contacto repulsivo (atractivo) y da lugar a una fluctuación simétrica (antisimétrica).

En la Fig. 5.2 mostramos las intensidades $S^{(s,a)}$ de las fluctuaciones monopolares para $N_{1,2} = 10^4$. Debemos recordar que el ancho de los picos en $S^{(s,a)}(\Omega)$ es producto solamente del cálculo numérico, debido a la introducción del parámetro η pequeño (cf. Ec. (5.17)). El comportamiento de S muestra excitaciones múltiples a energías cercanas a $\Omega_n = \varepsilon_{n_1 l} - \varepsilon_{n_2 l} \approx 2n\omega_1$. Estos picos disminuyen su amplitud (notar la escala logarítmica) cuando aumentamos la energía transferida. Si bien los canales s y a son diferentes, no es posible distinguirlos claramente en la escala presentada. Sin embargo, en parte inferior de la Fig. 5.2 se muestra una región ampliada alrededor del valor de la energía del oscilador donde es clara tanto la diferencia como la fragmentación. Además, un análisis detallado de los picos indica que estos se agrupan

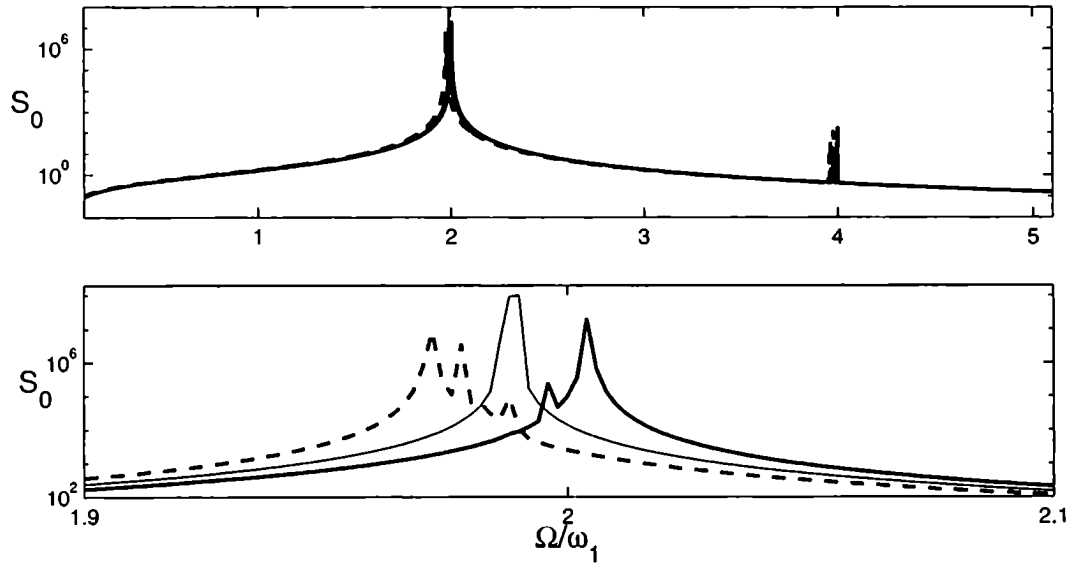


FIGURA 5.2: Factor de estructura dinámico monopolar (en unidades arbitrarias) en el caso MP con $N_1 = 10^4$ y $\omega_1 = 2\pi \times 70\ \mathrm{s}^{-1}$. El gráfico superior se presenta en escala logarítmica y el inferior es una ampliación del pico principal en escala lineal. La línea fina corresponde a las excitaciones ph, y las líneas gruesas y las rayadas al resultado ApFA en los canales simétricos y antisimétricos respectivamente.

en dos conjuntos principales. Sólo los fragmentados más fuertemente, alrededor de $\Omega = 2\omega_1$, pueden verse en esta figura; las intensidades del otro grupo, a energías mayores, son demasiado pequeñas para esta escala. El espectro en ambos canales es claramente distinto: mientras que las energías del canal s están corridas hacia frecuencias mayores, las antisimétricas (a) se encuentran a energías menores. Este hecho está de acuerdo con la estimación simplificada de modos de la sección anterior. Es importante mencionar que las energías de cuasipartículas que resultan del cálculo HF dan lugar a frecuencias de excitaciones ph *menores* que las del oscilador como resultado del campo medio. Sin embargo, el acoplamiento entre excitaciones ph introducido en el cálculo ApFA corre las energías hacia niveles mayores.

Una manera aproximada de tener cierta noción de la localización del pico de mayor amplitud en un cálculo no colisional es recurrir a las reglas de suma. Vichi y Stringari (1999) encontraron reglas de suma para sistema fermiónicos atrapados, con algunos resultados explícitos en el caso MP. Si suponemos que toda la regla es agotada por un solo modo colectivo podemos obtener una aproximación precisa de la energía de ese modo. En particular, usando esta aproximación para $N_{1,2} = 10^4$, hemos obtenidos los valores $\Omega_{\mathrm{RS}} \approx 2.0043\omega_1, 0.9840\omega_1$ y $1.9914\omega_1$ para $L = 0(s), 1(a)$, y $2(s)$, respectivamente, mientras que los resultados de ApFA son $\Omega_{\mathrm{ApFA}} = 2.0051\omega_1, 0.9848\omega_1$ y $1.9920\omega_1$.

El comportamiento de la fluctuación dipolar ($L = 1$) es un poco distinto. Si bien ambos

espectros, el s y el a, están algo fragmentados, la intensidad del modo de oscilación a $\Omega = \omega_1$ es notable. Es sabido (Kohn, 1961) que para trampas iguales existe una excitación dipolar en el canal simétrico asociada a la oscilación del centro de masa del sistema. Esta oscilación ocurre precisamente a la frecuencia natural del oscilador. Sin embargo, en el canal antisimétrico la excitación está por debajo. Estos resultados se verifican en este cálculo ApFA como puede observarse en la Fig. 5.3, donde vemos el factor de estructura dinámico dipolar para 10^4 átomos de cada especie. Además de estos modos, podemos observar que aparecen polos fragmentados de naturaleza colectiva, como se prevía dentro del modelo sencillo.

Examinemos los perfiles espaciales de las fluctuaciones de densidad. En principio, uno esperaría que si el sistema es excitado con un dado operador s o a (cf. Ec. (5.13)) y con una frecuencia cercana al máximo en uno de estos canales, una fluctuación de densidad se desarrollaría y reflejaría la naturaleza del campo externo y también de la excitación del sistema. Como ilustración, en la Fig. 5.4 graficamos las partes reales de las oscilaciones de densidad monopolares para las mismas condiciones que la Fig. 5.2 y para las frecuencias dadas por los polos de la respuesta. Podemos observar que cuando la fluctuación simétrica es importante dentro del volumen del gas atrapado, la contraparte antisimétrica es completamente despreciable y viceversa. Esto también está de acuerdo con la interpretación del modelo de dos modos, en el cual las fluctuaciones de spin y de densidad se distinguen claramente. Sin embargo, a la energía del polo en el canal simétrico ($\Omega^s \approx 2.03$), se desarrollan oscilaciones de superficie tanto en $\delta\rho^s$ como en $\delta\rho^a$; este comportamiento puede atribuirse a la proximidad de un pico pequeño en el factor de estructura asimétrico (no visible en la escala de la Fig. 5.2).

El caso general

En los experimentos de DeMarco y Jin (1999), se confinaron y enfriaron átomos de ^{40}K en los niveles hiperfinos $|F = 9/2, m_{F_1} = 7/2\rangle$ (átomos tipo 1) y $|F = 9/2, m_{F_2} = 9/2\rangle$ (átomos tipo 2). Si bien el cociente $\omega_2/\omega_1 = (m_{F_2}/m_{F_1})^{1/2} \approx 1.13$ es muy próximo a uno, en esta sección lo vamos a tener en cuenta como una característica explícita de la configuración real y no simétrica. Asimismo, consideraremos diferentes poblaciones en el rango $\Delta = N_2/N_1 \approx 0.3$ hasta $\Delta = 3$, que pueden crearse durante el proceso experimental de enfriado por evaporación (DeMarco et al., 2001).

Como en el caso MP analizamos los factores de estructura dinámicos y las fluctuaciones creadas por campos multipolares. En la Fig. 5.5 mostramos el factor de estructura dinámico para algunos valores del cociente de población Δ, $N_1 = 10^4$ y excitaciones monopolares. La estructura de las fluctuaciones de spin no se puede distinguir de las excitaciones de densidad dentro de la escala del gráfico. Las características esenciales de la respuesta pueden sintetizarse fácilmente:

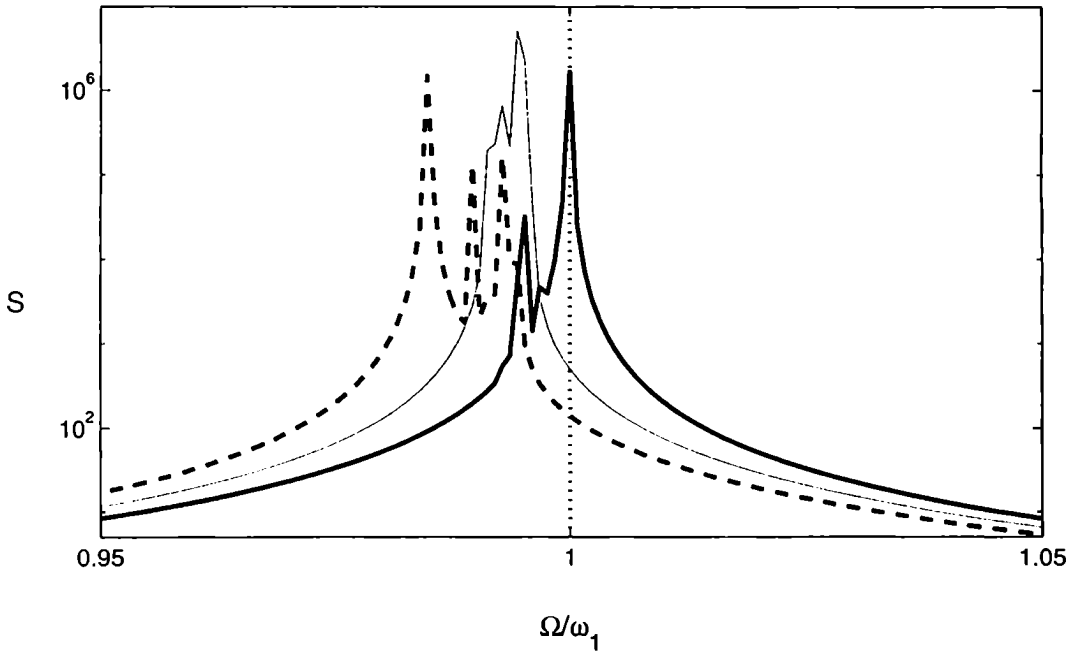


FIGURA 5.3: Factor de estructura dinámico dipolar (en escala logarítmica y unidades arbitrarias) para las mismas condiciones que la Fig. 5.2. Las líneas finas, gruesas y rayadas corresponden respectivamente a las excitaciones HF, ApFA simétrica y ApFA antisimétrica.

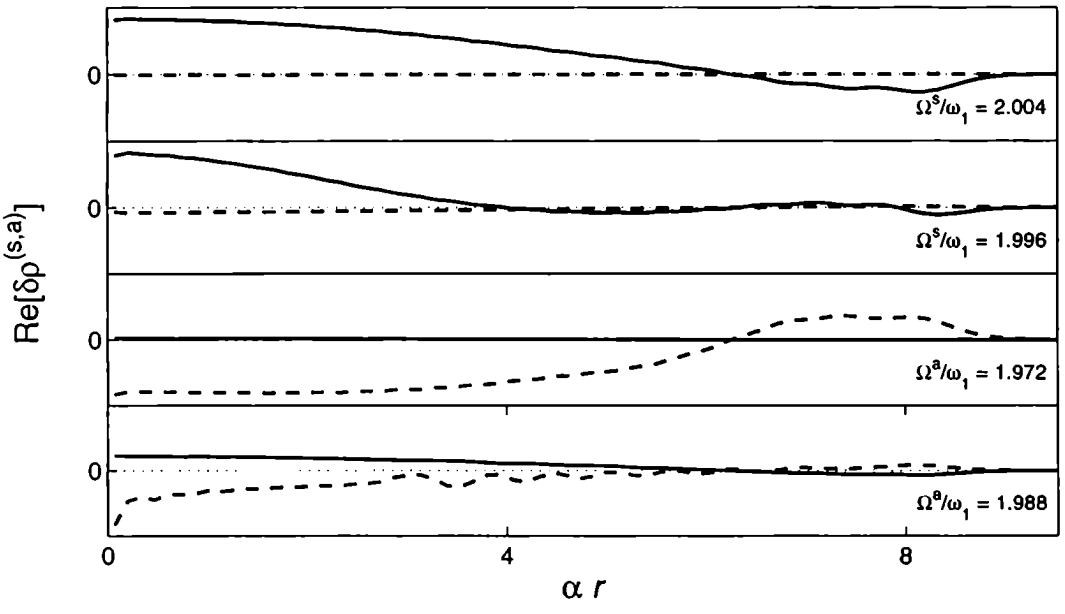


FIGURA 5.4: Fluctuaciones de densidad monopolares para el caso MP con $N_{1,2} = 10^4$. Las líneas sólidas y rayadas corresponden respectivamente a las excitaciones de densidad y de spin en los polos de cada canal. α^{-1} es la unidad de distancia para el potencial de la especie 1, $\alpha = \sqrt{M\,\omega_1/\hbar} \approx 0.53\,\mu\text{m}^{-1}$.

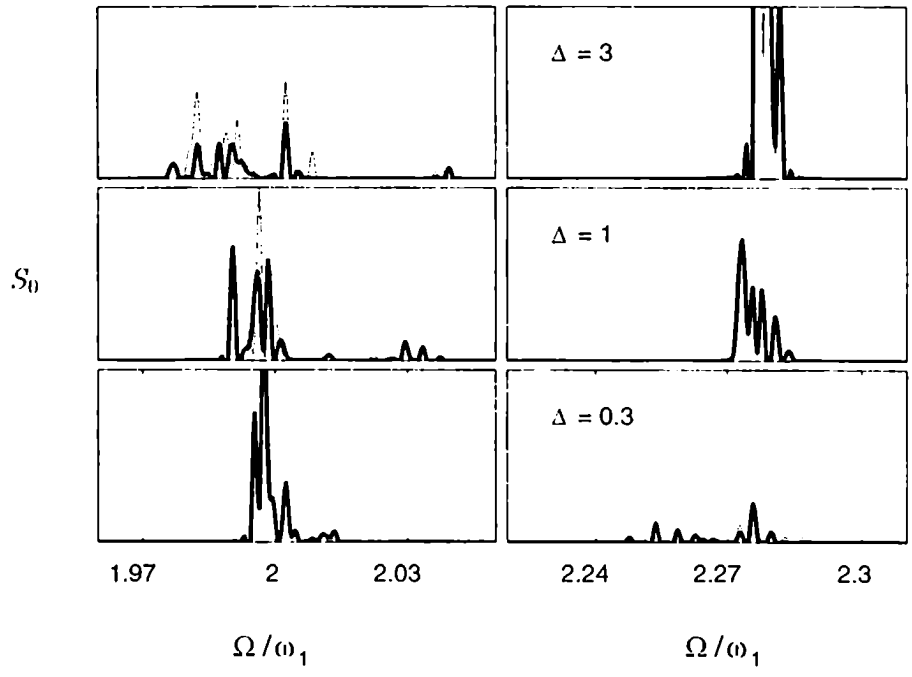


FIGURA 5.5: Factor de estructura dinámico en el canal simétrico para $L = 0$ (en unidades arbitrarias) del sistema libre e interactuante con $N_1 = 10^4$ y tres concentraciones, en líneas gruesas y finas, respectivamente. Cada columna muestra un rango distinto en la escala de energías.

(i) en ambos canales, la intensidad de cada transición ph se redistribuye de manera que el factor de estructura se fragmenta alrededor de los máximos no interactuantes con algo de intensidad que aparece a energías mayores;

(ii) para valores altos y bajos de Δ la estructura de la especie más poblada reproduce esencialmente el patrón de las cuasipartículas no interactuantes, mientras que el espectro de la otra especie está altamente fragmentado y con una amplitud muy suprimida;

(iii) dada cualquiera de las dos especies, cuando el número de átomos con la otra proyección de spin crece, la excitación complementaria aparece, mostrando considerable fragmentación.

También realizamos cálculos para excitaciones multipolares con $L = 1, 2$; en la Fig. 5.6 mostramos los resultados correspondientes al factor de estructura dinámico. En general, la descripción de las excitaciones monopolares se aplica bien a multipolaridades mayores, sin embargo, podemos mencionar algunas diferencias: los picos dipolares son más angostos y la fragmentación parece ser más fuerte. En particular, en los casos de igual población ($\Delta = 1$) existen máximos fragmentados bien definidos y tan intensos como los originales de Hartree Fock

Las partes reales de las densidades de transición para $L = 0, 1$ se grafican en la Fig. 5.7. Los perfiles s y a fueron rescalados a un mismo valor a una frecuencia dada. Este criterio es conveniente, puesto que si uno considera los cuatro perfiles en la misma escala; cerca de las transiciones ph intrínsecas de cada componente, las fluctuaciones de densidad complementarias aparecen completamente suprimidas. Para comprender el aspecto de las fluctuaciones de densidad es conveniente recordar los resultados relativos a las propiedades de equilibrio del sistema, resumidos en la Tabla 5.1. Al aumentar Δ (desde abajo hacia arriba en la Fig. 5.7), ambas fluctuaciones $\delta\rho_2^{(s,a)}$ para una frecuencia dada se extienden más allá del borde de ρ_2. Como ejemplo, consideremos en más detalle el caso $\Delta = 0.3$. Para la excitación con $\Omega \approx 2\omega_1$, $\delta\rho_2^{(s,a)}$ está localizado dentro de la densidad de los átomos tipo 2 ($\alpha r \lesssim 7, \alpha^2 = M\omega_1/\hbar$) mientras que $\delta\rho_1^{(s,a)}$ se extiende más allá, pero dentro del rango de ρ_1. Para valores pequeños de Δ, las correcciones $\delta\rho^{12}$ no son importantes, en general, debido al acoplamiento relativamente débil de los átomos tipo 1 con los pocos del tipo 2. Sin embargo, en el mismo límite $\delta\rho^{22}$ adquiere correcciones importantes $\delta\rho^{21}$, causadas por el gran número de átomos con spin σ_1. También vemos dos comportamientos diferentes relacionados con la dependencia con la frecuencia: para energías cercanas a $2\omega_1$, $\delta\rho_2^{(s)}$ y $\delta\rho_2^{(a)}$ poseen signos diferentes, revelando que la contribución inducida, $\delta\rho^{21}$ es mayor que la intrínseca $\delta\rho^{22}$. De hecho, si el sistema es excitado con frecuencias próximas a $2\omega_1$, se deberían esperar fluctuaciones considerables de $\delta\rho_1$, las cuales introducirían, a través de la interacción $V_{\rm ph}$, contribuciones $\delta\rho^{21}$ medibles. En cambio, excitando a $\Omega \approx 2\omega_2$ se crean fluctuaciones $\delta\rho^{22}$, y así la corrección a $\delta\rho^{21}$ es de segundo orden en la interacción y las fluctuaciones s y a son similares. Por otro lado, puesto que ρ_1 se extiende más allá de ρ_2, un estímulo en $\Omega = 2\omega_2$ induce una fluctuación cruzada $\delta\rho^{12}$ dentro del volumen del gas 1.

A medida que aumenta el número de partículas en la especie 2, su perfil de densidad se extiende más allá (ver Tabla 5.1) y hay pocos cambios notables en la localización espacial de la fluctuación. Sin embargo, en general, cerca de $2\omega_2$ encontramos una fuerte fluctuación inducida $\delta\rho^{12}$ en la región del espacio donde $P_2(r)$ es mayor que $P_1(r)$ y análogamente para $\delta\rho^{21}$ cerca de $2\omega_1$. Si se sigue aumentando Δ, la interpretación perturbativa deja de valer para todo multipolo y especie. Para $\Delta = 3$, las fluctuaciones ocupan una región más extensa, aproximadamente desde $\alpha r = 4$ hasta $\alpha r = 10$, esto puede atribuirse a una densidad ρ_2 más ancha.

Otra característica para destacar de la respuesta en el caso general es su diferencia con la situación MP, en donde teníamos las mismas fluctuaciones espaciales para ambas proyecciones de spin.

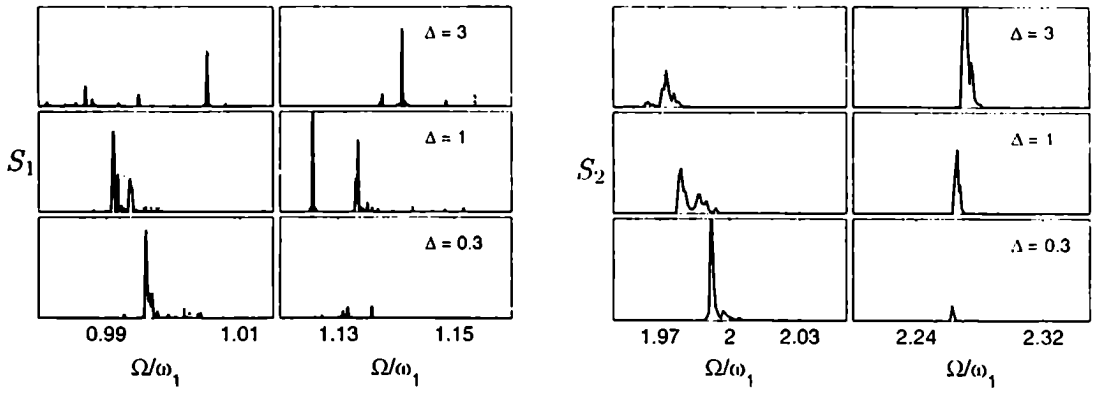


FIGURA 5.6: Factor de estructura dinámica simétrico (en unidades arbitrarias) para las mismas condiciones de la Fig. 5.4. (a) corresponde a excitaciones dipolares ($L = 1$) mientras que (b) al cuadrupolar ($L = 2$).

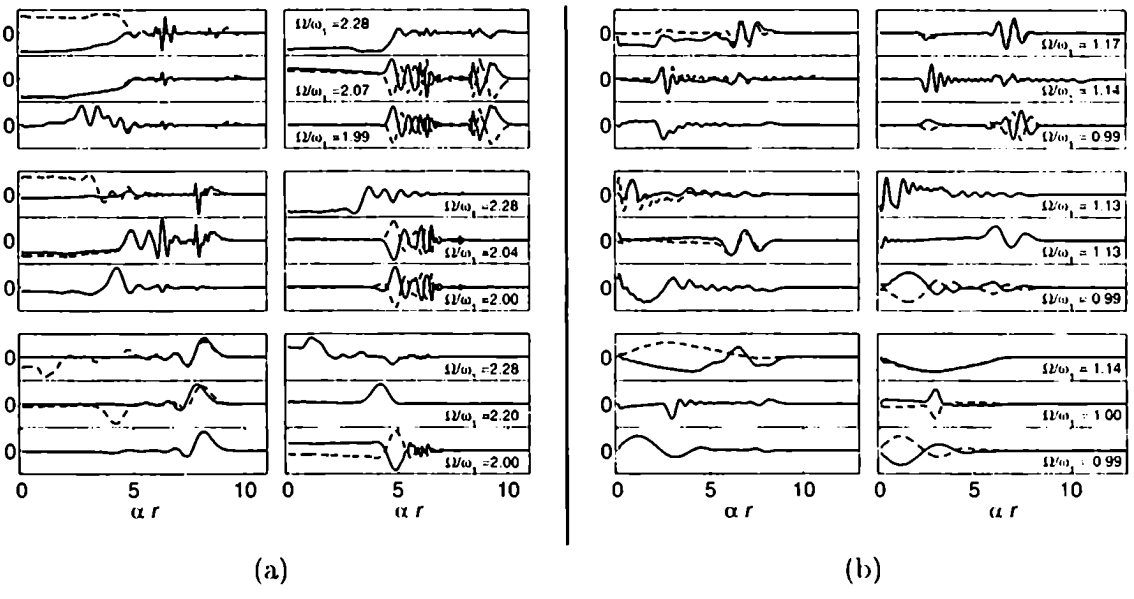


FIGURA 5.7: Fluctuaciones de densidad (en unidades arbitrarias) para $N_1 = 10^4$. La parte (a) corresponde a excitaciones monopolares y la parte (b) a las dipolares. Los gráficos superiores, medios e inferiores muestran los resultados para $\Delta = 3, 1, 0.3$ respectivamente, para $\sigma_1 = 7/2$ (columnas izquierdas de cada parte) y $\sigma_2 = 9/2$ (columnas derechas). Las líneas continuas y rayadas indican $\delta\rho_\sigma^{(s)}$ y $\delta\rho_\sigma^{(a)}$ respectivamente.

5.3 Modificaciones a temperatura finita

Cuando el gas atrapado se encuentra a temperatura finita las restricciones energéticas se relajan. En este caso el sistema está descripto por un conjunto estadístico de distintas configuraciones en el espacio de Hilbert del sistema de N-cuerpos. Así, por ejemplo, la rigidez de la frontera del mar de Fermi se pierde y las excitaciones se modifican.

Dentro de la aproximación no colisional descripta hasta el momento, la manera más directa de incorporar la temperatura es a través de la inclusión, en las Ecs. (5.6) y (5.17), de los números de ocupación de Fermi-Dirac a temperatura finita

$$N(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)}}, \tag{5.37}$$

donde $\beta = 1/k_B T$ y ϵ_F es el potencial químico a temperatura T. Una vez hecho esto, el procedimiento para resolver el problema es el mismo que en el caso de temperatura nula (ver Sec. 5.2).

A temperatura finita es posible que el sistema transfiera energía a la prueba, la relación entre esta probabilidad y la probabilidad que el sistema absorba energía , la única a $T = 0$, no son independientes. La relación entre estas está dado por el principio de *balance detallado*. Además, existe una diferencia importante entre el factor de estructura dinámico y la parte imaginaria de la susceptibilidad. La primera provee una medición directa de las fluctuaciones en el sistema, mientras que $\mathrm{Im}[\chi]$ describe la parte disipativa de la respuesta del sistema. El teorema de fluctuación-disipación establece la relación entre ambas. Así resulta que a $T \neq 0$ uno encuentra (Pines y Noziéres, 1994)

$$S(\Omega) = -\frac{1}{\pi\,(1 - e^{-\beta\Omega})}\,\mathrm{Im}\,[\chi(\Omega)]\,. \tag{5.38}$$

A manera de ilustración calculamos el perfil en equilibrio y las excitaciones monopolares en el caso MP para $N_F/2 \equiv N_1 = N_2 = 2925$ y 9880 (Fig. 5.8). En la figura podemos observar que a medida que el sistema se calienta, la densidad se desparrama y disminuye debido a la mayor energía cinética de las partículas. En la excitación monopolar se destacan dos efectos, por un lado los picos son más anchos, y por el otro la energía del modo colectivo se acerca al caso ideal a medida que aumentamos T. Estos efectos son los que se esperaba ya que por un lado la nube fermiónica se derrite, bajando su densidad y por lo tanto los efectos de la interacción; y por el otro lado la incorporación de la temperatura en el balance de energía provee un mayor margen para las excitaciones.

El formalismo introducido en este capítulo rige en el denominado régimen no colisional, es decir, mientras el tiempo τ entre las colisiones de cuasipartículas sea mucho mayor que el período de oscilación de una fluctuación, i.e. $\Omega\tau \gg 1$. Al tratarse de fermiones, a temperatura

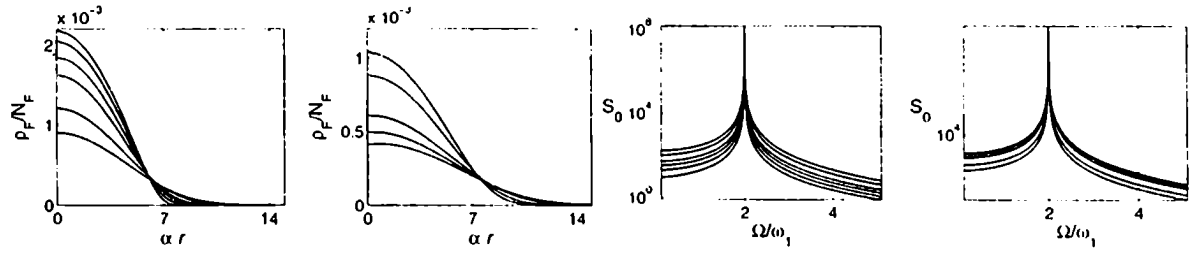


FIGURA 5.8: Mezclas fermiónicas a temperatura finita. (a) Perfiles de densidad a distintas temperaturas y $N_F = 2\times 2925$ (izquierda), 2×9880 (derecha). (b) Respuesta monopolar para las mismas condiciones que (a). En cada recuadro cada curva corresponde a una temperatura diferente, si $N_F = 2\times 2925$, $k_B T/\hbar\omega_1 = 2, 4, 6, 8, 12$, y 16, mientras que para $N_F = 2\times 9880$, $k_B T/\hbar\omega_1 = 8, 12, 20$, y 25.

estrictamente nula, las colisiones entre las cuasipartículas están completamente suprimidas y el sistema responde no colisionalmente. Pero a medida que la temperatura aumenta, se espera que este resultado deje de valer. Así, el sistema pasa de un régimen no colisional a uno hidrodinámico en el cual los choques garantizan el equilibrio local. Con el fin de establecer estos límites más claramente, en la Tabla 5.2 incluimos algunos parámetros característicos del sistema a temperatura finita. En particular, mostramos $\varepsilon_F(T)$, el cual marca claramente la entrada al régimen clásico cuando es negativo; el pico de densidad alcanzado en el centro de la trampa ($\rho(0)$), el ancho medio de la distribución ($\sqrt{\langle r^2\rangle}$), y tres aproximaciones al tiempo entre colisiones τ. Estas aproximaciones, deducidas por Vichi y Stringari (1999) e independientemente por Amoruso et al. (2000), son válidas en distintos rangos de temperatura, $\tilde{\tau}$ vale para bajas temperaturas donde la degeneración cuántica en más fuerte, por el contrario $\tau_{\text{clásico}}$ da una estimación clásica de τ y por lo tanto es válida a temperaturas mayores. Finalmente, τ_m provee una cota mínima, útil a temperaturas intermedias. Estos tiempos tienen las siguientes expresiones,

$$\frac{1}{\omega_1\tilde{\tau}} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \pi\, a_f^2 \alpha^2 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_1}\right)^2, \qquad \frac{1}{\omega_1\tau_m} = \frac{1}{2}\left(N_F^{1/3} a_f\, \alpha\right)^2,$$

$$\frac{1}{\omega_1\tau_{\text{clásico}}} = \frac{8}{3}\sqrt{2\pi}\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_1}\right)^{1/2} a_f^2\, \rho_F(0)\, \alpha^{-1}. \tag{5.39}$$

De acuerdo con los datos de la Tabla 5.2, para estos números de partículas se espera que la aproximación no colisional sea bastante precisa, incluso para temperaturas del orden de la temperatura de Fermi. Sin embargo, si seguimos aumentando N_F, para T bajas y altas la aproximación debería ser válida, no así a temperaturas intermedias.

TABLA 5.2: Propiedades de la mezcla fermiónica a temperatura finita.

	$\frac{k_B T}{\hbar\omega_1}$	$\frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_1}$	$\rho_F(0)\alpha^{-3}$	$\sqrt{\langle r^2\rangle}\,\alpha$	$\omega_1\tilde{\tau}$	$\omega_1\tau_m$	$\omega_1\tau_{\text{clásico}}$
$N_F = 2 \times 2925$							
	2.0	25.62	12.76	4.46	1.2×10^3	3.3×10^2	4.4×10^2
	4.0	24.10	11.96	4.68	6×10^2	idem	3.4×10^2
	6.0	21.58	10.82	5.00	4×10^2	idem	3.0×10^2
	8.0	18.12	9.52	5.38	3×10^2	idem	3.0×10^2
	12.0	8.63	7.09	6.17	2×10^2	idem	3.3×10^2
	16.0	−3.71	5.30	6.89	1.5×10^2	idem	3.8×10^2
$N_F = 2 \times 9880$							
	8.0	33.83	20.68	5.99	3×10^2	1.5×10^2	2.4×10^2
	12.0	27.29	17.52	6.57	2×10^2	idem	1.3×10^2
	20.0	8.29	12.03	7.65	1.2×10^2	idem	1.5×10^2
	25.0	−6.32	9.74	8.15	96	idem	1.6×10^2
	30.0	−22.26	8.16	8.54	80	idem	1.9×10^2

Capítulo 6

Mezclas degeneradas

Junto con el surgimiento de las técnicas experimentales para enfriar un gas de átomos fermiónicos por debajo de la temperatura de Fermi, se diseñaron métodos similares para mezclas isotópicas de bosones y fermiones. La primera medición en sistemas de mezclas degeneradas se consiguió a fines de 1999 (Schreck et al., 2001a), utilizando átomos de ^{7}Li y ^{6}Li y técnicas de enfriamiento por simpatía. En ese entonces se consiguió una temperatura final de aproximadamente 80% de la temperatura de Fermi. Más recientemente, el mismo grupo logró descender la temperatura hasta un tercio de T_F (Schreck et al., 2001b) y además surgieron otros grupos que trabajan con mezclas diferentes (ver, por ejemplo, Goldwin et al., 2001).

Estos sistemas mezclados proveen una gran variedad de configuraciones posibles de estudio, ya que al confinar diferentes tipos de átomos sin permitirles su interconversión, podemos encontrarnos con sistemas que a una dada temperatura poseen independientemente una fase condensada (BEC) y una fase congelada (Fermiones), sólo alguna de las dos, o ninguna. En este sentido, el primer punto de análisis puede centrarse en las propiedades del sistema a temperatura cero, en el cual tanto los fermiones como los bosones se hallan en un régimen cuántico degenerado. Este es el tema principal de este capítulo. En la primera sección describimos el sistema modelo elegido, la sección 6.2 describe las excitaciones no colisionales, mientras que la sección 6.3 está dedicada al estudio de excitaciones en un régimen colisional. Finalmente, en la última parte del capítulo comentamos algunos resultados de las excitaciones a temperatura finita.

6.1 El sistema

El sistema en estudio está formado por un gas diluido y frío de átomos de potasio, confinados en una trampa armónica común. Dos de las componentes, especies 1 y 2, son fermiones

polarizados con distintas proyecciones de spin y la tercera, denominada especie B, son bosones. Como se mencionó en el capítulo anterior, las distintas proyecciones de spin proveen un acoplamiento diferente con el campo magnético de una trampa magneto-óptica lo que da lugar a pequeñas diferencias entre las frecuencias de oscilación de cada especie. Sin embargo, a partir de este momento y durante todo el capítulo ignoraremos tales diferencias. En el caso particular del potasio tampoco tendremos en cuenta las diferencias de masa entre los isótopos. Así, supondremos que todos los átomos experimentan el mismo confinamiento isótropo

$$V_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2. \tag{6.1}$$

Como es usual, los potenciales de interacción serán considerados en la aproximación de onda s. Además, puesto que este gas incluye dos tipos de fermiones idénticos, algunos de los procesos de dispersión no son posibles, pues cada especie fermiónica no podrá interactuar directamente con átomos de su misma clase. Con estas consideraciones, los hamiltonianos de cada especie en la aproximación de campo medio, pueden escribirse como

$$H_B = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + g_B \rho_B + g_1 \rho_1 + g_2 \rho_2, \tag{6.2a}$$

$$H_1 = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + g_f \rho_2 + g_1 \rho_B, \tag{6.2b}$$

$$H_2 = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + g_f \rho_1 + g_2 \rho_B. \tag{6.2c}$$

siendo g_B, g_1, g_2, y g_f las intensidades de las interacciones entre los bosones, la especie 1 y B, la especie 2 y B, y las especies 1 y 2, respectivamente.

Los hamiltonianos proveen las autofunciones y energías de partículas independientes necesarias para encontrar las densidades en el equilibrio ρ_B, ρ_1 y ρ_2, con $\rho_B = N_B |\phi_0|^2$ y

$$\rho_\sigma = \sum_{nl} (2l+1) |\psi^\sigma_{nl}|^2 N(\varepsilon^\sigma_{nl} - \varepsilon^\sigma_f). \tag{6.3}$$

para $\sigma = 1, 2$, siendo $N(\varepsilon)$ los números de ocupación de Fermi, y ε^σ_f la energía de Fermi de la especie σ.

El espectro de partículas es la solución del sistema de ecuaciones acopladas

$$H_B \phi_{nlm} = \epsilon_{nl} \phi_{nlm} \qquad \text{y} \qquad H_\sigma \psi^\sigma_{nlm} = \varepsilon^\sigma_{nl} \psi_{nlm}. \tag{6.4}$$

La ecuación (6.4) para los bosones y con $n = l = 0$ es la ecuación de Gross-Pitaevskii (cf. Ec. (3.9)) para N_B átomos con potencial químico $\mu = \epsilon_0$ en un potencial externo $V(\mathbf{r}) = V_0 + (g_1 \rho_1 + g_2 \rho_2)$. Los modos de energía superior, son las excitaciones de la GPE, los cuales no deben confundirse con las excitaciones HFB (ver Cap. 3).

6.1.1 Aproximación no colisional

Para obtener el espectro de excitaciones colectivas de todo el sistema, recurrimos a la aproximación de fases al azar, que trata todas las especies de la misma manera. En el capítulo anterior, obtuvimos dos conjuntos equivalentes de ecuaciones para las fluctuaciones de densidad $\delta\rho^{\sigma\sigma'}$ de un sistema de dos especies fermiónicas. Estas representan la respuesta de la densidad ρ_σ a una perturbación inicial de $\rho_{\sigma'}$. Las fluctuaciones de densidad diagonales y no diagonales pueden mapearse en sistemas de fluctuaciones simétricas o antisimétricas en spin, para una especie o para todo el sistema. Un tratamiento similar a éste en presencia de una componente bosónica nos llevaría a un conjunto de 9 ecuaciones, las cuales incluirían entre otras densidades, $\delta\rho^{BB}$, $\delta\rho^{\sigma B}$, $\delta\rho^{B\sigma}$ (ver Apéndice C). En nuestro estudio consideraremos solamente el caso con igual número de fermiones en cada especie y analizaremos directamente las fluctuaciones de densidad total,

$$\delta\rho_\sigma = \delta\rho^{\sigma\sigma} + \delta\rho^{\sigma\sigma'} + \delta\rho^{\sigma B}, \qquad \text{y} \qquad \delta\rho_B = \delta\rho^{BB} + \delta\rho^{B\sigma} + \delta\rho^{B\sigma'} \tag{6.5}$$

Dentro de la ApFA, una fluctuación de densidad evoluciona en un potencial de HF de acuerdo con los hamiltonianos linealizados de las Ecs. (6.2). En ese marco, podemos escribir un sistema de ecuaciones para las amplitudes de las fluctuaciones en términos de los propagadores de partícula-hueco en la aproximación HF,

$$\delta\rho_\sigma(\mathbf{r}) = \delta\rho^0_\sigma(\mathbf{r}) + \int G^\sigma_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big[g_\sigma\,\delta\rho_B(\mathbf{r}') + g_f\,\delta\rho_{\sigma'}(\mathbf{r}')\Big]\,d^3r', \tag{6.6a}$$

$$\delta\rho_B(\mathbf{r}) = \delta\rho^0_B(\mathbf{r}) + \int G^B_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\left[g_B\,\delta\rho_B(\mathbf{r}') + \sum_\sigma g_\sigma\,\delta\rho_\sigma(\mathbf{r}')\right]\,d^3r', \tag{6.6b}$$

donde $\delta\rho^0_i(\mathbf{r})$ es la fluctuación de densidad inducida en la especie i por la prueba externa $U(\mathbf{r})$ en la aproximación de HF

$$\delta\rho^0_i(\mathbf{r}) = \int U(\mathbf{r}')\,G^i_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,d^3r', \tag{6.7}$$

y los propagadores se escriben

$$G^B_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = N_B\sum_{j\neq 0}\left\{\frac{\phi_0(\mathbf{r}')\,\phi_0^*(\mathbf{r})\,\phi_j(\mathbf{r})\,\phi_j^*(\mathbf{r}')}{\Omega-(\epsilon_j-\mu)/\hbar+i\eta} - \frac{\phi_0(\mathbf{r})\,\phi_0^*(\mathbf{r}')\,\phi_j(\mathbf{r}')\,\phi_j^*(\mathbf{r})}{\Omega+(\epsilon_j-\mu)/\hbar+i\eta}\right\}, \tag{6.8a}$$

$$G^\sigma_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{jk}\frac{N(\varepsilon^\sigma_k-\varepsilon^\sigma_f)-N(\varepsilon^\sigma_j-\varepsilon^\sigma_f)}{\Omega-(\varepsilon^\sigma_j-\varepsilon^\sigma_k)/\hbar+i\eta}\,\psi^{\sigma\,*}_j(\mathbf{r}')\,\psi^\sigma_j(\mathbf{r})\,\psi^{\sigma\,*}_k(\mathbf{r})\,\psi^\sigma_k(\mathbf{r}'), \tag{6.8b}$$

donde cada índice de partícula representa la terna $n\,l\,m$ y el modo del condensado ($j=0$) está excluido de la sumatoria (6.8a).

Al restringirnos a sistemas con igual número de partículas fermiónicas en cada spin, el sistema resulta más simple de resolver ya que uno posee sólo un espectro fermiónico $\varepsilon^\sigma_{n\,l}\equiv\varepsilon_{n\,l}$,

un propagador fermiónico $G_0^\sigma \equiv G_0^f$ y las mismas fluctuaciones $\delta\rho_\sigma \equiv \delta\rho_f$. Nuevamente, debido a la simetría de la trampa y para operadores multipolares de la forma (5.14), las Ecs. (6.6) pueden reescribirse en términos de las componentes de L definido, según

$$\delta\rho_f^L(r) = \delta\rho_f^{0\,L}(r) + \frac{4\pi}{2l+1}\int r'^2\, G_{0\,L}^f(r,r')\Big[g_\sigma\,\delta\rho_B^L(r') + g_f\,\delta\rho_f^L(r')\Big]\,dr', \tag{6.9a}$$

$$\delta\rho_B^L(r) = \delta\rho_B^{0\,L}(r) + \frac{4\pi}{2l+1}\int r'^2\, G_{0\,L}^B(r,r')\,\big[g_B\,\delta\rho_B^L(r') + 2\,g_\sigma\,\delta\rho_f^L(r')\big]\,dr' \tag{6.9b}$$

donde las expresiones para los propagadores de polaridad L, $G_{0\,L}^i$, están dadas en el Apéndice B y las fluctuaciones totales de densidad para las partículas i son simplemente,

$$\delta\rho_i(\mathbf{r}) = \sum_L Y_{L\,0}(\hat{r})\,\delta\rho_i^L(r). \tag{6.10}$$

Para sintetizar, el proceso de resolución consta de tres partes. Primero, se encuentran las densidades en equilibrio. Esta etapa incluye la resolución de la ecuación de Gross-Pitaevskii acoplada al sistema fermiónico en la aproximación de HF. De este cálculo también se obtienen las excitaciones de cuasipartículas de los fermiones. Luego, se calcula el espectro de partícula independiente de los bosones y finalmente se resuelve las ecuaciones ApFA (6.9) para las fluctuaciones de densidad con un L definido. Después de estos cálculos, se computa la susceptibilidad (χ) y el factor de estructura dinámico (S) del sistema total, según

$$\chi^L(\Omega) = \frac{\chi_B^L + \chi_1^L + \chi_2^L}{3}, \qquad \text{y} \qquad S^L(\Omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left[\chi^L\right] \tag{6.11}$$

donde las susceptibilidades de cada componente en el sistema interactuante valen

$$\chi_i^L = \begin{cases} \int r^{2+L}\,\delta\rho_i^L(r)\,dr & L \neq 0, \\ \int r^4\,\delta\rho_i^0(r)\,dr & L = 0. \end{cases} \tag{6.12}$$

De los polos de la parte real de χ^L extraemos las frecuencias de excitación de los modos colectivos.

6.2 Resultados *no colisionales*

Para realizar los cálculos primero utilizamos parámetros cercanos a los del experimento de DeMarco y Jin (1999). Elegimos $\omega = 2\pi \times 70\ \mathrm{s}^{-1}$, $a_1 = a_2 = 2.52$ nm, $a_f = 8.31$ nm y $a_B = 4.29$ nm, correspondiente a ^{40}K (fermiones) y ^{39}K (bosones).

El cómputo del espectro de partícula, Ec. (6.4), se llevó a cabo expandiendo las soluciones en una base de autofunciones del oscilador armónico isótropo con aproximadamente 1800 funciones radiales. De hecho, debido a la simetría esférica de la trampa, solamente diagonalizamos muchos sistemas pequeños con distintos l ($l \lesssim 60$). Se alcanzó la convergencia con

una precisión de al menos 10^{-10} en las energías verificándose la coincidencia entre μ y ϵ_0 en alrededor de 10^{-5}. Con esto, se realizó la solución numérica de las ecuaciones para las fluctuaciones, Ecs. (6.9), discretizando el problema en una grilla espacial de alrededor de 250 puntos y extendiéndose hasta $30\,\mu$m (aproximadamente quince longitudes de oscilador). El sistema lineal resultante fue resuelto con subrutinas estándares pertenecientes a la librería LAPACK en Fortran.

En las próximas secciones analizaremos tanto el espectro de cuasipartículas como los modos autoconsistentes de ApFA. Llamaremos N_F al número total de fermiones, $N_F \equiv N_f^{\sigma} + N_f^{\sigma'} = 2 \times N_f$, siendo N_f el número de partículas en cada especie; y g_{FB} a la intensidad común de la interacción $g_{FB} = g_1 = g_2$.

6.2.1 Excitaciones GPE y Hartree–Fock

Calculamos el espectro de excitaciones de cuasipartículas dentro de la aproximación de campo medio para sistemas mezclados. Las características principales de las energías HF de los fermiones son las siguientes:

- para números bajos de fermiones, $N_f \lesssim 10^4$, las energías de excitación del sistema de fermiones puro son básicamente las correspondientes al oscilador no interactuante.
- Al encender la interacción con la componente bosónica, la repulsión con el condensado de Bose–Einstein incrementa la energía de Fermi y disminuye la pendiente de la curva de dispersión. El cambio de la pendiente es más importante cuando la diferencia $N_B - N_f$ se hace más grande. En particular, no se observan cambios cuando $N_B \lesssim N_f$.

Mølmer (1998b) mostró que, cuando hay muchos bosones, la energía cinética de los fermiones y la de interacción con los fermiones de la otra especie se puede despreciar en el hamiltoniano H_B. Esto da lugar a la aproximación de Thomas-Fermi usual para el perfil bosónico,

$$\rho_B = N_B\,|\phi_0|^2 = \frac{1}{g_B}\,(\mu - V_0(\mathbf{r}))\Theta(\mu - V_0) \tag{6.13}$$

donde $\Theta(x)$ es la función escalón. Esta densidad se traduce, luego de su reemplazo en los hamiltonianos fermiónicos, en una trampa armónica más ancha y corrida hacia arriba, de acuerdo con

$$V_{\mathrm{ef}}(\mathbf{r}) = V_0 + \frac{g_{FB}}{g_B}(\mu - V_0)\,\Theta(\mu - V_0) = \begin{cases} \dfrac{g_{FB}}{g_B}\,\mu + V_0\,(1 - \dfrac{g_{FB}}{g_B}), & \text{si } r < R_B, \\ V_0(\mathbf{r}), & \text{si } r \geq R_B. \end{cases} \tag{6.14}$$

con el radio de Bose $R_B = \sqrt{2\mu/M\omega^2}$. De acuerdo con los valores de las constantes de acoplamiento usados aquí, la intensidad de la fuerza restauradora experimentada por los fermiones

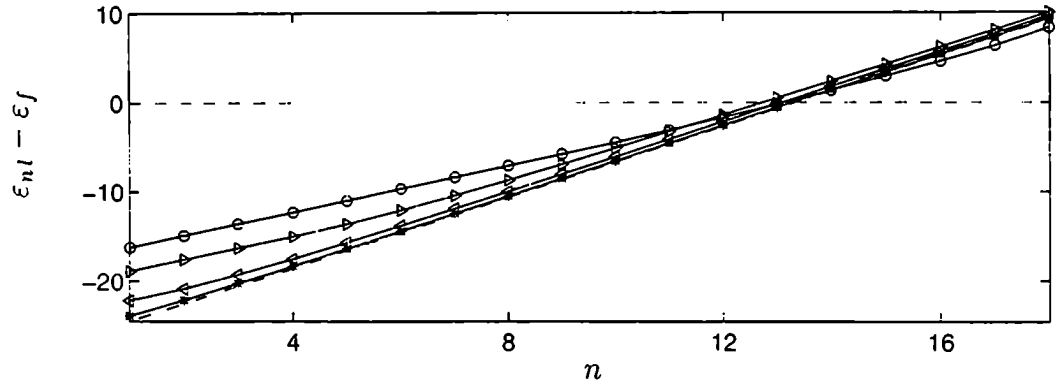


FIGURA 6.1: Energías de las excitaciones fermiónicas en HF (en unidades de $\hbar\omega$) para $N_f = 9880$ y $l = 0$. Los símbolos diferentes indican cantidad de bosones distintas: (○) $N_B = 10^6$, $\mu = 32.5\hbar\omega$; (▷) $N_B = 10^5$, $\mu = 13.2\hbar\omega$; (◁) $N_B = 10^4$, $\mu = 5.7\hbar\omega$; y (∗) $N_B = 10^3$, $\mu = 2.9\hbar\omega$. La línea punteada y rayada muestra los resultados para $g_1 = g_2 = 0$.

dentro de la nube bosónica se reduce en un factor $(1 - g_{FB}/g_B) \approx 0.4$. Consecuentemente, el radio de Fermi $R_f = \sqrt{2\varepsilon_f/M\omega^2}$ adquiere un valor efectivo diferente,

$$\tilde{R}_f = \sqrt{\frac{2(\varepsilon_f - \mu\, g_{FB}/g_B)}{(1 - g_{FB}/g_B)\, M\, \omega^2}}. \tag{6.15}$$

Este radio, en general, es mayor al de un sistema fermiónico puro. Por lo tanto, las energías de excitación más bajas —i.e. aquellas con energías menores al potencial químico de los bosones— serán las más sensibles a la renormalización del tamaño del condensado. Las más altas, que se extienden hasta afuera de los perfiles de densidad, no son muy afectadas por este confinamiento efectivo. En la Fig. 6.1 graficamos la relación de dispersión para $N_f = 9880$, y varios valores de N_B. Los valores de los potenciales químicos están indicados en la figura. Podemos observar que, de acuerdo con la imagen de atrapado efectivo, cuando la nube bosónica es suficientemente grande los modos de excitación menores aumentan con una pendiente menor que los modos con energía mayores a μ. Si bien el espectro fermiónico se altera por las interacciones, su contrapartida bosónica permanece prácticamente sin cambio; de hecho, además de los distintos números de partículas en cada isótopo, el carácter fermiónico de los átomos de ^{40}K da lugar a excitaciones de cuasipartículas altamente sensibles a las variaciones en la trampa efectiva. El espectro bosónico es diferente, consta de las excitaciones de partícula independiente de la GPE, las cuales formarán la base de las energías colectivas en el cálculo ApFA.

6.2.2 Aproximación de fases al azar para mezclas

El aspecto general de la respuesta (6.11) puede interpretarse a partir de sus constituyentes. Sin el acoplamiento bosón–fermión, i.e. $g_1 = g_2 = 0$, la respuesta bosónica consiste en las excitaciones colectivas de la ecuación de Gross-Pitaevskii a temperatura nula (ver Sec. 3.2.2). Para muchos bosones, esto es reproducido fielmente por la formulación hidrodinámica de Stringari, la cual nos brinda expresiones analíticas para las energías de las excitaciones multipolares. Si bien se han encontrado también fórmulas analíticas para sistemas de fermiones interactuantes (Minguzzi y Tosi, 2000a, 2001), éstas son válidas dentro de un régimen hidrodinámico y para poblaciones en rangos distintos de los que aquí hemos considerado; por esta razón compararemos directamente con los resultados numéricos del tratamiento no colisional del capítulo anterior.

Hemos analizado el factor de estructura dinámica y las fluctuaciones creadas por campos multipolares externos con $L = 0, 1, 2$. En la Fig. 6.2 mostramos el espectro monopolar para varios valores de N_B y N_f. La características principales del espectro pueden sintetizarse de la siguiente manera

(i) N_f fijo: para N_B alto (filas superiores de la figura), el espectro está dominado en amplitud por los modos colectivos bosónicos con frecuencias $\Omega \approx \sqrt{5}, \sqrt{14}, \cdots$ (Stringari, 1996). Sin embargo, ocurre una fuerte fragmentación alrededor de los polos fermiónicos, los cuales se pueden ver en la fila inferior. A medida que disminuimos N_B, la fragmentación se reduce y comienzan a distinguirse dos conjuntos con dos picos cada uno, un conjunto corresponde a los fermiones y el otro a los bosones. El máximo bosónico se separa del resultado de Stringari dirigiéndose hacia el resultado del gas ideal $\Omega = 2\,n\,\omega$. Esto revela la poca importancia de las interacciones tanto bosón-bosón como fermión-bosón en una situación altamente diluida. La fragmentación en la parte fermiónica no puede verse debido a su baja amplitud.

(ii) N_B fijo: al aumentar N_f no siempre se consigue un espectro más fragmentado. De hecho, alguno de los picos aparecen con una mejor definición para N_f mayores, mientras que otros estados parecen desparramarse en un rango de energía mayor. Por otro lado, uno debe recordar que la escala en este gráfico está regida por la intensidad de los bosones. Si esta restricción se levantara, uno podría observar picos colectivos de fermiones puros dentro de intervalos restringidos y con una estructura fragmentada para N_f suficientemente grande.

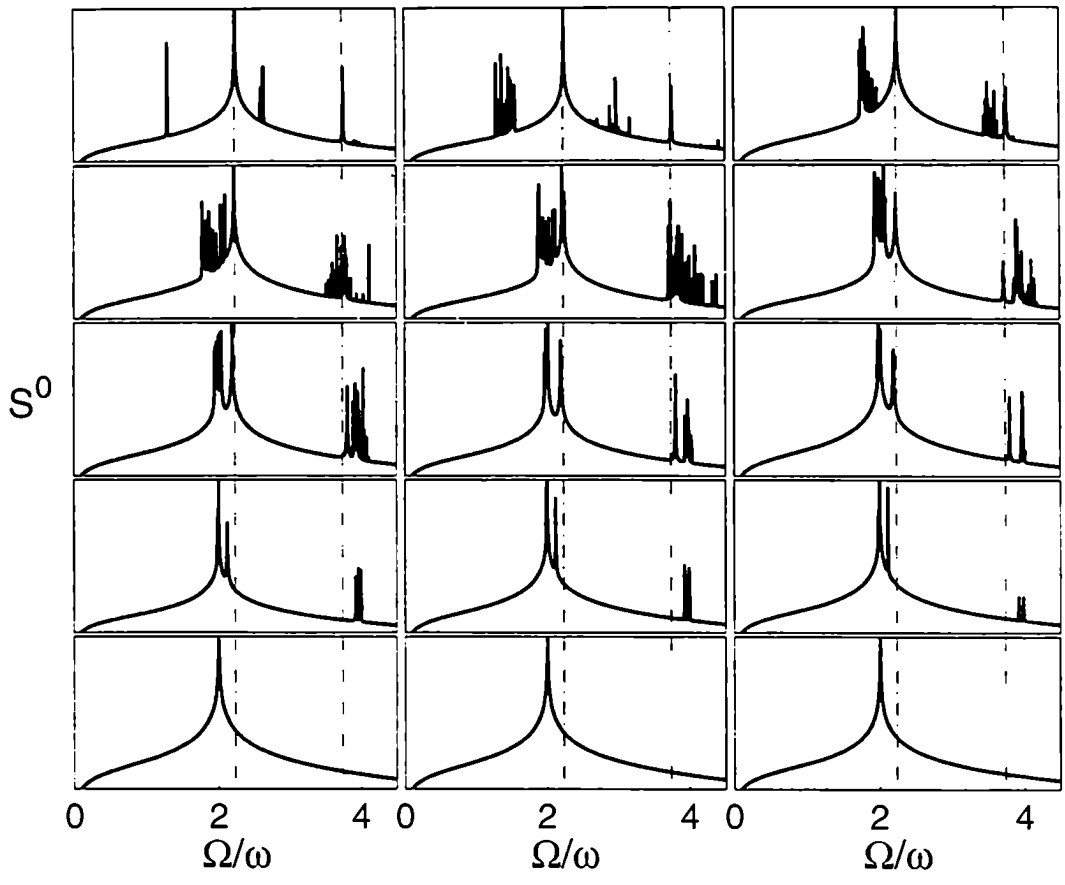


FIGURA 6.2: Factor de estructura dinámico monopolar en la ApFA (en escala logarítmica y unidades arbitrarias). Cada fila corresponde, de arriba hacia abajo, a $N_B = 10^6, 10^5, 10^4, 10^3, 0$; mientras que cada columna, de izquierda a derecha, $N_f = 969, 2925, 9880$. Las líneas verticales indican las energías del cálculo de Stringari para el sistema bosónico.

Los resultados para los modos dipolares ($L = 1$), Fig. 6.3, son un poco diferentes. Como podemos ver, para todos los valores de N_B y N_f, el pico más alto está en $\Omega = \omega$ y corresponde a una oscilación del centro de masa del sistema (Modo de Kohn). Es sabido (Kohn, 1961; Dobson, 1994; Capuzzi y Hernández, 2001) que ambos, el sistema bosónico puro y el fermiónico puro poseen el modo de Kohn dentro de la ApFA (ver Apéndice B). Es esto lo que podemos observar en la figura. De hecho, en los cálculos se usó la localización precisa de este polo para verificar el código empleado. Debe mencionarse, por otro lado, que en un experimento real, las pequeñas diferencias entre las fuerzas de las distintas trampas para las distintas componentes, distorsionarían estos modos, dando lugar a una oscilación acoplada. Además de este modo, el espectro dipolar está altamente fragmentado alrededor de $\Omega = 3\omega$. Esta energía corresponde a un modo del oscilador con $l = 1$. Como en el caso monopolar, la fragmentación parece desvanecerse a medida que disminuimos N_B o N_f.

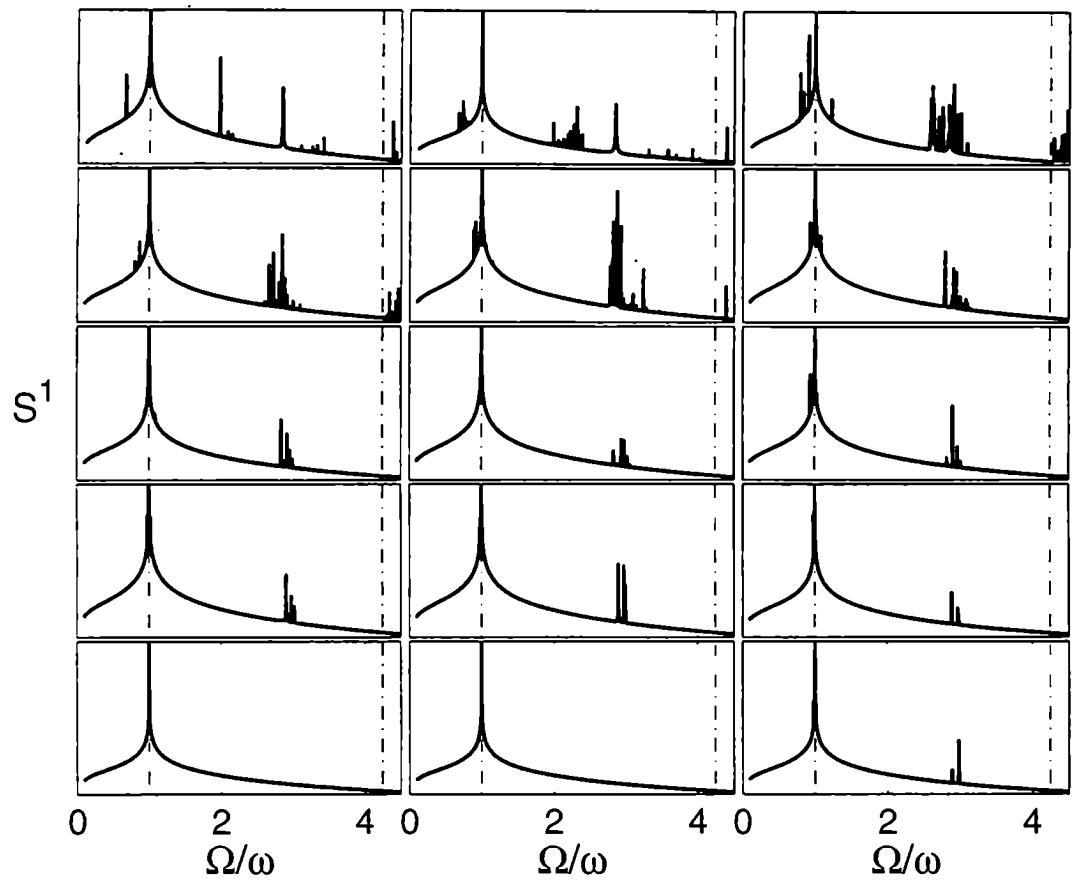


FIGURA 6.3: Ídem Fig. 6.2 para la respuesta dipolar

El modo cuadrupolar exhibe la fragmentación más fuerte. El espectro presenta varios máximos importantes aún para valores bajos de N_B y N_f, y su cantidad crece a densidades mayores. Para las poblaciones más grandes consideradas, y en cada especie, el pico de mayor altura está localizado en la frecuencia de excitación bosónica $\Omega \approx \sqrt{2}\omega$. Este resultado está de acuerdo con un cálculo a partir de reglas de suma realizado por Miyakawa et al. (2000). A medida que disminuimos el número de átomos bosónicos el máximo se corre hacia arriba, acercándose al valor del gas ideal $\Omega = 2\omega$.

La forma de las densidades de transición revela más propiedades de las excitaciones del sistema. En la Fig. 6.4 incluimos las fluctuaciones monopolares correspondientes a las frecuencias donde se alcanza la máxima probabilidad de transición, cada curva se reescaleó independientemente para entrar en la misma escala. Sin contar las diferencias de escala, las formas de las fluctuaciones bosónicas son muy parecidas para todos los valores de N_B y N_f, y muestran en todo los casos una excitación volumétrica con probabilidad no nula de encontrarse en el origen. Sin embargo, se pueden ver dos clases de excitaciones fermiónicas, una volumétrica y similar a la bosónica y, otra oscilante entre $\widetilde{R}_f$ y R_B. Las dos clases pueden

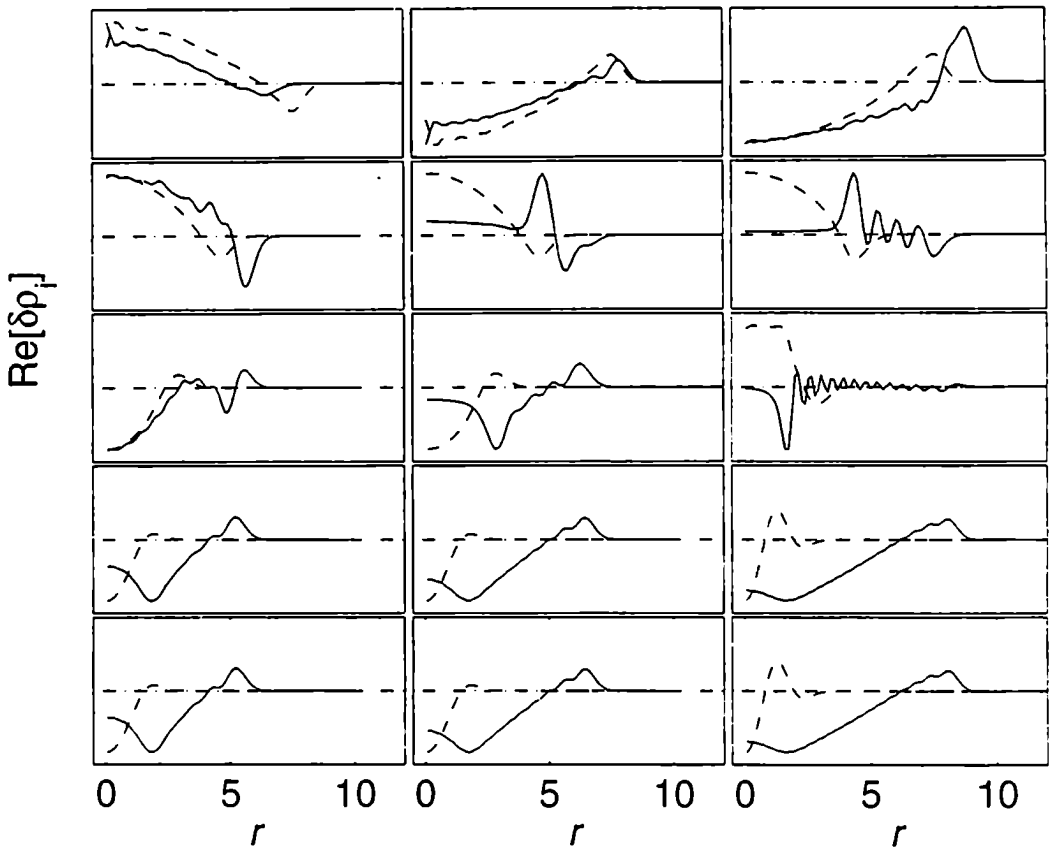


FIGURA 6.4: Densidades de transición para la respuesta con $L = 0$ (en unidades arbitrarias). Los gráficos muestran la parte real de las densidades de transición en los picos más altos de la Fig. 6.2 para cada par (N_f, N_B). Las líneas sólidas muestran las fluctuaciones fermiónicas mientras que las rayadas marcan la parte bosónica. Cada gráfico corresponde al mismo ordenamiento de la Fig. 6.2. Las posiciones están expresadas en términos del tamaño del oscilador $d = \sqrt{\hbar/M\omega} \approx 1.9\ \mu$m.

relacionarse con el espectro: las oscilaciones volumétricas ocurren para sistema bosónicos casi puros y en configuraciones donde la nube bosónica envuelve a la fermiónica. Por otra parte, el modo de superficie aparece cerca de las fluctuaciones de fermiones puros. Los átomos fermiónicos se extienden más afuera que su contrapartida bosónica y la excitación rebota entre los bordes de las densidades de ambas componentes.

La respuesta monopolar también contiene otro tipo de fluctuaciones, algunas corresponden a polos importantes en la respuesta; se pueden observar no sólo excitaciones volumétricas de bosones sino también de superficie, en contrafase a las fermiónicas, para las frecuencias seleccionadas.

Como se esperaba del teorema generalizado de Kohn, las excitaciones dipolares a la frecuencia de la trampa existen y corresponden a desplazamientos pequeños de la densidad, i.e.

fluctuaciones proporcionales al gradiente de la densidad

$$\delta\rho_i^{l=1}(r, \Omega = \omega) \propto \frac{\partial \rho_i}{\partial r}. \tag{6.16}$$

Para valores suficientemente grandes de N_B, y de acuerdo con la aproximación TF, la forma de la densidad bosónica dentro del condensado es parabólica, dando una relación lineal para $\delta\rho$. Esto puede verse claramente en la Fig. 6.5, donde graficamos las fluctuaciones de densidad correspondientes a $N_B = 10^6$ y $N_f = 969$. La forma de la fluctuación fermiónica no es tan sencilla, y además, no debe tener una dependencia lineal con la posición ya que el perfil fermiónico de densidad posee una potencia 2/3 (cf. Ec.(5.3)). Más aún, las oscilaciones que se ven la figura concuerdan perfectamente con la derivada de la densidad fermiónica calculada dentro de la aproximación HF.

Finalmente, podemos decir que el comportamiento de las excitaciones con $L = 2$ es similar a las monopolares en el sentido que para muchos bosones y pocos fermiones, el pico más alto en la respuesta corresponde a una fluctuación que se extiende sobre el interior de la nube, mientras que para pocos bosones y/o muchos fermiones, la fluctuación fermiónica es principalmente de superficie. La diferencia con $L = 0$ está en que la oscilación cuadrupolar se anula suavemente en el origen, además de la forma completa de la fluctuación que incluye un Y_{20}.

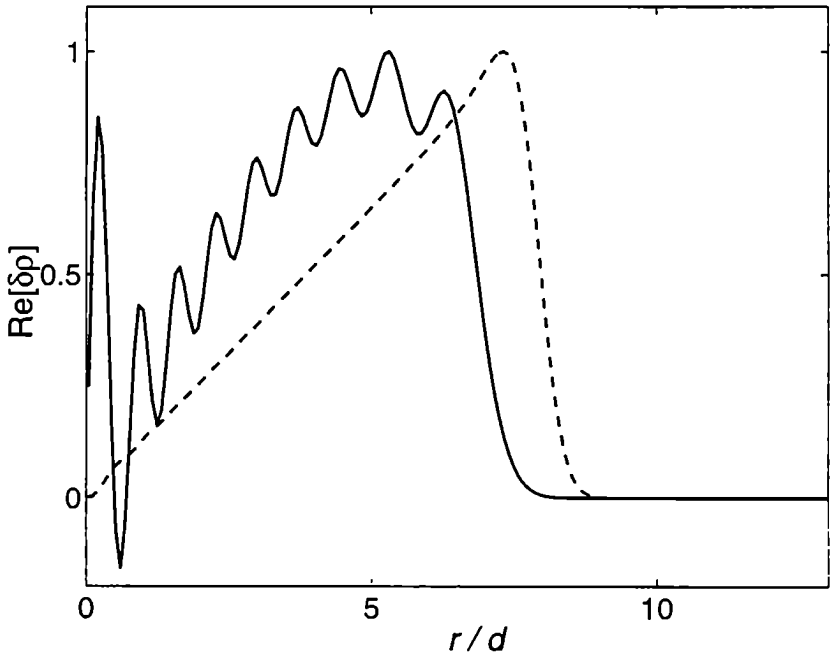


FIGURA 6.5: Fluctuación dipolar a la frecuencia del oscilador para $N_B = 10^6$ y $N_f = 969$ (en unidades arbitrarias). Las líneas continuas y rayadas corresponden a la fluctuaciones fermiónicas y bosónicas respectivamente. Cada curva fue rescaleada independientemente.

6.2.3 Mezclas de helio

Pese al avance de los métodos experimentales para atrapar y enfriar átomos debajo de los límites de degeneración cuántica, la lista de átomos confinados hasta el momento sigue siendo corta. Recientemente se ha sumado a esta lista el helio ya que han condensado partículas de ^{4}He en el estado *metaestable* 2^3S_1 (Pereira Dos Santos et al., 2001; Robert et al., 2001). Como es sabido, además del isótopo bosónico, el helio presenta una especie fermiónica: ^{3}He. Los sistemas formados por ^{3}He han constituido una herramienta fundamental para el entendimiento y desarrollo de la teoría del *líquido* de Fermi. Sin embargo, el régimen de gas *diluido* y *confinado* alcanzado en estas trampas, ya sea en ^{3}He puro o en mezclas isotópicas, no ha sido explorado en detalle.

Los potenciales de interacción del ^{3}He y ^{4}He son esencialmente idénticos, entonces podemos suponer que es correcto describir tanto la dispersión entre partículas de la misma especie como la producida entre átomos de ^{3}He y ^{4}He con la misma longitud de onda s. Esta simplificación nos proporcionará un sistema con configuraciones muy diferentes a las encontradas en el caso del potasio. Los sistemas multicomponentes interactuantes han sido estudiados previamente, incluso en el contexto de trampas magneto ópticas. Como mostraron varios autores (Mølmer, 1998a; Viverit et al., 2000; Minguzzi y Tosi, 2000b), una diferencia entre las interacciones dentro de un sistema puede causar una separación de fases a medida que el número de partículas aumenta. Además, debido a la relación entre las longitudes de dispersión, las diferencias de masas de los isótopos, de alrededor del 30%, serán tomadas en cuenta esta vez y serán responsables de pequeñas diferencias entre las interacciones efectivas (i.e., g_i). En particular, para N_B grande y al ser g_{FB} mayor que g_B, los átomos de ^{3}He serán expulsados del centro de la trampa, formando una cáscara esférica alrededor del condensado. Un ejemplo de este comportamiento puede verse en la Fig. 6.6, donde hemos graficado los perfiles de densidad para $N_B = 10^3, 10^4$ y 10^5, y para $N_F = 2 \times 969$ y 2×2907. En todos los cálculos usamos $a_f = a_{FB} = a_B = 19\,\mathrm{nm}$ y una frecuencia común $\omega = 2\pi \times 515\,\mathrm{s}^{-1}$ (Pereira Dos Santos et al., 2001; Leo et al., 2001).

Las propiedades en equilibrio se calculan directamente a partir de las Ecs. (6.2)-(6.4), para los nuevos parámetros. La densidad fermiónica es modificada fuertemente por la nube bosónica, sin embargo la forma del condensado de ^{4}He permanece prácticamente inalterable a medida que variamos N_F, y de hecho es igual a la del caso de bosones solos ($g_{FB} = 0$). Esto se debe a que, para cantidades similares de partículas, las densidades fermiónicas son menores al ser más extendidas y por lo tanto más vulnerables a la interacción con los bosones. También podemos confirmar del cálculo directo que para $N_B = 10^5$ ya comienza a observarse una fuerte segregación de las dos componentes.

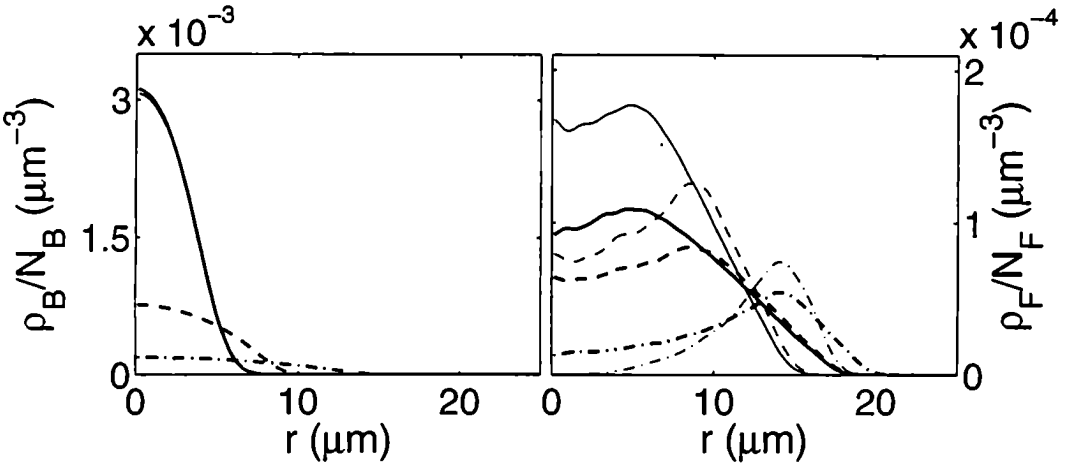


FIGURA 6.6: Perfiles de densidad de ^{4}He (izquierda) y ^{3}He (derecha) para varios números de partículas. Las líneas finas (gruesas) corresponden a $N_F = 2 \times 969(2 \times 2907)$; mientras que las sólidas, rayadas y punteadas indican $N_B = 10^3, 10^4, 10^5$ respectivamente.

Debido a las diferentes distribuciones espaciales en la trampa, la respuesta no colisional para este sistema es claramente distinta a la encontrada en las secciones anteriores. En la Fig. 6.7 mostramos el factor de estructura monopolar alrededor de $\Omega = 2\omega$. Para pocos bosones, la respuesta presenta dos regiones: una cerca del pico bosónico puro entre $\Omega/\omega = 2$ y $\Omega/\omega = \sqrt{5}$, y la otra a frecuencias menores. Como puede deducirse de la intensidad de las fluctuaciones de densidad, la primer rama corresponde a una excitación casi pura de los bosones. La zona a menores energías se origina en las partículas de ^{3}He y está altamente fragmentada. Para los dos N_F considerados, a medida que aumentamos el número de bosones, la dispersión de la energía se eleva. Esto podía preveerse de la forma del potencial efectivo que sienten los fermiones.

Dentro de la nube bosónica, los átomos de ^{3}He sienten un potencial efectivo parabólico y repulsivo con una frecuencia $\omega_{ef} \approx -\omega/6$ (Capuzzi y Hernández, 2002b). En este límite, el potencial es más plano en el centro de la trampa y por lo tanto las autoenergías están más cerca entre sí que en una trampa armónica pura. Si bien ω_{ef} no es cero (cf. Ec. (6.14)), en esta situación se puede relacionar este sistema con un gas fermiónico homogéneo dentro de una caja, y un sistema uniforme se describe mejor a través de ondas planas y no con armónicos esféricos. De hecho, cuando el potencial externo excita un valor de L definido, el sistema genera muchas ondas planas con distintos momentos y por lo tanto muchas frecuencias distintas; esto es lo que da lugar a un espectro con alta fragmentación. Para completar esta interpretación, en la Tabla 6.1 hemos detallado el valor medio de la energía de excitación HF y su desviación estándar para todas las configuraciones estudiadas.

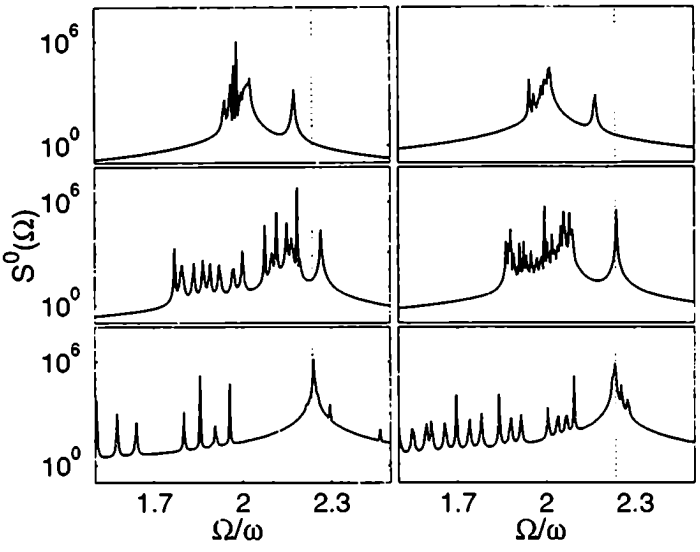


FIGURA 6.7: Factor de estructura dinámico con $L = 0$ (en escala logarítmica y unidades arbitrarias). Cada recuadro muestra una configuración de partículas diferente; mientras que la columna izquierda (derecha) corresponde a $N_F = 2 \times 969\,(2 \times 2907)$, las filas, de arriba hacia abajo, corresponden a $N_B = 10^3, 10^4$ y 10^5. Las líneas verticales punteadas marcan la frecuencia de Stringari $\Omega = \sqrt{5}\omega$.

TABLA 6.1: Valor medio (E) y desviación estándar (σ) de las excitaciones HF más bajas que conservan el momento angular, i.e., para fluctuaciones con $L = 0$.

	$N_F = 2 \times 969$				$N_F = 2 \times 2907$			
N_B	10^3	10^4	10^5	10^6	10^3	10^4	10^5	10^6
$E/\hbar\omega$	1.999	2.025	2.277	2.952	1.999	2.025	2.278	2.952
$\sigma/\hbar\omega$	0.02	0.21	1.10	1.74	0.02	0.23	1.10	1.74

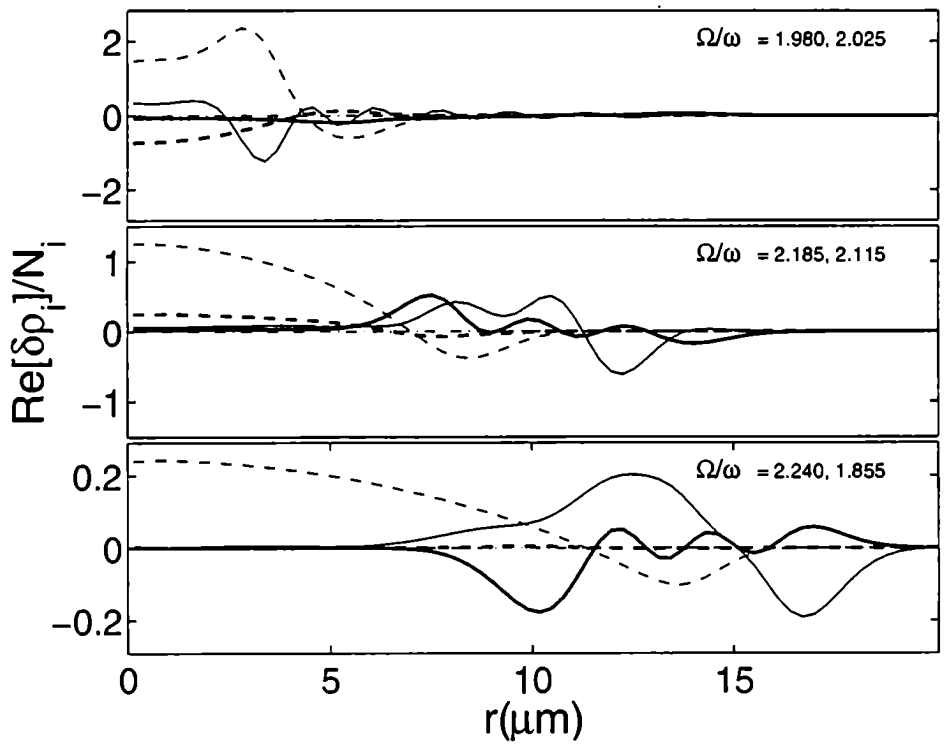


FIGURA 6.8: Fluctuaciones de densidad monopolares en mezclas de He. Los gráficos superiores, medio e inferiores corresponden a $N_B = 10^3, 10^4$ y 10^5, y $N_F = 2 \times 969$. Cada recuadro contiene cuatro curvas, las líneas sólidas marcan las fluctuaciones fermiónicas mientras que las rayadas representan las bosónicas. Las líneas finas y gruesas corresponden a las frecuencias indicadas en cada recuadro, respectivamente.

Junto con el espectro de excitaciones uno consigue la forma de las fluctuaciones de densidad producidas por la prueba. En la Fig. 6.8 observamos que para $N_B = 10^3$ las transiciones yacen completamente dentro del condensado, sin embargo, a medida que la repulsión total entre isótopos se incrementa, debido al aumento de partículas de ^{4}He para un dado N_F, el sistema comienza a separarse y las excitaciones adquieren signos opuestos alrededor del borde del condensado. Esto puede verse claramente en los gráficos medios e inferiores de la Fig. 6.8. El caso con $N_B = 10^5$ es particularmente interesante, por un lado, en estas condiciones las partículas de ^{3}He comienzan a segregarse (ver Fig. 6.6) y los estados excitados más probables ocurren a la frecuencia bosónica $\Omega = \sqrt{5}\,\omega$; pero además se encuentra una fluctuación fermiónica importante. De hecho, tanto las amplitudes bosónicas como las fermiónicas son similares en módulo pero tienen signos contrarios, productos de la separación de fases.

Si el número de átomos de ^{4}He sigue aumentando, la separación en fases se completa y por lo tanto la imagen de gas uniforme falla. Esto cambia radicalmente la forma del espectro. Para ser más precisos, esto sucede cuando el número de niveles fermiónicos con energías por

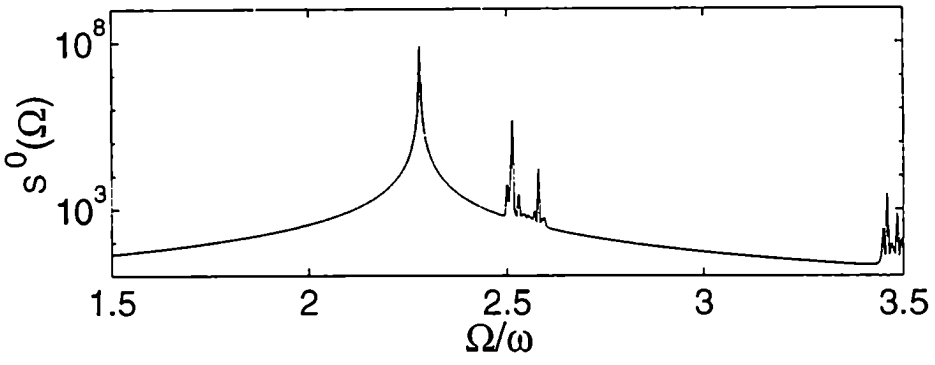


FIGURA 6.9: Respuesta monopolar (en escala logarítmica y unidades arbitrarias) para $N_B = 10^6$ y $N_F = 2 \times 969$.

debajo de $g_{FB}\,\rho_B(0)$ es $N_F/2$. Bajo estas circunstancias la respuesta multipolar se modifica, desaparecen los polos con alta fragmentación (ver Fig. 6.7) y aparece una región más angosta alrededor de $\Omega = 2.5\omega$ (ver Fig. 6.9). La respuesta para multipolaridades mayores puede analizarse de manera similar y se encuentran efectos análogos.

6.3 Excitaciones hidrodinámicas

Cuando el número de partículas atrapadas aumenta, las colisiones entre cuasipartículas se hacen más frecuentes y es posible que se establezca un equilibrio local o hidrodinámico en el gas, incluso a bajas temperaturas. Este régimen colisional también posee excitaciones colectivas, pero tanto el espectro como la forma de estas fluctuaciones son diferentes a las estudiadas anteriormente.

Las excitaciones colectivas de un sistema *fermiónico* polarizado con dos componentes y dentro de un régimen colisional fueron estudiadas recientemente por Amoruso *et al.* (Amoruso et al., 1999, 2000). Ellos encontraron un sistema de ecuaciones linealizadas para las fluctuaciones de densidad alrededor del equilibrio. Considerando igual número de partículas en cada componente, las ecuaciones para los modos de oscilación se reducen a una ecuación de autovalores para la fluctuación total

$$-\Omega_F^2\,\delta\rho_F = \frac{2}{3}\frac{A}{M}\nabla^2\left[(\rho_F/2)^{2/3}\,\delta\rho_F\right] + \frac{\nabla}{M}\cdot\left[\delta\rho_F\,\nabla(V_0 + g_f\,\rho_F/2) + g_f\,\rho_F/2\,\nabla\delta\rho_F\right], \quad (6.17)$$

donde la densidad en equilibrio satisface (cf. Ec. (5.3)) (Mølmer, 1998a)

$$\varepsilon_F = A\,(\rho_F/2)^{2/3} + V_0 + g_f\,\rho_F/2. \quad (6.18)$$

siendo $\rho_F = \rho_\sigma + \rho_{\sigma'}$ la densidad total de fermiones en la trampa y ε_F es la energía de Fermi, con $A = \hbar^2(6\pi^2)^{2/3}/2M$.

En esta sección aplicaremos el mismo formalismo al sistema de mezclas de fermiones y bosones descripto por los hamiltonianos (6.2). En este modelo (Capuzzi y Hernández, 2002a), las densidades de equilibrio están definidas por las ecuaciones algebraicas acopladas

$$\mu = V_0 + g_B\,\rho_B + g_{FB}\,\rho_F, \tag{6.19a}$$

$$\varepsilon_F = A\,(\rho_F/2)^{2/3} + V_0 + g_f\,\rho_F/2 + g_{FB}\,\rho_B. \tag{6.19b}$$

Las ecuaciones (6.19) son simplemente las generalizaciones de la aproximación Thomas-Fermi para los bosones (Sec. 3.2.1) y la aproximación de equilibrio local para los fermiones (e.g. Ec. (5.3)), incorporando interacción entre ambos. De manera similar a las propiedades de equilibrio se pueden deducir ecuaciones para las excitaciones (Ver Apéndice C); estas son

$$-\Omega^2\,\delta\rho_B = \frac{g_B}{M}\,\nabla\cdot\Big[\rho_B\,\nabla\delta\rho_B\Big] + \frac{g_{FB}}{M}\,\nabla\cdot\Big[\rho_B\,\nabla\delta\rho_F\Big], \tag{6.20a}$$

$$\begin{aligned}-\Omega^2\,\delta\rho_F = {} & \frac{2}{3}\,\frac{A}{M}\,\nabla^2\Big[(\rho_F/2)^{2/3}\,\delta\rho_F\Big] + \frac{\nabla}{M}\cdot\Big\{-\delta\rho_F\,A\,\nabla\Big[(\rho_F/2)^{2/3}\Big] \\ & +\rho_F\,\nabla\Big[g_f\,\delta\rho_F/2 + g_{FB}\,\delta\rho_B\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{6.20b}$$

Debido a la simetría esférica del problema, las fluctuaciones pueden caracterizarse de acuerdo con su momento angular L, y por lo tanto las soluciones pueden separarse en $\delta\rho_i(\mathrm{r}) = r^L\,f_i(r^2)\,Y_{LM}(\hat{r})$. Además, puesto que variamos independientemente el número de partículas en cada componente, las densidades en equilibrio son suficientemente complejas como para impedir cualquier tratamiento analítico. En particular, los bordes de los perfiles bosónicos y fermiónicos *no* coinciden lo que nos llevó a resolver el problema numéricamente. Para ambas $f_i(r)$ y cada L, discretizamos las ecuaciones en una grilla uniforme en la variable $u = r^2$, y calculamos el espectro de la matriz definida por las Ecs. (6.20).

6.3.1 Resultados *colisionales*

Consideremos primero un sistema de átomos de potasio con el mismo número de bosones y fermiones de cada especie y analicemos la influencia de los distintos parámetros del problema en el espectro completo. En la Fig. 6.10 se muestran las fluctuaciones de densidad, para $N_f = N_B \equiv N = 10^7$ y 10^8 y $L = 0$. La excitación en $\Omega = \sqrt{5}\omega$ corresponde a un nivel puro de bosones con $n = 1$. En general, en la mezcla simétrica y debido a la exclusión de Pauli, la nube fermiónica está más extendida que la bosónica. Esto produce que la densidad fermiónica sea menor en la región de interacción, y consecuentemente cause un corrimiento mínimo en las frecuencias de excitación a las resonancias bosónicas. Cerca de las autoenergías fermiónicas, la nube bosónica impone una pared a los modos más bajos, causando cambios

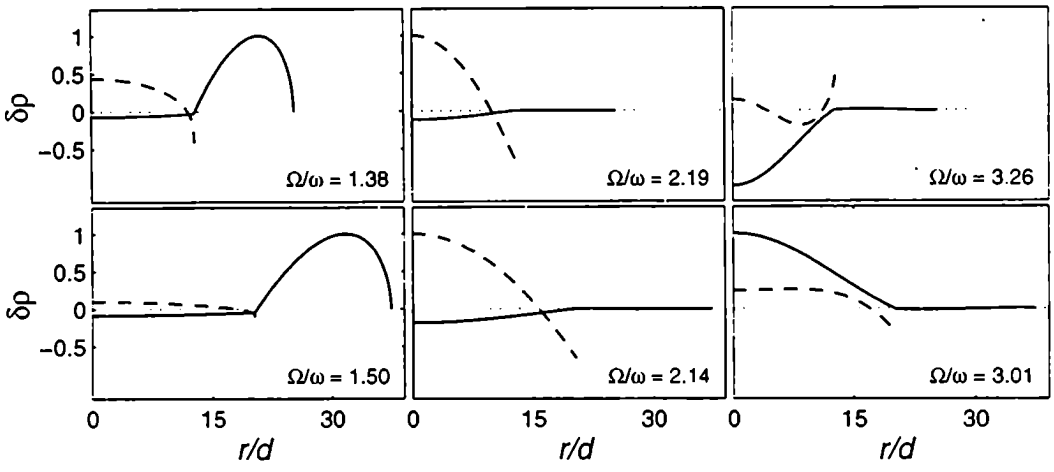


FIGURA 6.10: Fluctuaciones de densidad monopolares para los tres modos inferiores. La fila superior (inferior) corresponde a $N = 10^7(10^8)$. Las líneas llenas y rayadas representan a los fermiones y a los bosones respectivamente. Todas las distancias están en unidades del oscilador armónico $d = \sqrt{\hbar/M\omega} \approx 1.9\,\mu$m.

TABLA 6.2: Frecuencias más bajas para los modos hidrodinámicos de mezclas con $L = 0$.

N_F	Ω/ω								
	$N_B = 1 \times 10^4$			$N_B = 2 \times 10^4$			$N_B = 4 \times 10^4$		
2×10^4	1.034	2.225	2.891	1.187	2.220	3.116	1.462	2.224	2.911
6×10^4	0.956	2.222	2.775	1.002	2.236	2.845	1.544	2.218	3.621
1×10^5	0.948	2.232	2.762	1.035	2.225	2.884	1.165	2.221	3.076

importantes en el espectro. Este efecto ya lo habíamos encontrado cuando analizamos los modos no colisionales dentro del formalismo ApFA.

Las fluctuaciones graficadas en la Fig. 6.10 presentan tres comportamientos distintos. Para las frecuencias más bajas, las fluctuaciones bosónicas y fermiónicas presentan un solapamiento despreciable, el cual disminuye aún más cuando el número de partículas se incrementa. Como consecuencia, se suprime energía de interacción del modo colectivo. Por el contrario, en los modos segundo y tercero existe un solapamiento visible dentro de la densidad bosónica y parece aumentar con el tamaño del sistema. En particular, debido a que las oscilaciones fermiónicas y bosónicas tienen signos diferentes en el segundo modo, la frecuencia del modo resulta menor. Para energías mayores, no incluidas en esta figura, la estructura es suficientemente complicada como para impedir cualquier análisis cualitativo.

En la Tabla 6.2 resumimos los tres niveles más bajos para $L = 0$ y $N_B = 2, 4, 8 \times 10^4$ y varias concentraciones fermiónicas. Mientras que en la Fig. 6.11 mostramos las funciones

radiales correspondientes a fluctuaciones dipolares con $N = 10^7$.

En la Fig. 6.12 comparamos el factor de estructura dinámico en el caso monopolar con el calculado dentro del formalismo ApFA para $N_f = 9880$. Los máximos bosónicos puros están presentes en ambos regímenes, pero los fermiónicos se encuentran a energías diferentes. Las fluctuaciones de densidad de bosones a $\Omega = \sqrt{5}\omega$ concuerdan muy bien en ambos cálculos, y de hecho, es sabido que el límite de muchas partículas de la ApFA para *bosones* da como resultado el limite hidrodinámico de TF. La situación fermiónica es diferente, puesto que el régimen colisional corresponde a una aproximación de densidad local para el tensor de esfuerzos (Amoruso et al., 1999, 2000), el cual refleja el equilibrio local alcanzado.

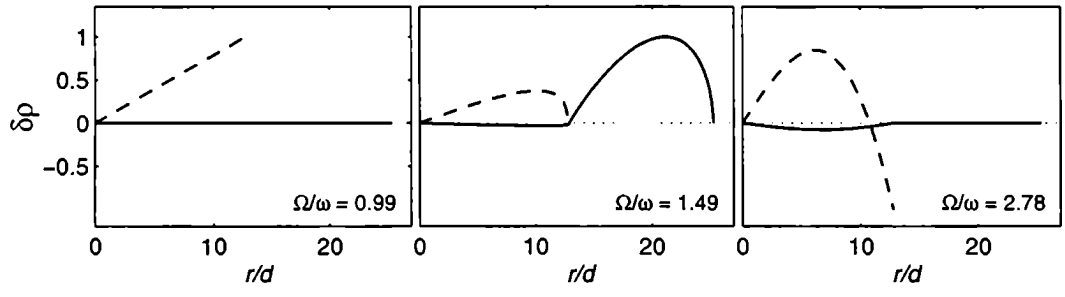


FIGURA 6.11: Densidades de excitación dipolares para $N = 10^7$ de manera análoga a la Fig. 6.10

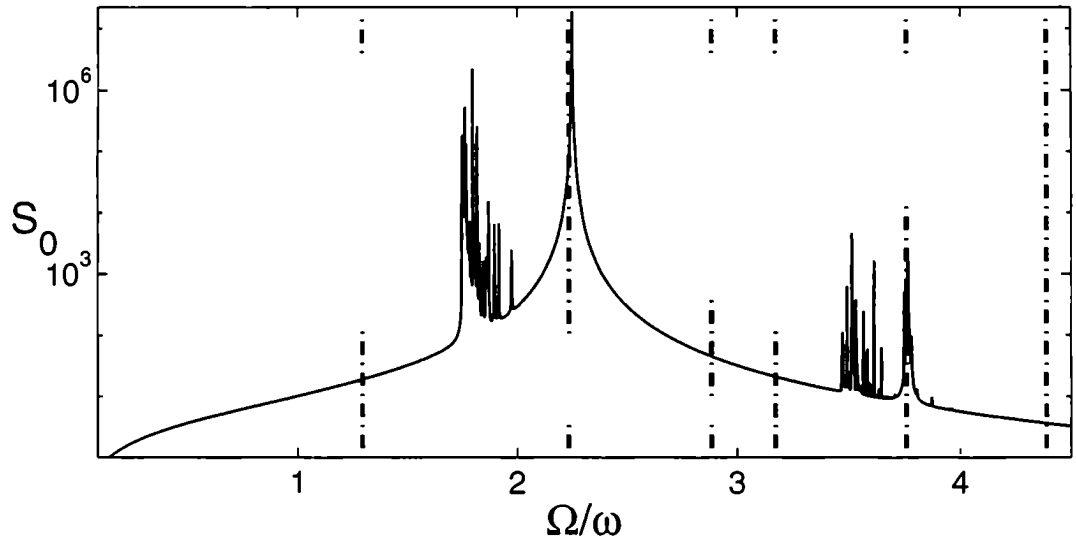


FIGURA 6.12: Factor de estructura dinámico (en escala logarítmica y unidades arbitrarias) con $L = 0$ en las aproximaciones no colisional (curva sólida) e hidrodinámica (líneas verticales) para $N_F = 2{\times}9880$ y $N_B = 10^6$.

6.4 Temperatura finita

El sistema de estudio posee distintas componentes que no pueden convertirse entre si, por esto, podemos asignar dos escalas de temperatura, en principio diferentes, a partir de las cuales cada componente entra en su zona de degeneración cuántica. Si suponemos que las interacciones no afectan demasiado a las temperaturas críticas, estas son

$$T_{\mathrm{BEC}} = \frac{\hbar\omega_B}{k_B}\left(\frac{N_B}{1.20}\right)^{1/3} \qquad \text{(cf. Ec. (2.17))} \tag{6.21a}$$

$$T_{F,\sigma} = \frac{\hbar\omega_\sigma}{k_B}\left(3N_F\right)^{1/3}. \tag{6.21b}$$

Para un mismo potencial externo y masas, pero eligiendo apropiadamente los números de partículas de cada especie, podemos conseguir distintos regímenes. Cada una de estas escalas marca la aparición de fenómenos distintos. T_{BEC} establece la temperatura a la cual el condensado de Bose aparece y las excitaciones térmicas de los bosones comienzan a desaparecer. Por otro lado, a partir de $T_{F,\sigma}$ la nube fermiónica comienza a enfriarse y las colisiones se hacen más infrecuentes.

Debido a la dependencia de las fórmulas (6.21) con los números de partículas, es posible establecer un régimen de T finita pero en el cual las excitaciones térmicas del condensado puedan despreciarse. Esto sucede si $T_{F,\sigma} \ll T_{\mathrm{BEC}}$, i.e.

$$1.53\left(\frac{N_F}{N_B}\right)^{1/3} \ll 1. \tag{6.22}$$

Este régimen es el más fácil de alcanzar teórica y experimentalmente. En nuestra formulación ApFA, simplemente incluimos los números de ocupación de Fermi en los propagadores fermiónicos. A continuación presentamos resultados para $N_f = 969$ y $N_B = 10^6$, $\omega = \omega_B = \omega_\sigma$ y tres valores de temperatura: $k_BT/\hbar\omega = 1, 7, 14$; elegimos estos números de partículas y temperaturas para garantizar la validez de la Ec. (6.22). En particular, para esta cantidad de partículas $k_BT_{\mathrm{BEC}}/\hbar\omega \approx 94$ y $k_BT_F/\hbar\omega \approx 18$, por lo cual con las temperaturas consideradas barremos un rango de baja temperatura que se aproxima a la temperatura de degeneración para los fermiones. En la Fig. 6.13 vemos los perfiles de densidad, mientras que en la Fig. 6.14 vemos el espectro monopolar correspondiente. Los efectos son similares a los encontrados en el sistema de mezclas de fermiones, i.e, la disminución (derretimiento) de las densidades, y el ensanche y corrimiento de la respuesta al aumentar T.

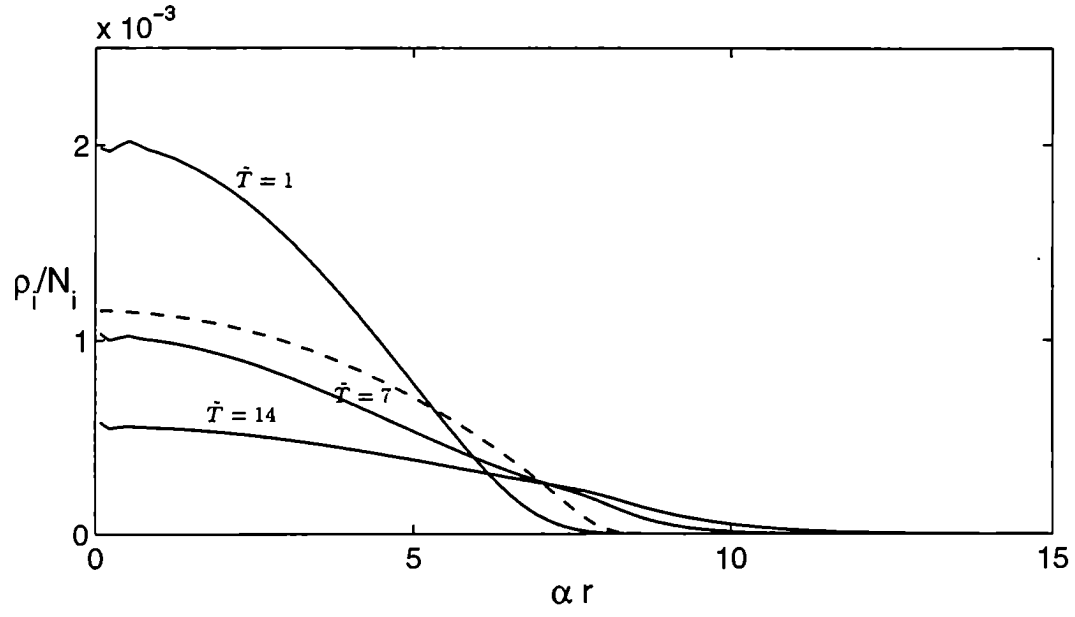


FIGURA 6.13: Perfiles de densidad a temperatura finita para $N_B = 10^6$ y $N_f = 969$. Las líneas continuas indican los perfiles fermiónicos a cada temperatura ($\tilde{T} \equiv T/\hbar\omega$), mientras que la rayada marca el perfil bosónico para las tres temperaturas consideradas.

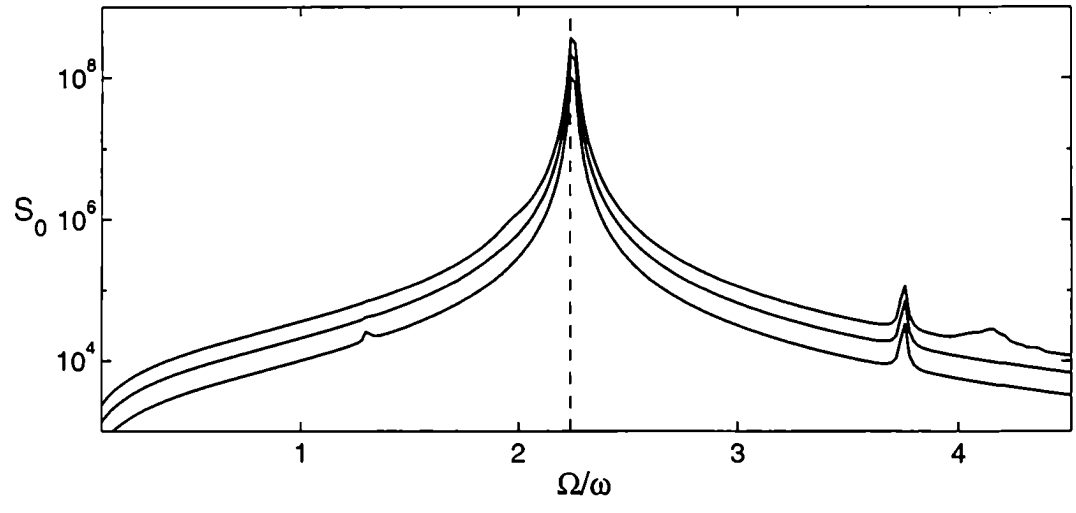


FIGURA 6.14: Espectro monopolar a T finita. Las tres curvas corresponden a los mismos parámetros considerados en la Fig. 6.13.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis hemos estudiado una variedad de aspectos de los gases cuánticos confinados. Motivados por la diversidad de experimentos de los últimos años estudiamos varios sistemas de múltiples componentes a partir de sistemas modelos específicos. El énfasis principal se puso en las propiedades a temperatura cero, donde los átomos revelan su identidad cuántica y su estadística particular se hace más relevante.

En particular, hemos comenzado el estudio por los gases bosónicos atrapados en un potencial doble (Capítulo 2). Calculando las sumas exactas, investigamos la termodinámica de los bosones confinados. Así pudimos obtener el potencial químico y la energía total, a partir de la cual dedujimos el calor específico. De esta manera describimos las características más importantes de la transición y las comparamos con resultados semiclásicos. Encontramos que esta aproximación es capaz de localizar la transición, i.e. el pico en el calor específico, con mayor precisión a medida que se incrementa el número de partículas. Además, se puso de manifiesto que el efecto de dividir la población es disminuir la temperatura de transición hasta alcanzar el valor correspondiente a $N/2$ partículas. También, analizamos distintas formas del potencial y encontramos el mismo tipo de comportamiento general. Al incorporar las interacciones en una aproximación semiclásica encontramos que tanto la posición de los niveles como su distancia cambia notablemente a medida que los pozos se separan. En resumen, en el primer capítulo, mostramos que la mecánica estadística de este sistema biestable puede examinarse con las mismas herramientas que un sistema más tradicional, pero con un parámetro adicional, la separación entre las barreras.

Una vez que encontramos el equilibrio en el sistema de pozo doble ideal, nos dedicamos al efecto de las interacciones (Capítulo 3). Así estudiamos las oscilaciones de pequeña amplitud, en primera instancia para números de partículas grandes. Analizamos en detalle el caso en una dimensión, pues por un lado contiene los ingredientes principales del pozo doble, y por el

otro, muchos de los experimentos se realizan en trampas muy elongadas en donde pensar en una dimensión es una buena aproximación. Entendimos cómo es la evolución de los niveles de energía de las fluctuaciones a medida que se eleva la barrera y dimos una interpretación clásica, teniendo en cuenta de qué manera la barrera altera el período de oscilación de una fluctuación. Mostramos que la aparición de esta degeneración en el espectro doble tiene consecuencias sobre la forma de las fluctuaciones, especialmente alrededor de su frontera. Merced al cálculo exacto de la GPE pudimos comprobar las limitaciones de TF cuando el potencial químico alcanza la barrera. Usando las formulaciones HFB-Popov y CETC a temperatura finita encontramos el comportamiento de la temperatura crítica al considerar las interacciones, obteniendo una disminución de la primera con la interacción.

A continuación encaramos el análisis del equilibrio de una gota de ^{3}He dentro de un condensado álcali. Examinamos las modificaciones energéticas y estructurales del condensado en presencia de una gota estática y analizamos la dinámica de la impureza sujeta a la fuerza promedio ejercida por el condensado. Debido a las distintas escalas consideradas, i.e. el tamaño de la impureza y del condensado, los efectos del agente dopante sobre la nube bosónica son esencialmente despreciables. Esto indica que el estado fundamental y las excitaciones de menor energía de estos condensados son robustos ante estas perturbaciones. Cabe recordar que los resultados en este tema son algo dependientes de la forma específica de la interacción gota-condensado (ver Capítulo 4).

La introducción de los fermiones en trampas magnéticas, motivada por el experimento de DeMarco y Jin (1999), cambió el enfoque de nuestro análisis hasta ese momento, pues los fermiones cumplen la estadística de Fermi-Dirac, y por lo tanto desaparece la imagen del condensado. Sin embargo, el análisis del sistema en equilibrio y en particular de las excitaciones colectivas se hizo más rico al utilizarse dos componentes para alcanzar la degeneración del sistema. Así mostramos que la interacción entre especies da lugar a un espectro de sonido cero fragmentado y analizamos tanto condiciones con igual trampa y número de átomos, como el caso más realista utilizando datos experimentales. Las diferencias mayores surgieron en el espectro, mientras que en el caso MP los polos asociados a las fluctuaciones de densidad y de spin eran distinguibles claramente, en el caso general ambas fluctuaciones no son fácilmente separables ya que la respuesta en spin y en densidad comparten el mismo espectro pero con amplitudes diferentes. Afortunadamente, encontramos que existe una excitación a la frecuencia pura de la trampa y corresponde a una oscilación rígida del sistema, sin embargo esta propiedad se pierde en el caso realista. El efecto de la temperatura de transición pudo incorporarse directamente en los números de ocupación de Fermi y una estimación del tiempo entre colisiones mostró que la aproximación de fases al azar es suficiente para describir los estados colectivos incluso a temperaturas cercanas a la temperatura de degeneración y sistemas de

tamaño moderado.

El último capítulo lo dedicamos a las mezclas entre bosones y fermiones. Se utilizaron muchos de los conceptos de los capítulos anteriores. Se generalizó la formulación no colisional para fermiones y se analizaron las excitaciones de densidad total para cada componente. En la mayoría de los casos la fragmentación fermiónica fue enmascarada por las fluctuaciones de los bosones. También vimos, comparando los resultados para el potasio y para el helio, como la distribución de excitaciones multipolares depende fuertemente de las intensidades de interacción entre especies. Finalmente, cuando elevamos la temperatura supusimos que los bosones permanecían completamente condensados y observamos la misma dependencia con la temperatura que en el caso fermiónico puro.

En general, hemos mostrado que la degeneración cuántica tiene efectos interesantes tanto en los fermiones como en los bosones; estos efectos pueden analizarse tanto a partir de las propiedades termodinámicas como de las excitaciones del sistema. Además, estos sistemas degenerados y *confinados* poseen una riqueza adicional, puesto que su espectro de excitación es discreto y sus estados están fuertemente localizados. Sin embargo, todas estas consideraciones teóricas no serían de tanto valor si no existiese posibilidad de comprobación experimental alguna. En ese sentido, varios grupos experimentales alrededor del mundo están en condiciones técnicas de medir lo aquí expuesto, por lo que creemos que es sólo una cuestión de tiempo que lo hagan. Por otro lado, a medida que se consideren sistemas más grandes las correlaciones dejadas fuera del cálculo de campo medio serán importantes, por lo cual algunas de las formulaciones tendrán que ser revisadas y mejoradas.

Finalmente, creemos importante destacar que el campo de aplicación de los sistemas degenerados todavía está en expansión, no apuntando específicamente a describir las propiedades intrínsecas más conocidas de cada sistema particular, sino procurando generar una herramienta para sostener otros tipos de experiencias en física cuántica básica.

Apéndice A

Soluciones del pozo doble

A.1 La ecuación de Schrödinger

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula de masa m en el potencial de pozo doble (2.18) es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dz^2} + \frac{1}{2}m\omega_z^2\left(|z| - d\right)^2\,\phi = \varepsilon\,\phi \tag{A.1}$$

La solución rigurosa de (A.1) se puede conseguir haciendo un cambio de variable según sea $z > 0$, o $z < 0$. Para $z > 0$, podemos definir

$$x = \left(\frac{2m\omega_z}{\hbar}\right)^{1/2}(z - d) \qquad (z > 0) \tag{A.2}$$

y $\varepsilon = \hbar\omega_z(\nu + 1/2)$. Con este cambio, obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right)\phi = 0 \tag{A.3}$$

Para z negativos se obtiene la misma ecuación pero con la sustitución

$$x' = \left(\frac{2m\omega_z}{\hbar}\right)^{1/2}(z + d) \qquad (z < 0) \tag{A.4}$$

La solución de (A.3), que se anula para valores grandes de $x(z)$, puede encontrarse por medio de métodos de series de potencias usuales (Pastor et al., 1959) y es conocida como función cilíndrica parabólica, $D_\nu(x)$. La misma está definida por

$$D_\nu(x) = 2^{\nu/2}\,e^{-x^2/4}\left[\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma[(1-\nu)/2]}\,{}_1F_1\left(\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{x^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2}}\,\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu/2)}\,{}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{x^2}{2}\right)\right], \tag{A.5}$$

donde Γ es la función Gamma y ${}_1F_1$ es la función hipergeométrica (Abramowitz y Stegun, 1964), cuyo desarrollo en serie

$$ {}_1F_1(a;c;x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{A.6} $$

Puesto que el potencial es simétrico, las autofunciones pueden elegirse con paridad definida, o sea par o impar. Si la función es par, la derivada en el origen debe anularse. Por otro lado, si el autoestado es impar es la función de onda quien debe anularse en el origen. Estas condiciones nos conducen a ecuaciones trascendentes que definen ν,

$$ D'_\nu\left(-\sqrt{\frac{2m\omega_z}{\hbar}}\,d\right) = 0 \tag{A.7} $$

para ϕ par, y

$$ D_\nu\left(-\sqrt{\frac{2m\omega_z}{\hbar}}\,d\right) = 0 \tag{A.8} $$

para ϕ impar.

Si bien no existen soluciones *analíticas* para el espectro, sí podemos encontrar expresiones aproximadas en los límites $z_0 \ll 1$ y $z_0 \gg 1$, las cuales nos permitirán estimar gran cantidad de niveles superiores y de esta manera calcular las magnitudes termodinámicas de manera más precisa.

Si $z_0 \gg 1$

$$ \epsilon_n = \begin{cases} \hbar\omega_z\left(\frac{1}{2}+2k\right) - \hbar\omega_z \dfrac{z_0^{1+4k}\,e^{-z_0^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(2k)!} & \text{si } n \text{ es par, } n = 2k, \\ \hbar\omega_z\left(\frac{1}{2}+2k\right) + \hbar\omega_z \dfrac{z_0^{1+4k}\,e^{-z_0^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,(2k)!} & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2k+1, \end{cases} \tag{A.9} $$

mientras que para $z_0 \ll 1$ y a primer orden en z_0,

$$ \epsilon_n = \begin{cases} \hbar\omega_z\left(\frac{1}{2}+2k\right) - \hbar\omega_z \dfrac{(1+4k)\,\Gamma(1/2+k)}{\sqrt{2}\,\pi\,k!}\,z_0 & \text{si } n \text{ es par, } n = 2k, \\ \hbar\omega_z\left(\frac{3}{2}+2k\right) - \hbar\omega_z \dfrac{4\,\Gamma(3/2+k)}{\sqrt{2}\,\pi\,k!}\,z_0 & \text{si } n \text{ es impar, } n = 2k+1 \end{cases} \tag{A.10} $$

A.2 Termodinámica semiclásica

En esta sección compilamos los resultados semiclásicos para los números de ocupación y la energía interna de un sistema de bosones en una, dos y tres dimensiones sometidos a la acción

de un potencial de pozo doble en la dirección z y un potencial armónico simple en las otras direcciones, todos con la misma frecuencia ω.

De acuerdo a la Ec. (2.32), el número total de partículas está distribuido entre los niveles de energía, dependiendo de la dimensión, de acuerdo con con

1D

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{\beta\hbar\omega}\ln\frac{1-z_m}{(1-z_1)^2} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\hbar\omega}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} d\varepsilon \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right) n(\varepsilon) \quad \text{(A.11)}$$

con $z = \exp\{\beta(\mu - \varepsilon_0)\}$, $z_1 = \exp\{\beta(\mu - \varepsilon_1)\}$, $z_m = \exp\{\beta(\mu - \varepsilon_m)\}$, donde $\varepsilon_m = \max\{\varepsilon_1, V_B\}$.

2D

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^2}[2\,g_2(z_1) - g_2(z_m)] + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta(\hbar\omega)^2}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} d\varepsilon \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right) \ln[1 - e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}], \quad \text{(A.12)}$$

donde $g_n(z)$ son las funciones de Bose usuales.

3D

$$N = \frac{z}{1-z} + \frac{z_1}{1-z_1} + \frac{1}{(\beta\hbar\omega)^3}\{2\,g_3(z_1) - g_3(z_m) + \beta\hbar\omega[2\,g_2(z_1) - g_2(z_m)]\} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta^2(\hbar\omega)^3}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} d\varepsilon \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right)[g_2(z_\varepsilon) - \beta\hbar\omega\, g_1(z_\varepsilon)] \quad \text{(A.13)}$$

De manera análoga, las expresiones para la energía interna en la aproximación semiclásica se pueden escribir

1D

$$U(T) = \frac{\varepsilon_0 z}{1-z} + \frac{\varepsilon_1 z_1}{1-z_1} + \frac{1}{\hbar\omega\beta}\left(\varepsilon_1 g_1(z_1) + \frac{1}{\beta}g_2(z_1)\right) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\hbar\omega}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} d\varepsilon\,\varepsilon \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right) n(\varepsilon) + \left(\frac{1}{\hbar\omega\beta}\left\{\frac{1}{\beta}\big(g_2(z_1) - g_2(z_0)\big) + \varepsilon_1 g_1(z_1) - V_B\, g_1(z_0)\right\} \quad \text{si } \varepsilon_1 < V_B\right) \quad \text{(A.14)}$$

2D

$$U(T) = \frac{\varepsilon_0 z}{1-z} + \frac{\varepsilon_1 z_1}{1-z_1} + \frac{1}{(\hbar\omega\beta)^2}\left\{\varepsilon_1 g_2(z_1) + \frac{2}{\beta} g_3(z_1)\right\}$$
$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1}{(\hbar\omega\beta)^2}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right)\{\beta\varepsilon g_1(z_\varepsilon) + g_2(z_\varepsilon)\}$$
$$+ \left[\frac{1}{(\hbar\omega\beta)^2}\left\{\frac{2}{\beta}\big(g_3(z_1) - g_3(z_0)\big) + \varepsilon_1 g_2(z_1) - V_B g_2(z_0)\right\} \quad \text{si } \varepsilon_1 < V_B\right] \qquad (A.15)$$

3D

$$U(T) = \frac{\varepsilon_0 z}{1-z} + \frac{\varepsilon_1 z_1}{1-z_1} + \frac{1}{(\hbar\omega\beta)^3}\left\{\varepsilon_1 g_3(z_1) + \frac{3}{\beta} g_4(z_1) + \varepsilon_1(\hbar\omega\beta) g_2(z_1) + 2g_3(z_1)\right\}$$
$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta^3,(\hbar\omega)^4}\int_{\varepsilon_m}^{\infty} \arcsin\left(\sqrt{\frac{V_B}{\varepsilon}}\right)\Big(\varepsilon(\beta\hbar\omega) g_2(z_\varepsilon) + 2\hbar\omega g_3(z_\varepsilon)$$
$$+ \varepsilon(\beta\hbar\omega)^2 g_1(z_\varepsilon) + \beta(\hbar\omega)^2 g_2(z_\varepsilon)\Big)$$
$$+ \left[\frac{1}{(\hbar\omega\beta)^3}\left\{-V_B\big(g_3(z_0) + \beta\hbar\omega g_2(z_0)\big) + \frac{3}{\beta}\big(g_4(z_1) - g_4(z_0)\big) - 2\hbar\omega g_3(z_0)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \varepsilon_1 g_3(z_1) + 2\hbar\omega g_3(z_1)\right\} \quad \text{si } \varepsilon_1 < V_B\right] \qquad (A.16)$$

En los tres casos los términos encerrados entre $[\,]$ sólo deben sumarse si $\varepsilon_1 < V_B$. Cabe recordar que estas son las expresiones que han sido utilizadas para los cálculos termodinámicos aproximados que fueron comparados con los resultados cuánticos exactos del Capítulo 2.

Apéndice B

Propagadores libres

B.1 Fermiones

Para evaluar el propagador de ph libre, Ec. (5.16), usamos la base tridimensional de autofunciones del oscilador armónico isótropo para cada proyección de spin:

$$\phi^{\sigma}_{nlm}(\mathbf{r}) = A^{\sigma}_{nl}\,\exp(-\alpha^2_{\sigma}r^2/2)\,r^l\,L^{l+1/2}_n(\alpha^2_{\sigma}r^2)\,Y_{lm}(\hat{r}) \equiv R^{\sigma}_{nl}(r)Y_{lm}(\hat{r}), \tag{B.1}$$

donde $\alpha^2_{\sigma} = M\,\omega_{\sigma}/\hbar$, Y_{lm} son los armónicos esféricos, $L^{l+1/2}_n$ son funciones generalizadas de Laguerre (Gradstein y Rhyzhik, 1994), y A^{σ}_{nl} constantes de normalización. De acuerdo a la descomposición multipolar (5.18) y la definición (5.16), las componentes multipolares $G^{\sigma\sigma}_{0L}$ se escriben

$$G^{\sigma\sigma}_{0L}(r,r',\Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{\substack{nl\\n'l'}}(2l+1)(2l'+1)\,(R^{\sigma}_{nl}R^{\sigma}_{n'l'})(r')(R^{\sigma}_{nl}R^{\sigma}_{n'l'})(r')|\langle l\,0\,l'\,0|L\,0\rangle|^2\,\chi^{\sigma}_{n\,l\,n'\,l'}(\Omega). \tag{B.2}$$

donde $\langle l\,0\,l'\,0|L\,0\rangle$ es el coeficiente de Clebsh-Gordan (Sakurai, 1994) resultante de acoplar $l_1 = l$ con $m_1 = 0$ y $l_2 = l'$ con $m_2 = 0$.

Con el objeto de calcular las susceptibilidades elementales $\chi^{\sigma}_{n\,l\,n'\,l'}$ en la Ec. (B.2), usamos las energías de HF extraídas de la Ec. (5.5) en lugar de las del oscilador armónico puro. Usando las propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan y de las autofunciones de oscilador armónico $R^{\sigma}_{nl}(r)$ pudimos realizar más simplificaciones; en particular pudimos encontrar expresiones explícitas para las excitaciones monopolares, dipolares, y cuadrupolares ($L = 0, 1, 2$). Así encontramos que el propagador de monopolos vale

$$G^{\sigma\sigma}_{00}(r,r',\Omega) = \frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{\substack{nl\\n'}}(2l+1)\,R^{\sigma}_{nl}(r)\,R^{\sigma}_{n'l}(r)\,R^{\sigma}_{nl}(r')\,R^{\sigma}_{n'l}(r)\,\chi^{\sigma}_{n\,l\,n'\,l'}(\Omega). \tag{B.3}$$

Dando lugar a la susceptibilidad no interactuante

$$\chi^{\sigma\sigma}_{00} = \frac{1}{\alpha_\sigma^2}\sum_{nl}(2l+1)\left[\chi^{\sigma}_{nl\,n-1\,l}\,n(n+l+1/2) + \chi^{\sigma}_{nl\,n+1\,l}\,(n+1)(n+l+3/2)\right], \qquad \text{(B.4)}$$

la cual para muchas partículas, energías de oscilador armónico y temperatura cero, vale

$$S^{\sigma}_{00}(\Omega) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\chi^{\sigma\sigma}_{00}] \approx \frac{1}{\alpha_\sigma^2}\frac{3N_\sigma}{4}\,(6\,N_\sigma)^{1/3}\,\delta(\Omega - 2\,\omega_\sigma). \qquad \text{(B.5)}$$

De manera similar, el propagador dipolar se puede escribir

$$G^{\sigma\sigma}_{0l}(\Omega) = \frac{3}{(4\,\pi)^2}\sum_{\substack{nl\\n'}}\Big[(l+1)\,R^{\sigma}_{nl}(r)R^{\sigma}_{n'\,l+1}(r)R^{\sigma}_{nl}(r')R^{\sigma}_{n\,l+1}(r')\chi^{\sigma}_{nl\,n'\,l+1}(\Omega)$$

$$+\,l\,R^{\sigma}_{nl}(r)\,R^{\sigma}_{n\,l-1}(r)\,R^{\sigma}_{nl}(r')\,R^{\sigma}_{n\,l-1}(r')\,\chi^{\sigma}_{nl\,n'\,l-1}(\Omega)\Big] \qquad \text{(B.6)}$$

dando una respuesta independiente de la temperatura

$$\chi^{\sigma\sigma}_{01} = \frac{1}{\alpha_\sigma^2}\,\frac{3N_\sigma}{8\,\pi}\left(\frac{1}{\Omega - \omega_\sigma + i\,\eta} - \frac{1}{\Omega + \omega_\sigma + i\,\eta}\right) \qquad \text{(B.7)}$$

y un factor de estructura dinámico a $T = 0$,

$$S^{\sigma}_{01} = \frac{1}{\alpha_\sigma^2}\,\frac{3N_\sigma}{8\,\pi}\,\delta(\Omega - \omega_\sigma). \qquad \text{(B.8)}$$

Finalmente, cabe aclarar que en todos los cálculos numéricos presentados en los capítulos 5 y 6 se han utilizados las soluciones HF completas, i.e. tanto el espectro como las autofunciones, para construir los propagadores libres.

B.2 Bosones

El procedimiento para encontrar la ecuación ApFA para bosones a temperatura nula es muy similar al fermiónico. Realizamos el mismo tipo de descomposición de las funciones de partícula independiente de la ecuación de Gross-Pitaevskii

$$\phi_{nlm}(\mathbf{r}) \equiv R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\hat{r}). \qquad \text{(B.9)}$$

De acuerdo con la definición del propagador bosónico, Ec. (6.8a), la componente L-polar de G^B_0 es

$$G^B_{0\,L} = N_0\phi_0(r)\phi_0(r')\,\frac{1}{4\,\pi}{\sum_{n}}'R_{n\,L}(r)R_{n\,L}(r')\left\{\frac{1}{\omega - (\epsilon_{n\,L} - \mu)/\hbar + i\,\eta} - \frac{1}{\omega + (\epsilon_{n\,L} - \mu)/\hbar + i\,\eta}\right\} \qquad \text{(B.10)}$$

donde la suma primada indica que debe excluirse el modo del condensado, i.e. $n > 0$ para $L = 0$. Cabe aclarar que para obtener la Ec. (B.10) hemos supuesto que la función de onda del

condensado es *real*, es decir, $\phi_0^* = \phi_0$; esto excluye, e.g., la posibilidad de tratar condensados que posean vórtices.

A diferencia del resultado de los fermiones, la formulación a temperatura finita no se puede generalizar directamente. La aparición de la nube de partículas no condensada hace necesario distinguir al menos dos propagadores diferentes, uno para el condensado (utilizado por nosotros) y el otro para las excitaciones. Sin embargo, puesto que la temperatura de transición se incrementa con el número de partículas es posible imaginarse un régimen a temperatura no nula, pero suficientemente baja como para que las excitaciones no entren en juego. Este régimen es el que se discute en la sección 6.4.

B.3 La aproximación de fases al azar para mezclas

Supongamos que el sistema atrapado y compuesto por átomos de tres especies distinguibles se excita por la acción de un campo externo, de manera que se crean pares partícula-hueco ($\alpha\beta$) que incorporan, en principio, todas las componentes del sistema. Supongamos también que existe una interacción efectiva $V_{\rm ph}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, que permite la propagación de excitaciones elementales que llevan energía Ω a todos los órdenes en la interacción. Esta interacción da lugar al propagador vestido de pares ph

$$G^{\alpha\beta}(\Omega) = G_0^{\alpha\beta}(\Omega) + \sum_{\gamma\delta} G_0^{\alpha\beta}(\Omega) \cdot V_{\rm ph}^{\alpha\beta\gamma\eta} \cdot G^{\gamma\delta}(\Omega). \tag{B.11}$$

Si consideramos excitaciones longitudinales que incluyen la propagación de pares del *mismo* tipo de spin y la interacción que acopla pares ph de i) diferentes especies fermiónicas, expresado como $V_{\rm ph}^{\sigma\sigma'} \equiv V_{\rm ph}^{\sigma\sigma\sigma'\sigma'}$; ii) cada especie fermiónica y los bosones, $V_{\rm ph}^{\sigma B} \equiv V_{\rm ph}^{\sigma\sigma BB}$ y iii) bosones entre sí , $V_{\rm ph}^{BB}$. Como consecuencia de esto, los propagadores fermiónicos que intervienen en la propagación de fluctuaciones longitudinales son diagonales en el espacio de spin, i.e. $G_0^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G_0^{\alpha}$. Así, el sistema (B.11) consta de nueve ecuaciones acopladas. Después de convolucionar estos propagadores con el campo externo, se consigue otro sistema equivalente pero para las fluctuaciones de densidad inducida. Este sistema en representación matricial puede escribirse

$$\begin{aligned}
\delta\rho^{\sigma\sigma} &= \delta\rho_0^{\sigma\sigma} + G_0^{\sigma\sigma}\left(g_f\,\delta\rho^{\sigma'\sigma} + g_\sigma \delta\rho^{B\sigma}\right), & \delta\rho_{\sigma'\sigma} &= G_0^{\sigma'\sigma'}\left(g_f\,\delta\rho^{\sigma\sigma} + g_\sigma\,\delta\rho^{B\sigma}\right), \\
\delta\rho^{B\sigma} &= G_0^{BB}\left(g_\sigma\,\delta\rho^{\sigma\sigma} + g_{\sigma'}\,\delta\rho^{\sigma'\sigma} + g_B\,\delta\rho^{B\sigma}\right), & \delta\rho^{\sigma B} &= G_0^{\sigma\sigma}\left(g_f\,\delta\rho^{\sigma' B} + g_\sigma\,\delta\rho^{BB}\right).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

más cuatro ecuaciones correspondientes al intercambio de σ y σ'. A estas ecuaciones debemos

sumarle la ecuación ApFA para los bosones

$$\delta\rho^{BB} = \delta\rho_0^{BB} + G_0^{BB}\left(g_B\,\delta\rho^{BB} + g_\sigma\,\delta\rho^{\sigma B} + g_{\sigma'}\,\delta\rho^{\sigma' B}\right). \tag{B.13}$$

Las ecuaciones (B.12) y (B.13) integran el sistema completo para mezclas. A partir de éste podemos calcular todas las densidades de transición involucradas en excitaciones longitudinales, estas incluyen las excitaciones de spin y de densidad discutidas en el capítulo 5 cuando no hay bosones, y las fluctuaciones de densidad total analizadas en el capítulo 6. En el último caso, para recuperar las Ecs. (6.6) debemos tener en cuenta que las fluctuaciones totales valen

$$\delta\rho^j = \sum_i \delta\rho^{j\,i} \tag{B.14}$$

donde $i, j = \sigma, \sigma', B$

El teorema de Kohn (Kohn, 1961) establece que, independientemente de las interacciones, un sistema de muchas partículas sujetas a un potencial confinante armónico *posee* un estado excitado que corresponde a una oscilación de su centro de masa a la frecuencia natural del oscilador $\Omega = \omega$. Consecuentemente, el cumplimiento de este teorema es una característica deseada por cualquier formulación aproximada, como la Aproximación de Fases al Azar.

Las ecuaciones ApFA (B.12) y (B.13) pueden ubicarse en una matriz de 9×9

$$\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \delta\bar{\rho} = \delta\bar{\rho}_0, \tag{B.15}$$

con $\delta\bar{\rho} = (\delta\rho^{11}, \delta\rho^{21}, \delta\rho^{B1}, \delta\rho^{12}, \delta\rho^{22}, \delta\rho^{B2}, \cdots)^t$, y

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \mathbb{A} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{A} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{A} \end{pmatrix}, \tag{B.16}$$

donde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -g_f\,G_0^1 & -g_1\,G_0^1 \\ -g_f\,G_0^2 & 1 & -g_2\,G_0^2 \\ -g_1\,G_0^B & -g_2\,G_0^B & 1 - g_B\,G_0^B \end{pmatrix}. \tag{B.17}$$

Los estados colectivos del sistema se encuentran a las frecuencias Ω que dan una matriz $\bar{\bar{\varepsilon}}$ singular, lo cual a su vez implica una matriz $\mathbb{A}$ singular. Es más, si encontramos un autovector de $\mathbb{A}$ con autovalor cero, estamos probando que $\mathbb{A}$ es singular. De hecho, resolver este sistema es equivalente a resolver las Ecs. (6.6) con $\delta\rho_i^0$ igualada a cero. Con este fin, proponemos la solución

$$\delta\bar{\rho}(\omega) = \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho_2}{\partial x_j}, \frac{\partial\rho_B}{\partial x_j}\right)^t, \qquad \text{para la dirección } j, \tag{B.18}$$

y utilizando que G_0^2 está compuesta de las excitaciones de partícula independiente correspondientes a los hamiltonianos (6.2), encontramos

$$\int G_0^{\sigma}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\left[g_{\sigma}\frac{\partial\rho_B}{\partial x_j'}+g_f\frac{\partial\rho_{\sigma'}}{\partial x_j'}\right]d^3r' = \frac{\partial\rho_{\sigma}}{\partial x_j}(\mathbf{r}),$$
$$\int G_0^{B}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\omega)\left[g_B\frac{\partial\rho_B}{\partial x_j'}+\sum_{\sigma}g_{\sigma}\frac{\partial\rho_{\sigma}}{\partial x_j'}\right]d^3r' = \frac{\partial\rho_B}{\partial x_j}(\mathbf{r}). \qquad \text{(B.19)}$$

Este sistema corresponde a la solución buscada de $\mathbb{A}\cdot\delta\bar{\rho}=\mathbf{0}$. Así hemos probado que la aproximación ApFA cumple con el teorema de Kohn.

Apéndice C

Desarrollos hidrodinámicos

En este apéndice incluimos deducciones simplificadas de los desarrollos hidrodinámicos tanto para gases bosónicos y fermiónicos sólos como para mezclas. En el caso bosónico estos desarrollos dan lugar a la aproximación de TF dinámica discutida en el capítulo 3 (Ec. (3.20)), mientras que la aplicación en mezclas fue descripta en el Capítulo 6.

C.1 Bosones

Puesto que vamos a considerar la evolución de una fluctuación de densidad del sistema a temperatura cero, partiremos de la ecuación de Gross-Pitaevskii dependiente del tiempo expresada en términos del módulo y la fase de la función de onda del condensado, i.e. Ecs. (3.19). Descomponiendo la densidad $\rho_0(\mathbf{r},t) = \rho_0^0(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r},t)$, donde $\rho_0^0(\mathbf{r})$ es la solución de la GPE; e introduciéndola en la ecuación de continuidad (3.19a) obtenemos

$$\frac{\partial\,\delta\rho}{\partial\,t} + \nabla\cdot\left[\rho_0^0\nabla\mathbf{v}\right] = 0, \tag{C.1}$$

donde hemos mantenido todos los productos a primer orden en las fluctuaciones, y cabe aclarar que el orden cero de $\mathbf{v}$ es cero, por lo cual la expresión (C.1) es de primer orden. Luego, derivamos toda la igualdad respecto del tiempo y reemplazamos la ecuación de momentos (3.19b) a primer orden. Además, puesto que consideraremos el límite TF de muchas partículas, despreciamos el término de presión cuántica. Así conseguimos

$$\frac{\partial^2\,\delta\rho}{\partial\,t^2} - \frac{\nabla}{M}\cdot\left[\rho_0^0\,\nabla\delta\rho + \delta\rho\nabla(V_0 + g\rho_0^0)\right] = 0. \tag{C.2}$$

Finalmente usando que ρ_0^0 es la solución GPE *pero* en la aproximación de TF, obtenemos la ecuación de movimiento (3.20).

C.2 Fermiones

La evolución para las densidades de las distintas componentes, $\rho_\sigma(\mathbf{r},t)$, se obtiene por procedimientos estándares de ecuaciones de Boltzmann cuánticas (ver, por ejemplo, Minguzzi et al., 1997). Este método estudia las ecuaciones de movimiento para la matriz densidad $\rho_\sigma(\mathbf{x},\mathbf{x}',t) = \langle \hat{\phi}^\dagger_\sigma(\mathbf{x},t)\,\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{x}',t)\rangle$, donde $\hat{\phi}_\sigma$ son los operadores de campo fermiónicos y spin σ. Después de proyectar sobre la diagonal $\mathbf{r} = (\mathbf{x}+\mathbf{x}')/2$ y con $\mathbf{r}' = \mathbf{x}-\mathbf{x}'$, se obtiene para la densidad $\rho_\sigma(\mathbf{r},t)$ (Amoruso et al., 2000),

$$M\frac{\partial^2\rho_\sigma}{\partial t^2} = \sum_{ij}\frac{\partial^2\Pi^\sigma_{ij}}{\partial_i\partial_j} + \sum_i\frac{\partial}{\partial_i}\left[\rho_\sigma\frac{\partial V_{\rm ef}}{\partial_i}\right] + \sum_{\sigma'}\int d^3r'\sum_i\frac{\partial}{\partial_i}\left[\frac{\partial v_{\sigma\sigma'}}{\partial_i}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\langle\rho_\sigma(\mathbf{r},t)\,\rho_{\sigma'}(\mathbf{r}',t)\rangle_c\right], \tag{C.3}$$

donde hemos definido el tensor de esfuerzos para la especie σ

$$\Pi^\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar^2}{M}\frac{\partial^2\rho_\sigma}{\partial'_i\partial'_j}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'/2,\mathbf{r}+\mathbf{r}'/2;t)\big|_{\mathbf{r}'=0}, \tag{C.4}$$

y los potenciales efectivos de campo medio

$$V_{\rm ef}(\mathbf{r},t) = V_0(\mathbf{r}) + \sum_{\sigma'}\int d^3r'\,v(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\rho_{\sigma'}(\mathbf{r}',t). \tag{C.5}$$

Los efectos fuera de campo medio están incluidos en el último término del miembro derecho de la Ec. (C.3), con $\langle\rho_\sigma(\mathbf{r},t)\,\rho_{\sigma'}(\mathbf{r}',t)\rangle_c$ la parte de racimo de las correlaciones densidad-densidad (Minguzzi et al., 1997). Para encontrar una expresión cerrada para la evolución de ρ_σ despreciamos el término de racimo y utilizamos una aproximación de densidad local para el tensor de energía cinética (Amoruso et al., 1999), i.e

$$\Pi^\sigma_{ij}(\mathbf{r},t) \equiv \delta_{ij}\frac{2}{5}A\,\rho_\sigma^{5/3}(\mathbf{r},t). \tag{C.6}$$

donde $A = \hbar^2(6\pi^2)^{2/3}/2M$. Más precisamente, reemplazando (C.6) en la parte de campo medio de la Ec. (C.3) obtenemos

$$M\frac{\partial^2\rho_F}{\partial t^2} = \frac{4}{5}A\,\nabla^2\left[(\rho_F/2)^{5/3}\right] + \nabla\cdot\left[\rho_F\,\nabla(V_0 + g_f/2\,\rho_F)\right]. \tag{C.7}$$

donde ρ_F es la densidad total $\rho_F = \rho_\sigma + \rho_{\sigma'}$. Entonces, de manera análoga al caso bosónico, perturbamos la densidad alrededor del equilibrio, definida por la Ec. (6.18), y mantenemos las fluctuaciones hasta primer orden. Finalmente proponemos la separación $\delta\rho_F(\mathbf{r},t) = e^{-i\Omega_F t}\delta\rho_F(\mathbf{r})$ y llegamos a la ecuación de autovalores (6.17).

C.3 Mezclas

El análisis de las fluctuaciones de densidad en mezclas de fermiones y bosones en un régimen hidrodinámico se abordó a partir de los desarrollos de las componentes puras, simplemente

completando los potenciales de campo medio sentidos por cada componente merced a las otras. Así, para estudiar las fluctuaciones de los bosones, incluimos en la ecuación de momentos (3.19b) el término $\nabla(g_{FB}\rho_F)$, mientras que para los fermiones sumamos en la definición de V_{ef} (Ec. (C.5)) $g_{FB}\rho_B$. De aquí en más el procedimiento es estándar y da como resultado el sistema de ecuaciones (6.20) para los modos colectivos y las condiciones de equilibrio (6.19).

Bibliografía

M. Abramowitz y I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1964.

J. F. Allen y A. D. Misener. Flow of liquid helium II. *Nature*, 141, pág. 75, 1938.

M. Amoruso, J. Meccoli, A. Minguzzi, y M. P. Tosi. Collective excitations of a degenerate fermi vapour in a magnetic trap. *Eur. Phys. J. D*, 7, pág. 441, 1999.

M. Amoruso, J. Meccoli, A. Minguzzi, y M. P. Tosi. Density profiles and collective excitations of a trapped two-component fermi vapor. *Eur. Phys. J. D*, 8, pág. 361, 2000.

M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, y E. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269, pág. 198, 1995.

M. Andrews, C. Townsend, H.-J. Miesner, D. Durfee, D. Kurn, y W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275, pág. 637, 1997.

V. Bagnato, D. E. Pritchard, y D. Kleppner. Bose-Einstein condensation in an external potential. *Phys. Rev. A*, 35, pág. 4354, 1987.

M. Barranco, J. Navarro, y A. Poves. Structure and stability of ^{3}He droplets. *Phys. Rev. Lett.*, 78, pág. 4729, 1997.

G. Baym y C. Pethick. Ground-state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Phys. Rev. Lett.*, 76, pág. 6, 1996.

T. Bergeman. Hartree-Fock calculations of Bose-Einstein condensation of ^{7}Li atoms in a harmonic trap for $T > 0$. *Phys. Rev. A*, 55, pág. 3658, 1997.

G. F. Bertsch y S. F. Tsai. A study of the nuclear response function. *Phys. Rep.*, 18, pág. 125, 1975.

M. Bijlsma y H. T. C. Stoof. Variational approach to the dilute Bose gas. *Phys. Rev. A*, 55, pág. 498, 1997.

N. Bogoliubov. On the theory of superfluidity. *J. Phys.*, 11, pág. 23, 1947.

S. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, 26, pág. 178, 1924.

C. Bradley, C. Sackett, y R. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Phys. Rev. Lett.*, 78, pág. 985, 1997.

C. Bradley, C. Sackett, J. Tollett, y R. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 75, pág. 1687, 1995. *ibid.* **79**, 1170 (1997).

G. M. Bruun y C. W. Clark. Hydrodynamic excitations of trapped Fermi gases. *Phys. Rev. Lett.*, 83, pág. 5415, 1999.

M. M. Calbi y E. S. Hernández. Dynamical response of liquid ^{3}He films adsorbed on solid substrates. *J. Low Temp. Phys.*, 120, pág. 1, 2000.

P. Capuzzi y E. S. Hernández. Barrier effects on the collective excitations of split Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 59, 1999a.

P. Capuzzi y E. S. Hernández. Bose-Einstein condensation in harmonic double wells. *Phys. Rev. A*, 59, pág. 1488, 1999b.

P. Capuzzi y E. S. Hernández. Zero-sound density oscillations in fermi-bose mixtures. *Phys. Rev. A*, 64, pág. 043607, 2001.

P. Capuzzi y E. S. Hernández. First sound in mixtures of trapped bosons and fermions. *J. Low. Temp. Phys.*, 126, pág. 425, 2002a.

P. Capuzzi y E. S. Hernández. Phase separation and response of ^{3}He-^{4}He mixtures within a magnetic trap. *enviado a Phys. Rev. A*, 2002b.

P. Capuzzi, E. S. Hernández, y M. Barranco. ^{3}He impurity in a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*. 62, pág. 023603, 2000.

M. Casas y S. Stringari. Elementary excitations of ^{4}He clusters. *J. Low Temp. Phys.*, 79, pág. 135, 1990.

Y. Castin. Bose-Einstein condensates in atomic gases: simple theoretical results. En R. Kaiser, C. Westbrook, y F. David, editores, *Coherent Atomic Matter Waves*, págs. 1–136. EDP Sciences and Springer, 2001.

S. Chin y H. Forbert. Impurity dynamics in a Bose condensate. En D. Ernst, editor, *Condensed Matter Theories*, volumen 14. Nova Science, Huntington NY, 1999. También en cond-mat/9901028.

E. Cornell, J. Ensher, y C. Wieman. Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. En M. Inguscio, S. Stringari, y C. Wieman, editores, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, pág. 15, Amsterdam, 1999. IOS Press.

F. Dalfovo y S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Phys. Rev. A*, 53, pág. 2477, 1996.

K. Davis, M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, D. Durfee, D. Kurn, y W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75, pág. 3969, 1995.

B. DeMarco y D. S. Jin. Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science*, 285, pág. 1703, 1999.

B. DeMarco, S. B. Papp, y D. S. Jin. Pauli blocking of collisions in a quantum degenerate atomic fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 86, pág. 5409, 2001.

J. F. Dobson. Harmonic-potential theorem: Implications for approximate many-body theories. *Phys. Rev. Lett.*, 73, pág. 2244, 1994.

R. Dodd, K. Burnett, M. Edwards, y C. W. Clark. Excitation spectroscopy of vortex states in dilute Bose-Einstein condensed gases. *Phys. Rev. A*, 56, pág. 587, 1997.

R. Dodd, M. Edwards, C. W. Clark, y K. Burnett. Collective excitations of Bose-Einstein-condensed gases at finite temperatures. *Phys. Rev. A*, 57, pág. R32, 1998.

M. Edwards, P. Ruprecht, K. Burnett, R. Dodd, y C. W. Clark. Collective excitations of atomic Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 77, pág. 1671, 1996.

A. L. Fetter. Non uniform states of an imperfect Bose gas. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 70, pág. 67, 1972.

A. L. Fetter y J. D. Walecka. *Quantum Theory of Many-Particle Systems.* International Series in Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1971.

M. Fliesser, A. Csordás, R. Graham, y P. Szépfalusy. Classical quasiparticle dynamics in trapped Bose condensates. *Phys. Rev. A*, 56, pág. 4879, 1997a.

M. Fliesser, A. Csordás, P. Szépfalusy, y R. Graham. Hydrodynamic excitations of Bose condensates in anisotropic traps. *Phys. Rev. A*, 56, pág. R2533, 1997b.

F. Garcias, L. Serra, M. Casas, y M. Barranco. Ground-state properties of doped ^{3}He clusters. *J. Chem. Phys.*, 108, pág. 9102, 1998.

S. M. Gatica, E. S. Hernández, y J. Navarro. Dynamical response of spin-polarized ^{3}He. *Phys. Rev. B*, 60, pág. 15302, 1999.

S. Giorgini, L. Pitaevskii, y S. Stringari. Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas. *Phys. Rev. A*, 54, pág. R4633, 1996.

H. Goldstein. *Classical Mechanics.* Addison-Wesley Inc., 1959.

J. Goldstone. Field theories with "superconductor" solutions. *Nuovo Cimento*, 19, pág. 154, 1961.

J. Goldwin, S. B. Papp, B. DeMarco, y D. S. Jin. Two-species magneto-optical trap with ^{40}K and ^{87}Rb. *Phys. Rev. A*, 65, pág. 021402, 2001.

I. S. Gradstein y I. M. Rhyzhik. *Table of Integrals, Series and Products.* Academic, San Diego, 1994.

A. Griffin. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous Bose gas at finite temperatures. *Phys. Rev. B*, 53, pág. 9341, 1996.

E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Chimento*, 20, pág. 1766, 1961.

E. P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4, pág. 195, 1963.

S. Grossmann y M. Holthaus. On Bose-Einstein condensation in harmonic traps. *Phys. Lett. A*, 208, pág. 188, 1995.

D. Heinzen. Ultracold atomic interactions. En M. Inguscio, S. Stringari, y C. Wieman, editores, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, pág. 351. IOS Press, 1999.

K. Helmerson, A. Martin, y D. E. Pritchard. Laser cooling of magnetically trapped neutral atoms. *J. Opt. Soc. Am. B*, 9, pág. 1988, 1992.

K. Helmerson y W. Phillips. Cooling, trapping and manipulation of neutral atoms and BEC by electromagnetic fields. En M. Inguscio, S. Stringari, y C. Wieman, editores, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, pág. 391. IOS Press, 1999.

E. S. Hernández, J. Navarro, y A. Polls. Disappearance of zero sound in asymmetric nuclear matter. *Phys. Lett. B*, 413, pág. 1, 1997a.

E. S. Hernández, J. Navarro, y A. Polls. RPA susceptibility of asymmetric nuclear matter at finite temperatures with skyrme interactions. *Nucl. Phys. A*, 627, pág. 460, 1997b.

T.-L. Ho y M. Ma. Quasi 1 and 2d dilute Bose gas in magnetic traps: Existence of off-diagonal order and anomalus quantum fluctuations. cond-mat/9703034, 1997.

P. Hohenberg y P. Martin. Microscopic theory of superfluid helium. *Ann. Phys.*, 34, pág. 291, 1965.

M. Houbiers y H. T. C. Stoof. Stability of Bose condensed atomic ^{7}Li. *Phys. Rev. A*, 54, pág. 5055, 1996.

K. Huang. *Statistical Mechanics.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963.

D. A. Huse y E. D. Siggia. The density distribution of a weakly interacting Bose gas in an external potential. *J. Low Temp. Phys.*, 48, pág. 137, 1982.

D. Hutchinson, E. Zaremba, y A. Griffin. Finite temperature excitations of a trapped Bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 78, pág. 1842, 1997.

Y. Kagan, E. Surkov, y G. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential. *Phys. Rev. A*, 54, pág. R1753, 1996.

Y. Kagan, E. Surkov, y G. Shlyapnikov. Evolution and global collapse of trapped Bose condensates under variations of the scattering length. *Phys. Rev. Lett.*, 79, pág. 2604, 1997a.

Y. Kagan, E. Surkov, y G. Shlyapnikov. Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps. *Phys. Rev. A*, 55, pág. R18, 1997b.

Y. Kagan y B. Svistunov. Evolution of correlation properties and appearance of broken symmetry in the process of Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev. Lett.*, 79, pág. 3331, 1997.

H. Kamerlingh Onnes. *Proc. R. Acad. Amsterdam*, 11, pág. 168, 1911.

P. L. Kapitza. Viscosity of liquid helium below the λ-point. *Nature*, 141, pág. 74, 1938.

W. Ketterle, D. Durfee, y D. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. En M. Inguscio, S. Stringari, y C. Wieman, editores, *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, pág. 67, Amsterdam, 1999. IOS Press.

W. Ketterle y N. van Druten. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimenstions. *Phys. Rev. A*, 54, pág. 656, 1996.

K. Kirsten y D. J. Toms. Bose-Einstein condensation of atomic gases in a general harmonic-oscillator confining potential trap. *Phys. Rev. A*, 54, pág. 4188, 1996a.

K. Kirsten y D. J. Toms. Density of states for Bose-Einstein condensation in harmonic oscillator potentials. *Phys. Lett. A*, 222, pág. 148, 1996b.

W. Kohn. Cyclotron resonance and de haas-van alphen oscillations of an interacting electron gas cyclotron resonance and de haas-van alphen oscillations of an interacting electron gas. *Phys. Rev.*, 123, pág. 1242, 1961.

A. Leggett. Broken gauge symmetry in a Bose condensate. En A. Griffin, D. Snoke, y S. Stringari, editores, *Bose-Einstein Condensation*, pág. 452. Cambridge University Press, 1995.

A. J. Leggett y F. Sols. On the concept of spontaneously broken gauge symmetry in condensed matter physics. *Found. Phys.*, 21, pág. 353, 1991.

P. J. Leo, V. Venturi, I. B. Whittingham, y J. F. Babb. Ultracold collisions of metastable helium atoms. *Phys. Rev. A*, 64, pág. 042710, 2001.

F. London. The λ-phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, 141, pág. 643, 1938a.

F. London. On the Bose-Einstein condensation. *Phys. Rev.*, 54, pág. 947, 1938b.

E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. Wiley, New York, 1961.

A. Minguzzi, M. Chiofalo, y M. Tosi. Generalized quantum hydrodynamics of trapped dilute Bose gas. *Phys. Lett. A*, 236, pág. 237, 1997.

A. Minguzzi y M. P. Tosi. Schematic phase diagram and collective excitations in the collisional regime for trapped boson-fermion mixtures at zero temperature. *Phys. Lett. A*, 268, pág. 142, 2000a.

A. Minguzzi y M. P. Tosi. Schematic phase diagram and collective excitations in the collisional regime for trapped boson-fermion mixtures at zero temperature. *Phys. Lett. A*, 268, pág. 142, 2000b.

A. Minguzzi y M. P. Tosi. Scissors mode in a superfluid fermi gas. *Phys. Rev. A*, 63, pág. 023609, 2001.

T. Miyakawa, T. Suzuki, y H. Yabu. Sum-rule approach to collective oscillations of a boson-fermion mixed condensate of alkali atoms. *Phys. Rev. A*, 62, pág. 063613, 2000.

K. Mølmer. Bose condensate and fermi gases at zero temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 80, pág. 1804, 1998a.

K. Mølmer. Bose condensates and Fermi gases at zero temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 80, pág. 1804, 1998b.

W. Mullin. Bose-Einstein condensation in a harmonic potential. *J. Low Temp. Phys.*, 106, pág. 615, 1997.

P. Noziéres y D. Pines. *The Theory of Quantum Liquids*, volumen 2. Addison-Wesley, 1990.

J. R. Pastor, P. P. Calleja, y C. A. Trejo. *Análisis Matemático*, volumen III: Análisis funcional y aplicaciones. Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 3 edición, 1959.

S. H. Patil. Adiabatic potentials for alkali-inert gas systems in the ground state. *J. Chem. Phys.*, 94, pág. 8089, 1991.

O. Penrose. On the quantum mechanics of Helium II. *Phil. Mag.*, 42, pág. 1373, 1951.

O. Penrose y L. Onsager. Bose-Einstein condensation and liquid Helium. *Phys. Rev. A*, 104, pág. 576, 1956.

F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, J. Wang, C. J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C. S. Unnikrishnan, M. Leduc, y C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein condensation of metastable Helium. *Phys. Rev. Lett.*, 86, pág. 3459, 2001.

D. Pines y P. Noziéres. *The Theory of Quantum Liquids*, volumen 1. Addison-Wesley, 1994.

L. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13, pág. 451, 1961.

V. N. Popov. *Functional integrals and collective excitations.* Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, Cambridge, UK., 1987.

W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, y B. P. Flannery. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge, UK., 1992.

N. Proukakis, S. Morgan, S. Choi, y K. Burnett. Comparison of gapless mean-field theories for trapped Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 58, pág. 2435, 1998.

A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. I. Westbrook, y A. Aspect. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292, pág. 461, 2001.

P. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, y C. W. Clark. Probing the linear and nonlinear excitations of Bose-condensed neutral atoms in a trap. *Phys. Rev. A*, 54, pág. 4178, 1996.

J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Inc., 1994.

F. Schreck, G. Ferrari, K. L. Corwin, J. Cubizolles, L. Khaykovich, M.-O. Mewes, y C. Salomon. Sympathetic cooling of bosonic and fermionic lithium gases towards quantum degeneracy. *Phys. Rev. A*, 64, pág. 011402(R), 2001a.

F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, y C. Salomon. Quasi-pure Bose-Einstein condensate immersed in a fermi sea. *Phys. Rev. Lett.*, 87. pág. 080403, 2001b.

H. T. C. Stoof, M. Bijlsma, y M. Houbiers. Theory of interacting quantum gases. *J. Res. Natl. Inst. Stand. Tech.*, 101, pág. 443, 1996.

S. Stringari. Collective excitations of a trapped Bose-condensed gas. *Phys. Rev. Lett.*, 77, pág. 2360, 1996.

S. Stringari. Dynamics of Bose-Einstein condensed gases in highly deformed traps. *Phys. Rev. A*, 58, pág. 2385, 1998.

L. Vichi y S. Stringari. Collective oscillations of an interacting trapped fermi gas. *Phys. Rev. A*, 60, pág. 4734, 1999.

L. Viverit, C. J. Pethick, y H. Smith. Zero-temperature phase diagram of binary boson-fermi mixtures. *Phys. Rev. A*, 61, pág. 053605, 2000.