

Tesis de Posgrado

El efecto dínamo y la generación de campos magnéticos en astrofísica

Mininni, Pablo Daniel

2003

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Mininni, Pablo Daniel. (2003). El efecto dínamo y la generación de campos magnéticos en astrofísica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3547_Mininni.pdf

Cita tipo Chicago:

Mininni, Pablo Daniel. "El efecto dínamo y la generación de campos magnéticos en astrofísica". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2003.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3547_Mininni.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

¿

**EL EFECTO DÍNAMO Y LA GENERACIÓN
DE CAMPOS MAGNETICOS EN ASTROFÍSICA**

por Pablo Daniel Mininni

Director de Tesis: Dr. Daniel O. Gómez

Lugar de Trabajo: Departamento de Física,
Facultad de Cs. Exactas y Naturales, UBA

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Marzo de 2003

RESUMEN: En la presente tesis estudiamos la teoría de dínamo en diferentes regímenes de interés astrofísico. La teoría de campo medio, utilizada para obtener el coeficiente de generación de energía magnética por efecto de la turbulencia, es generalizada para incluir efectos cinéticos. Para el caso particular del Sol, construimos un modelo basado en los perfiles medidos de rotación diferencial con el fin de explicar las características globales del campo magnético. Con el fin de individualizar las causas de las irregularidades observadas y de introducir correctamente estos efectos en el modelo, llevamos a cabo un estudio detallado de los datos existentes sobre el campo magnético solar. Presentamos estudios de correlación de amplitud y fase, así como reconstrucción del espacio de fases a partir de la serie temporal del número de manchas solares. También realizamos una descomposición en modos bi-ortogonales de la distribución espacial y temporal del área cubierta por las manchas, y de los campos magnéticos observados en la superficie solar. Los resultados de todos estos estudios son utilizados como indicadores de la fuente de las irregularidades e introducidos finalmente en el modelo. Finalmente, presentamos simulaciones numéricas tridimensionales con el fin de verificar la validez de la mencionada generalización de la teoría. Según el caso, los resultados pueden ser aplicados en regiones convectivas estelares, en regiones pequeñas de discos de acreción y discos galácticos, o en estrellas compactas.

Palabras clave: Astrofísica — Dínamo — Hidrodinámica — Magnetohidrodinámica — Sol: campos magnéticos — Estrellas: campos magnéticos — Simulaciones numéricas



DYNAMO EFFECT AND MAGNETIC FIELD GENERATION IN ASTROPHYSICS

ABSTRACT: In this thesis we study the dynamo theory in different regimes of astrophysical interest. The mean field theory, used to obtain the magnetic energy generation coefficient by effect of the turbulent motion, is generalized to include kinetic effects. In the particular case of the Sun, we build a model based on measured profiles of differential rotation to explain the global features observed in its magnetic field. To identify the sources of the observed irregularities, and to introduce these effects in the model, we carry out a detailed study of the existing data of the solar magnetic cycle. We present studies of amplitude and phase correlation, as well as reconstruction of the phase space from the time series of the sunspot number. Also, we carry out a bi-orthogonal decomposition of the temporal and spatial distribution of the area covered by sunspots, and of the observed magnetic field in the solar surface. The results obtained are used to identify the source of irregularities and have been introduced in the model. Finally, we present direct simulations in three dimensions to validate the results obtained in the extension of the theory mentioned above. Depending on the case, the results can be used in stellar convective regions, in small regions of accretion disks, or in compact stars.

Keywords: Astrophysics -- Dynamo — Hydrodynamics — Magnetohydrodynamics — Sun: magnetic fields — Stars: magnetic fields — Numerical simulations

Indice

	ξ	
1	Introducción	3
2	Fundamentos de la teoría de dínamo	9
2.1	Introducción	9
2.2	Electromagnetismo e hidrodinámica	12
2.3	Teoría de campo medio .	17
2.4	Efectos cinéticos	24
3	El dínamo solar	35
3.1	Introducción	35
3.2	Dínamos cinemáticos	44
3.3	Modelos de dínamo solar	50
4	Irregularidades en el ciclo solar	57
4.1	Introducción . .	57
4.2	Correlación amplitud-fase	63
4.3	Series espacio-temporales	68

4.4 Modelos de dínamo con estocasticidad	76
5 Dínamos magnetohidrodinámicos	87
5.1 Introducción	87
5.2 Simulaciones directas	91
5.3 Dínamos MHD	96
5.4 Dínamos Hall-MHD	101
6 Conclusiones	111
6.1 Una visión en perspectiva	111
6.2 Dínamos cinemáticos	113
6.3 Dínamos magnetohidrodinámicos	115
Bibliografía	119
Agradecimientos	129

Capítulo 1

Introducción

Uno de los fenómenos más llamativos en astrofísica es la presencia de campos magnéticos en la mayoría de los objetos astronómicos. Tal es el caso en: (i) muchos de los planetas del sistema solar (incluyendo la Tierra), (ii) estrellas de virtualmente todos los tipos espectrales (incluyendo desde luego el Sol), (iii) varias de las galaxias estudiadas, (iv) el medio interestelar, y (v) discos de acreción. Las intensidades de campo magnético observadas varían desde $1 \mu\text{Gauss}$ en la Vía Láctea hasta 10^{12} Gauss o más en estrellas de neutrones. Mas aún, la evidencia observacional sugiere que el campo magnético es una componente inevitable de cualquier objeto astrofísico rotante que posea una parte en estado líquido o gaseoso. Por ejemplo Júpiter, con un núcleo líquido conductor y un período de rotación cercano a las 10 horas, tiene un campo magnético del orden de 10 Gauss. En comparación, el campo magnético de la Tierra es de 1 Gauss. En el caso estelar, el Sol presenta un campo medio dipolar de 1 Gauss con fluctuaciones en su superficie del orden de 10^3 Gauss, y un período de rotación cercano al mes. Otras estrellas del mismo tipo espectral, con períodos de rotación entre pocos días y algunos meses, tienen campos magnéticos en el rango de 10^2 a 10^4 Gauss.

El origen de dichos campos magnéticos no puede ser primigenio, ya que en la mayoría de los casos los tiempos característicos de disipación por efecto Joule son mucho más cortos que

los tiempos de vida de los objetos. Evidencia geológica muestra que el campo magnético terrestre tiene al menos una edad de 3×10^9 años. El tiempo de disipación, del orden del cuadrado de la longitud característica del objeto (el radio del núcleo terrestre es de $3,48 \times 10^8$ cm) e inversamente proporcional a la difusividad magnética (2×10^4 cm²/s), es en este caso de solo 2×10^6 años. En el caso solar el tiempo de disipación es mucho mayor, pero un campo fósil no puede explicar la compleja dinámica e inversión de polaridad observada cada 22 años.

Hasta principios del siglo pasado se creía que el campo magnético terrestre podía ser explicado a partir de efectos de magnetización permanente en el núcleo. La idea fue propuesta originalmente por Gilbert en el tratado *De Magnete* a principios del siglo XVII. Hoy sabemos que tanto el origen del campo magnético de la Tierra como el de otros objetos astronómicos no puede ser explicado en esta forma, ya que en muchos objetos se observan temperaturas por encima de la temperatura de Curie en la que los materiales ferromagnéticos pierden su magnetización permanente [Mof78]. El origen del campo magnético continuó entonces siendo un misterio, hasta que Larmor [Lar19] en 1919 propuso que la generación del campo se debía a corrientes inducidas por el movimiento de fluidos cargados.

Si bien puede considerarse esta propuesta como el inicio de las modernas *teorías de dínamo*, el problema del origen de los campos magnéticos que observamos en el Universo dista de estar resuelto, y es actualmente una de las áreas de investigación más activas en astrofísica. Hoy, la teoría del dínamo es la rama de la mecánica de fluidos que intenta explicar el origen de estos campos y su evolución, a través de la conversión espontánea de energía cinética en magnética. Para su tratamiento se combinan diversas áreas de la física teórica, tales como la dinámica de fluidos turbulentos, el electromagnetismo, la física estadística, y el estudio de sistemas dinámicos complejos.

Luego de la idea de Larmor, las bases de la teoría de dínamo fueron desarrolladas por Cowling, Parker, y Braginsky entre otros, y hacia mediados de siglo se comprendía que el acoplamiento entre el campo de velocidades del fluido y el campo magnético podía explicar

al menos cualitativamente la dinámica del campo magnético terrestre y del ciclo solar. Sin embargo, nuestra comprensión del efecto dínamo mejoró significativamente a partir de 1960, gracias a la teoría de campo medio de M. Steenbeck, F. Krause y K.-H. Rädler [Kra80], y con la posterior aparición de computadoras que permitieron las primeras simulaciones directas del sistema de ecuaciones [Men81]. Con la ayuda de esta teoría muchos de los ingredientes necesarios para la generación de campos magnéticos fueron puestos de manifiesto, como por ejemplo la necesidad de flujos turbulentos helicoidales. Sin embargo, muchos otros aspectos de la teoría son aún motivo de debate, tales como la validez de aproximaciones utilizadas en su deducción, la naturaleza de los valores medios de los campos, o el rol de los efectos no lineales.

El campo magnético solar es probablemente uno de los mejor estudiados, en virtud de su proximidad a nuestro planeta. Su comprensión puede dar indicios importantes para el desarrollo general de la teoría. La dinámica del campo magnético solar es muy llamativa, ya que presenta un comportamiento variable con un período medio cercano a los 11 años [Sch43]. Muchos eventos relacionados con la actividad magnética solar (como el número de manchas en la superficie) son conocidos y observados en forma sistemática desde la época de Galileo. El estudio de la dinámica del campo magnético solar, además de aportar a la comprensión del efecto dínamo en general y los campos magnéticos estelares en particular, tiene un valor práctico agregado. Al ser el Sol la estrella más cercana a nuestro planeta, su actividad magnética afecta fuertemente nuestro entorno a través de las tormentas geomagnéticas. Estas tormentas son a su vez causantes de corrientes parásitas en oleoductos y gasoductos, afectan las órbitas de satélites de baja altitud, y producen alteraciones sensibles en nuestras comunicaciones. Por este motivo, existe en este problema un interés práctico concreto por obtener una mejor capacidad predictiva sobre la actividad magnética solar.

En la presente tesis, estudiamos la teoría de dínamo en diferentes regímenes de interés astrofísico. Esta teoría se basa en la aproximación magnetohidrodinámica, que describe globalmente el movimiento de fluidos conductores y campos magnéticos, y es comúnmente usada en problemas astrofísicos e industriales. La aproximación, que describimos en el

Capítulo 2, expresa principios de conservación fundamentales, como los de masa, momento, y energía. Sus ecuaciones son la de movimiento del fluido y una ecuación de inducción resultante de la combinación de las leyes de Faraday y de Ohm.

En el caso mas general, la teoría de dínamo requiere la resolución de la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento del fluido acoplada con la ecuación de inducción magnética. Este sistema de ecuaciones acoplado y en derivadas parciales (*dínamo magnetohidrodinámico*) es fuertemente no lineal, y su comportamiento puede ser estudiado por teorías de clausura [Kra80, Rou76] o bien por resolución numérica directa [Bra01a, Men89]. Cuando el campo magnético es suficientemente intenso, o la densidad de portadores de carga en el fluido es baja, la conductividad del fluido deja de ser isótropa y la ley de Ohm debe ser modificada. Este es el caso en objetos compactos como estrellas de neutrones y enanas blancas, donde el efecto Hall es relevante [Sha97]. En este marco, presentamos una teoría cuyos resultados se aplican tanto al caso magnetohidrodinámico clásico como a aquellos objetos donde el efecto Hall es dominante [Min02b, Min03a]. En el Capítulo 2, para ambos sistemas de ecuaciones desarrollamos una teoría general de clausura que permite obtener el coeficiente de generación de energía magnética por efecto de la turbulencia (efecto α). En el caso magnetohidrodinámico, los resultados coinciden con los resultados obtenidos por la teoría clásica de M. Steenbeck, F. Krause y K.-H. Rädler.

Al estudiar el comportamiento global del campo magnético de una estrella, resulta impracticable realizar simulaciones directas del conjunto completo de ecuaciones, en virtud del alto número de Reynolds involucrado. Sin embargo, en estos casos se justifica una aproximación cinemática, en la cual el campo de velocidades es impuesto y solo se resuelve la ecuación para la inducción del campo magnético [Dik99]. En el caso paradigmático del Sol, existe una gran cantidad de datos para los perfiles del campo de velocidades, obtenidos recientemente y con muy buena precisión a partir de técnicas de heliosismología. En el Capítulo 3, en el entorno de esta aproximación (*dínamo cinemático*), construimos un modelo basado en el efecto α y los perfiles medidos de rotación diferencial solar con el fin de explicar las características globales del campo magnético observado [Min01b, Min02a].

La causa de las irregularidades del ciclo solar forma parte de los problemas pendientes en la teoría de dínamo. ¿Se deben por ejemplo a un proceso de auto-organización y pueden ser explicadas utilizando unos pocos grados de libertad? ¿O son originadas por los movimientos desordenados en las capas mas externas de la estrella y por lo tanto debidos a la turbulencia convectiva? En el primer caso, un modelo de baja dimensionalidad en presencia de un atractor caótico podría explicar las irregularidades observadas [Kno95]. En el segundo, en cambio, la complejidad sería debida a la interacción de muchos grados de libertad en forma irreducible [Cho92]. Con el fin de individualizar las causas y de introducir correctamente estos efectos en nuestro modelo, en el Capítulo 4 llevamos a cabo un estudio detallado de los datos existentes sobre el campo magnético solar. Presentamos estudios de correlación de amplitud y fase [Min02c], así como reconstrucción del espacio de fases a partir de la serie temporal del número de manchas solares [Min00]. También realizamos una descomposición en modos bi-ortogonales de la distribución espacial y temporal del área cubierta por las manchas [Min02d], y de los campos magnéticos observados en la superficie solar. Los resultados de todos estos estudios son utilizados como indicadores de la fuente de las irregularidades e introducidos finalmente en el modelo presentado en el Capítulo 3.

Si bien resulta impracticable realizar simulaciones completas del dínamo estelar, la simulación directa de una pequeña región de la estrella es en cambio factible y útil para comprender los mecanismos físicos que intervienen en el problema. Asimismo, las simulaciones directas pueden ser utilizadas para verificar los resultados obtenidos a partir de clausuras o truncaciones del sistema completo. En el Capítulo 5 presentamos simulaciones numéricas tridimensionales con el fin de verificar la validez de la teoría desarrollada en el Capítulo 2 y utilizada en los capítulos siguientes, tanto en el caso magnetohidrodinámico como en el caso donde el efecto Hall es relevante. Según el caso, los resultados pueden ser aplicados en regiones convectivas estelares, en regiones pequeñas de discos de acreción y discos galácticos, o en estrellas compactas. Finalmente, en el Capítulo 6 presentamos las conclusiones de la tesis y discutimos las potenciales aplicaciones de los resultados.

La presencia de campos magnéticos en objetos tan variados del universo sugieren la necesidad de una teoría general para la creación y dinámica del campo magnético en astrofísica. Esta teoría debería ser aplicable en objetos rotantes, turbulentos, y carentes de simetría. Si bien la aparición de poderosas técnicas matemáticas y la introducción de nuevas ideas en los últimos años llevó a un rápido progreso en nuestra comprensión sobre la generación de campos magnéticos, es indudable que aún carecemos de una técnica integral satisfactoria. La presente tesis aspira a ser una pequeña contribución a la construcción de dicha teoría.

†

Capítulo 2

Fundamentos de la teoría de dínamo

2.1 Introducción

El origen de los campos magnéticos observados en astrofísica no tiene una explicación sencilla. Los planetas y las estrellas no pueden ser ferromagnéticos, ya que su interior se encuentra muy por encima de la temperatura de Curie. Tampoco puede ser un fenómeno transitorio, dado que por ejemplo existe evidencia geológica de que el campo magnético de la Tierra es muy antiguo [Pro94]. También se ha encontrado evidencia en meteoritos que permite extender la historia del campo magnético solar hasta las etapas más tempranas de formación de la estrella [Pri00].

Los campos tampoco pueden ser primigenios. El tiempo de difusión electromagnética por disipación Joule en objetos de escala astronómica es en muchos casos menor que la edad media de estos objetos. Además, un campo magnético suficientemente intenso en etapas tempranas del universo, dejaría huellas de anisotropía que deberían ser detectables hoy.

Por lo tanto, se necesita una teoría que explique la generación de un campo magnético muy intenso en forma autoconsistente (en forma espontánea o eventualmente a partir de

una pequeña semilla), y que sea capaz de mantener dichos campos con las intensidades observadas por tiempos del orden de la vida media de los objetos astronómicos.

La búsqueda del origen del campo magnético en objetos astrofísicos ha llevado a su vez a la búsqueda subsidiaria de los elementos en común presentes en dichos objetos. En todos puede observarse rotación, y en muchos de ellos existe evidencia de movimientos turbulentos en el plasma del que están compuestos. Así, se inició una búsqueda de un mecanismo que, a través de fuerzas electromotrices generadas por el movimiento del plasma, se oponga al decaimiento libre del campo magnético causado por disipación óhmica. La propuesta original, hecha por Larmor en 1919 [Lar19], puede ser considerada el inicio de la teoría de dínamo.

En el presente capítulo nos concentraremos en los aspectos teóricos del problema, desde la teoría clásica utilizada en los casos terrestre y solar, hasta su adaptación a objetos más extraños como discos de acreción y objetos compactos. Las preguntas básicas a responder son: ¿Existen movimientos de fluidos conductores tales que puedan amplificar y mantener indefinidamente un campo magnético macroscópico? ¿Puede un objeto astrofísico generar su propio campo magnético por este mecanismo? Es interesante remarcar que en este capítulo nos ocuparemos de las propiedades que debe tener un flujo para que el dínamo sea efectivo. En este marco la teoría que presentaremos será lineal, y es usualmente conocida como *dínamo cinemático*. En los capítulos subsiguientes veremos de qué manera el campo magnético puede modificar esta configuración, lo cual constituye un problema más complejo al que nos referiremos como el *dínamo autoconsistente*.

La conversión efectiva de energía cinética en magnética puede mostrarse con un dispositivo sencillo, conocido como el dínamo homopolar [Bul55]. Consideremos un disco de metal que gira con velocidad angular constante ω en un campo magnético uniforme \mathbf{B} perpendicular al mismo (Figura 2.1.a). Por la ley de inducción de Faraday sabemos que entre el centro y el borde del disco se genera una diferencia de potencial $V = \omega\Phi/2\pi$, donde Φ es el flujo magnético a través del disco. Podemos proveer un camino para la corriente entre

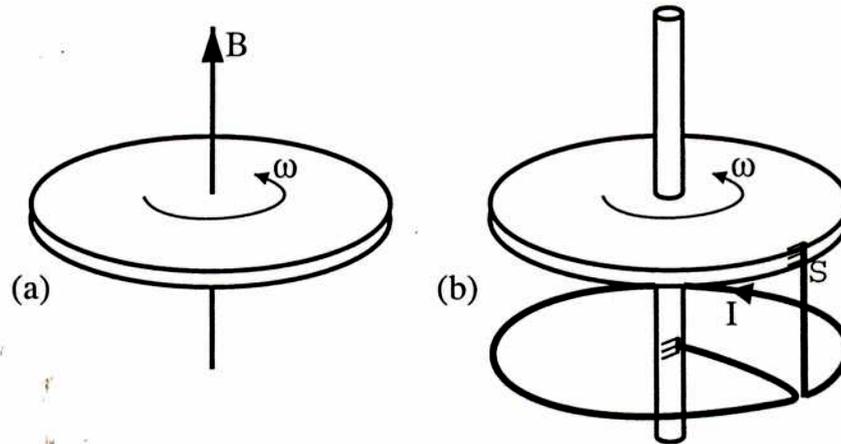


Fig. 2.1: (a) El disco de Faraday; un disco de material conductor gira con velocidad angular constante en un campo magnético externo uniforme. (b) El dínamo homopolar; el cable en reposo está enrollado en el mismo sentido que la rotación del disco.

el borde y el centro del disco mediante una espira enrollada alrededor del eje de rotación del disco (la espira no gira con el disco). Todo el sistema puede ser caracterizado por una inductancia total L y una resistencia R (Figura 2.1.b).

Si inicialmente fluye una corriente I_0 por la espira, que a su vez genera el flujo Φ que atraviesa el disco, podemos escribir la ecuación del circuito equivalente como

$$L\dot{I} + RI = V = \frac{\omega M}{2\pi} I \quad (2.1)$$

donde $M = \Phi/I$ es la inductancia mutua. Para $\omega > 2\pi R/M$ la ecuación (2.1) tiene soluciones en las que la corriente I crece exponencialmente.

Este es un ejemplo sencillo de un dínamo autoexcitado. Dada una pequeña corriente inicial (I_0), el sistema continúa produciendo corriente y campo magnético a expensas del trabajo mecánico realizado para mantener constante la velocidad angular de rotación del disco. Dos aspectos fundamentales de este ejemplo van a ser ingredientes de todos los dínamos que estudiaremos: el dispositivo de la Figura 2.1 carece de simetría de reflexión y presenta rotación no uniforme. Carece de simetría de reflexión ya que si invertimos el sentido

en el que está enrollado el cable, la corriente decae exponencialmente, independientemente de cual sea el valor de ω . La carencia de simetría de reflexión será importante también en los flujos astrofísicos. Sin embargo, el signo inicial de I (o B) puede cambiarse sin que esto modifique los resultados. Por otro lado, la rotación no uniforme está presente en la conexión entre la espira y el disco: mientras el disco rota, la espira está en reposo. Veremos que este es también un ingrediente fundamental en dínamos estelares y galácticos.

¡Sin embargo, no existen discos ni cables conductores en astrofísica! ¿Cuál es el camino para la corriente en este caso? La asimetría estructural del dínamo homopolar tampoco es fácil de generar en objetos que no presentan fuertes asimetrías, puesto que son aproximadamente esféricos. Si existen dínamos astrofísicos, los movimientos internos del plasma deben compensar esta carencia aparente de asimetría. La pregunta que nos haremos es: ¿puede un cuerpo simétrico (como un núcleo planetario, o la región convectiva de una estrella) amplificar y mantener un campo magnético a través del movimiento del fluido en su interior?

2.2 Electromagnetismo e hidrodinámica

Con el fin de estudiar los campos magnéticos en planetas, estrellas y galaxias, es una buena aproximación despreciar efectos relativistas. Si U , L y T denotan respectivamente velocidades, longitudes y tiempos característicos del sistema, consideraremos $U, L/T \ll c$, donde c es la velocidad de la luz. La permeabilidad magnética μ de los medios materiales que estudiaremos difiere muy levemente de la unidad, y en consecuencia consideraremos $\mu = 1$. En este caso podemos despreciar las corrientes de desplazamiento y considerar una forma reducida de las ecuaciones de Maxwell en función del campo magnético \mathbf{B} , el campo eléctrico \mathbf{E} , y la corriente \mathbf{J} como

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (2.4)$$

donde la ecuación (2.2) es la ley de Ampère y la ecuación (2.3) es la ley de Faraday [Lan80]. La relación entre estos campos y el campo de velocidades del fluido \mathbf{U} está dada por la ley de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}'$, donde \mathbf{E}' es el campo eléctrico en el sistema de referencia solidario al fluido. La transformación de los campos en esta aproximación es $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}/c$, por lo que la ley de Ohm se escribe

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{U} \times \mathbf{B}}{c} \right). \quad (2.5)$$

El término $\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B}/c$ representa la intensidad efectiva del campo eléctrico que crea la corriente de conducción en un medio en movimiento. Es importante notar que al pasar de un sistema a otro, hemos transformado \mathbf{E} manteniendo constante \mathbf{J} . El motivo es que la transformación de la densidad de corriente conduce a términos de orden más alto en U/c y son por lo tanto despreciables en esta aproximación.

Reemplazando la ecuación (2.5) en (2.3) obtenemos la ecuación de inducción que describe la evolución del campo magnético, el cual se acopla con el campo de velocidades del fluido

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2.6)$$

donde $\eta = c^2/(4\pi\sigma)$ es la difusividad magnética.

Es conveniente escribir el campo magnético en unidades de velocidad dividiéndolo por $\sqrt{4\pi\rho}$, donde ρ es la densidad del medio. De este modo los campos \mathbf{U} y \mathbf{B} quedan en pie de igualdad. En lo subsiguiente escribiremos el campo magnético de esta forma y lo denotaremos simplemente como \mathbf{B} .

La ecuación de inducción (2.6) se complementa con la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y con una ecuación para el movimiento del fluido. Considerando al fluido incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$), la

dinámica del campo de velocidades del fluido \mathbf{U} está dada por la ecuación de Navier-Stokes incluyendo la fuerza de Lorentz debida al acoplamiento del fluido con el campo magnético,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (2.7)$$

Aquí, P es la presión del fluido y ν es la viscosidad cinemática. Como en general estudiaremos casos con densidad constante o con perfiles conocidos, en lo subsiguiente consideraremos $P \equiv P/\rho$ y eliminaremos la densidad de la ecuación de movimiento.

Comparando la magnitud del término $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ con el término de difusión, podemos definir el número de Reynolds $R = UL/\nu$. Las ecuaciones (2.6) y (2.7) conforman el sistema de ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD), que describe la dinámica acoplada del campo y la materia. Es importante remarcar que la fuerza eléctrica no juega ningún rol relevante en la dinámica, ya que su amplitud es de orden U^2/c^2 comparada con la amplitud de \mathbf{B} . Los campos \mathbf{J} y \mathbf{E} pueden ser calculados posteriormente a partir de las ecuaciones (2.2) y (2.3).

Cuando el medio es un conductor perfecto ($\eta = 0$), la ecuación (2.6) predice que las líneas de campo magnético están congeladas al fluido (*teorema del congelamiento de Alfvén* [Alf42]). Cada punto de la línea se mueve solidaria al fluido, y en este caso podemos considerar las líneas de campo en un conductor perfecto como líneas materiales. A partir de la ecuación (2.6) también se puede definir un número adimensional similar al número de Reynolds, llamado número de Reynolds magnético $R_M = UL/\eta$. Un número de Reynolds magnético pequeño, denota que la difusión del flujo domina por encima de la advección por el campo de velocidades. En general, en astrofísica $R, R_M \gg 1$ (Tabla 2.1) y la aproximación de congelamiento del campo se satisface con buena aproximación.

Cuando describimos las propiedades físicas de un medio continuo, es conveniente trabajar con elementos de volumen diferencial en lugar de idealizaciones tales como puntos y líneas. Así, consideraremos a un tubo de flujo como un manojó de líneas magnéticas (Figura 2.2.a). Del teorema de Alfvén se sigue que en un conductor perfecto cada punto del

	L [cm]	U [cm s ⁻¹]	ν [cm ² s ⁻¹]	η [cm ² s ⁻¹]	R	R_M
Núcleo terrestre	$3,5 \times 10^8$	4×10^{-2}	10^{-2}	3×10^4	10^9	5×10^{12}
Sol, región convectiva	2×10^{10}	10^5	0,3	10^7	5×10^{15}	2×10^8
Discos de acreción	10^8	5×10^5	3×10^2	5×10^3	10^{11}	10^{10}

Tabla 2.1: Números de Reynolds para diferentes objetos astrofísicos. La longitud característica en objetos esféricos esta dada por su radio. En el caso de los discos se considera su espesor [Zel83]

tubo de flujo se mueve solidario con el fluido. Mas aún, el flujo mismo del tubo es también invariante bajo la acción del campo de velocidades,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (2.8)$$

La conservación del flujo magnético es una consecuencia de la propiedad material de las líneas magnéticas y de la conservación de masa. Este resultado tiene un impacto profundo para el dínamo, dado que nos dice de que manera un campo magnético puede ser amplificado por el movimiento de un conductor perfecto. Es necesario que el área de la sección del tubo disminuya para que la intensidad del campo crezca de forma tal de mantener el flujo constante. En un fluido esto se puede hacer simplemente estirando el tubo por acción del campo de velocidades (Figura 2.2.b). Este proceso amplifica la intensidad del campo, pero sin embargo el campo magnético generado tiene menor longitud de correlación que el campo original. Al residir en escalas mas chicas, el campo creado será, en un medio no ideal, mas sensible a la disipación.

Además del flujo magnético, existen otros invariantes en un conductor perfecto asociados con la topología de los campos magnético y de velocidades. Uno de ellos es la helicidad magnética

$$H_m = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV , \quad (2.9)$$

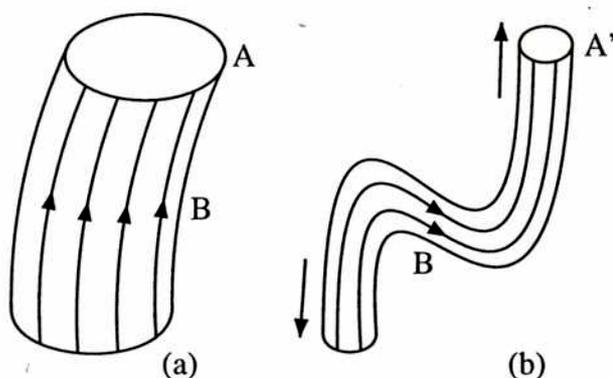


Fig. 2.2: (a) Un tubo de flujo magnético, considerado como un manojó de líneas de campo, de sección A . (b) El mismo tubo estirado por efecto de un campo de velocidades. Al deformarse, la sección se reduce a un valor A' y la intensidad del campo magnético debe crecer de forma tal de mantener el flujo constante.

donde \mathbf{A} es el potencial vector definido según $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Otros invariantes cuadráticos de los campos determinados por las ecuaciones (2.6) y (2.7) son la energía total del sistema

$$E = \int \frac{\rho}{2} (U^2 + B^2) dV, \quad (2.10)$$

y la helicidad cruzada

$$K = \int \mathbf{U} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (2.11)$$

Ahora tenemos los ingredientes para preguntarnos si existen flujos que sean capaces de amplificar y mantener un campo magnético en forma consistente. En el régimen cinemático varios ejemplos sencillos fueron propuestos [Her58, Bac58, Pon73]. Uno de los arquetipos más elementales fue propuesto por Vainshtein y Zeldovich [Vai72], y es conocido como el dinamo STF (*Stretch-Twist-Fold*). Un toro con flujo magnético F es estirado hasta duplicar su longitud (Figura 2.3), luego retorcido y finalmente doblado para recuperar la configuración original con cuatro veces más energía magnética. Estrictamente, para recuperar la configuración original se necesita un poco de difusión, de forma tal de poder

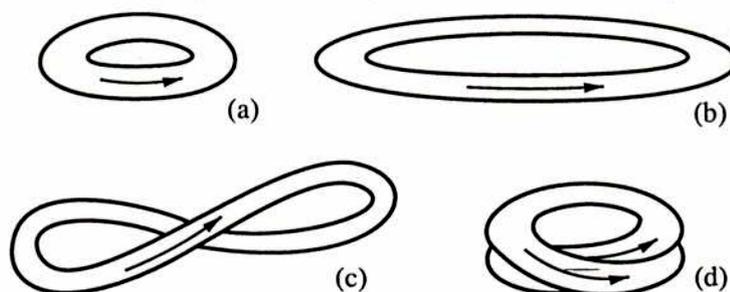


Fig. 2.3: El dínamo STF: Un toro con flujo magnético (a) es estirado hasta duplicar su longitud (b), luego retorcido (c), y finalmente doblado para recuperar la configuración original (d).

reconectar el campo magnético en el punto en el que se cruzan los tubos. Así, la disipación juega también un rol en el problema del dínamo al permitir la formación de estructuras con mayor longitud de correlación. Es importante notar que este mecanismo, al igual que los demás mecanismos de dínamo, es intrínsecamente tridimensional.

2.3 Teoría de campo medio

¿Que propiedades deben satisfacer las soluciones del sistema de ecuaciones (2.6)-(2.7) para considerar que tenemos un dínamo? Las dos primeras condiciones son las de *autoconsistencia* y de *persistencia*. Por autoconsistencia entendemos que todos los campos y corrientes deben ser creados por el movimiento del fluido. Por persistencia, que los campos deben ser amplificados y que su amplitud debe mantenerse indefinidamente, o al menos durante un tiempo largo comparado con el tiempo característico de disipación.

Al considerar el problema en la aproximación del dínamo cinemático, estudiamos las propiedades que debe tener un campo de velocidades para que se satisfagan las condiciones anteriores. En muchos de los objetos astrofísicos donde se observan campos magnéticos, existe también evidencia de movimientos turbulentos. Los elevados números de Reynolds

que son típicos en flujos astrofísicos (ver por ejemplo la Tabla 2.1), si bien no demuestran la existencia de turbulencia, son un dato indicativo en ese sentido. En el Capítulo 5 presentaremos otras evidencias observacionales al respecto. Si bien la experiencia diaria sugiere que la turbulencia es muy efectiva para destruir y difundir estructuras, en la Tierra y en el Sol el origen del campo magnético está fuertemente asociado a movimientos turbulentos en el núcleo terrestre y la zona convectiva solar respectivamente. Parker [Par55] fue el primero en proponer un mecanismo por el cual movimientos turbulentos podrían amplificar campos magnéticos. El punto crucial es la inducción generada por lo que Parker llamó *movimientos ciclónicos* del fluido en objetos rotantes. Si este efecto ocurre en combinación con rotación diferencial, resulta ser un mecanismo poderoso de dínamo. Así, los ingredientes principales del dínamo homopolar (falta de simetría de reflexión y rotación no uniforme) reaparecen en el dínamo magnetohidrodinámico.

La comprensión del efecto dínamo mejoró significativamente a partir de 1960, gracias a la teoría de campo medio de M. Steenbeck, F. Krause y K.-H. Rädler [Ste66, Kra80]. Esta teoría, a pesar que muchas de sus aproximaciones son discutibles, brindó una forma general y sencilla de cuantificar la efectividad de un flujo turbulento para generar campo magnético.

La idea básica de la teoría de campo medio es estudiar solo la dinámica del campo magnético macroscópico en un medio conductor en movimiento turbulento con un campo de velocidades prescripto. La teoría parte de las ecuaciones MHD e introduce la definición de un valor medio, obteniendo ecuaciones con términos de fuente que describen el acoplamiento con los campos fluctuantes en pequeñas escalas. Así, la teoría sigue la idea de las clausuras utilizadas en la ecuación de Navier-Stokes para introducir el tensor de esfuerzos de Reynolds [McC90]. Su equivalente en esta teoría es el valor medio de la fuerza electromotriz generada por las fluctuaciones turbulentas de los campos.

Consideraremos las ecuaciones MHD (2.6) y (2.7). En un régimen turbulento, todos los campos descritos por estas ecuaciones varían irregularmente en el espacio y en el tiempo.

Dado un campo F , definimos su valor medio \overline{F} como el valor de expectación de F en un conjunto estadístico. Su parte fluctuante f está definida por $f = F - \overline{F}$. Con estas definiciones, la operación de tomar el valor medio de un campo conmuta con las derivadas espaciales y temporales, y se satisfacen las relaciones de Reynolds dadas por

$$\begin{aligned} F &= \overline{F} + f, \quad \langle f \rangle = 0, \quad \langle \overline{F} f \rangle = 0, \\ \langle \overline{F} \rangle &= \overline{F}, \quad \langle F + G \rangle = \overline{F} + \overline{G}, \quad \langle \overline{F} G \rangle = \overline{F} \overline{G}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\langle \rangle$ denota el valor medio de los campos encerrados y G es otro campo turbulento.

Por ejemplo, en el caso paradigmático solar podemos observar campos medios y campos fluctuantes tanto magnéticos como de velocidades. El campo magnético medio tiene un período temporal de 22 años, y una longitud característica del orden del radio solar. Los campos fluctuantes tienen tamaños característicos de las manchas solares (10^4 km) y tiempos de correlación del orden de un mes. En el campo de velocidades podemos observar gránulos (con diámetros de 1.000 km y escalas temporales de algunos minutos), supergránulos (diámetros de 30.000 km y tiempos de vida del orden de un día), celdas gigantes (con longitudes características de 150.000 km, la profundidad de la zona convectiva, y tiempos característicos del orden de un mes), hasta movimientos con longitud de correlación del orden del radio solar como la rotación diferencial y el flujo meridional [Pri84]. En el Capítulo 3 estudiaremos con mas detalle el caso solar.

En lugar de promediar sobre un conjunto estadístico, podemos definir valores medios espaciales o temporales. Del ejemplo anterior vemos que en el caso solar se pueden definir los campos medios integrando en el tiempo en escalas del orden de un año. En ese caso, algunas de las relaciones de Reynolds se satisfacen solo aproximadamente. En adelante, consideraremos que la operación de promediar satisface las propiedades (2.12) sin detallar su definición precisa.

Considerando $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{U} = \overline{\mathbf{U}} + \mathbf{u}$ en la ecuación de inducción (2.6) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) = \nabla \times (\overline{\mathbf{U}} \times \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{u} \times \mathbf{b} + \overline{\mathbf{U}} \times \mathbf{b} + \mathbf{u} \times \overline{\mathbf{B}}) + \eta \nabla^2 (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{b}) . \quad (2.13)$$

Tomando valor medio en esta ecuación y usando las reglas (2.12) obtenemos la ecuación para $\overline{\mathbf{B}}$

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\overline{\mathbf{U}} \times \overline{\mathbf{B}}) + \nabla \times \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle + \eta \nabla^2 \overline{\mathbf{B}} . \quad (2.14)$$

El término $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ es una fuerza electromotriz \mathcal{E} asociada a los movimientos turbulentos. La tarea consiste en obtener una expresión para esta fuerza electromotriz en función de $\overline{\mathbf{B}}$. En el marco de la teoría cinemática, consideraremos para ello que las propiedades estadísticas del campo fluctuante \mathbf{u} son conocidas.

Restando la ecuación (2.14) de la ecuación (2.13) obtenemos la ecuación para la evolución del campo fluctuante \mathbf{b} . Los términos que involucran a $\overline{\mathbf{U}}$ pueden eliminarse mediante un cambio de sistema de referencia, y la ecuación queda

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{u} \times \mathbf{b}) - \nabla \times \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle + \eta \nabla^2 \mathbf{b} . \quad (2.15)$$

Nuestra intención es determinar \mathbf{b} a partir de esta ecuación, para luego reemplazarlo en \mathcal{E} . Para ello necesitamos realizar aproximaciones que simplifiquen el problema. En este paso se usa comúnmente la llamada *aproximación de primer orden* (FOSA), en la cual se considera que los campos turbulentos son pequeños y se desprecia el término de segundo orden en las magnitudes fluctuantes. Esta aproximación requiere que el número de Reynolds magnético R_M sea pequeño, ya que en este caso la difusión asegura $b \ll 1$. Sin embargo, esta condición no se satisface en la mayoría de los problemas de interés (ver Tabla 2.1). Otra opción es que el número de Strouhal $S = u\tau/L$ sea pequeño, donde τ es el tiempo característico de correlación de la turbulencia. Si bien en el régimen turbulento es de esperar que S sea de orden uno, al menos esta aproximación provee una forma de clausurar

la ecuación (2.15). Consideramos entonces el caso $R_M \gg 1$ y despreciamos también la difusión en la ecuación (2.15). El resultado es

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \approx \nabla \times (\mathbf{u} \times \overline{\mathbf{B}}) . \quad (2.16)$$

Aproximando la derivada temporal en esta ecuación por la inversa del tiempo de correlación τ , y reemplazando el resultado en la expresión de la fuerza electromotriz obtenemos $\mathcal{E} \approx \tau \langle \mathbf{u} \times \nabla \times (\mathbf{u} \times \overline{\mathbf{B}}) \rangle$.

Como la fuerza electromotriz debe ser una función lineal de $\overline{\mathbf{B}}$, y suponemos que existe una gran separación de escalas entre los campos medios y los fluctuantes, $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ debe poder escribirse como una serie rápidamente convergente $\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} \overline{B}_j + \beta_{ijk} \partial_k \overline{B}_j + \dots$. El subíndice i denota la componente cartesiana x_i , y ∂_k es la derivada espacial respecto a la coordenada x_k . Bajo las aproximaciones realizadas en la ecuación (2.16) solo los dos primeros términos en esta serie son no nulos. Los coeficientes α_{ij} y β_{ijk} son densidades tensoriales para conservar las propiedades vectoriales de la ecuación (2.14). Utilizando la expresión de \mathcal{E} y las relaciones de Reynolds (2.12) obtenemos

$$\alpha_{ij} = \tau \epsilon_{ilm} \langle u_l \partial_j u_m \rangle , \quad (2.17)$$

$$\beta_{ijk} = -\tau \epsilon_{ilk} \langle u_l u_j \rangle , \quad (2.18)$$

donde ϵ_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita.

En el caso en el que la turbulencia es isotrópica, podemos escribir $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ y $\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$ para obtener

$$\alpha = -\frac{\tau}{3} \langle \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{u} \rangle , \quad (2.19)$$

$$\beta = \frac{\tau}{3} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle . \quad (2.20)$$

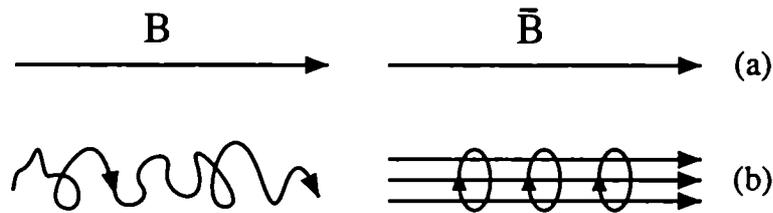


Fig. 2.4: Esquema de la acción de la difusión turbulenta introducida en el campo medio por el efecto β , y de la creación de nuevo campo medio por el efecto α . (a) El campo magnético B y su valor medio \bar{B} en un instante inicial. (b) Los mismos campos luego de ser adveccionados.

Finalmente, reemplazando en la ecuación de inducción para el campo medio (2.14) obtenemos

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{U} \times \bar{B} + \alpha \bar{B}) + (\eta + \beta) \nabla^2 \bar{B}. \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es usualmente conocida como la ecuación del dínamo. En general α y β deben ser tensores, aunque la convención aquí utilizada es la más usual. En los casos de interés esta aproximación no se satisface ya que la turbulencia en objetos rotantes puede llegar a ser fuertemente anisótropa. Además, los intensos campos magnéticos en estos objetos convierten a α y a β en funciones de la intensidad del campo, a través de la acción de la fuerza de Lorentz sobre el campo de velocidades u . Algunas de estas correcciones serán introducidas en los capítulos siguientes. Sin embargo, es llamativo que aún en su forma más sencilla la ecuación (2.21) predice al menos cualitativamente la dinámica del campo magnético medio.

El primer término a la derecha de la ecuación (2.21) describe simplemente la advección del campo \bar{B} por el campo de velocidades medio, en la misma forma que el campo magnético total es adveccionado por el campo de velocidades en la ecuación de inducción (2.6). La difusividad η en la ecuación (2.21) se ve modificada por el nuevo coeficiente β , y como generalmente η es pequeño (ver Tabla 2.1), el campo medio se difunde mucho más rápido

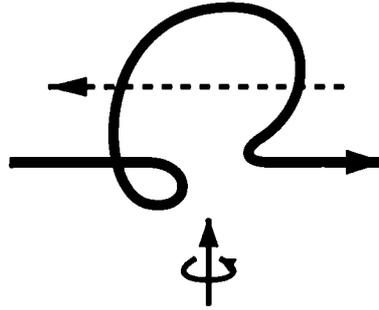


Fig. 2.5: Un tubo de flujo magnético bajo la acción de un movimiento helicoidal. El flujo genera campo helicoidal que a su vez genera una corriente, en este caso opuesta al campo original (línea de puntos).

que B . El mecanismo responsable de esta rápida difusión es el mezclado turbulento (ver Figura 2.4). La turbulencia naturalmente anuda las líneas de campo magnético, y luego de promediar el resultado es que el campo medio se esparce por la advección del campo de velocidades fluctuante.

La fuerza electromotriz $\alpha \overline{B}$ en (2.21) es usualmente conocida como efecto α [Kra80]. Los desplazamientos de las líneas de campo no son enteramente aleatorios. Para que α sea distinto de cero, el flujo debe tener helicidad. De hecho la helicidad cinética de un flujo es $H_c = \int \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{u} dV$, y α es directamente proporcional a la helicidad media. Esta magnitud es un pseudoescalar y por lo tanto cambia de signo frente a reflexiones. Así, si α es no nulo debe existir una dirección privilegiada en el flujo. En objetos astrofísicos la estratificación de densidad y la rotación son probablemente los responsables de esta asimetría. Elementos de fluido ascendentes (descendentes) se expanden (contraen) al ajustarse a la densidad ambiental. La fuerza de Coriolis los hace rotar en direcciones opuestas, por lo que el tubo de flujo advechado adquiere una estructura helicoidal en valor medio (Figura 2.4). Entonces, la interpretación del nuevo término es que los movimientos helicoidales en el campo microscópico turbulento generan campo magnético macroscópico. Nuevo campo \overline{B} es generado a partir de $\nabla \times \overline{B}$, es decir, a partir de *rollos* en el tubo de flujo, en la

misma forma en que lo hacían los eventos ciclónicos de Parker (Figura 2.5). Por lo tanto, el punto fundamental para el funcionamiento del dínamo magnetohidrodinámico es que la rotación de un objeto rompe la simetría de reflexión y la turbulencia en su interior adquiere helicidad.

2.4 Efectos cinéticos

El marco teórico comúnmente usado para describir mecanismos de dínamo en escenarios astrofísicos es el magnetohidrodinámico. En el caso del dínamo terrestre y solar, la teoría del dínamo MHD ha resultado exitosa, modelando correctamente la dinámica de los campos magnéticos observados. Es de esperarse que la teoría MHD pueda ser utilizada con el mismo éxito en otros dínamos planetarios y en estrellas no degeneradas.

Sin embargo, cuando la frecuencia de colisiones en el plasma es suficientemente pequeña, existen ciertos efectos cinéticos que no pueden ser despreciados. Siempre que un conductor se encuentra en un campo magnético exterior \mathbf{B} , la relación entre densidad de corriente y el campo eléctrico (2.5) se ve modificada según $J_i = \sigma_{ik} E_k$, donde el tensor conductividad σ_{ik} es función de \mathbf{B} [Lan80]. Cuando la frecuencia de colisiones es grande, la anisotropía introducida por el campo magnético en la conductividad puede ser despreciada y la aproximación MHD es válida.

El primer paso para crear una teoría mas apropiada en otros escenarios es la inclusión en la ley de Ohm de efectos de dos fluidos (iones y electrones). De estos efectos cinéticos, los mas relevantes para el dínamo son en muchos casos el efecto Hall y la difusión ambipolar. En un plasma parcialmente ionizado, la difusión ambipolar es importante en aquellos escenarios en los cuales la densidad de átomos neutros es lo suficientemente grande como para que se reduzca la frecuencia de colisiones entre electrones e iones. El efecto de la difusión ambipolar en el problema del dínamo fue estudiado en detalle por Zweibel [Zwe88]. En

la presente sección estudiaremos el impacto del efecto Hall en el proceso de generación de energía magnética [Min02b, Min03a].

Cuando la densidad de portadores de carga en el plasma es baja, la frecuencia de colisiones puede ser menor que la frecuencia de Larmor. En este caso debemos considerar la ley de Ohm con efecto Hall,

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{U} \times \mathbf{B}}{c\zeta} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{nec} + \frac{4\pi\eta}{c^2}\mathbf{J}, \quad (2.22)$$

donde n es la densidad de partículas cargadas y e es la carga del electrón. El efecto Hall, representado por el término $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, es una de las manifestaciones más importantes de la diferencia de velocidad entre las especies. Para un plasma neutro de electrones e iones, la corriente \mathbf{J} es de hecho una medida directa de la velocidad relativa entre estas especies. La inclusión del término de Hall en la ecuación de inducción (2.6) lleva al sistema de ecuaciones Hall-MHD. En un conductor perfecto, las líneas de flujo en este caso están congeladas al flujo de electrones en lugar del campo de velocidades neto.

Los objetos astrofísicos en los cuales el efecto Hall es relevante son ampliamente conocidos en la literatura. Entre otros, tiene una profunda influencia en la dinámica de campos magnéticos en *nubes moleculares* [War99a]. Se sabe que en *discos de acreción* (especialmente en discos protoestelares) el efecto Hall afecta la inestabilidad magnetorrotacional responsable de la generación de turbulencia [War99b, Bal01]. Norman y Heyvaerts [Nor85] también encontraron que el efecto puede ser relevante durante las etapas tempranas de formación estelar. El efecto Hall es importante en estrellas degeneradas y objetos compactos como *enanas blancas* [Mus95] y *estrellas de neutrones* [Sha97, Pot99]. También puede ser relevante en la generación y evolución de campos magnéticos en el universo temprano [Taj92].

La relevancia del efecto Hall en estos objetos astrofísicos puede mostrarse estudiando los cocientes entre los términos de inducción, Hall y de disipación en la ley de Ohm generalizada.

	B [Gauss]	n [cm ⁻³]	n_N [cm ⁻³]	H/O	H/I
Región convectiva solar	10 ⁴	10 ²⁶	9,3 × 10 ²³	3,2 × 10 ⁻⁶	1,6 × 10 ⁻¹⁴
Discos de acreción					
protoestelares	10 ⁻²	10 ⁵	10 ¹³	10 ²	4 × 10 ⁻⁴
en novae enanas	10 ⁹	10 ⁸	10 ¹⁶	10 ²	1
Estrellas de neutrones	10 ¹²	10 ³⁶	1,2 × 10 ³⁸	10 ³	1

Tabla 2.2: Cocientes entre el término inductivo (I), de disipación de Ohm (O), y de Hall (H) para diferentes objetos astrofísicos. Se da también la densidad de electrones n , de neutros n_N y la intensidad media del campo magnético B [Kip91, Tam93, Vät96, Pri00]. El efecto Hall es claramente despreciable en el caso solar, pero no en estrellas de neutrones [Hol02] o discos de acreción [San02].

Denotando los términos en la ecuación (2.22) de izquierda a derecha por I (inductivo), H (Hall), y O (Ohm), podemos armar cocientes adimensionales

$$\frac{H}{O} = \frac{\omega_e}{\nu_e}, \quad (2.23)$$

$$\frac{H}{I} = \frac{\omega_e}{\nu_e R_M}. \quad (2.24)$$

La frecuencia de ciclotrón electrónica ω_e y la frecuencia de colisiones ν_e están dadas por

$$\omega_e = \frac{eB}{mc}, \quad (2.25)$$

$$\nu_e = \frac{4\pi e^2 n \eta}{mc^2}, \quad (2.26)$$

donde m es la masa del electrón. A partir de la ley de Ohm (2.22) podemos también definir una longitud característica L_{Hall} , por debajo de la cual el efecto Hall es relevante. En un

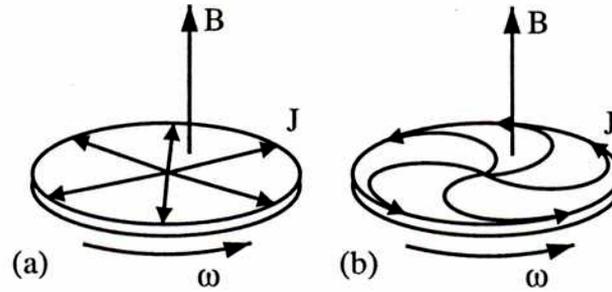


Fig. 2.6: (a) El disco de Faraday, y (b) el disco de Faraday con efecto Hall.

plasma de hidrógeno completamente ionizado, $L_{Hall} = cU_A/(\omega_{pi}U)$, donde $U_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ es la velocidad de Alfvén, $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi ne^2/m_p}$ es la frecuencia iónica del plasma, y m_p es la masa del protón. En el caso general, el valor de L_{Hall} puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.23) y (2.24). La Tabla 2.2 muestra los valores de los cocientes (2.23) y (2.24) para diferentes objetos astrofísicos. En el Capítulo 5 haremos un análisis detallado de estos números en algunos objetos particulares.

A pesar de la relevancia del efecto Hall en muchos de estos objetos, hasta el momento sus consecuencias en la generación del campo magnético no han sido consideradas, salvo por algunos estudios en geometrías particulares [Hei83, Gal94]. ¿Cómo se modifica el dínamo al considerar el efecto Hall? Consideremos nuevamente el caso más sencillo del dínamo homopolar. En el disco la diferencia de potencial que se genera introduce, al cortocircuitar el borde y el centro del disco, una corriente radial de orden U/c (Figura 2.6.a). En presencia del efecto Hall, aparece una nueva componente de la corriente simultáneamente perpendicular al campo eléctrico y magnético. Así, la corriente tiene también una componente azimutal que genera nuevo campo magnético perpendicular al plano del disco y que por lo tanto puede aumentar o disminuir el flujo total y la inducción magnética (Figura 2.6.b). A diferencia del dínamo homopolar clásico, en este caso la orientación de \mathbf{B} es también importante para decidir la suerte del campo magnético, y el dínamo puede resultar siendo tanto favorecido como inhibido.

En la presente sección calcularemos el coeficiente α en la aproximación de campo medio incluyendo el efecto Hall. La aproximación de primer orden (FOSA) utilizada en la sección anterior requiere que el número de Reynolds R_M o de Strouhal S sean mucho menores que la unidad. Estas condiciones no se satisfacen en la mayoría de los casos de interés en astrofísica, como en el Sol o en las galaxias. Utilizaremos entonces una clausura alternativa conocida como *aproximación reducida* (RSA), propuesta recientemente [Fie99, Bla99] y que resuelve algunos de estos problemas.

El sistema de ecuaciones Hall-MHD está conformado por la ecuación de Navier-Stokes (2.7), y la ecuación de inducción (2.6) modificada por la ley de Ohm generalizada (2.22),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times [(\mathbf{U} - \epsilon \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= \mathbf{U} \times (\nabla \times \mathbf{U}) + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \left(P + \frac{U^2}{2} \right),\end{aligned}\quad (2.27)$$

junto con las condiciones $\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. En la ecuación de inducción modificada $\epsilon = L_{Hall}/L$, donde L es una longitud característica del sistema.

Con el fin de obtener correcciones al efecto α , consideramos sin pérdida de generalidad el caso ideal $\nu = \eta = 0$. Estamos interesados en encontrar si este sistema puede generar un campo magnético macroscópico a partir de una semilla en escalas pequeñas. Por lo tanto, consideraremos un estado inicial $\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0$ como una solución de las ecuaciones (2.27) en ausencia de campo macroscópico. Ahora perturbamos el sistema con

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{b} + \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} + \mathbf{u} + \mathbf{u}_0,\end{aligned}\quad (2.28)$$

donde la barra denota (como en la sección anterior) campos de gran escala promediados espacial o estadísticamente, y donde \mathbf{u} y \mathbf{b} son perturbaciones de pequeña escala. Mientras que \mathbf{u}_0 y \mathbf{b}_0 son campos en la microescala en ausencia de $\bar{\mathbf{B}}$, \mathbf{b} es la perturbación cuando $\bar{\mathbf{B}}$ está presente y no es necesariamente isótropo. Todos los campos magnéticos microscópicos

son de valor medio nulo, mientras que sus productos pueden no serlo. Reemplazando en la ecuaciones (2.27), tomando valor medio y usando la ecuación de inducción para \mathbf{b}_0 , obtenemos una ecuación para la evolución del campo magnético macroscópico

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times \left[(\bar{\mathbf{U}} - \epsilon \nabla \times \bar{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{B}} \right] + \langle \nabla \times (\mathbf{u}_0^e \times \mathbf{b} + \mathbf{u}^e \times \mathbf{b}_0) \rangle , \quad (2.29)$$

donde $\mathbf{u}^e \equiv \mathbf{u} - \epsilon \nabla \times \mathbf{b}$ es la velocidad de los electrones. Los términos cuadráticos en \mathbf{b} y \mathbf{u} en la ecuación (2.29) fueron despreciados, como se hace habitualmente en teoría de campo medio. Esta aproximación no va a ser válida cuando el campo magnético crezca hasta valores finitos. Sin embargo, la aproximación utilizada (RSA) es menos restrictiva que FOSA ya que solo requiere que $b, u \ll \bar{B}$ permitiendo $b_0 \gg \bar{B}$. En FOSA, la intensidad del campo fluctuante total $\mathbf{b} + \mathbf{b}_0$ debe ser menor que la del campo $\bar{\mathbf{B}}$, lo que no se satisface en astrofísica ya que la intensidad del campo microscópico crece mas rápido que la del campo medio [Kul92].

También podemos derivar una ecuación para el campo magnético perturbado de pequeña escala \mathbf{b} restando la ecuación de inducción generalizada a la ecuación (2.29). Aquí podemos despreciar los términos que contengan derivadas espaciales de los campos medios ya que las variaciones en escalas grandes son despreciables en la dinámica de la microescala. También podemos ignorar los términos promediados ya que por las relaciones de Reynolds (2.12) no contribuirán a la ecuación de $\bar{\mathbf{B}}$ y por lo tanto tampoco al efecto α . Finalmente obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \approx \nabla \times (\mathbf{u}_0^e \times \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{b}_0 \times \bar{\mathbf{U}}) . \quad (2.30)$$

Con las mismas aproximaciones y escribiendo la presión como $P = \bar{P} + p + p_0$, la ecuación de Navier-Stokes para el campo fluctuante resulta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{b}_0) \times \bar{\mathbf{B}} - (\bar{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 - \nabla p . \quad (2.31)$$

De la divergencia de la ecuación (2.31) obtenemos al mismo orden $p = -\mathbf{b}_0 \cdot \overline{\mathbf{B}}$ para la perturbación de pequeña escala de la presión, la cual al ser reemplazada en la ecuación (2.31) da por resultado

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = (\overline{\mathbf{B}} \cdot \nabla) \mathbf{b}_0 - (\overline{\mathbf{U}} \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 \quad (2.32)$$

Con el fin de obtener una expresión para α clausuramos la ecuación (2.29) aproximando las derivadas temporales en (2.30) y (2.32) por la inversa de un tiempo característico de correlación τ . Esta hipótesis, aunque común en la teoría de campo medio, no tiene por el momento confirmación experimental o teórica de su validez. Mininni, Gómez y Mahajan [Min03a] presentaron una extensión de esta clausura independiente de τ .

Asumiendo turbulencia isótropa y eliminando términos proporcionales a $\overline{\mathbf{U}}$ en las ecuaciones de pequeña escala mediante un cambio de sistema de referencia, la ecuación de evolución para el campo medio $\overline{\mathbf{B}}$ se escribe

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times [(\overline{\mathbf{U}} - \epsilon \nabla \times \overline{\mathbf{B}}) \times \overline{\mathbf{B}} + \alpha \overline{\mathbf{B}}] , \quad (2.33)$$

donde el término $\alpha \overline{\mathbf{B}}$ describe la contribución de la microescala a la generación de campo magnético, con

$$\alpha = \frac{\tau}{3} (-\langle \mathbf{u}_0^e \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0^e \rangle + \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{b}_0 \rangle - \epsilon \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_0^e \rangle) . \quad (2.34)$$

Los resultados de la teoría de campo medio clásica (2.19) pueden recuperarse a partir de la ecuación (2.34) en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. En ese caso $\mathbf{u}_0^e \rightarrow \mathbf{u}_0$ y la ecuación (2.34) se reduce a $\alpha = \tau(-\langle \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{b}_0 \rangle)/3$. El primer término corresponde a la teoría de Krause y Rädler. El segundo término corresponde a una corrección de saturación magnética al efecto α obtenida por primera vez por Pouquet, Frisch y Leorat [Pou76] utilizando una clausura EDQNM del sistema de ecuaciones MHD. En el caso en el que $b_0 \ll \overline{B}$, la expresión se reduce a (2.19).

Además de esta corrección, nuestra expresión mas general difiere del resultado clásico en dos aspectos: reemplaza la helicidad cinética por la helicidad del flujo electrónico, y contiene un término extra debido a la corriente Hall en la microescala. Una consecuencia no trivial de este resultado es que mientras que la expresión de Frisch, Pouquet y Leorat se anula en un estado alfvénico puro $\mathbf{u} = \pm \mathbf{b}$ [Gru94], la ecuación (2.34) no lo hace.

Para cuantificar la diferencia introducida en el coeficiente α por el efecto Hall, asumiremos $\epsilon = 1$, y que los estados iniciales \mathbf{u}_0 , \mathbf{b}_0 son estados de equilibrio de las ecuaciones Hall-MHD conocidos como *doble-Beltrami* [Mah98]. Las dos condiciones de Beltrami

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 - \nabla \times \mathbf{b}_0 &= \mathbf{b}_0/a \\ \mathbf{b}_0 + \nabla \times \mathbf{u}_0 &= d \mathbf{u}_0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

expresan leyes físicas sencillas: los electrones (sin inercia en la aproximación MHD) siguen las líneas de campo, mientras que los iones siguen las líneas de campo modificadas por su vorticidad. Los parámetros a y d miden la helicidad magnética y la helicidad cruzada generalizada, y describen completamente el estado del sistema. A diferencia de otras familias de equilibrios MHD propuestos en la literatura, tales como Grad-Shafranov o estados de relajación de Taylor, estos equilibrios no requieren ninguna simetría exacta (Grad-Shafranov), ni que \mathbf{U} y ∇P sean despreciables (Taylor).

Las condiciones doble-Beltrami (ecuaciones [2.35]) son acompañadas por la ecuación de Bernoulli $\nabla(p_0 + u_0^2/2) = 0$, donde p_0 es la presión de equilibrio. Estas ecuaciones admiten soluciones que son la suma de dos flujos de Beltrami ($\nabla \times \mathbf{b}_0 = \lambda \mathbf{b}_0$) con escalas espaciales determinadas por la inversa de $\lambda_{\pm} = -r/2 \pm \sqrt{r^2/4 - s}$ (donde $r = 1/a - d$ y $s = 1 - d/a$). Para el dínamo, nos interesa el caso en el cual existe separación entre ambas escalas, lo que requiere $r^2 \gg 4s$. La escala mas grande puede asociarse con la longitud característica del sistema, y la mas pequeña con una escala característica de la turbulencia. Para reflejar las condiciones iniciales apropiadas para un dínamo, consideraremos a los campos iniciales

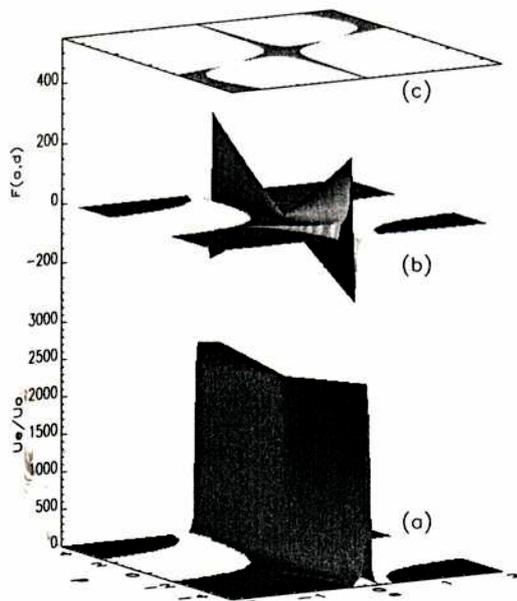


Fig. 2.7: (a) Cociente u_e/u_0 ; las regiones vacías corresponden a zonas donde las escalas se vuelven complejas. (b) Amplitud de F . (c) Región donde la condición de separación de escalas se satisface.

solo de pequeña escala (λ^{-1} denotará la pequeña escala), dados por $\nabla \times \mathbf{b}_0 = \lambda \mathbf{b}_0$ y $\mathbf{u}_0 = (\lambda + 1/a)\mathbf{b}_0$.

Una de las consecuencias fundamentales del efecto Hall es la de reemplazar la velocidad neta del fluido por la velocidad electrónica en la expresión de α . Considerando las condiciones de Beltrami y los campos iniciales, podemos escribir la razón entre ambas como

$$\frac{u_0^e}{u_0} = \frac{1}{\lambda a + 1}. \quad (2.36)$$

En las etapas iniciales del dínamo, el valor de esta fracción es relevante para determinar la diferencia en α causada por el efecto Hall. La Figura 2.7.a muestra este valor en función de los parámetros a y d que describen el equilibrio. Cuando $|a|$ y $|d|$ son grandes, $u_0^e \approx 0$ implica que el efecto α es inhibido. Por otro lado, cuando $|a|$ es pequeño, u_0^e aumenta considerablemente, aunque el movimiento neto del fluido sea pequeño.

Usando las condiciones del equilibrio podemos escribir $\alpha = \tau F(a, d) \langle \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0 \rangle / 3$, con $F(a, d) = [1 - (1/a + \lambda)/a](1/a + \lambda)^{-2}$. La Figura 2.7.b muestra la dependencia de la función F con los parámetros a y d , mientras que la Figura 2.7.c muestra las regiones donde la condición de separación de escalas se satisface. La región donde el efecto α es reducido corresponde a valores grandes de $|a|$ y $|d|$, ya que en este caso el efecto Hall reduce la amplitud del flujo de electrones a valores mucho menores que el del movimiento neto del fluido. Cuando $|a|$ es pequeño nuevamente encontramos una gran diferencia entre el movimiento del fluido y el de los electrones, pero ahora \mathbf{u}_0^e es mucho mayor que \mathbf{u} . En este caso, el efecto α se vuelve mas efectivo.

La inclusión del efecto Hall tiene un impacto profundo en el dínamo. Al reemplazar el campo de velocidades del fluido por el de los electrones, permite amplificar o inhibir el efecto α . Este resultado es relevante para explicar la generación de campo magnéticos en discos de acreción y estrellas compactas, entre otros objetos. Si bien la teoría de campo medio utilizada requiere de muchas aproximaciones y solo permite estudiar el caso cinemático, sus resultados pueden ser utilizados para construir modelos semiempíricos de dínamos estelares y galácticos. En el Capítulo 5, mediante simulaciones directas del sistema de ecuaciones MHD y Hall-MHD, podremos verificar la validez de algunas de las predicciones de esta teoría.

Capítulo 3

El dínamo solar

3.1 Introducción

El Sol es la estrella mas cercana a la Tierra. Aunque en una primera aproximación parece hallarse en estado estacionario, el Sol es una estrella activa y en su superficie se generan gran cantidad de fenómenos transitorios, tales como: manchas, prominencias, fulguraciones, vientos con componentes rápidas y lentas y aceleración de partículas. Estos y otros procesos no estacionarios son causados por los intensos campos magnéticos generados por el mismo Sol.

Las manchas solares son, por la facilidad con que pueden observarse, el indicador mas antiguo disponible de cambios en el Sol. Existen registros de avistamientos de manchas a ojo desnudo en el año 350 A.C. por Teofrasto de Atenas, y desde el año 164 A.C. se conocen registros en China. Wittmann [Wit87] compiló un completo catálogo de observaciones a ojo desnudo. Las mayoría de las observaciones tempranas están relacionadas con motivos cabalísticos:

“En el Sol se veía algo que parecía un gran número de golondrinas. Desaparecieron después de varios días. Este portento fue interpretado por Wang Yin como el presagio de la abdicación y la muerte de los emperadores Min y Huai.”

Jin-Shu, Zhi. China, 27 de febrero de 299 D.C.

“Una mancha tan grande como un huevo de gallina fue observada en el Sol. Al poco tiempo el emperador murió.”

Jin-Shu, Zhi. China, 7 de noviembre de 359 D.C.

“En el año 225 durante el califato de Al-Mu'tasim aparecieron manchas negras cerca del centro del Sol. Esto tuvo lugar el martes 19 de Rajab del año 225 (25 de mayo de 840 D.C.), y a los dos días grandes calamidades ocurrieron. Como Al-Kindi testificó, esta mancha persistió en el Sol por 91 días, y al poco tiempo Mu'tasim murió.”

De los escritos de Ibn Jaafar B. Al-Muktafi. Oriente medio.

También Henry Hudson en 1590 observó manchas en el Sol cuando se encontraba cerca de las costas de África, y Kepler en 1607 reportó con gran detalle la observación de una mancha solar. Sin embargo estos datos son discontinuos en el tiempo y carecen de la veracidad de los registros posteriores a la invención del telescopio. En occidente, existen registros aislados del número de manchas desde 1610, cuando Galileo Galilei dirigió por primera vez un telescopio hacia el Sol. Galileo inició sus observaciones del disco solar en el verano de ese año y las plasmó en varios dibujos que envió a Maffeo Barberini, después conocido como el Papa Urbano VIII (Figura 3.1).

En aquella época las manchas fueron consideradas por algunos como nuevos planetas o como nubes opacas de humo emitidas por la combustión del Sol. Cerca del año 1700 comienzan a registrarse en forma anual y desde 1750 existen datos mensuales. A partir del



Fig. 3.1: Dibujo de la superficie solar por Galileo Galilei. Pueden observarse las manchas solares. Este diagrama corresponde a una serie de nueve que Galileo realizó entre el 3 y el 11 de mayo de 1612 (biblioteca Vaticana).

año 1818 se registra el número de manchas en forma diaria. Sin embargo los datos más confiables recién comienzan en el año 1848. Ese año el astrónomo suizo Johann Rudolph Wolf introdujo un nuevo índice como una mejor estimación del número de manchas visibles en un hemisferio del Sol. El número de Wolf está dado por

$$R = k (10g + f) \quad (3.1)$$

donde f es el número de manchas individuales, g el número de grupos de manchas, y k un factor de corrección utilizado para ajustar las diferencias entre los observadores, telescopios y condiciones de avistaje. Por las razones citadas, los datos previos al año 1820 tienen una incerteza de aproximadamente un factor 2, con valores aún mayores para los datos anteriores a 1750. Los datos posteriores a 1850 son considerados confiables, con un error para los datos actuales menor al 5% [Fou90].

Sabemos hoy que las manchas solares son zonas más frías de la fotosfera formadas por la concentración del flujo magnético. La acumulación de líneas de campo inhibe la convección en la base de la fotosfera e impide el flujo de calor perpendicular a las líneas, razón por la cual la región es comparativamente más fría que su entorno. En el área central de la mancha (*umbra*), más oscura y con un radio típico de 10.000 a 20.000 km, el campo magnético es esencialmente radial y alcanza valores de hasta 4.000 Gauss. La temperatura en el centro es de 3.700 K, aproximadamente 2.100 K más frío que en el resto de la fotosfera. Rodeando a la umbra, la *penumbra* está formada por filamentos claros y oscuros de 5.000 a 7.000 km de largo y 300 a 400 km de ancho. Estos filamentos trazan líneas magnéticas oblicuas y progresivamente tangentes a la superficie solar, a medida que nos alejamos de la umbra. Muchas manchas desaparecen a los pocos días de formarse, pero algunas más grandes sobreviven por varios meses.

Puede observarse cierta periodicidad en el número de manchas en función del tiempo (Figura 3.2). El primero en descubrir esta variación fue Schwabe en 1843 [Sch43], que estimó el período del ciclo en 10 años. Cinco años después, Wolf reconstruyó las series anuales hasta el año 1700 y con estos datos confirmó la existencia del ciclo solar y determinó su duración

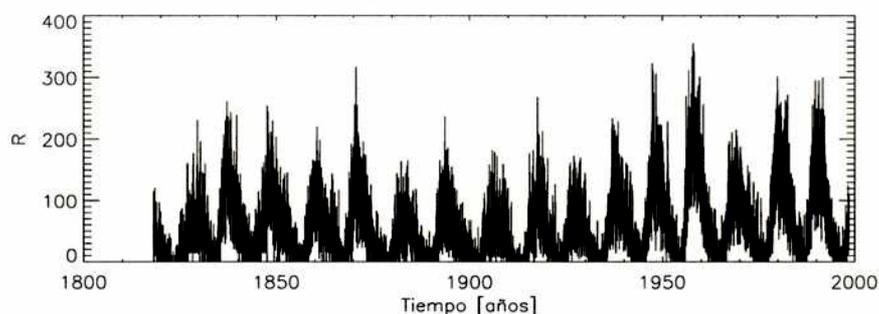


Fig. 3.2: Número de Wolf diario R desde 1820 hasta el año 2000. Se observa claramente el ciclo solar, con un período medio cercano a los 11 años, así como una fuerte componente irregular (Observatorio de Greenwich).

media en 11,1 años. También describió un comportamiento irregular, con fluctuaciones en el período y en la intensidad de los máximos. Esta periodicidad temporal va acompañada por una variación periódica en la zona donde se generan las manchas. La mayoría aparecen confinadas en dos franjas entre el ecuador y $\pm 35^\circ$ de latitud. La latitud media varía en el tiempo: las primeras manchas de un nuevo ciclo aparecen después del mínimo con una latitud media de 28° , luego de 6 años la latitud media es de 12° y a los 11 años llega a 7° [Har92]. Este comportamiento se distingue claramente en los diagramas de mariposas de Maunder, que muestran la latitud y el área de las manchas en función del tiempo (Figura 3.3.a). Los detalles de la construcción de este tipo de diagrama se verán en el Capítulo 4.

En 1908 Hale encontró evidencia de la presencia de campos magnéticos en las manchas solares, observando la separación de líneas espectrales por efecto Zeeman [Hal08]. Hasta aquel entonces se desconocía la existencia de campos magnéticos fuera de la Tierra y el descubrimiento suscitó gran curiosidad e interés. Las manchas generalmente se forman de a pares con polaridades de campo magnético opuestas, y luego se mueven lentamente hacia el ecuador y los polos alejándose entre sí. La mancha precedente (la primera en la dirección de la rotación solar) está usualmente localizada en una latitud ligeramente menor que su compañera, de forma tal que el segmento que une ambas manchas forma un ángulo con la

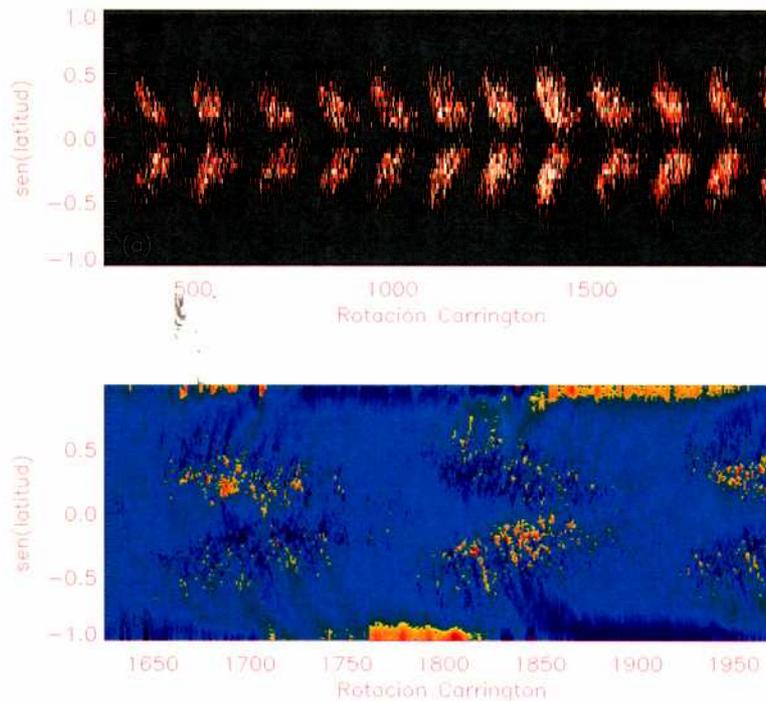


Fig. 3.3: (a) Diagrama de mariposas de Maunder. El gráfico muestra el área cubierta por manchas en función de la latitud y el tiempo desde 1874 (Greenwich). Una rotación de Carrington corresponde a un período de 27,28 días, y su cero al 9 de noviembre de 1853. (b) Distribución de campo magnético en la superficie solar a partir de magnetogramas solares de los últimos dos ciclos y medio (Kitt Peak). Áreas rojas corresponden a regiones de polaridad positiva y azules a polaridad negativa. Puede observarse la inversión de polaridad en los polos, y en las manchas al final del ciclo. Comparar con la distribución de manchas en los últimos dos ciclos.

dirección del ecuador. El ángulo aumenta con la latitud, desde 4° para pares de manchas cerca del ecuador, hasta 10° cerca de los 35° de latitud. Este resultado observacional es conocido como la *ley de Joy*.

Once años después, Hale descubrió que la polaridad magnética de los pares de manchas en cada hemisferio se invertía luego de cada mínimo de actividad (*ley de polaridad de Hale*). La posterior invención del magnetógrafo [Bab55] permitió la medición del campo magnético solar y el descubrimiento de la inversión del campo dipolar cada 11 años. Hoy sabemos que tanto el ciclo de 11 años de las manchas solares como otros aspectos observables de la atmósfera del Sol, tales como las radiaciones de longitud de onda corta, el viento solar o la producción de partículas energéticas, son manifestaciones de un ciclo de 22 años asociado con los campos magnéticos y conocido como *ciclo de Hale*.

La Figura 3.3.b muestra un diagrama de mariposas construido a partir de magnetogramas. Puede observarse claramente la inversión del campo en los polos, así como la inversión de polaridad de las manchas al final de cada ciclo. La actividad magnética de un nuevo ciclo comienza entre 2 y 3,5 años antes del mínimo del ciclo anterior, con la aparición de regiones bipolares en una banda de latitud entre 40° y 60° . Las primeras manchas aparecen entre 0,5 y 1,5 años después. El campo magnético solar se invierte 2 años después del máximo de actividad, y las últimas regiones bipolares del ciclo aparecen dos años después del mínimo [Har92]. Esto permite definir un ciclo de actividad extendida, con una extensión temporal de unos 15 años, y una superposición media entre ciclos de alrededor de 5 años.

La formación de pares de manchas puede ser explicada en términos magnetohidrodinámicos a partir de un modelo sencillo propuesto por Babcock y modelado posteriormente por Leighton [Bab61, Lei69]. Supongamos que el Sol tiene un campo magnético dipolar, mantenido por un mecanismo todavía no especificado. Cualquier rotación diferencial presente en la zona convectiva solar (debida a la redistribución de momento angular por la turbulencia) generará campo magnético toroidal B_ϕ (Figura 3.4). Consideremos entonces un tubo de flujo intenso generado en esta forma, y sumergido en la zona convectiva. Si

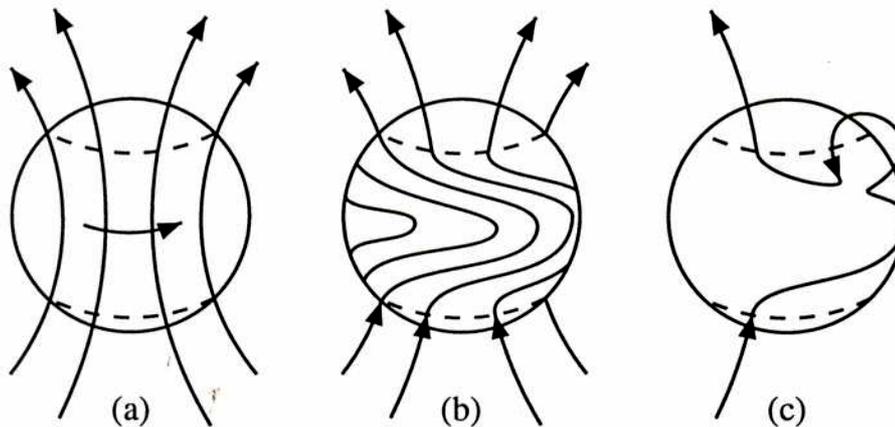


Fig. 3.4: El dínamo de Babcock-Leighton. (a) Las líneas del campo magnético dipolar son arrastradas por la rotación diferencial solar. (b) El Sol gira mas rápido en el ecuador que en los polos, y la diferencia de velocidad genera campo toroidal B_ϕ al enrollar las líneas. (c) Al inestabilizarse, los tubos de flujo toroidales generan las manchas en la superficie. La posterior migración y difusión invierte el campo dipolar dando origen a un nuevo ciclo.

se encuentra en equilibrio con el ambiente, su presión total $P + B_\phi^2/2$ debe ser igual a la presión atmosférica P_0 . Por lo tanto, la presión del fluido dentro del tubo P es menor que P_0 , y la densidad dentro del tubo debe ser también menor que la externa. El tubo siente entonces un empuje y sube a la superficie por *flotación magnética* [Par55]. Al subir, se expande y retuerce por acción de la fuerza de Coriolis. Al cruzar la fotosfera inhibe localmente la convección, dando de esta manera origen a las manchas. Este mecanismo sencillo, que forma la base de los dínamos conocidos como de Babcock-Leighton, explica correctamente muchos fenómenos observados, como el ángulo medio que forman los pares de manchas emergentes.

En los últimos años, la cantidad y calidad disponible de datos solares ha aumentado significativamente. Las observaciones del campo de velocidades, así como de diversos eventos relacionados con campos magnéticos [Fer01, Fer02], han permitido mejorar el entendimiento del ciclo de actividad solar. Por este motivo, el Sol es un caso paradigmático para la prueba de las teorías de dínamo, y para la comprensión del comportamiento de los campos

magnéticos estelares en general. Además de este interés teórico, existe un interés práctico en el problema ya que el campo magnético solar afecta las condiciones en la Tierra, por ejemplo a través de tormentas geomagnéticas.

Se han desarrollado muchos modelos teóricos que relacionan la actividad magnética solar con el ciclo de manchas [Lei69, Par93, Dur95, Cha96, Dur96, Dur97, Dik99]. Algunos de estos modelos describen adecuadamente las características regulares del ciclo, tales como las inversiones de polaridad y los diagramas de mariposas. A su vez, los modelos involucran diferentes mecanismos para explicar la generación de los campos magnéticos, como por ejemplo el efecto α [Cha96], dínamos de Babcock-Leighton [Lei69, Dik99], o inestabilidades de tubos de flujo magnético en la base de la zona convectiva [Fer94, Cal95]. Sin embargo, muchos problemas todavía no encuentran una solución satisfactoria. En particular, la causa de las irregularidades observadas en el ciclo solar es todavía desconocida.

Las llamativas propiedades del ciclo solar descritas previamente sugieren que, a pesar de las irregularidades causadas en la fotosfera por la turbulencia convectiva, el campo magnético está organizado y evoluciona espacial y temporalmente en forma coherente. Un modelo del dínamo solar debe explicar al menos el período medio del ciclo y su intensidad, la inversión de polaridad del campo magnético, y la migración de la actividad magnética hacia el ecuador a medida que el ciclo progresa. En el presente capítulo presentamos un modelo cinemático del dínamo solar [Min01b, Min02a] y estudiamos las características regulares del ciclo magnético. El modelo tiene la particularidad de utilizar perfiles de velocidad solar obtenidos a partir de observaciones. Los efectos no lineales presentes, debidos a la supresión de la turbulencia por el campo magnético, son responsables de la saturación del ciclo y del acoplamiento entre modos. Este modelo será utilizado en el capítulo siguiente para el estudio de las irregularidades del ciclo.

3.2 Dínamos cinemáticos

El problema completo del dínamo solar consiste en la resolución de la ecuación de inducción para la evolución del campo magnético acoplada con la ecuación de Navier-Stokes para el campo de velocidades. La complejidad de este sistema está mas allá de las capacidades teóricas y computacionales en nuestros días. Mientras que en el caso terrestre el número de Reynolds es lo suficientemente moderado como para permitir simulaciones directas [Gla95, Kag97, Chr98], en el caso estelar esto es imposible. Solo pueden simularse pequeñas regiones convectivas, y aún en este caso las aproximaciones simplificadoras que deben hacerse son excesivas. Sin embargo, estos intentos han mostrado que el mecanismo del dínamo autosostenido es capaz de mantener campos magnéticos intensos contra el decaimiento resistivo de la corriente [Men81, Cat99, Bra01a]. El problema completo del dínamo será estudiado en detalle en el Capítulo 5.

En el estudio de los dínamos estelares es por lo tanto necesario avanzar en forma conjunta con la teoría y las simulaciones, de tal forma de obtener truncaciones y aproximaciones que permitan la resolución del sistema y la correcta identificación de los mecanismos físicos que intervienen. La aproximación mas utilizada es la del dínamo cinemático, según la cual el campo de velocidades se considera conocido (preferentemente obtenido a partir de observaciones) y la ecuación de inducción se resuelve para estudiar si estos flujos pueden amplificar y sostener campos magnéticos. Para ello es necesario una clausura teórica o empírica de la ecuación de inducción, con el fin de considerar el acoplamiento entre los campos en diferentes escalas, y otros mecanismos como los de saturación del dínamo. En el caso del dínamo solar, la geometría de interés corresponde a la de una esfera rotante. Para escribir la ecuación de inducción (2.6) suponemos entonces simetría alrededor del eje de rotación (axisimetría) y separamos el campo magnético en componentes toroidales y poloidales: $\mathbf{B} = B_\phi \hat{\phi} + \mathbf{B}_p$, donde $\mathbf{B}_p = \nabla \times (A_p \hat{\phi})$ y A_p es la componente toroidal del potencial vector. Todas las cantidades son independientes del ángulo longitudinal ϕ . Considerando el campo de velocidades conocido y dado por la expresión $\mathbf{U} = u_r(r, \theta) \hat{r} +$

$u_\theta(r, \theta)\hat{\theta} + r \sin \theta \omega(r, \theta)\hat{\phi}$, podemos escribir las componentes de la ecuación de inducción como

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{1}{r} \left\{ -\frac{\partial}{\partial r} (r u_r B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta B_\phi) + \frac{\partial}{\partial r} \left[\omega r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_p) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial r} \left[\omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_p) \right] \right\} + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) B_\phi \\ \frac{\partial A_p}{\partial t} &= -\frac{1}{r} \left[u_r \frac{\partial}{\partial r} (r A_p) + \frac{u_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_p) \right] + \alpha B_\phi + \eta \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \right) A_p \quad (3.2) \end{aligned}$$

donde ω describe la rotación diferencial solar.

La ecuación de inducción para B_ϕ contiene términos proporcionales a ω y A_p . Estos términos describen la conversión de campo poloidal en toroidal por efecto de la rotación diferencial (ver Figura 3.4), conocida como efecto ω . La conversión del campo toroidal en nuevo campo poloidal es más problemática. Un mecanismo promisorio es el efecto α , descrito en el Capítulo 2. Este efecto introduce en la ecuación de inducción un nuevo término proporcional a αB . En el caso solar, veremos que α es despreciable comparado con ω en la ecuación para B_ϕ , por lo que la nueva contribución solo aparecerá en la ecuación para A_p (esta aproximación es usualmente conocida como *dínamo $\alpha\omega$*).

Sin embargo, la intensidad estimada del campo magnético solar en la base de la zona convectiva (aproximadamente 10^4 Gauss) no resulta muy compatible con las aproximaciones utilizadas en la teoría de campo medio. En particular, no existe consenso sobre el mecanismo de saturación del dínamo. Algunos autores sostienen que el efecto α es inhibido antes de alcanzar tales intensidades del campo [Cat96a]. Existen ciertos modelos, conocidos como *dínamos de interfase* [Par93], que solucionan algunos de estos problemas. Otros autores utilizan mecanismos alternativos para regenerar el campo poloidal, tales como los *dínamos de Babcock-Leighton* en los cuales la conversión es análoga al efecto α aunque opera en escalas espaciales más grandes [Dik99], o los modelos basados en inestabilidades de tubos de flujo magnético en la base de la zona convectiva [Fer94, Cal95].

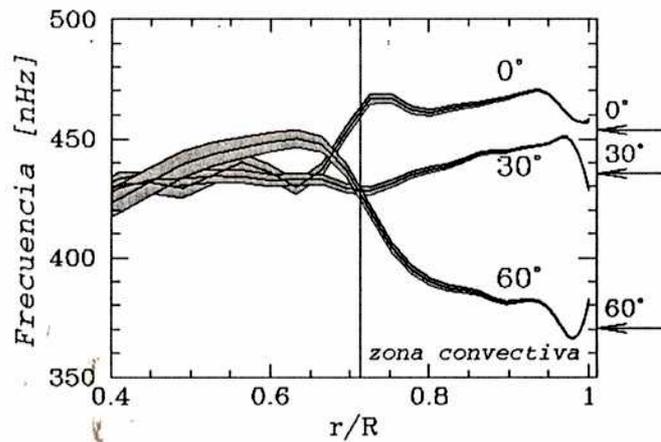


Fig. 3.5: Frecuencia angular de rotación solar en función del radio (R : radio solar) para tres diferentes latitudes, medido por el MDI (SOHO). El ancho de las líneas mide el error en las observaciones. El núcleo gira con velocidad angular aproximadamente constante. La región en la base de la zona convectiva donde los gradientes son mas fuertes es conocida como *tacoclina*.

El modelado matemático de estos efectos es similar, mediante la introducción de un término de fuente en la ecuación de inducción para A_p . La diferencia en los mecanismos está dada fuertemente por la distribución radial del término de fuente. Así, hemos agregado un nuevo término en la ecuación (3.2), cuya amplitud es controlada por el parámetro α , para modelar la conversión de campo toroidal en poloidal. Aunque usamos la notación α para este término, al igual que en la teoría de campo medio, por el momento no consideraremos ningún modelo en particular para explicar su origen. Como nuestro modelo considerará valores medios radiales, podremos olvidarnos de la ubicación espacial de la fuente y extraer conclusiones aplicables en varios de estos escenarios.

La resolución del sistema de ecuaciones (3.2) requiere del conocimiento de los campos u_r , u_θ y ω . En este capítulo consideraremos las características medias de los campos de velocidades, dejando para el capítulo siguiente las componentes turbulentas. Consideremos primero la dependencia espacial de la rotación diferencial ω . El Sol gira con un

período aproximado de 27 días. Sin embargo la rotación no es uniforme, en la superficie el período del ecuador es aproximadamente 4 días menor que el de los polos. Estas propiedades también cambian con la profundidad. Observaciones heliosismológicas sugieren que el núcleo solar gira aproximadamente como un cuerpo rígido. El gradiente latitudinal observado en la rotación solar es pequeño en la base de la zona convectiva, mientras que en su parte superior el perfil se mantiene aproximadamente independiente del radio (Figura 3.5). El cambio en el perfil de rotación se produce en una zona muy delgada en la base de la zona convectiva, conocida como *tacoclina*. Su ancho es menor al 10% del radio solar ($R_{\odot} = 6,96 \times 10^{10}$ cm). Se considera que esta es la región donde opera el dínamo; allí la intensidad del campo magnético es de aproximadamente 10^4 Gauss.

En la superficie, el perfil de rotación diferencial está dado por observaciones directas (Figura 3.6) y puede ajustarse por la expresión

$$\omega(\theta) = a + b \cos^2(\theta) + c \cos^4(\theta) , \quad (3.3)$$

donde $a = 2,913 \times 10^{-6}$ rad s $^{-1}$, $b = -0,405 \times 10^{-6}$ rad s $^{-1}$, $c = -0,422 \times 10^{-6}$ rad s $^{-1}$, y θ es la colatitud [Bec99]. Estos números dan, para un elemento de fluido en el ecuador, una velocidad $u_{\phi} \approx 2 \times 10^5$ cm s $^{-1}$.

Aunque en la superficie solar ha sido observado un flujo meridional hacia los polos, el flujo de retorno en la profundidad de la zona convectiva es desconocido. Por simplicidad, asumimos el flujo meridional incompresible aunque estratificado, con el flujo de masa dado por la siguiente función de corriente (Figura 3.7)

$$\psi(\theta, r) = -\psi_0 \sin^p(\theta) \cos^q(\theta) [r^n (r - r_{min})(r_{max} - r)] \quad (3.4)$$

con $p = 2,5$, $q = 1$ para ajustar el flujo de velocidad meridional observado en la superficie [Cam98]. Consideramos el perfil de densidad en la zona convectiva como $\rho(r) = \rho_0 r^{-n}$, y asumimos $n = 0,5$, $r_{min} = 0,6R_{\odot}$ y $r_{max} = R_{\odot}$, donde R_{\odot} es el radio solar [Dik99]. Por lo tanto, las componentes de la velocidad meridional u_r y u_{ϕ} están dadas por $\mathbf{u} =$

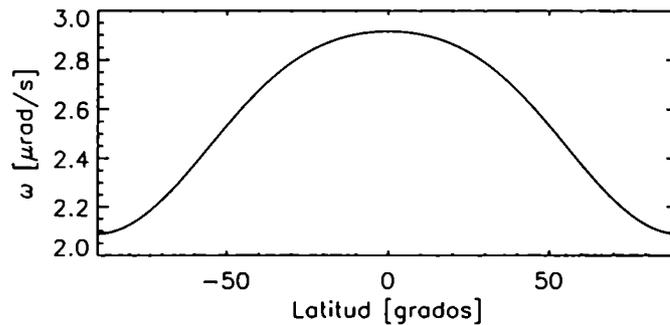


Fig. 3.6: Perfil de rotación diferencial $\omega(\theta)$ en la superficie solar.

$\rho^{-1} \nabla \times (\psi \hat{\phi})$. Notar que la amplitud de la velocidad meridional es controlada por la razón ψ_0/ρ_0 . El valor de este parámetro es elegido de forma tal que la velocidad meridional máxima en la superficie coincida con la observada en el Sol, cercana a 10 m s^{-1} [Cam98].

Considerando la evidencia observacional que sugiere que el dínamo actúa en una capa delgada en la base de la zona convectiva, reducimos las ecuaciones del dínamo (3.2) a ecuaciones unidimensionales en latitud. Mediciones heliosísmicas sugieren que el flujo de velocidad meridional varía en la dirección radial más suavemente que el campo magnético y que el perfil de rotación diferencial. Por lo tanto, extraemos las componentes del flujo meridional fuera de las derivadas radiales y los aproximamos por sus valores medios en el radio. La velocidad radial media obtenida a partir de la expresión (3.4) es positiva en el ecuador, cambia su signo en latitudes medias y es negativa en los polos, siendo una función par del ángulo latitudinal. La velocidad media latitudinal es menor que la velocidad media radial, y se anula en el ecuador. En ambos hemisferios la dirección de este campo apunta hacia los polos y por lo tanto es una función impar de la latitud.

El gradiente radial de la rotación diferencial solar es máximo en la base de la zona convectiva. En esta región también se acumulan los campos magnéticos más intensos, de aproximadamente 10^4 Gauss. El gradiente azimuthal es casi nulo en esta región, mientras que en las partes más altas el perfil se vuelve independiente del radio (Figura 3.5). Con todas

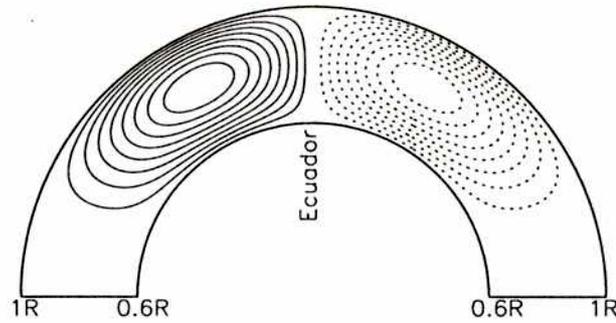


Fig. 3.7: Función corriente $\psi(\theta, r)$ del flujo de masa meridional adoptado para ajustar el flujo de velocidad en la superficie solar. Las líneas continuas y de puntos denotan signos opuestos.

estas características de los campos en mente, para obtener un modelo unidimensional podemos reemplazar las derivadas radiales restantes en los campos y en la rotación diferencial por $1/L_0$, donde L_0 es la profundidad de la tacoclina.

Para escribir las ecuaciones en forma adimensional, definimos variables con la ayuda de un tiempo característico $T_0 \approx 1$ año y una longitud característica $L_0 \approx 0,1R_\odot$. Las ecuaciones (3.2) resultan

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= - \left(u_r + \epsilon \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) B_\phi - \epsilon u_\theta \frac{\partial B_\phi}{\partial \theta} + \left(\omega \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) A_p + \\ &\quad + \omega \sin \theta \frac{\partial A_p}{\partial \theta} + \frac{1}{R_M} \left(-\frac{\epsilon^2}{\sin^2 \theta} + \epsilon^2 \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right) B_\phi \\ \frac{\partial A_p}{\partial t} &= - (u_r + \epsilon \cot \theta u_\theta) A_p - \epsilon u_\theta \frac{\partial A_p}{\partial \theta} + \alpha B_\phi + \\ &\quad + \frac{1}{R_M} \left(-\frac{\epsilon^2}{\sin^2 \theta} + \epsilon^2 \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 1 \right) A_p \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $R_M = L_0^2/(T_0\eta)$, $\epsilon = L_0/R_\odot \approx 0,1$, u_θ y u_r son los valores radiales medios del flujo meridional y ω es la rotación diferencial en la superficie, en unidades de L_0 y T_0 .

Cuando la energía magnética se vuelve comparable a la energía cinética, los efectos dinámicos no pueden ser despreciados. Es una práctica común introducir términos no lineales en la ecuación de inducción para modelar la saturación del dínamo debido a la supresión de la turbulencia por la fuerza de Lorentz cuando el campo magnético es suficientemente intenso. En este modelo introducimos la reacción del campo magnético en el campo de velocidades microscópico (y por lo tanto en el efecto α) como

$$\alpha \rightarrow \alpha(\mathbf{B}) = \frac{\alpha}{1 + B_\phi^2/B_0^2} \sin(\theta) \cos(\theta), \quad (3.6)$$

donde el perfil de latitud fue elegido para ajustar las estimaciones de helicidad cinética a partir de observaciones solares [Kuz99], y donde B_0 es un parámetro libre del modelo relacionado con el valor de saturación del campo magnético. La saturación de la forma $(1 + B_\phi^2/B_0^2)^{-1}$ [Cha96, Dik99, Fie99] asegura que la producción de campo poloidal se anula cuando el campo toroidal se acerca a cierto valor. Simulaciones de tubos de flujo sugieren que esto ocurre para intensidades de B_ϕ entre 10^4 y 10^5 Gauss, y estos son los valores utilizados para estimar B_0 en el modelo.

Los valores de α y η pueden estimarse en el ámbito de la teoría de campo medio a partir de parámetros típicos solares, considerando $\eta \approx \beta$. Choudhuri [Cho92] estima el valor de α entre 3 cm s^{-1} y 30 cm s^{-1} , mientras que Dikpati y Charbonneau [Dik99] estiman $\eta \approx 3 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. El valor estimado de α justifica la aproximación del dínamo $\alpha\omega$, ya que puede verse claramente que $\alpha \ll v_\phi$.

3.3 Modelos de dínamo solar

El sistema de ecuaciones (3.5) fue integrado numéricamente usando un esquema de diferencias finitas centradas con 500 puntos de grilla en latitud, y un método predictor-corrector para evolucionar en el tiempo, con un paso temporal de $T_0/500$. Como estamos interesados en obtener soluciones del tipo solar, los perfiles de rotación diferencial y flujo meridional

utilizados son los descritos en la sección anterior y corresponden a los mejores ajustes posibles a las observaciones.

La Figura 3.8 muestra los resultados de la integración numérica usando una velocidad meridional máxima en la superficie de 15 m s^{-1} , $\eta = 5,4 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 5,7 \text{ cm s}^{-1}$, y $B_0 = 2,2 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$. El valor de la velocidad meridional usado es cercano a la velocidad observada en la superficie solar [Cam98], mientras que el valor de la difusividad η corresponde a estimaciones del valor turbulento β obtenido en el Capítulo 2, pues la difusividad molecular es despreciable en la zona convectiva solar [Dik99]. Los valores de α y η están dentro del rango de las estimaciones teóricas. El valor de B_0 da un valor de saturación del campo magnético de aproximadamente 10^4 G , considerando una densidad media de $1,41 \text{ g cm}^{-3}$. La solución muestra un período de aproximadamente 12 años.

La Figura 3.9 muestra el resultado de integrar el modelo con el mismo perfil de velocidad meridional, $\eta = 6 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, y $\alpha = 4,5 \text{ cm s}^{-1}$. En este caso el período es cercano a 10,5 años.

Consideraremos este último ejemplo como una solución de referencia para el análisis posterior y el del capítulo siguiente. Se puede observar un ciclo magnético con un período cercano a los 22 años, con una inversión del campo poloidal cada 11 años y 3 años después del máximo de intensidad toroidal, lo cual está en buen acuerdo con las observaciones [Har92]. También se observa la migración de la actividad magnética hacia el ecuador a medida que el ciclo progresa. Los dos ejemplos son similares al caso solar, aunque los máximos de actividad magnética tienen lugar en latitudes muy altas en comparación con las mariposas solares.

La fase relativa entre las componentes toroidales y poloidales resulta también de interés. El desfase entre los máximos de cada componente es cercano a $\pi/2$, como se espera de las observaciones [Har92]. Asimismo, se supone que el campo toroidal está en fase con las manchas solares [Sti76], por lo que las líneas de nivel de esta componente dan una idea de los diagramas de mariposas del modelo. La intensidad del campo toroidal es de 10^4 Gauss ,

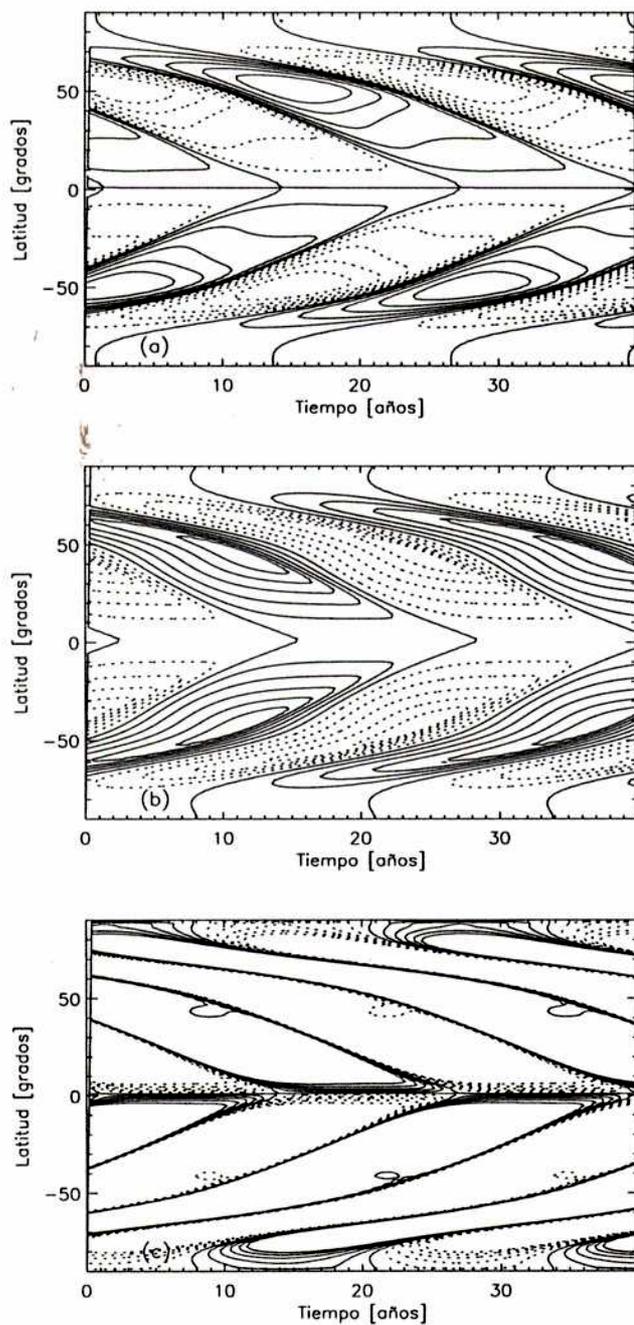


Fig. 3.8: Líneas de nivel de: (a) campo magnético toroidal (diagrama de mariposas), (b) potencial vector toroidal A_p , y (c) campo magnético radial, en un plano latitud-tiempo para $\eta = 5,4 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 5,7 \text{ cm s}^{-1}$, y $B_0 = 2,2 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$. Líneas continuas y punteadas indican polaridades opuestas. El valor máximo del campo toroidal es 10^5 G .

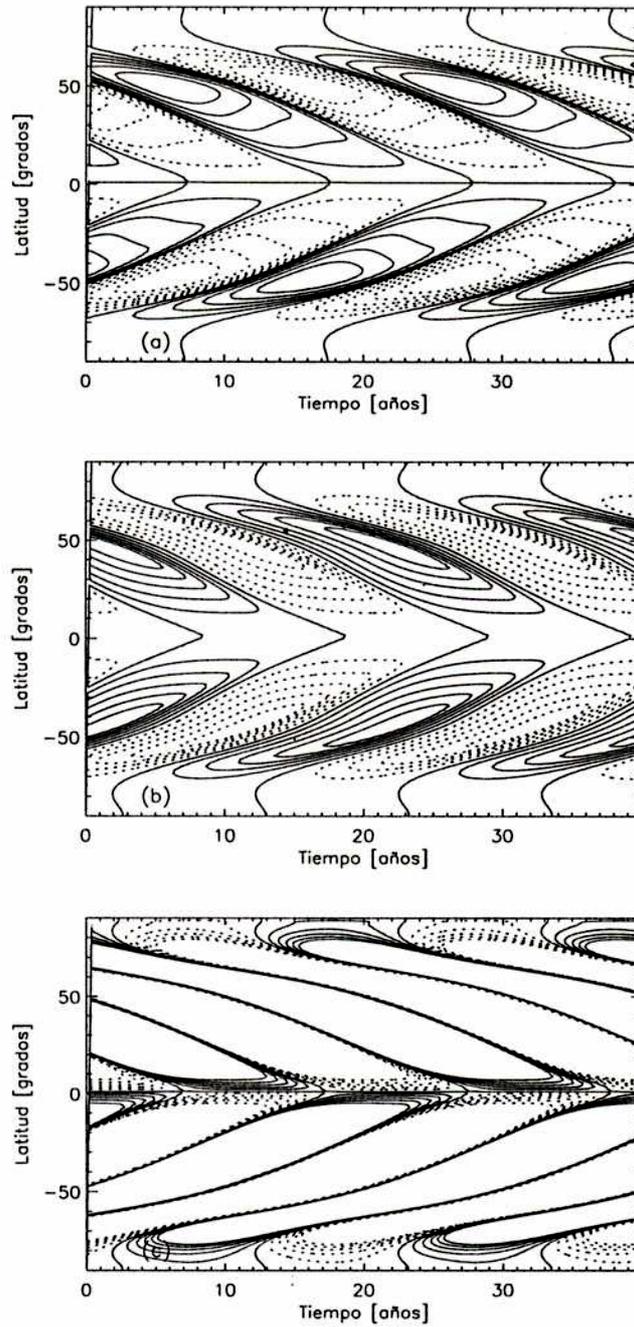


Fig. 3.9: Líneas de nivel de: (a) campo magnético toroidal, (b) potencial vector toroidal, y (c) campo magnético radial, en un plano latitud-tiempo para $\eta = 6 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 4,5 \text{ cm s}^{-1}$, y $B_0 = 2,2 \times 10^3 \text{ cm s}^{-1}$. El valor máximo del campo toroidal es 10^4 G .

mientras que el campo poloidal tiene una intensidad del orden de 10 Gauss, ambos valores coincidentes con las mediciones.

La velocidad del flujo meridional tiene una influencia profunda en la determinación del período del ciclo, mientras que la amplitud de α no. Esto está en buen acuerdo con resultados obtenidos con otros modelos [Dik99]. Una de las dificultades presentes en este modelo es la presencia de actividad magnética en latitudes altas. En el caso solar, la región de intensa actividad magnética se restringe a latitudes menores a los 35° .

El dínamo tienen un modo periódico con una amplitud dada, ya que un aumento en la amplitud del campo magnético reduce α por medio de la saturación no lineal. En estas ecuaciones, el término no lineal es así responsable de fijar el sistema en un modo oscilatorio estable. El sistema tiene oscilaciones de relajación que están en buen acuerdo con las observadas en el número de manchas. Para verificar esta afirmación y estudiar las oscilaciones de relajación, reconstruimos el espacio de fases a partir del número de Wolf y lo comparamos con el modelo.

Con el fin de reconstruir el espacio de fases, realizamos un *embedding* [Min00, Min01a] de la serie temporal del número de manchas diario (Figura 3.2). Dado que la magnitud de interés en el ciclo solar es el campo magnético, debemos obtener un estimador de su amplitud a partir de los datos disponibles. Asumiendo que el número de manchas es aproximadamente proporcional al cuadrado de la intensidad del campo magnético toroidal [Lei69, Sti76, Tob95, Sch99] obtenemos una serie temporal para la intensidad de campo magnético medio por medio de los siguientes pasos: (a) tomamos la raíz cuadrada del número de manchas, y (b) cambiamos el signo de la serie en cada mínimo [Bra53]. Como el número de manchas diario tiene un nivel considerable de fluctuaciones de alta frecuencia, suavizamos la serie temporal utilizando un filtro en frecuencias en el que todas las frecuencias con amplitudes menores que 2% de la amplitud del fundamental son eliminadas. Luego reconstruimos el espacio de fases B vs. dB/dt a partir de la serie resultante utilizando un embedding diferencial [Min98, Gil98], donde las derivadas temporales fueron calculadas uti-

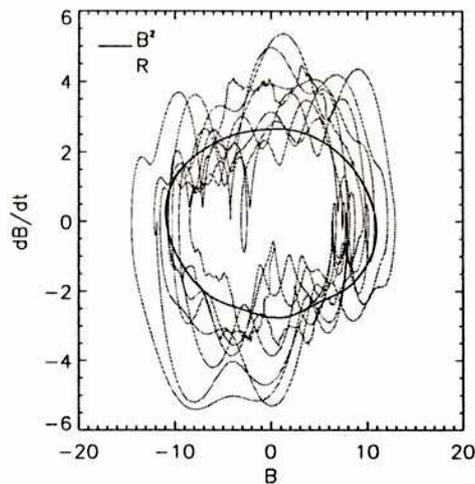


Fig. 3.10: Espacio de fases de la serie temporal observacional (R), y reconstruido a partir de las simulaciones (B^2).

lizando diferencias finitas centradas. La Figura 3.10 muestra el espacio de fases usando un paso de 200 días en el cálculo de la derivada por diferencias finitas.

Se puede observar un ciclo límite con ligera forma rectangular, superpuesto a un fuerte comportamiento irregular. La dinámica es lenta en los lados verticales y rápida en los horizontales. Esta forma rectangular y la diferencia de velocidad en el flujo en diferentes regiones de la trayectoria está asociada con el crecimiento rápido y el decrecimiento lento observado en el ciclo solar (ver Figura 3.2). El número de manchas alcanza su máximo en aproximadamente 4 años, mientras que tarda 7 en alcanzar el mínimo.

Con el fin de realizar una comparación de la trayectoria en el espacio de fases y nuestras simulaciones, aplicamos el mismo método al valor medio en latitud de la intensidad de campo magnético toroidal. La trayectoria en el espacio de fases así obtenida se muestra también en la Figura 3.10. El sistema dinámico tiene una solución atractora que ajusta correctamente la forma del ciclo límite promedio, y que comparte algunas de las características principales encontradas en la serie temporal de los datos: (a) las diferentes escalas tem-

porales en diferentes porciones de la trayectoria, y (b) la forma rectangular del ciclo. De hecho, la diferencia en las escalas temporales y la forma rectangular del ciclo aumenta a medida que la difusividad η del modelo se reduce.

La serie temporal del número de manchas tiene también un comportamiento irregular que no es explicada por nuestro modelo, como puede observarse en la trayectoria en el espacio de fases. Sin embargo, el modelo que presentamos en este capítulo modela correctamente muchas de las componentes regulares del ciclo solar. Presenta un período magnético de 22 años con evolución espacial que asemeja los diagramas de mariposas de Maunder. El campo magnético toroidal se genera en latitudes medias y migra hacia el ecuador, aunque la latitud en la cual el campo alcanza su máximo es mayor que en el caso solar. La intensidad del campo toroidal es de 10^4 Gauss, mientras que la del campo poloidal es de 10 Gauss, en buen acuerdo con las observaciones. Además, el campo tiene oscilaciones de relajación, alcanzando su máximo en un tiempo menor que el que tarda en llegar al mínimo. En el próximo capítulo estudiaremos las causas de las irregularidades presentes en el ciclo solar, y utilizaremos los resultados para extender el modelo.

Capítulo 4

Irregularidades en el ciclo solar

4.1 Introducción

Si bien el ciclo de once años estudiado en el capítulo anterior emerge con evidente claridad en la serie temporal de manchas solares, una inspección mas cuidadosa muestra que la serie no es estrictamente periódica y que presenta fluctuaciones, tanto en su período como en la intensidad de los máximos. El máximo en cada ciclo puede variar hasta un 100% respecto del ciclo anterior, mientras que el período muestra fluctuaciones típicas entre ciclos de 2 años (ver la Figura 3.2).

Además de esta variación en la serie temporal, el ciclo solar presenta irregularidades en la distribución espacial de las manchas y de otros eventos asociados con la actividad magnética (ver la Figura 3.3), con asimetrías en la actividad entre los hemisferios norte y sur, y fluctuaciones en las latitudes de aparición de las primeras y últimas manchas de cada ciclo.

Las observaciones diarias del número de manchas comienzan poco antes del año 1820. Sus áreas y latitudes de aparición, datos necesarios para la construcción del diagrama de mariposa de Maunder, están disponibles desde 1874. En los últimos años la cantidad de

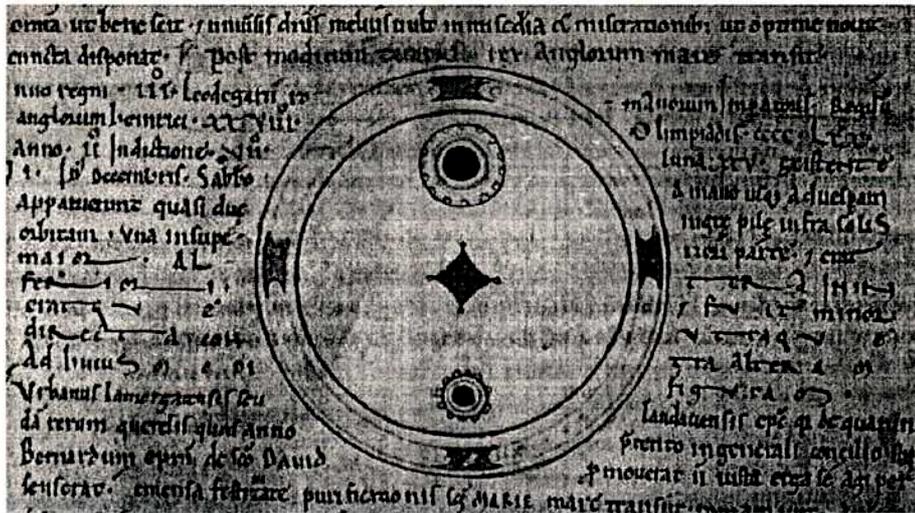


Fig. 4.1: Ilustración de las crónicas de John de Worcester. Es el primer dibujo conocido de un avistamiento de manchas solares, fechado en el 8 de diciembre de 1128. Muestra dos manchas en el disco solar, la mayor en el hemisferio superior y otra menor en el inferior. El hecho que pueda distinguirse la umbra y la penumbra en el dibujo de las manchas sugiere que su tamaño debe haber sido excepcionalmente grande [Sou70].

observaciones relacionadas con la actividad magnética solar creció significativamente, permitiendo la construcción de diagramas de mariposas magnéticas (Figura 3.3.b) y brindando datos precisos sobre las propiedades de los movimientos en el interior del Sol. Sin embargo, la disponibilidad de estos datos se reduce a las últimas dos o tres décadas, mientras que para el estudio de las irregularidades es necesario contar con series temporales extensas. Por ello, las manchas solares siguen siendo el único indicador confiable de la actividad magnética solar en períodos largos de tiempo.

Se han realizado numerosos esfuerzos para extender hacia el pasado la información brindada por el número de Wolf diario (Figura 3.2). El valor medio anual del número de manchas se conoce en forma continua desde el año 1700. Desde un punto de vista histórico, se han hecho recopilaciones de antiguos avistamientos a ojo desnudo [Wit87] (ver un ejemplo en la Figura 4.1), y de las observaciones realizadas desde la invención del telescopio [Edd80].

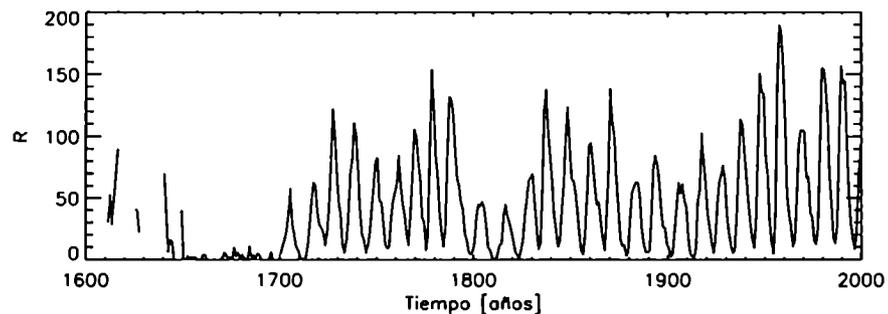


Fig. 4.2: Número de Wolf anual R desde 1611 hasta el año 2000. Los datos anteriores a 1700 corresponden a reconstrucciones llevadas a cabo por Eddy [Edd80]. La disminución en la actividad solar durante la segunda mitad del siglo 17 corresponde al mínimo de Maunder.

Estos últimos datos permiten extender la serie temporal en forma discontinua hasta el año 1611 (Figura 4.2).

Una de las características más llamativas de esta serie, es la presencia de un extenso período en el cual la actividad magnética se vio reducida drásticamente, durante la segunda mitad del siglo 17. Este período es conocido como *mínimo de Maunder*. Si bien el número de manchas en este período tiene una gran incerteza, otros indicadores también sugieren que el Sol ha tenido varios períodos con una reducción significativa de su actividad magnética [Bee98].

Diferentes observaciones muestran que los rayos cósmicos que llegan a la Tierra tienen una anticorrelación con el número de manchas solares. La explicación de este resultado es bastante simple, ya que si el campo magnético del Sol es más intenso (durante el máximo de actividad) resulta comparativamente más difícil que las partículas cargadas lleguen a la Tierra. El flujo de rayos cósmicos (en las energías que se necesitan para formar ^{14}C) es un 20% menor cerca del máximo de actividad solar que durante los mínimos. Cuando las partículas colisionan con átomos estables de ^{12}C y ^{13}C presentes en la atmósfera terrestre, forman ^{14}C radiactivo que decae con una vida media de 5730 años. La medición de ^{14}C

absorbido en árboles o en hielo permite extender la historia del ciclo solar a épocas mucho más remotas (del orden del tiempo de decaimiento de los isótopos), para los cuales no hay registros sistemáticos del número de manchas. Estudios de ^{14}C y ^{10}Be sugieren que otros mínimos de actividad similares al de Maunder han ocurrido en el pasado [Wag01].

La formación de ^{14}C y ^{10}Be no es la única consecuencia en la Tierra de la actividad magnética solar. Una vez que emerge a alturas coronales, el campo magnético se aglutina en las llamadas *regiones activas*, las cuales confinan un plasma de $2\text{-}3 \times 10^6$ K y son observables en rayos X blandos. Su dinámica y calentamiento son gobernados por el campo magnético, y son proclives a sufrir violentas inestabilidades que se manifiestan en eventos llamados *fulguraciones solares* [Fer01, Fer02]. En las fulguraciones se generan rayos X duros, se aceleran partículas cargadas, y se producen eyecciones de masa coronal. Estas últimas, al llegar a la Tierra, causan interferencias en comunicaciones radiales, auroras boreales y australes, y la expansión de la alta atmósfera terrestre. Este tipo de eventos han sido por ejemplo responsables de la caída de la estación espacial Skylab en 1980, varios años antes de lo previsto.

Mientras que los modelos de dínamo cinemático explican las características medias del ciclo solar, la causa de sus irregularidades permanece todavía desconocida. Dos mecanismos han sido propuestos en la literatura para explicarlas: caos o estocasticidad. En ambos, se introducen efectos nuevos en la ecuación del dínamo cinemático con el fin de generar las irregularidades. En cierta forma, se agrega empíricamente información de la física del problema que fue despreciada al simplificar el sistema del dínamo magnetohidrodinámico para obtener la aproximación cinemática. En cierto sentido, estos intentos pueden verse entonces como un paso hacia la resolución del problema completo del dínamo, que trataremos en el capítulo siguiente. La pregunta de fondo es: ¿Puede modelarse la dinámica de las irregularidades con unos pocos grados de libertad, o es necesario tener en cuenta toda la complejidad de la turbulencia convectiva solar, y por lo tanto infinitos grados de libertad?

En el escenario caótico [Jen91, Kno95], un conjunto de ecuaciones simplificadas da una regla determinista para las variables que muestran dinámica compleja. Generalmente, esto se hace mediante la introducción de términos o ecuaciones que modelan el efecto de la fuerza de Lorentz en el campo de velocidades. Aunque existen algunos modelos descritos por ecuaciones diferenciales en derivadas parciales [Jen91], la complejidad introducida en el problema por efecto de los términos no lineales fue estudiada en forma extensa en modelos truncados [Zel83, Kno95, Kno98]. Sin embargo, se sabe que la introducción de grados de libertad adicionales en estos sistemas altamente truncados, usualmente destruye las propiedades del atractor caótico [Wei84, Cat96b, Tob97].

Hasta el momento no se ha encontrado evidencia definitiva de la presencia de caos de baja dimensionalidad en la dinámica del número de manchas, debido principalmente al número insuficiente de datos en la serie temporal [Car94, Pal99]. Algunos estudios [The86, Däm93] muestran que los algoritmos comúnmente usados para buscar atractores caóticos de baja dimensionalidad en series temporales (por ejemplo, estimadores de exponentes de Lyapunov), pueden converger en forma espúrea cuando se aplican a series temporales limitadas. También se encontró que otros indicadores, como el aumento en el error de la predicción con el aumento del horizonte predictivo, pueden ser observados en sistemas con un esqueleto determinista y componentes estocásticas [Rue90, Eck92].

Como escenario alternativo, en trabajos recientes se ha presentado la idea de un dínamo solar excitado por ruido [Cho92, Hoy93, Cha00, Min00]. La complejidad espacial y temporal de las celdas convectivas en el Sol da origen naturalmente a un proceso estocástico que afecta el comportamiento del dínamo. En la aproximación de campo medio, las fluctuaciones del campo juegan un rol preponderante ya que la teoría es en esencia estadística [Cho92, Hoy93, Oss96]. En otras teorías, como la de Babcock-Leighton, la idea de estocasticidad es introducida en forma directa por la naturaleza de los mecanismos físicos involucrados [Cha00]. En este marco, las irregularidades espaciales y temporales pueden ser descritas como resultado del proceso estocástico asociado a la erupción de los tubos de flujo magnético que generan las manchas. En ambos casos, el forzado estocástico es una forma de modelar la

interacción del sistema determinista con modos en la microescala que no fueron considerados en la clausura de las ecuaciones.

Actualmente los modelos no lineales no consideran estos efectos, e intentan explicar el comportamiento irregular utilizando atractores caóticos de baja dimensionalidad. Por otro lado, los modelos estocásticos consideran las fluctuaciones de los campos, pero las ecuaciones deterministas utilizadas para describir la evolución los campos medios son usualmente lineales [Hoy94]. En muchos casos las ecuaciones son severamente truncadas, preservando solo ondas armónicas viajeras o las primeras autofunciones del sistema linealizado [Hoy93, Oss96]. En casos en los que efectos no lineales son considerados, las ecuaciones son integradas en geometría plana [Cho92, Oss96], o solo es estudiada la evolución temporal [Min00, Min01a].

Dada la intensidad del campo magnético en la base de la zona convectiva, los efectos no lineales no puede ser despreciados en el caso del dínamo solar. Tampoco el rol de los efectos estocásticos es despreciable. Muchas irregularidades observadas en el ciclo solar, como las asimetrías presentes en la actividad de los hemisferios norte y sur, fueron interpretadas por diferentes autores en términos de comportamiento caótico [Tob95, Bee98], o estocástico [Oss96]. Otros fenómenos solo han podido ser reproducidos correctamente considerando componentes estocásticas, como la correlación observada entre amplitud y fase en el número de Wolf [Cha00]. Finalmente, los mínimos prolongados de actividad como el de Maunder, parecen tener su explicación natural en efectos no lineales, ya que resulta difícil producir períodos largos de actividad reducida en modelos lineales con forzado estocástico. En este contexto, Moss ha presentado un dínamo no lineal forzado por ruido con mínimos de actividad similares al de Maunder [Mos92]. Aparentemente, toda la complejidad presente en la dinámica solar puede ser descripta en forma correcta mediante una superposición adecuada de efectos dinámicos y forzado estocástico.

En este capítulo presentamos un análisis detallado de las observaciones disponibles del ciclo solar, utilizando modernas técnicas matemáticas. En una primera parte (Sección 4.2)

analizamos la correlación entre amplitud y fase de series temporales, y en una segunda parte (Sección 4.3) investigamos las correlaciones presentes en series espacio-temporales como los diagramas de mariposas.

La correlación entre amplitud y fase en la serie temporal del número de Wolf es conocida desde principios de siglo. Utilizando el concepto de señal analítica de Gabor, analizamos esta señal con el fin de cuantificar esta correlación y estudiar sus propiedades. Los resultados sirven para validar o refutar modelos, pero la extensión de la serie no es suficiente para descartar la existencia de un atractor caótico.

A pesar de la mayor información contenida en los diagramas de mariposas, hasta el momento no se han hecho estudios detallados de la complejidad presente en estas señales espacio-temporales. Utilizando una descomposición bi-ortogonal de los datos, buscamos evidencia de caos o estocasticidad en los diagramas de mariposa de Maunder y en los modernos datos obtenidos a partir de magnetogramas. Finalmente, los resultados de estos análisis son utilizados para modelar las irregularidades, (Sección 4.4) tomando como base el modelo presentado en el capítulo anterior.

4.2 Correlación amplitud-fase

Los intentos por descubrir la causa de las irregularidades han generado una gran cantidad de resultados cualitativos que conciernen a la forma y las características generales del número de Wolf. Así por ejemplo, en casi todos los picos de la serie temporal se encontró un aumento rápido y decrecimiento lento. En 1935, Waldmeier [Wal35] descubrió una correlación entre la amplitud del ciclo y su extensión: ciclos de mayor amplitud duran menos que los ciclos mas débiles, principalmente debido a que los ciclos mas intensos alcanzan el máximo de actividad en un tiempo mas corto. En 1978, Dicke [Dic78, Dic79] observó que los ciclos cortos son seguidos por ciclos mas largos, como si el Sol "recordase" la fase del ciclo.

Más recientemente, Hoyng [Hoy93, Hoy96] mostró que el salto en la fase y la amplitud del ciclo se mantuvieron fuertemente correlacionados por más de 300 años. Para ilustrar el efecto encontrado por Waldmeier, Hoyng utilizó la amplitud máxima de cada ciclo, y su extensión temporal para estimar el cambio en la fase. Esta correlación es correctamente explicada por la teoría de campo medio, que también predice una dependencia lineal entre el logaritmo de la amplitud y el salto en la fase entre máximos [Hoy96]. De hecho, los datos observacionales parecen realizar un paseo al azar alrededor de la función de correlación predicha por la teoría.

Estas propiedades fueron utilizadas recientemente por Paluš y Novotná para mostrar en la dinámica del ciclo solar la existencia de un oscilador no lineal subyacente [Pal99]. Para determinar la amplitud y fase de la serie temporal de manchas en cada instante, los autores utilizaron el concepto de señal analítica de Gabor [Gab46, Gil98].

En señales armónicas, la fase crece linealmente con el tiempo. En un sistema no lineal, el crecimiento de la fase no es uniforme y depende en general de la amplitud. Cualitativamente, podemos describir la evolución de la amplitud A y de la fase ϕ de un sistema no lineal por la ecuación

$$F(A) = \omega - \omega_0 , \quad (4.1)$$

donde ω_0 es la frecuencia media de la serie temporal, $\omega = d\phi/dt$ es la frecuencia, y la función $F(A)$ considera la dependencia de la frecuencia con la amplitud [Ros96, Far81].

No es posible en general dar una definición de fase que resulte válida para cualquier sistema no lineal. Al realizar análisis de señales, la fase y amplitud son usualmente definidas por medio de la señal analítica de Gabor. La señal analítica $\chi(t)$ de una señal real arbitraria $s(t)$ está dada por la función compleja

$$\chi(t) = s(t) + i \hat{s}(t) = A(t)e^{i\phi(t)} , \quad (4.2)$$

donde la función $\hat{s}(t)$ es la transformada de Hilbert de $s(t)$,

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} P.V. \left[\int \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau \right] \quad (4.3)$$

Aquí *P.V.* significa valor principal de Cauchy, y en la ecuación (4.2), $A(t)$ es la amplitud instantánea y $\phi(t)$ la fase instantánea. En este marco, la frecuencia instantánea $\omega(t)$ puede ser naturalmente definida como la derivada temporal de $\phi(t)$ [Gil98]. Este método permite obtener la amplitud y la fase de cualquier señal escalar $s(t)$. La introducción de una representación compleja de la señal puede ser interpretada como la extensión de la notación usada comúnmente en óptica y electromagnetismo para describir una onda monocromática, y ha encontrado interpretación física directa en detección fotoeléctrica [Man65, Bal68], y dinámica no lineal [Ros96].

Otras definiciones alternativas de amplitud y fase generalmente pueden darse después de reconstruir el espacio de fases a partir de la señal [Pik97]. En este sentido la señal analítica de Gabor permite obtener amplitud y fase directamente a partir de las series experimentales.

En el caso solar y tal como lo señaláramos al comienzo de esta sección, Hoyng [Hoy96] encontró una correlación entre amplitud y salto de fase tomando para el cálculo un punto por período. Al considerar las señales instantáneas (para todo punto de la serie temporal) la diferencia en la fase es reemplazada por su derivada temporal ω . Para estudiar la correlación por este método, utilizamos la serie anual de manchas desde el año 1700 (Figura 4.3.a). Con el fin de remover ruido de alta frecuencia aplicamos a los datos un promedio con una ventana de 13 puntos y luego otro de 3 puntos. La transformada discreta de Hilbert (4.3) puede ser computada aplicando a los datos un filtro espectral con respuesta unitaria en amplitud y de $\pi/2$ en la fase para todas las frecuencias. A partir de la señal transformada podemos obtener la amplitud y fase instantáneas utilizando la ecuación (4.2). La frecuencia instantánea ω está dada por la derivada temporal de la fase. Para evitar el aumento del ruido introducido por esta operación, usamos para su cálculo una regresión lineal robusta con una ventana de 7 muestras [Pre86]. Finalmente, las series temporales de amplitud y

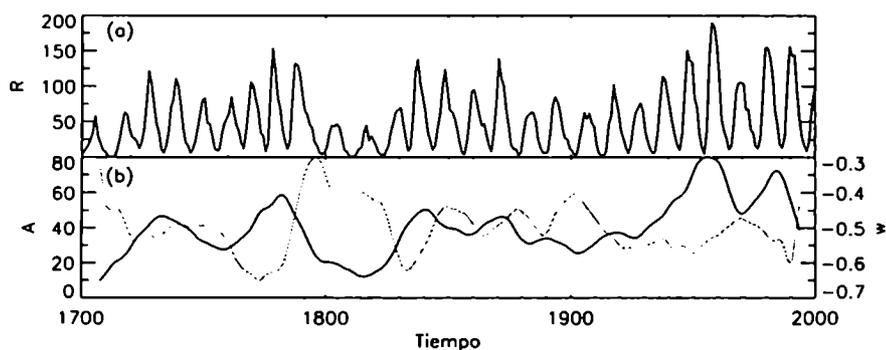


Fig. 4.3: (a) Número de Wolf anual R desde el año 1700 hasta el año 2000. (b) Señales de amplitud A (negro) y frecuencia ω (gris) obtenidas con la señal analítica de Gabor.

frecuencia fueron filtradas mediante un promedio con una ventana de 13 puntos. El mismo procedimiento fue utilizado en el análisis de la señal por Paluš y Novotná [Pal99]. La Figura 4.3.b muestra las series temporales obtenidas.

La amplitud instantánea corresponde a la modulación de la serie temporal original. Como puede observarse, amplitud y frecuencia están anticorrelacionadas: cuando una es máxima la otra es mínima. El cálculo de la correlación cruzada

$$C = \frac{\int A(t)\omega(t)dt}{\int A(t)dt \int \omega(t)dt}, \quad (4.4)$$

entre la amplitud A y la frecuencia ω , da por resultado $-0,54$. La Figura 4.4 muestra la frecuencia instantánea en función del logaritmo de la amplitud. Considerando la relación (4.1) y los resultados de Hoyng que predicen una relación lineal entre estas variables [Hoy96], podemos escribir

$$\log(A) = \gamma\omega + \delta. \quad (4.5)$$

La Figura 4.4 también muestra el mejor ajuste posible a los datos, con $\gamma = -3,9 \pm 0,8$, $\delta = 1,5 \pm 0,5$, y $SD = 0,3$ (SD : desviación estandar). Los datos en la Figura 4.4 parecen realizar un paseo al azar alrededor de la función de correlación predicha por la teoría.

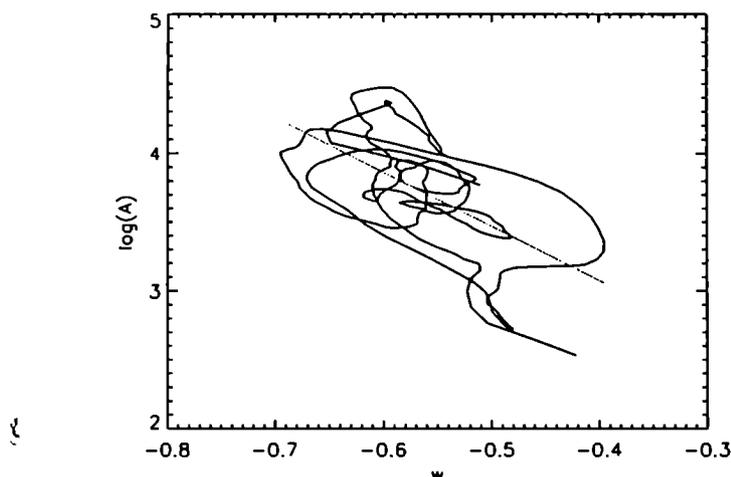


Fig. 4.4: Logaritmo de la amplitud A y frecuencia ω instantáneas. En gris se muestra el mejor ajuste lineal a los datos.

Para el cálculo de los errores en γ y δ consideramos que las observaciones anteriores a 1820 tienen una gran incerteza, mientras que las más recientes tienen un error de 5% [Fou90]. Estos resultados muestran que tanto la correlación entre amplitud y salto de fase como la relación (4.5) tienen soporte observacional y teórico. Por lo tanto, la fase y amplitud en los modelos del dínamo solar deberían tener el mismo comportamiento.

La comparación de la correlación observada contra la generada por modelos del ciclo solar sirve así como prueba de los mismos. Estas propiedades fueron recientemente usadas para validar resultados cualitativos de un modelo de dínamo solar forzado con ruido [Cha00]. El formalismo matemático de Gabor permite realizar comparaciones cuantitativas con los modelos teóricos. En particular, usando este método Mininni, Gómez y Mindlin [Min02c] compararon la correlación de un modelo con esqueleto determinista basado en las ecuaciones del dínamo y con forzado estocástico [Min00], contra otro en el cual la dinámica del ciclo solar es explicada mediante un proceso puramente estocástico [Bar80]. Ambos modelos generan series temporales de manchas similares a las observadas. Sin embargo, los resultados muestran que mientras el modelo con esqueleto determinista genera series de

amplitud y fase con una correlación cruzada ente amplitud y fase de $-0,56$ y valores de γ y δ similares a los observados, el modelo estocástico no presenta anticorrelación ni satisface la relación (4.5). Utilizando un formalismo distinto, Ossendrijver y Hoyng [Oss96] compararon la correlación generada por un dínamo con esqueleto determinista y forzado estocástico contra modelos donde las irregularidades son generadas por caos de baja dimensionalidad. Los resultados muestran que la correlación observada no puede ser generada correctamente por los modelos caóticos sometidos a la prueba.

Durante los últimos años, la teoría de sistemas dinámicos ha dado un mensaje claro: el comportamiento complejo puede ser el resultado de reglas deterministas sencillas. Sin embargo, esto no significa que cualquier sistema complejo pueda ser entendido en esta forma. Las preguntas críticas en este caso son: ¿Existe una regla sencilla detrás de una serie temporal compleja? ¿Cómo podemos validar o refutar modelos que muestran una dinámica compleja? Esta última pregunta es particularmente importante en los casos en los que la dinámica del sistema puede ser cualitativamente reproducida tanto por paradigmas estocásticos como deterministas. Este es precisamente el caso en el ciclo solar, y la serie temporal observacional no es lo suficientemente extensa como para responder estas preguntas con los métodos utilizados comúnmente. Las propiedades de correlación entre amplitud y fase, relacionadas con propiedades morfológicas del ciclo solar, pueden ser utilizadas con este fin. El método aplicado a diversos modelos muestra que los sistemas con un esqueleto determinista y forzados por ruido pueden explicar estas propiedades satisfactoriamente.

4.3 Series espacio-temporales

En la sección anterior hemos visto que las búsquedas de evidencia de caos en las series temporales no dieron resultados concluyentes. Curiosamente, no se han realizado intentos con los datos espacio-temporales a pesar la mayor cantidad de información contenida en estas series. Hasta el momento, la distribución espacial de manchas solares [Gok92] o de

campo magnético [Ste86] solo fue usada para la búsqueda de relaciones de dispersión, pero no con el fin de caracterizar la complejidad de la dinámica.

Por otra parte, recientemente se han desarrollado una gran cantidad de herramientas para el estudio de la complejidad de series espacio-temporales en sistemas extensos. Hacia 1990, la descomposición bi-ortogonal (DBO) fue propuesta como una descomposición apropiada para fenómenos regulares complejos [Aub92, Krm97]. La descomposición de una señal espacio-temporal da por resultado un conjunto ortogonal de modos espaciales y temporales acoplados entre sí. Estos modos son empíricos y están definidos como los autovectores de un operador lineal construido a partir de los datos. La proyección obtenida es óptima, en el sentido de que los modos están ordenados por su energía en lugar de (por ejemplo) su número de onda. Como resultado, cualquier proyección en los primeros modos captura la mayor energía posible del patrón [Hol96].

En esta sección presentamos una descomposición en modos bi-ortogonales de la distribución espacial y temporal del área de las manchas solares desde el año 1874. El análisis muestra claramente un ciclo determinista con un fondo estocástico, sin evidencia de caos de baja dimensionalidad [Min02d].

Dada una serie espacio-temporal $u(x, t)$ (que en general puede ser compleja), donde $x \in X$ y $t \in T$ son respectivamente las variables espaciales y temporales, podemos definir un operador lineal $U : H(X) \rightarrow H(T)$ tal que

$$\forall \phi \in H(X) \quad (U\phi)(t) = \int_X u(x, t)\phi(x) dx, \quad (4.6)$$

y su operador adjunto $U^\dagger : H(T) \rightarrow H(X)$ dado por

$$\forall \psi \in H(T) \quad (U^\dagger\psi)(x) = \int_T u^*(x, t)\psi(t) dt, \quad (4.7)$$

En esta sección la daga denota al operador adjunto, y el asterisco al complejo conjugado de la señal. Asumiendo que U es un operador compacto, su espectro es entonces un conjunto numerable de puntos singulares y la señal $u(x, t)$ puede ser escrita como

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \phi_k^*(x) \psi_k(t) , \quad (4.8)$$

donde α_k , ϕ_k y ψ_k son elementos de la descomposición espectral del operador U . Mas específicamente, son soluciones del problema de autovalores dado por las ecuaciones

$$(U^\dagger U \phi_k)(x) = \alpha_k^2 \phi_k(x) , \quad (4.9)$$

$$(U U^\dagger \psi_k)(t) = \alpha_k^2 \psi_k(t) . \quad (4.10)$$

Los autovalores α_k y autofunciones ϕ_k y ψ_k , satisfacen también las condiciones

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots > 0 , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0 , \quad (4.11)$$

$$(\phi_k, \phi_l) = (\psi_k, \psi_l) = \delta_{k,l} , \quad (4.12)$$

donde (f, g) es el producto interno entre las funciones f y g . La convergencia de la ecuación (4.8) es en norma.

La serie (4.8) representa la DBO de la señal $u(x, t)$, y las funciones $\phi_k(x)$ y $\psi_k(t)$ son llamadas respectivamente autofunciones y trazas temporales de la descomposición. También son comúnmente llamadas *topos* y *cronos*, ya que corresponden a los modos espaciales y temporales de la descomposición. Al utilizar conjuntos de datos finitos y discretos, la suma en la ecuación (4.8) se extiende hasta un número finito. En este caso, las ecuaciones (4.9) y (4.10) también se reducen a un problema de autovalores y autovectores para las matrices cuadradas $U U^\dagger$ y $U^\dagger U$, donde U es la matriz (en general no cuadrada) construida con los datos.

Para computar la DBO de la distribución latitudinal y temporal de manchas solares, utilizamos el número de manchas medido por el Observatorio Real de Greenwich desde mayo de 1874, con el fin de construir una serie real $u(x, t)$. Estos datos incluyen información de la posición, momento de aparición y área de las manchas. Los datos que se muestran en el diagrama de mariposas de Maunder (ver la Figura 3.3.a) corresponden al cómputo del área cubierta por manchas en cada rotación solar en 50 franjas alineadas en latitud con proyección de área constante. Por lo tanto, $u(x, t)$ es el área, x es la latitud, y t el tiempo en unidades de rotación de Carrington.

Para estudiar la dinámica del ciclo solar sería preferible trabajar con mediciones directas del campo magnético. Sin embargo, el número de manchas es la única serie espacio-temporal con extensión suficiente como para permitir el estudio en tiempos largos. En este contexto es importante remarcar que existe numerosa evidencia que indica que la distribución espacial de manchas está en fase con el campo magnético toroidal en el interior del Sol [Sti76].

Siguiendo las aproximaciones usuales en la teoría del dínamo, construimos una serie espacio-temporal que sirva como aproximación de la dinámica del campo magnético toroidal de la siguiente forma: (1) tomamos la raíz cuadrada del área de las manchas [Kug99], (2) cambiamos el signo entre mariposas sucesivas [Bra53], y (3) asignamos diferentes signos en las alas de mariposas en hemisferios opuestos [Bab61]. El resultado se muestra en la Figura 4.5. Para suavizar cambios abruptos en el signo en el borde de las mariposas y el ecuador, aplicamos un promedio a primeros vecinos en la serie. Posteriormente confirmamos que este filtro no afecta los resultados que a continuación se muestran. Con el fin de verificar que esta serie temporal da información correcta de la dinámica del campo magnético, se aplicó también la descomposición a la serie de magnetogramas obtenida para los últimos dos ciclos (Figura 3.3.b) y se compararon los resultados.

Al tener los datos 50 puntos espaciales, la DBO discreta consiste en 50 modos, cada uno indicado por un valor de k , y con sus amplitudes asociadas α_k . Las autofunciones $\phi_k(x)$ describen la topología espacial de cada modo, y las trazas temporales $\psi_k(t)$ describen

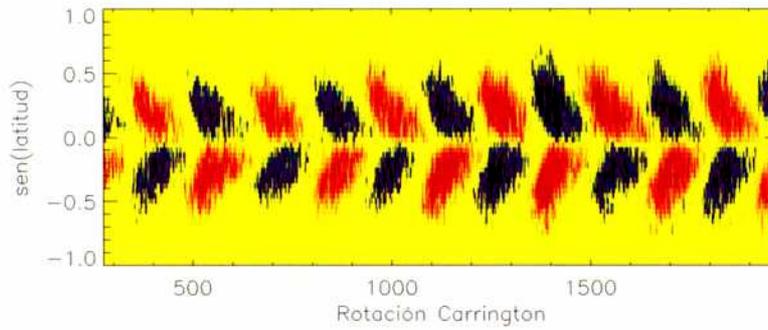


Fig. 4.5: Campo magnético toroidal inferido a partir de los datos del diagrama de mariposas. Rojo y azul indican polaridades opuestas.

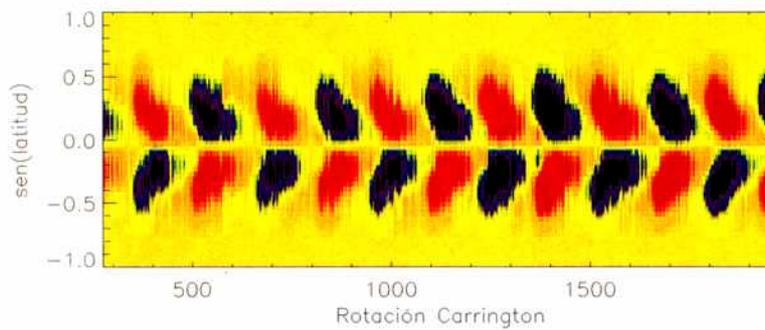


Fig. 4.6: Campo magnético toroidal reconstruido usando los dos primeros modos de la DBO. Comparar con la Figura 4.5.

su evolución temporal. Estos modos son empíricos y en general no son armónicos. Mas aún, los modos son en esencia estadísticos y por lo tanto no son autofunciones del sistema dinámico subyacente. Sin embargo definen una base ortogonal (ver la ecuación [4.12]) y son óptimos en el sentido definido previamente (ecuación [4.11]).

La Figura 4.6 muestra los diagramas de mariposas reconstruidos usando solo los dos primeros modos ($k = 1, 2$) de la DBO del campo magnético inferido. Estos dos modos describen de manera notable las propiedades medias del ciclo solar. En otras palabras, una truncación de segundo orden de la serie es una aproximación muy buena de la dinámica del ciclo solar. Muchas de las propiedades del ciclo solar pueden ser identificadas en esta versión truncada, tales como la ausencia de manchas en latitudes altas y la migración hacia el ecuador de la actividad magnética. Los dos modos contienen el 84,4% de la energía total del sistema, donde la energía del modo k está definida simplemente como el cuadrado de su amplitud α_k .

El diagrama de mariposas puede ser interpretado como el resultado de la superposición de dos estructuras espaciales oscilantes, con amplitudes y fases aproximadamente constantes. Ambas estructuras, descritas por los dos primeros modos, son antisimétricas respecto del ecuador. Las trazas temporales asociadas a estos modos tienen un periodo de 22 años, dando así origen al ciclo solar. También puede observarse en la amplitud de los dos primeros modos un aumento rápido y decrecimiento lento, que es un indicador claro de dinámica no lineal. Estas trazas temporales muestran una diferencia de fase casi constante de $\pi/2$, y la alternancia de los máximos de cada modo da lugar a la migración de actividad magnética hacia el ecuador.

Los modos están ordenados por energía decreciente, siendo la energía del primer modo siete veces mayor que la del segundo. Aquí se encuentra la mayor ventaja de la DBO: los modos se ordenan por sus energías en lugar del número de onda, permitiendo fácilmente la identificación de los modos mas relevantes para reconstruir la dinámica. El resto de los

modos ($k > 2$) tienen amplitudes mucho menores que los dos primeros. Por ejemplo, la energía asociada al tercer modo es 21 veces más pequeña que la del primero.

Los modos principales son antisimétricos respecto al ecuador, pero como la magnitud observada es el número de manchas (definida positiva), estos modos dan lugar a mariposas simétricas. Los modos 3 y 4 son simétricos respecto al ecuador, y producen una ruptura de la simetría previamente descrita. Sin embargo, todos los modos simétricos solo contienen 9,6% de la energía del sistema, y los cronos correspondientes a estos modos no muestran ninguna periodicidad. Esta tendencia se mantiene en la descomposición de los datos obtenidos a partir de magnetogramas, aunque en forma menos marcada debido a la menor estadística.

La Figura 4.7 muestra el espectro Fourier de los cronos correspondientes a los tres primeros modos. En los primeros dos cronos se puede identificar claramente un pico correspondiente a un período de 22 años, y otro cercano a los 7 años. Este pico está asociado al aumento rápido y decrecimiento lento en el número de manchas durante el ciclo solar, característica que es preservada en las trazas temporales. Los picos de 7 y de 22 años pueden ser también identificados en la descomposición de los datos obtenidos a partir de magnetogramas.

Además del pico en 22 años y del pico menor en 7 años, ninguna otra propiedad puede ser observada en el espectro. Tampoco existen indicadores de la presencia de subarmónicos en los datos. El espectro de los cronos restantes ($k > 2$) no muestra ninguna periodicidad. Mas aún, tests de autocorrelación no muestran correlación en los 22 años, ni en sus armónicos o subarmónicos. Por lo tanto, pueden ser caracterizados simplemente como ruido. Para las trazas temporales correspondientes a los dos primeros modos, el coeficiente de autocorrelación

$$C_k(\tau) = \frac{\int \psi_k(t)\psi_k(t - \tau)dt}{(\int \psi_k(t)dt)^2}, \quad (4.13)$$

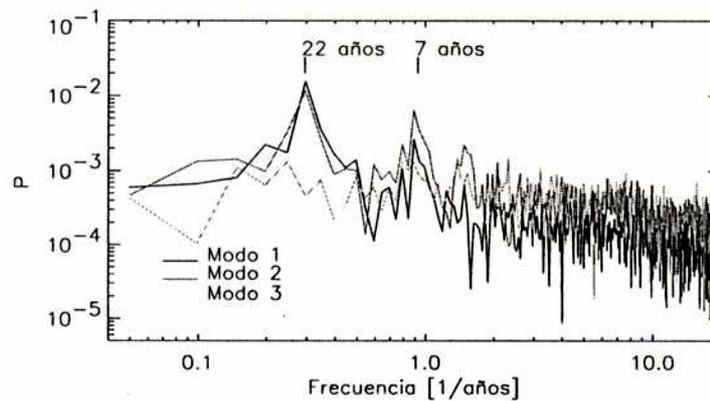


Fig. 4.7: Espectro de potencia para los primeros tres modos. Los picos correspondientes a períodos de 7 y de 22 años están marcados. El modo 3 no muestra ninguna periodicidad.

muestra correlación positiva en $\tau \approx 0$ y $\tau \approx \pm 22$ años, mientras que la autocorrelación es negativa para $\tau \approx \pm 11$ años (Figura 4.8). La autocorrelación de los cronos restantes cae inmediatamente por debajo de 0,2, lo que implica una fuerte componente estocástica en la serie temporal.

La ausencia de subarmónicos del ciclo de 22 años en los espectros es una clara evidencia de la ausencia de caos de baja dimensionalidad, al menos en las escalas temporales que pueden ser analizadas con estos datos. La periodicidad de los dos primeros modos y la

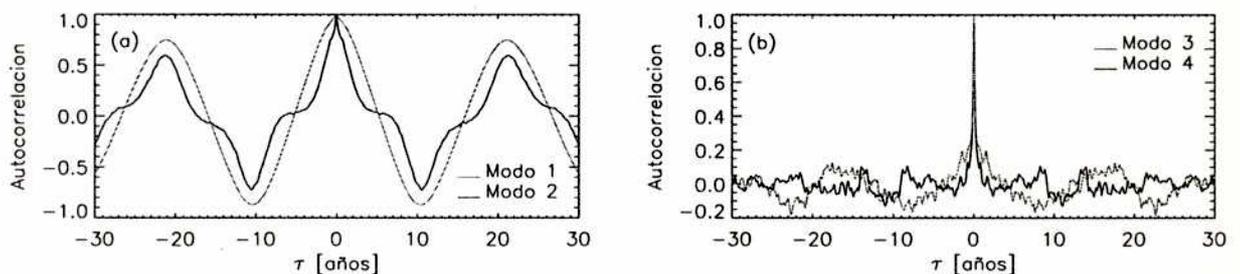


Fig. 4.8: Coeficientes de correlación: (a) para los primeros dos modos, (b) modos 3 y 4. Los coeficientes de autocorrelación de los modos 5 al 50 son similares.

correcta reconstrucción de los diagramas de mariposas sugieren que los aspectos globales del ciclo solar pueden ser modelados con la superposición de dos modos deterministas, con la misma frecuencia y con un desfase de $\pi/2$. Estos resultados pueden ser utilizados para construir modelos basados en la superposición de las estructuras observadas y un fondo estocástico. Los resultados pueden ser también utilizados para validar o refutar modelos del ciclo solar.

Es posible en principio obtener mas conclusiones sobre el rol de estas irregularidades en la física solar, modelando las mismas como un forzado estocástico sobre un modelo teórico del dínamo que describa adecuadamente la componente determinista. En la próxima sección utilizaremos estos resultados en conjunción con el modelo presentado en el Capítulo 3 para continuar el estudio de las irregularidades.

4.4 Modelos de dínamo con estocasticidad

Como fue mencionado previamente, los intentos por modelar la dinámica irregular del ciclo solar están asociados con caos de baja dimensionalidad o con efectos estocásticos. Los estudios realizados sobre las series temporales no dieron resultados definitivos respecto de cual es la explicación correcta, dada la insuficiente cantidad de datos. Sin embargo, ciertas características del ciclo, como la correlación entre amplitud y fase, sugieren que la explicación correcta para estas propiedades está asociada con fenómenos estocásticos. Asimismo, el análisis espacio-temporal presentado en la sección anterior sugiere la misma conclusión.

¿Cuál es el origen de estos fenómenos estocásticos? En las capas mas externas del Sol el gradiente de temperatura es lo suficientemente intenso como para que el transporte de calor por conducción sea insuficiente, y los elementos de fluido se ponen en movimiento para transportar el exceso de calor a la superficie. El fluido en esta región se encuentra en estado de turbulencia convectiva. Los elementos ascendentes (calientes) y descendentes

(fríos) generan celdas con diferentes longitudes de correlación y tiempos característicos. En la teoría de campo medio, las hipótesis ergódicas usadas al definir el promedio de los campos automáticamente da origen a coeficientes estocásticos en las ecuaciones del dínamo. El valor medio sobre un conjunto estadístico es reemplazado por el valor medio espacial (estrictamente hablando, un valor medio sobre un número finito de celdas convectivas). Debido al número limitado de celdas, las fluctuaciones alrededor del valor medio no son despreciables [Cho92, Hoy93]. Mas aún, de acuerdo a observaciones recientes [Kuz99] y a estimaciones teóricas [Cho92, Oss96], la amplitud de las fluctuaciones puede ser mayor que los valores medios de los campos.

En el caso particular del dínamo solar, los movimientos convectivos juegan un rol crucial en el efecto α . La complejidad espacial y temporal de las celdas turbulentas puede ser naturalmente descripta agregando una componente estocástica al campo de velocidades, que a su vez introducirá estocasticidad en el efecto α y en las componentes del campo magnético.

Las propiedades observadas en el espacio de fases reconstruido a partir de las series temporales [Min00], la correlación entre amplitud y fase [Min02c], y la descomposición bi-ortogonal de los datos [Min02d], sugieren que la dinámica del ciclo solar puede ser modelada mediante un oscilador de relajación forzado por ruido. De hecho, los análisis sugieren que las ecuaciones del dínamo forman el esqueleto determinista responsable de la relajación del sistema a un modo de oscilación estable, mientras que las irregularidades en el ciclo pueden ser explicadas considerando fluctuaciones que simulen la interacción del sistema con grados de libertad no contenidos en el modelo [Min02a].

Aunque en principio todos los parámetros pueden fluctuar con componentes estocásticas, las variaciones en α son las mas importantes ya que el coeficiente controla la amplitud del término no lineal. Además, α puede tomar signos opuestos en diferentes celdas, mientras que por ejemplo la difusividad total η es una cantidad definida positiva. Finalmente, en otros modelos de dínamo se ha observado que fluctuaciones en α dan por resultado la correlación

correcta entre amplitud y fase del ciclo, mientras que fluctuaciones (por ejemplo) en la velocidad meridional dan por resultado una correlación errónea [Cha00].

En el marco de nuestro modelo, introducimos una separación de α en una parte media α_0 y una componente fluctuante $\delta\alpha = r\xi$. Por lo tanto,

$$\alpha = \alpha_0 + r\xi, \quad (4.14)$$

donde ξ es una variable estocástica gaussiana con dispersión unitaria. El parámetro r es entonces la dispersión estadística de α .

¿Cuáles son las propiedades de correlación de las fluctuaciones en α ? El efecto α está ligado al campo de velocidades en la región convectiva solar. Allí podemos encontrar diferentes estructuras: celdas convectivas de diferentes tamaños característicos, con diámetros desde 1.000 km (gránulos) hasta diámetros de 30.000 km (supergránulos), y celdas gigantes con longitudes características del orden de la profundidad de la zona convectiva. El efecto α está asociado a la helicidad del flujo, y por lo tanto requiere que la simetría de reflexión se rompa por algún mecanismo o fuerza externa. La fuerza responsable de esto es la fuerza de Coriolis debida a la rotación del Sol.

El número de Rossby es el parámetro adimensional que cuantifica la importancia de la fuerza de Coriolis en la dinámica del fluido:

$$R_S = \frac{U}{2L\Omega}, \quad (4.15)$$

donde U y L son respectivamente la velocidad y la escala espacial característica de los flujos de interés, y Ω es la frecuencia de rotación solar ($\approx 1/27$ días).

La fuerza de Coriolis es importante cuando el número de Rossby es pequeño. Considerando $R_S \approx 1$ podemos calcular cual es la escala mas pequeña que sufrirá el efecto de esta fuerza. Para movimientos convectivos con velocidades de unos pocos metros por segundo, obtenemos que la longitud a partir de la cual la fuerza es relevante es de aproximadamente 150.000 km. Esta escala corresponde al tamaño de las celdas gigantes (Figura

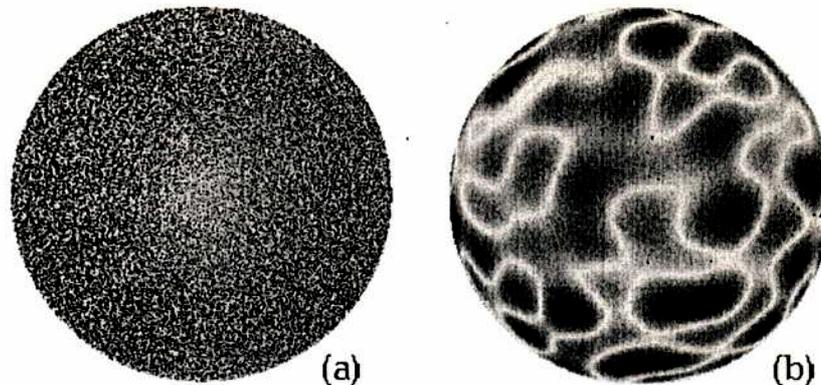


Fig. 4.9: El Sol visto por el interferómetro Michelson-Doppler (MDI) a bordo del SOHO: (a) supergránulos (su tamaño es aproximadamente el de la Tierra), y (b) celdas gigantes (mas grandes que Júpiter). Los tonos de gris indican la velocidad de elementos de fluido moviéndose en la dirección del observador (NASA/Marshall Space Flight Center).

4.9), y es la escala mas pequeña en la que las fluctuaciones en el valor de α pueden estar correlacionadas.

Considerando estos resultados, asumimos una correlación espacial para el ruido de 2×10^5 km; ξ es constante en cada celda, y su valor es cambiado al azar cada 30 días (el tiempo de vida medio de estas estructuras). A modo de ejemplo, la Figura 4.10 muestra el resultado de integrar el sistema (3.5) con α dado por la ecuación (4.14) y $r = 11,25 \text{ m s}^{-1}$.

Las fluctuaciones impuestas tienen mayor intensidad que α_0 ($\delta\alpha/\alpha_0 \approx 2,5$). Esto da como resultado grandes variaciones en la amplitud del término fuente. Por ejemplo, en una celda dada existe una probabilidad alta de que el signo de α sea opuesto al valor medio correspondiente a ese hemisferio. Esto esta en buen acuerdo con observaciones [Kuz99], y estimaciones teóricas (Choudhuri [Cho92], y Ossendrijver y Hoyng [Oss96], estiman $\delta\alpha/\alpha_0 \approx 3$). Aún para fluctuaciones fuertes, las soluciones no se apartan mucho del ciclo atractor, siempre que el tiempo de correlación sea mucho menor que el período del ciclo.

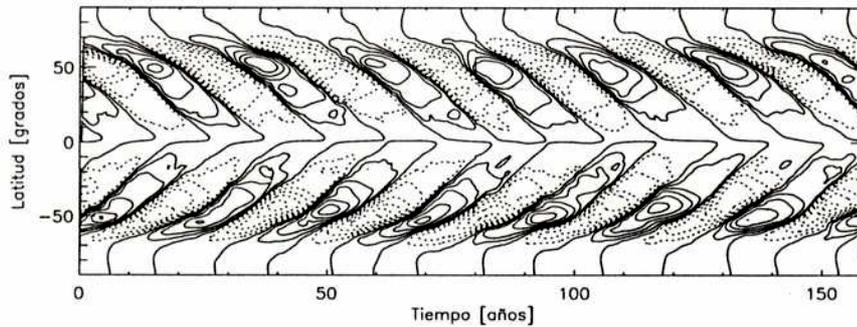


Fig. 4.10: Campo magnético toroidal, para fluctuaciones $\delta\alpha$ con una correlación temporal de 30 días y espacial de 2×10^5 km, y $r = 11,25 \text{ m s}^{-1}$. El ciclo es estable frente a la perturbación, aunque su período y amplitud se vuelven irregulares. Se puede observar la asimetría entre hemisferios.

La presencia de una componente estocástica en α introduce naturalmente irregularidades temporales y espaciales en el diagrama de mariposas. Las características del ruido (su correlación espacial y temporal) no introducen grandes cambios en la medida que el tiempo de correlación sea bastante menor que el del ciclo. También aparecen asimetrías entre los hemisferios norte y sur, junto con fluctuaciones en la línea divisoria de polaridad en el ecuador, dando origen a regiones aisladas de polaridad invertida en el diagrama de mariposas.

Con el fin de comparar cuantitativamente las irregularidades generadas por las ecuaciones del dínamo forzadas con ruido con la de los datos observacionales, estudiamos las propiedades estadísticas del ciclo en ambos casos. Previamente, deben hacerse algunas hipótesis para vincular el campo magnético generado por el modelo con el número de manchas. Considerando nuevamente el número de manchas como proporcional al cuadrado del campo magnético toroidal [Lei69, Sti76, Tob95, Kug99], tomamos el valor medio espacial del cuadrado del campo toroidal, y normalizamos la amplitud de la serie temporal resultante de forma tal que su valor medio coincida con el valor medio del número de manchas. La serie así generada muestra un aumento rápido y un decrecimiento lento en el número

	Período [años]	Dispersión [años]	Máximo [manchas]	Dispersión [manchas]
Modelo	10,6	1,1	120	36
Ciclo solar	10,7	0,8	113	40

Tabla 4.1: Valores medios del período y de la amplitud de los máximos con sus correspondientes dispersiones, para los datos observacionales (número de manchas diario), y para el sistema dinámico forzado por ruido.

de manchas, con un período medio de 10,6 años, que coincide aproximadamente con el observado en el caso solar.

La Tabla 4.1 muestra los valores medios y dispersiones obtenidos para los datos observacionales y para el sistema dinámico forzado con ruido. Todas las dispersiones que se muestran en la tabla han sido ajustadas con un único parámetro libre (τ).

Otro indicador usado en el estudio de las irregularidades en el ciclo solar son las asimetrías en la actividad entre hemisferios. La asimetría entre el hemisferio norte y el sur ha sido estudiada por varios autores [Car93, Oli94, Oli96, Wat96], y su existencia y características están razonablemente bien establecidas. Esta asimetría es medida por el coeficiente de asimetría [Car93]

$$AS = \frac{N - S}{N + S}, \quad (4.16)$$

donde N y S denotan el área cubierta por manchas en el hemisferio norte y sur respectivamente.

Las asimetrías observadas han sido interpretadas por diferentes autores en términos de comportamiento caótico [Tob95, Bee98], o de forzado estocástico [Oss96]. En nuestro modelo están presentes tanto efectos dinámicos no lineales como de estocasticidad.

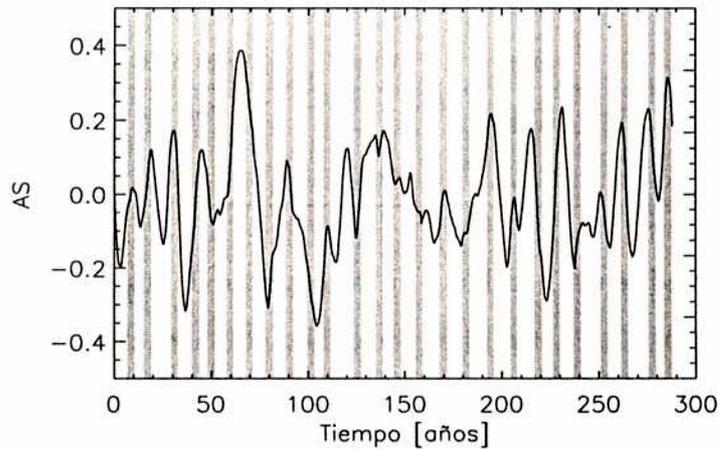


Fig. 4.11: Coeficiente de asimetría AS generado con el modelo. Los mínimos de actividad están indicados por barras grises verticales. La asimetría generalmente tiene picos en los mínimos, en coincidencia con las observaciones.

A partir del análisis de las observaciones tanto Carbonell, Oliver y Ballester [Car93], como Watari [Wat96] concluyeron que la asimetría es probablemente el resultado de un proceso estocástico. El estudio de la serie también mostró que el coeficiente de asimetría tiene usualmente máximos cerca de los mínimos de actividad [Oss96]. Análisis detallados de la serie temporal de asimetría AS encontraron evidencia estadística de una modulación en tiempos largos, como así también un ciclo con un período de 12,1 años y una fuerte componente aleatoria [Oli94, Oli96].

El forzado estocástico (4.14) en las ecuaciones del dínamo (3.5) excita naturalmente asimetrías entre los hemisferios norte y sur. Para comparar las asimetrías observadas con las generadas por nuestro modelo, computamos el índice AS usando el campo magnético toroidal del modelo, repitiendo el procedimiento anterior para generar el número de manchas en cada hemisferio.

La Figura 4.11 muestra una fracción de 300 años de la serie temporal AS resultante. Los períodos de mínima actividad magnética son indicados con barras verticales. Al igual que

en las observaciones, la asimetría tiene usualmente picos cerca de estos mínimos. La Figura 4.12 muestra el espectro Fourier del coeficiente de asimetría obtenido al considerar la serie temporal completa, con una extensión de 400 años. Una modulación en tiempos largos puede ser identificada, y también se puede observar un ciclo cercano a los 12 años. Las componentes de alta frecuencia del espectro no muestran ninguna característica particular.

Estos resultados están en buen acuerdo con las observaciones y pueden ser explicados de la siguiente manera. La naturaleza estocástica de las asimetrías es el resultado directo del forzado estocástico en las ecuaciones dinámicas, y la correlación del ruido es consecuencia de la integración espacial y temporal. En este contexto, parece natural que la asimetría resulte mas notoria durante los mínimos, cuando la contribución de la parte determinista de la solución es comparativamente mas pequeña.

Por otro lado, la aparición de picos en el espectro requiere una discusión mas detallada. La intensidad de la condición inicial usada en el modelo es simétrica respecto del ecuador. Sin embargo, la introducción de ruido enciende sobretonos mucho menos intensos que el modo fundamental, pero con paridad mixta. La saturación no lineal en las ecuaciones del dínamo acopla estos modos de alta frecuencia y paridad mixta con el modo fundamental, generando como resultado un ciclo determinista controlado por la interacción de los modos en las ecuaciones dinámicas. El resultado final es la serie temporal de asimetría AS con componentes deterministas y componentes fluctuantes. En este contexto es importante remarcar que el rol del forzado estocástico no se reduce simplemente a introducir irregularidades en la solución, sino que además afecta el acoplamiento no lineal entre modos.

Finalmente, podemos comparar los resultados del modelo con los obtenidos en la descomposición bi-ortogonal de los datos en la sección anterior. Para ello aplicamos la DBO sobre la serie espacio-temporal de campo magnético toroidal generada por el modelo. Cuando el sistema no es perturbado por ruido, el 100% de la energía de la descomposición se encuentra en modos asimétricos, y los dos primeros modos contienen el 96% de la energía total. El resto de los modos corresponden a correcciones de pequeña escala, mientras que

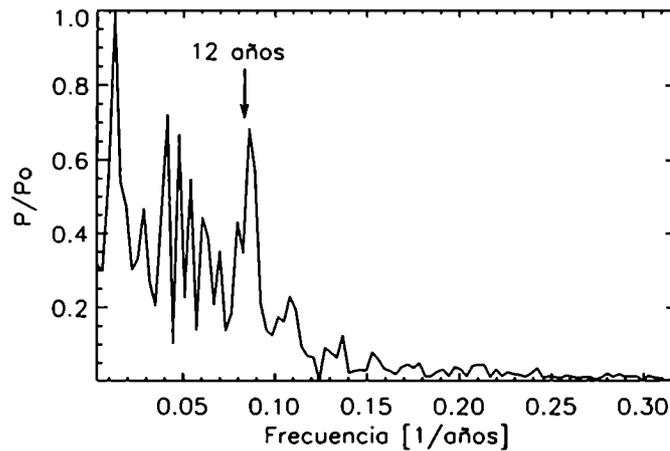


Fig. 4.12: Espectro de potencia para el coeficiente de asimetría AS generado con el modelo. Puede observarse una modulación en bajas frecuencias y un ciclo cercano a los 12 años.

sus correspondientes cronos son armónicos del ciclo de 22 años. Los cronos de los primeros dos modos se encuentran desfasados en $\pi/2$, como en la DBO de las observaciones.

Al considerar el efecto del forzado estocástico, los dos primeros modos continúan siendo antisimétricos, con el 86,6% de la energía total del sistema. Sus correspondientes cronos tienen oscilaciones de relajación con un período de 22 años, y mantienen el desfasaje en $\pi/2$ entre ambos. El resto de los modos muestran fluctuaciones estocásticas, aunque en este caso una periodicidad débil puede ser todavía identificada en los modos 3 y 4. La Figura 4.13 muestra los diagramas de mariposa reconstruidos con los primeros dos modos. Aunque cualitativamente la forma de los tops obtenidos a partir del modelo se parecen a los de los datos observacionales, la actividad magnética toma su máximo en latitudes mas altas.

Todos los modos simétricos tienen el 90,8% de la energía total. La Tabla 4.2 resume la comparación entre las distribuciones de energía de la DBO de los datos y del modelo teórico.

Al igual que los dos primeros cronos en la DBO de los datos, el espectro Fourier de los cronos obtenidos a partir del modelo tienen una periodicidad de 22 años y otra en 7

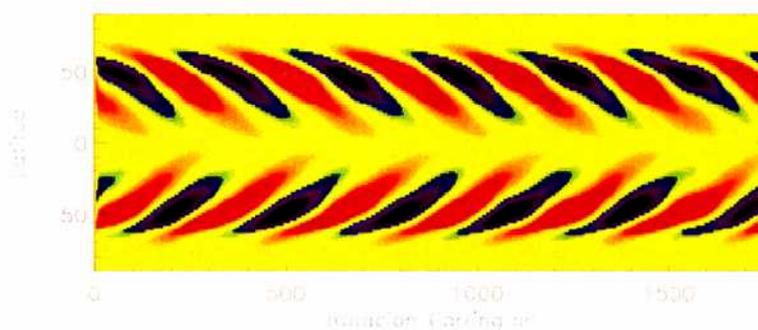


Fig. 4.13: Campo magnético reconstruido a partir de los primeros dos modos de la DBO del modelo. Comparar con las Figuras 4.6 y 4.10.

Serie espacio-temporal	Primeros dos modos [energía]	Modos asimétricos [energía]
Modelo sin forzado estocástico	96%	100%
Modelo con forzado estocástico	86,6%	90,8%
Observaciones	84,4%	90,4%

Tabla 4.2: Porcentajes de energía total obtenidos en la DBO de los datos observacionales y a partir del campo magnético toroidal generado por el modelo. Al introducir el forzado estocástico, la distribución de energía se asemeja a la observada.

años. La variación sistemática de la amplitud de los varios parámetros del modelo muestra que la intensidad de este pico está asociada al término de saturación no lineal en el efecto α . Además del pico cercano a los 22 años y del pico menor en 7 años, ninguna otra propiedad puede ser observada en el espectro. Tampoco existen indicadores de la presencia de subarmónicos, como en los datos observacionales.

La existencia de este pico de 7 años en los datos ya había sido reportada anteriormente por Bracewell [Bra85] al analizar las series temporales con otros métodos; Bracewell también consideró su presencia como evidencia de efectos no lineales en el dínamo solar. Los re-

sultados obtenidos a partir de nuestro modelo sugieren que el mecanismo de saturación de la turbulencia por acción de la fuerza de Lorentz es el responsable de de la aparición de este pico. Mas aún, sus características son modeladas correctamente por la dependencia funcional elegida para la saturación (ecuación [3.6]).

En resumen, el modelo presentado en el Capítulo 3 puede ser extendido para considerar las irregularidades, utilizando la información obtenida del análisis detallado de las observaciones del ciclo solar. El modelo resultante consiste en un esqueleto determinista dado por las ecuaciones del dínamo cinemático y un forzado estocástico que aspira a simular la complejidad presente en los movimientos turbulentos de la región convectiva solar. Este modelo explica correctamente las características medias del ciclo, así como la dispersión observada en las fluctuaciones de amplitud y período. Otras características morfológicas del ciclo, como las asimetrías entre hemisferios, también son explicadas por el modelo.

Creemos que el análisis detallado de las observaciones, y la comparación cuantitativa con los modelos de dínamo solar, servirán para construir un modelo teórico que explique también otros aspectos del ciclo y que tenga además capacidad predictiva.

Capítulo 5

Dínamos magnetohidrodinámicos

5.1 Introducción

A pesar de sus limitaciones, la teoría cinemática del dínamo es una teoría exitosa, puesto que nos permite conocer las condiciones generales bajo las cuales el campo magnético puede ser amplificado y sostenido por el movimiento de fluidos conductores. Sin embargo, muchas de las aproximaciones realizadas en su formalización (la teoría de campo medio, por ejemplo) son de difícil o imposible justificación. Además, la aproximación cinemática no explica en forma consistente de que manera el crecimiento del campo magnético alcanza la saturación. La dinámica no lineal del dínamo requiere la resolución del sistema acoplado para los campos magnético y de velocidades, considerando el acoplamiento debido a la fuerza de Lorentz.

Los modelos presentados en los Capítulos 3 y 4 intentan resolver algunos de estos problemas. El término no lineal introducido en el Capítulo 3 (ecuación [3.6]) es un modelo empírico para la saturación del dínamo por efecto de la fuerza de Lorentz. Y el forzado estocástico del Capítulo 4 intenta simular la complejidad introducida por el campo de velocidades turbulento en la región convectiva solar.

La teoría del dínamo ha evolucionado en forma sostenida durante los últimos treinta años. Las nuevas observaciones han permitido la construcción de modelos semi-empíricos razonables para los casos solar y terrestre. En el Sol ciertos descubrimientos observacionales, como el de la tacoclina, solucionaron muchos problemas relacionados con la forma en que los campos magnéticos se acumulan por tiempos largos. Sin embargo, todavía se desconoce si el campo magnético observado solo se genera allí, o en toda la región convectiva [Nor92].

De la discusión presentada hasta aquí, es evidente que existen dos formas de aproximarse al problema del dínamo. La primera consiste en mejorar los conceptos de campo medio, y aplicar los conocimientos obtenidos de las observaciones en la construcción de modelos realistas (por ejemplo, para el caso solar). Este fue el camino seguido en los capítulos previos de esta tesis. La otra forma se centra en el estudio de las propiedades fundamentales del dínamo, mediante la resolución numérica del sistema completo de ecuaciones. Estos dos caminos no son excluyentes y se complementan mutuamente. La teoría de campo medio realiza muchas aproximaciones que no son válidas en varios escenarios de interés. Ciertos problemas, como el de la saturación no lineal del dínamo, todavía no encuentran un marco teórico adecuado. Las simulaciones numéricas directas de las ecuaciones del dínamo (las ecuaciones de inducción y de movimiento del fluido) arrojaron en los últimos años resultados importantes que mejoraron significativamente la comprensión del problema.

Pero no solo la teoría de campo medio presenta serias limitaciones, las simulaciones numéricas también. La mayor limitación de las simulaciones directas reside en la necesidad de recursos extremos de cálculo para poder llevarlas a cabo. Un estudio rutinario de diferentes casos, así como simulaciones que abarquen tiempos largos o en el rango correcto de parámetros astrofísicos, resultan virtualmente imposibles. Las ecuaciones solo pueden ser integradas en geometrías sencillas y para números de Reynolds moderados. Habida cuenta de los elevadísimos valores del número de Reynolds para objetos astrofísicos tales como estrellas, discos de acreción o galaxias, no es posible realizar en la actualidad simulaciones MHD de estos sistemas. En este sentido, parece evidente que la teoría y las simulaciones deben avanzar juntas para resolver los problemas presentes. Un buen ejemplo de la inter-

acción entre teoría, observaciones y simulaciones, es el dínamo de interfase propuesto por Parker [Par93]. Este consiste en un modelo de campo medio para el dínamo solar basado en recientes observaciones heliosismológicas y simulaciones numéricas como las citadas previamente.

En una simulación numérica, se puede estudiar en forma directa las condiciones para que el campo magnético sea amplificado por acción del movimiento del fluido, así como la posterior evolución dinámica de los campos. En este capítulo seguimos este camino y realizamos simulaciones directas del sistema turbulento MHD y Hall-MHD. En el primer caso, las simulaciones pueden ser utilizadas para enriquecer la teoría de campo medio MHD invocada en la mayoría de los dínamos estelares. Los resultados de las simulaciones Hall-MHD permiten verificar los resultados obtenidos a partir de la generalización de la teoría MHD presentada en el Capítulo 2, y se aplican en escenarios donde el efecto Hall es relevante, tales como discos de acreción, estrellas de neutrones, o enanas blancas.

Los dínamos estudiados en simulaciones directas tienen propiedades muy diferentes a las de los dínamos cinemáticos que hemos presentado. El campo generado por estos últimos corresponde al valor medio y es espacialmente suave, mientras que en las simulaciones directas el campo es en general intermitente. En los flujos turbulentos suele existir un transporte continuo de la energía total desde las escalas mas grandes a las mas pequeñas (*cascada directa*), además de una transferencia de energía magnética hacia las escalas mas grandes cuando opera el mecanismo de dínamo. En cambio, en los modelos de campo medio solo está presente la transferencia de energía magnética de las escalas pequeñas a las mas grandes, una peculiaridad debida al efecto α .

Puede encontrarse evidencia de regímenes turbulentos en una gran variedad de objetos astrofísicos, tales como el medio interestelar [Arm95, Min96], la región convectiva solar [Esp93, Kri02], regiones HII [Jon99], o discos de acreción [Gam99]. La revisión de la literatura existente sobre turbulencia muestra que el problema tiene una gran importancia práctica, pero que a la vez nuestro grado de comprensión es insuficiente. En este capítulo

necesitaremos de muchas herramientas de la teoría de fluidos asociadas a este problema, ya que la simulación directa del dínamo es el estudio mismo de las condiciones bajo las cuales un flujo turbulento puede amplificar y sostener campos magnéticos. Como nos interesan los resultados en función de la comparación con la teoría del dínamo, centraremos nuestra atención en una geometría sencilla. Otros autores han construido modelos más realistas de dínamos, considerando por ejemplo efectos de compresibilidad y de estratificación [Men89, Cat99]. Por el mismo motivo, y para no perder el centro de atención en el efecto dínamo, las herramientas y definiciones propias de un flujo turbulento serán introducidas en la medida que sean necesarias, priorizando los aspectos conceptuales. Algunas de estas herramientas, como la formulación estadística para los valores medios de los campos, ya fueron presentadas en el Capítulo 2.

Los conceptos de isotropía, homogeneidad y estacionariedad, vinculados respectivamente a las simetrías de rotación, traslación espacial y traslación temporal, se refieren aquí a los valores medios de todas las cantidades físicas respecto de un conjunto estadístico de realizaciones. Así por ejemplo, en un estado estacionario, el valor medio estadístico de la energía permanecerá constante en el tiempo. Pero en cada realización la energía sufrirá desviaciones. En general, todas las variables físicas sufrirán fluctuaciones fuertes alrededor de sus valores medios debido a la intermitencia [McC90].

En todo este capítulo, las simulaciones que presentamos se realizan en una caja cúbica de longitud $L = 1$. Para cada longitud característica ℓ en esta caja, definiremos su número de onda como la inversa de la longitud $k = 1/\ell$. Para el estudio de las propiedades del régimen turbulento, es conveniente estudiar la distribución de energía en el espacio Fourier para cada escala. El análisis en el espacio Fourier simplifica la interpretación del problema, al darnos una imagen sencilla de la forma en que los diferentes modos interactúan y redistribuyen las fluctuaciones en el sistema. Además, en el espacio Fourier los operadores de derivación espacial de las ecuaciones del dínamo se convierten en productos. Esta ventaja operativa es explotada por el método que utilizaremos para la resolución numérica del sistema.

La cascada directa de energía mencionada previamente tiene lugar en el espacio Fourier. En el espacio real, donde la energía es (en valor medio) constante en todo punto, la cascada se manifiesta como la transferencia de energía de los vórtices mas grandes a los mas pequeños. A partir de este hecho, y bajo ciertas hipótesis de universalidad, Kolmogorov [Kol41a, Kol41b] demostró que el espectro de energía de un flujo turbulento en el caso hidrodinámico está dado por la ley de potencias $E(k) \sim k^{-5/3}$. Las simulaciones que presentamos en este capítulo cubren un rango de escalas demasiado corto como para determinar exactamente la existencia de una ley de potencias en los espectros de energía, aunque en las escalas mas grandes los espectros de energía cinética y magnética coinciden aproximadamente con la ley predicha para turbulencia desarrollada por Kolmogorov. Los números de Reynolds utilizados son los mas altos permitidos por la resolución de la grilla espacial, de forma tal que las escalas mas pequeñas del sistema (las escalas de disipación cinética k_ν y magnética k_η) estén perfectamente resueltas. Las expresiones correspondientes a estas escalas para el régimen turbulento serán detalladas en las Secciones 5.3 y 5.4.

5.2 Simulaciones directas

La primera simulación directa de un dínamo turbulento fue realizada por Meneguzzi, Frisch y Pouquet [Men81] en una caja cúbica con condiciones de contorno periódicas. Si bien la resolución era limitada y los números de Reynolds moderados, los resultados mostraron que un flujo turbulento isótropo y homogéneo puede amplificar significativamente una pequeña semilla de campo magnético. Estos autores estudiaron el efecto de un campo de velocidades helicoidal, y de otro sin helicidad cinética. Mientras en el primer caso los autores encontraron que se generaba un intenso campo magnético de gran escala, en el segundo caso el campo magnético obtenido era intermitente espacial y temporalmente, y mayormente concentrado en las escalas pequeñas.

Posteriormente diferentes trabajos obtuvieron resultados que cualitativa y cuantitativamente son comparables a los esperados por la teoría de campo medio. Actualmente existen modelos mas realistas que consideran fluidos compresibles [Bra01a], medios estratificados [Men89, Cat99], o pérdida de helicidad por las paredes [Bra01b]. Estos modelos son útiles para estudiar un fragmento pequeño de una región convectiva estelar o de un disco de acreción. El alto número de Reynolds en estos medios no permite que la simulación se extienda a todo el objeto.

Las simulaciones permiten estudiar la validez de algunas predicciones hechas por la teoría y extraer conclusiones que serían imposibles por otros medios. En esta sección describimos el código tridimensional que utilizamos para integrar numéricamente el sistema MHD y Hall-MHD incompresible [Min03b]. En el caso MHD los resultados del código son similares a los obtenidos por otros autores [Men81, Bra01a]. Las simulaciones con efecto Hall permiten profundizar el estudio del impacto de efectos cinéticos en el dínamo, iniciado en el Capítulo 2.

El sistema de ecuaciones a resolver está dado por la ecuación de Navier-Stokes para el movimiento del fluido, y la ecuación de inducción para el campo magnético. Siguiendo la notación utilizada en el Capítulo 2, escribimos por comodidad nuevamente el sistema de ecuaciones MHD y Hall-MHD en forma compacta como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times [(\mathbf{U} - \epsilon \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(P + \frac{B^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{U} + \mathbf{F},\end{aligned}\quad (5.1)$$

junto con las condiciones $\nabla \cdot \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Las ecuaciones (5.1) corresponden al sistema MHD cuando $\epsilon = 0$, y al sistema Hall-MHD en cualquier otro caso. Como en los capítulos anteriores, η es la difusividad magnética, ν la viscosidad cinemática, y los campos magnético y de velocidades están expresados en unidades de una velocidad característica U . En la ecuación de Navier-Stokes se agregó un término \mathbf{F} que describe a una fuerza externa

solenoidal ($\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$) actuando sobre el fluido. En este capítulo utilizaremos el término *dinamo Hall-MHD* cuando $\epsilon \neq 0$, en contraposición al *dinamo clásico* o *MHD*.

El sistema de ecuaciones (5.1) tiene tres invariantes ideales cuadráticos (magnitudes conservadas exactamente cuando $\eta = \nu = 0$):

$$E = \frac{1}{2} \int (U^2 + B^2) dV, \quad (5.2)$$

$$H_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV, \quad (5.3)$$

$$K_h = \frac{1}{2} \int (\mathbf{B} + \epsilon \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{U}) dV. \quad (5.4)$$

Aquí E es la energía total, H_m es la helicidad magnética, y K_h es la helicidad híbrida. Siguiendo la notación utilizada en capítulos anteriores, \mathbf{A} es el potencial vector definido por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. En el sistema MHD ($\epsilon = 0$), el último invariante es reemplazado por la helicidad cruzada presentada en el Capítulo 2,

$$K = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} dV. \quad (5.5)$$

Como mencionamos en ese capítulo, estos invariantes están asociados a propiedades topológicas que caracterizan al flujo. Por ejemplo, la helicidad magnética H_m mide el número de enlaces en las línea de campo magnético [Mof78]. Mientras que en un flujo turbulento la energía sufre una cascada directa, la helicidad magnética sufre una *cascada inversa*, transportándose en forma continua de las escalas mas pequeñas a las mas grandes [Fri75].

En el caso no ideal, los invariantes cuadráticos evolucionan en el tiempo en forma prescripta por las ecuaciones (5.1). Por ejemplo, la energía total evoluciona según

$$\frac{dE}{dt} = \int (\mathbf{U} \cdot \mathbf{F} - \nu \boldsymbol{\omega}^2 - \eta \mathbf{J}^2) dV, \quad (5.6)$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$ es la vorticidad del fluido, y la densidad de corriente en este sistema de unidades está dada simplemente por $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$. Esta ecuación expresa un balance sencillo

entre ganancia y pérdidas: la energía es inyectada en el sistema por la fuerza externa \mathbf{F} (de hecho, el primer término a la derecha de la ecuación es la potencia entregada al sistema por la fuerza), y es disipada en las escalas mas pequeñas por la vorticidad del fluido y por acción de la ley de Joule. En este balance, existe en general un término de flujo de energía a través de las paredes del recinto, que para condiciones de contorno adecuadas (como las condiciones de contorno periódicas que utilizaremos) resulta nulo. Cuando la potencia entregada equipara a la potencia disipada, se alcanza un estado estacionario en el que la energía total media se mantiene constante.

La ecuación (5.6), junto con las ecuaciones para la evolución de los demás invariantes, proveen una forma de comprobar la convergencia del código. Con este fin, los términos a la derecha y a la izquierda de la igualdad son comparados durante toda la simulación.

El sistema de ecuaciones (5.1) es integrado en una caja con condiciones de contorno periódicas. Las derivadas espaciales se calculan utilizando un método pseudo-espectral [Orz72], con la regla de los *dos-tercios* para controlar errores de truncación en la transformada Fourier [Can98]. Las ecuaciones son discretizadas en el tiempo utilizando un método de Runge-Kutta de orden 2. La presión total $P_T = (P + B^2/2)$ se calcula en cada paso en forma autoconsistente. Aplicando la divergencia en la ecuación de Navier-Stokes y utilizando que $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, obtenemos una ecuación de Laplace para la presión en función de los campos de velocidades y magnético

$$\nabla^2 P_T = \nabla \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}] . \quad (5.7)$$

La resolución de esta ecuación en el espacio Fourier en cada paso de integración da por resultado la presión instante a instante y asegura la incompresibilidad del fluido [Can98].

Para satisfacer la condición de divergencia nula del campo magnético, la ecuación de inducción es reemplazada por una ecuación para el potencial vector

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (\mathbf{U} - \epsilon \nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{A} , \quad (5.8)$$

donde ϕ se calcula en cada paso temporal para satisfacer la condición $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ utilizando un esquema similar al del cálculo de la presión P_T . Esta elección particular de medida (que no implica ninguna pérdida de generalidad en las soluciones de \mathbf{B}), mejora la estabilidad de las simulaciones dominadas por efecto Hall.

La fuerza externa \mathbf{F} en la ecuación de Navier-Stokes puede ser elegida arbitrariamente. En particular nos interesa estudiar la dinámica de flujos helicoidales, ya que α en la teoría de campo medio (ecuación [2.19]) es proporcional a la helicidad cinética media del fluido. La fuerza \mathbf{F} fue elegida de forma tal que sea autofunción del rotor, lo que asegura que la inyección de helicidad cinética es máxima. En particular, tomamos

$$\mathbf{F} = F_0 \{ [\cos(k_f y) + \sin(k_f z)] \hat{x} + [\sin(k_f x) + \cos(k_f z)] \hat{y} + [\cos(k_f x) + \sin(k_f y)] \hat{z} \} \quad (5.9)$$

centrada en la escala de inyección k_f . Luego la densidad de helicidad de la fuerza externa satisface la relación

$$\langle \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \rangle = k_f \langle |\mathbf{F}|^2 \rangle . \quad (5.10)$$

En el caso MHD también realizamos simulaciones con una fuerza \mathbf{F} armónica que inyecta helicidad cinética nula, aunque centrada en el mismo k_f y con la misma potencia neta. En este caso particular la helicidad cinética del fluido fluctúa con valor medio temporal nulo.

Las simulaciones que se muestran en este capítulo se realizaron con $\nu = \eta = 0,05$ y con $64 \times 64 \times 64$ puntos en la grilla espacial. En todos los casos, las simulaciones siguen el siguiente esquema: primero se realiza una simulación hidrodinámica en la que el campo de velocidades inicial era nulo en todo punto del recinto. La evolución del sistema bajo la acción de la fuerza externa \mathbf{F} continúa hasta que el fluido alcanza un estado de turbulencia estacionaria. Luego se introduce en el recinto una pequeña fluctuación magnética o *semilla*. Para facilitar la comparación, en todas las simulaciones que mostramos en este capítulo el forzado externo actúa sobre las escalas mas grandes ($k_f = 3$), y la semilla es generada con un potencial vector arbitrario cuyo espectro Fourier está dado por una delta de Dirac

centrada en $k_s = 13$. Esta elección del potencial vector corresponde a un campo magnético inicial con un espectro de energía dado por una ley de potencias k^4 y con un pico en $k = 13$. La helicidad magnética inicial de la semilla es nula. La relación entre la densidad de energía cinética E_c y la de la semilla magnética E_m es $E_m \approx 10^{-5} E_c$, donde $E_c = \langle U^2 \rangle / 2$ y $E_m = \langle B^2 \rangle / 2$. Con esta configuración, nos interesa estudiar si un campo de velocidades turbulento puede amplificar una semilla magnética de pequeña escala y generar un campo macroscópico intenso.

La simulación continúa con la misma fuerza externa F hasta que el sistema alcanza un nuevo estado estacionario. En los casos en que la energía magnética crece por efecto dínamo y luego que la energía alcanza un valor de saturación, la simulación continúa por un tiempo largo (comparado con el tiempo de disipación) para verificar que el campo magnético generado es autosostenido y no decae por disipación.

5.3 Dínamos MHD

La Figura 5.1 muestra el recinto de integración con la intensidad del campo magnético en las caras, para dos instantes en una simulación MHD con flujo helicoidal. En la primer imagen se observa la semilla magnética, con correlación de pequeña escala y baja intensidad. En la segunda se muestra la densidad de energía magnética luego de varios pasos de integración. Claramente en la simulación se genera un campo magnético intenso y de gran escala. El crecimiento de la energía magnética se observa mas fácilmente en la Figura 5.2, que muestra la densidad de las energías cinética y magnética en función del tiempo.

En la etapa inicial, la energía magnética crece exponencialmente, mientras que la energía cinética no varía. Esta etapa puede identificarse con el dínamo cinemático; en ella la energía cinética no disminuye ya que la intensidad del campo magnético es aún pequeña y el efecto de la fuerza de Lorentz sobre el fluido es despreciable. Luego, el crecimiento de la energía magnética se aparta del comportamiento exponencial, su efecto sobre la energía

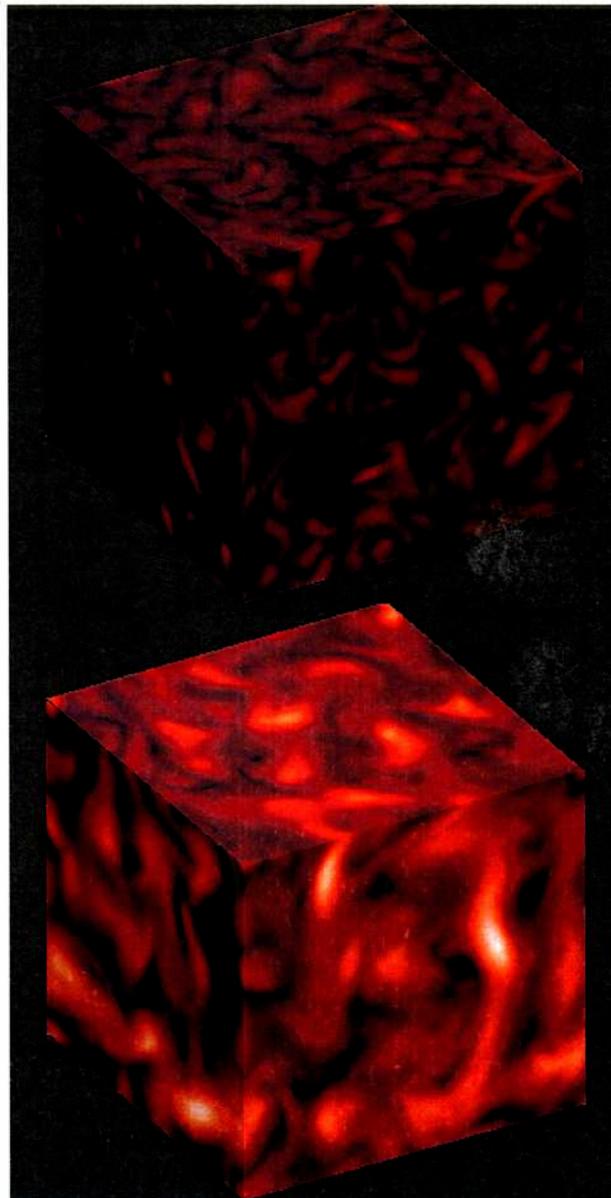


Fig. 5.1: Recinto de integración con intensidad del campo magnético $(B^2)^{1/2}$ en las paredes para el caso MHD. La imagen superior muestra la semilla magnética, mientras que la inferior muestra la evolución del campo magnético luego de varios pasos de integración

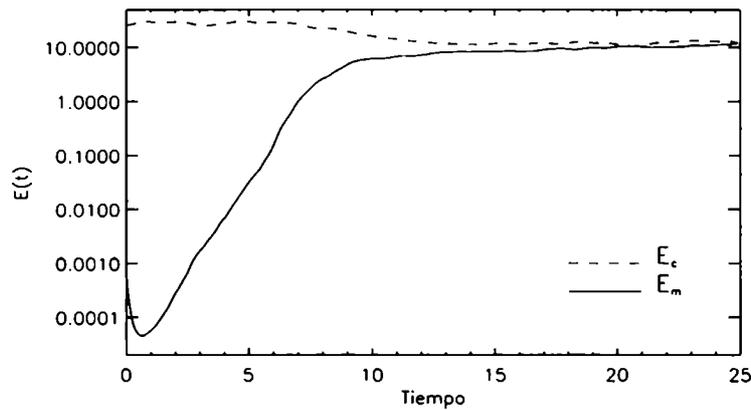


Fig. 5.2: Densidad de energía magnética E_m y de energía cinética E_c en función del tiempo para una simulación MHD.

cinética se torna apreciable, y finalmente satura y alcanza equipartición con el valor de la energía cinética (ver la Figura 5.2). En ese punto se llega a un nuevo estado de turbulencia estacionaria: la energía total fluctúa con valor medio constante, y la distribución espacial del campo magnético es intermitente. Aún así, se puede observar la aparición de un campo magnético con una longitud de correlación grande (comparable al tamaño de la caja).

Además de observarse en la Figura 5.1, la emergencia de un campo magnético macroscópico puede verse claramente en los espectros Fourier de energía. La Figura 5.3 muestra los espectros de energía cinética y magnética para diferentes tiempos. Durante los primeros pasos temporales, el espectro de potencia k^4 de la semilla es modificado significativamente hasta que la energía magnética es distribuida uniformemente en todas las escalas espaciales. Luego, la amplitud de los modos comienza a crecer con aproximadamente la misma tasa en todas las escalas. Este resultado está en buen acuerdo con simulaciones previas [Bra01a] y con predicciones teóricas del dínamo MHD turbulento [Kaz68]. Finalmente, la energía magnética en cada escala satura en un valor cercano al de la energía cinética, con algunas regiones del espectro donde la energía magnética es ligeramente superior a la cinética.

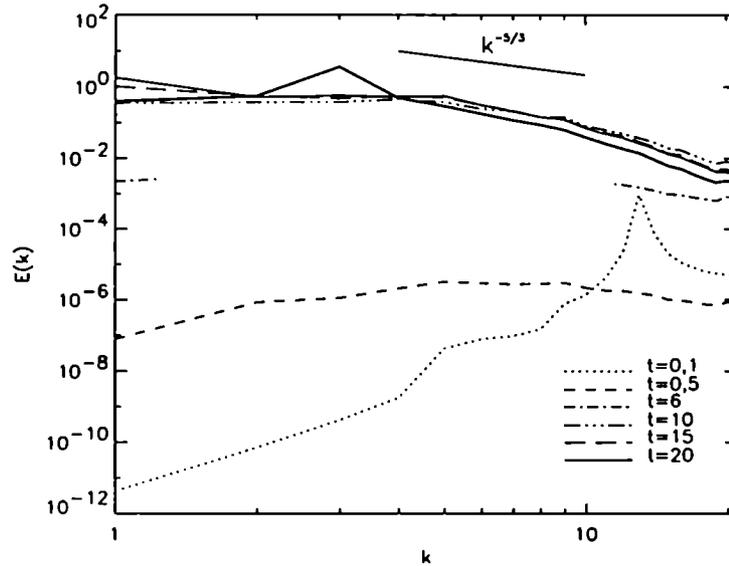


Fig. 5.3: Espectro de energía cinética (línea gruesa) y de energía magnética (varios trazos delgados) para diferentes tiempos en la simulación MHD. La ley de potencias de Kolmogorov se muestra como referencia.

En la simulación que se muestra, la escala de disipación cinética $k_\nu = (\langle \omega^2 \rangle / \nu^2)^{1/4}$ se encuentra en $k_\nu \approx 20$. Es decir que la semilla magnética inicial tiene una correlación espacial mayor que la escala de disipación cinética, y todas las escalas relevantes en el espectro de energía se encuentran correctamente resueltas.

Las densidades de helicidad cinética $H_c = \langle \mathbf{U} \cdot \nabla \times \mathbf{U} \rangle$, de helicidad magnética $H_m = \langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle$, y de helicidad de corriente $H_j = \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} \rangle$ se muestran en la Figura 5.4. Durante el proceso del dínamo se genera helicidad magnética con signo opuesto al de la helicidad cinética. Por lo tanto, la helicidad magnética crece con el mismo signo que el efecto α clásico, dado por $\alpha = -\tau \langle \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0 \rangle / 3$ (\mathbf{u}_0 es el campo de velocidades fluctuante, ver el Capítulo 2). Por otro lado, la helicidad de corriente H_j crece con el mismo signo que la helicidad cinética H_c . Esto es razonable ya que la ecuación (2.34) en el caso MHD ($\epsilon = 0$) predice que la saturación no lineal del efecto α al orden mas bajo en la microescala está dada por $\alpha = \tau (-\langle \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{b}_0 \rangle) / 3$, donde \mathbf{u}_0 y \mathbf{b}_0 son la contribución de

los campos en la microescala [Pou76]. Para alcanzar la saturación, la helicidad cinética y de corriente deben tener el mismo signo.

La generación de helicidad magnética durante el proceso del dínamo está asociada a la conservación de H_m en el caso ideal, y a la existencia de eventos disipativos necesarios para que el dínamo funcione en las escalas mas pequeñas. Al aplicarse la fuerza externa solo sobre la ecuación de Navier-Stokes, la helicidad magnética neta se conserva, excepto por el efecto de difusión magnética,

$$\frac{dH_m}{dt} = -2\eta \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} dV . \quad (5.11)$$

Sin embargo, en las escalas mas grandes el efecto α puede cambiar la helicidad del campo medio [See96]. Para la helicidad magnética del campo medio obtenemos, de la ecuación (2.21),

$$\frac{d\overline{H_m}}{dt} = 2 \int (\alpha \overline{B}^2 - \eta_{eff} \overline{\mathbf{J}} \cdot \overline{\mathbf{B}}) dV . \quad (5.12)$$

donde η_{eff} es la difusividad magnética η mas la difusividad turbulenta β . Como \overline{B}^2 es siempre positivo, el primer término a la derecha es una fuente de helicidad magnética macroscópica con el signo dado por el coeficiente α . La ecuación (5.12) describe una transferencia de helicidad magnética de las escalas mas pequeñas (consideradas en el efecto α) a las escalas mas grandes, salvo por la disipación magnética por efecto Joule. La teoría de campo medio predice entonces que la helicidad del campo medio $\overline{H_m}$ crece con el mismo signo que el coeficiente α y con signo opuesto a H_c , en buen acuerdo con lo observado en la Figura 5.4.

Las simulaciones con una fuerza externa \mathbf{F} que no inyecta helicidad cinética media, también muestran crecimiento de la energía magnética, aunque el campo generado es espacial y temporalmente mas intermitente. En estos casos, la energía magnética crece con una tasa menor y muestra fuertes variaciones temporales. Esto está en buen acuerdo con resultados teóricos que asocian la presencia de flujos helicoidales con el efecto dínamo [Kra80],

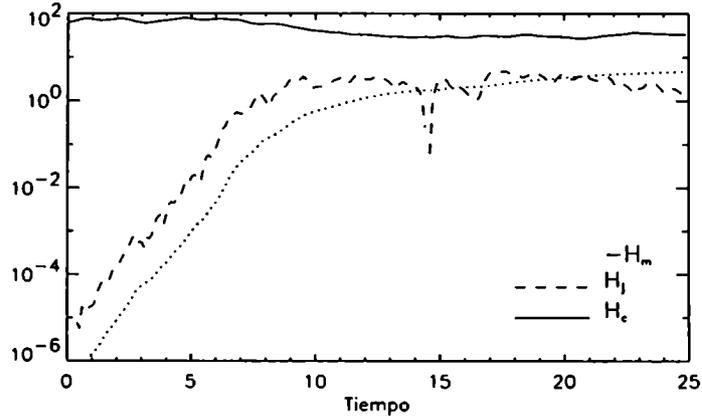


Fig. 5.4: Helicidad cinética H_c , helicidad de corriente H_j , y helicidad magnética $-H_m$ para el caso MHD.

y de clausuras que muestran que en ausencia de helicidad el dínamo es intermitente y de pequeña escala [Pou76]. Simulaciones realizadas por otros autores dan resultados similares [Men81].

5.4 Dínamos Hall-MHD

Antes de detallar las simulaciones del sistema Hall-MHD, reiteramos algunos de los resultados obtenidos en el Capítulo 2. En presencia del efecto Hall, el efecto α es modificado según

$$\alpha = \frac{\tau}{3} (-\langle \mathbf{u}_0^e \cdot \nabla \times \mathbf{u}_0^e \rangle + \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \mathbf{b}_0 \rangle - \epsilon \langle \mathbf{b}_0 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}_0^e \rangle), \quad (5.13)$$

donde $\mathbf{u}^e \equiv \mathbf{u} - \epsilon \nabla \times \mathbf{b}$ es el flujo de velocidad electrónica de pequeña escala.

En el Capítulo 2 utilizamos un conjunto particular de equilibrios para mostrar que el efecto α se ve fuertemente influenciado por el efecto Hall, y que la eficiencia del dínamo puede tanto aumentar como disminuir significativamente. La expresión de α (5.13) es no

lineal en la intensidad del campo magnético y la densidad de corriente, ya que el flujo de electrones sufre una separación importante respecto del flujo hidrodinámico (es decir, de protones) durante el crecimiento del campo magnético. Cuando el campo magnético es pequeño, el flujo electrónico es aproximadamente igual al flujo neto del fluido, y podemos esperar que en una primera aproximación el dínamo MHD y el Hall-MHD se comporten en forma similar. Pero al crecer la energía magnética, la helicidad cinética será reemplazada en su rol por la helicidad de los electrones.

La expresión (5.13) también es no lineal en la amplitud del efecto Hall ϵ , ya que u_0^e es lineal en ϵ . Así, el coeficiente α es cuadrático en ϵ y la dependencia de la eficiencia del dínamo con la amplitud del efecto Hall no será necesariamente monótona.

Conviene relacionar el valor de ϵ con los parámetros físicos que caracterizan a los objetos astrofísicos a estudiar. En las ecuaciones (5.1), $\epsilon = L_{Hall}/L$, donde L es el tamaño característico del sistema. Luego, ϵ controla la relación entre las escalas mas grandes del sistema y la longitud por debajo de la cual el efecto Hall es relevante. En un plasma de hidrógeno completamente ionizado, $L_{Hall} = cU_A/(\omega_{pi}U)$ (ver el Capítulo 2), y en el caso general el valor de L_{Hall} puede obtenerse a partir de las ecuaciones (2.23) y (2.24).

Por ejemplo, en un disco de acreción protoestelar, considerando una densidad de neutros $n_N \approx 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, una densidad de masa $\rho = 2,33 n_N m_p$, equipartición entre la energía magnética y térmica $U_A^2 \approx 0,429 KT m_p^{-1}$ (m_p : masa del protón, T : temperatura en grados Kelvin, K : constante de Boltzmann), y $\eta = 234 n_N n^{-1} T^{1/2} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ [Bal01, San02], obtenemos que $H/O \approx 10^2$. Por lo tanto el efecto Hall es mas importante que la difusión Óhmica, y es relevante en este escenario. Considerando una longitud característica de 1 UA ($1 \text{ UA} = 1,5 \times 10^{13} \text{ cm}$) y una densidad de electrones $n \approx 10^5 \text{ cm}^{-3}$ [Shu94] obtenemos $H/I \approx 10^{-4}$, o sea que $L_{Hall} \approx 10^{-4} \text{ UA}$. En discos de acreción en novas enanas la densidad de neutros es $n_N \approx 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, y para temperaturas típicas de 1.500 K y una longitud característica de 10^{10} cm , obtenemos $H/I \approx 1$ y $L_{Hall} \approx 10^{10} \text{ cm}$ [San02]. Otros ejemplos donde el efecto Hall es relevante incluyen estrellas de neutrones, enanas blancas, y

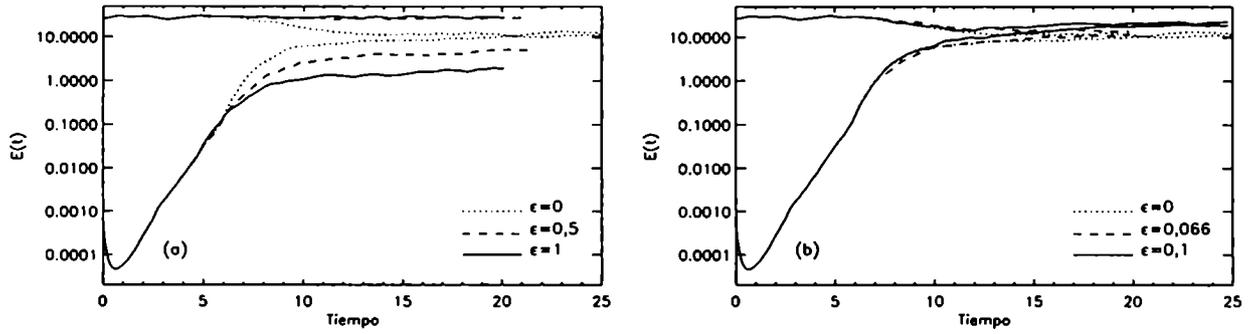


Fig. 5.5: Densidad de energía magnética E_m y de energía cinética E_c en función del tiempo para el caso MHD y para diferentes casos Hall-MHD: (a) $\epsilon = 0, 0,5$ y 1 , (b) $\epsilon = 0, 0,066$ y $0,1$. Cuando $\epsilon = 1$ la máxima energía magnética generada es un orden de magnitud menor que en el caso MHD, mientras que si $\epsilon = 0,1$ la energía magnética es 80% mayor que en el caso MHD.

turbulencia en el universo primitivo (ver la Tabla 2.2). Aunque no podemos realizar simulaciones Hall-MHD con una resolución espacial realista como para describir correctamente la separación existente en astrofísica entre las escalas de disipación, de Hall y del sistema, es conveniente tener en cuenta estos números para interpretar los resultados que se muestran a continuación.

Para comparar en forma cuantitativa la relevancia del efecto Hall en el mecanismo del dínamo turbulento, presentamos seis simulaciones con diferentes valores de ϵ : la simulación MHD ($\epsilon = 0$) y cinco simulaciones Hall-MHD con $\epsilon = 0,066, 0,1, 0,2, 0,5$, y 1 . El número de onda $k_{Hall} = 1/L_{Hall}$ está dado respectivamente por $k_{Hall} = 15, 10, 5, 2$, y 1 . Cualquier fluctuación en los campos con número de onda mayor (escalas espaciales menores) que k_{Hall} será fuertemente afectada por el efecto Hall. Como en la sección anterior, la fuerza externa actúa sobre $k_f = 3$, la semilla magnética está inicialmente centrada en $k_s = 13$, y la escala de disipación cinética corresponde a $k_\nu \approx 20$.

La Figura 5.5.a muestra la evolución de la energía cinética y magnética en función del tiempo para la simulación MHD y para dos simulaciones Hall-MHD con $\epsilon = 0,5$ y 1 . En

los primeros instantes, la evolución del sistema Hall-MHD es similar al caso MHD, y el crecimiento exponencial de la energía magnética ocurre con la misma tasa en todos los casos. Sin embargo esta etapa alcanza la saturación mas rápido en el caso Hall-MHD, y por lo tanto el sistema no llega a un estado de equipartición entre las energías cinética y magnética. Este resultado coincide cualitativamente con lo esperado a partir de la ecuación (2.34), que predice un cambio en la tasa de crecimiento a medida que la intensidad del campo magnético aumenta.

La Figura 5.5.b muestra los mismos resultados para una simulación con $\epsilon = 0,066$ y $0,1$. En este caso el sistema alcanza equipartición, y para $\epsilon = 0,1$ la energía magnética satura en un valor que es aproximadamente 80% mayor que el valor MHD. Cuando $\epsilon = 0,066$ la energía magnética en la saturación se acerca al valor MHD. En este caso, $k_{Hall} = 15$ es menor que k_s , y cercano a la escala de disipación k_ν . En virtud de estos resultados no es sorprendente que a medida que $\epsilon \rightarrow 0$ los resultados del dínamo Hall-MHD converjan a los del caso MHD.

En las simulaciones Hall-MHD también puede observarse la aparición de un campo magnético macroscópico como resultado del proceso del dínamo. En la Figura 5.6.a se muestra el espectro de energía cinética y magnética en diferentes instantes cuando $\epsilon = 1$. Durante los primeros pasos temporales la evolución es similar al caso MHD, con todos los modos en el espectro creciendo con aproximadamente la misma tasa. Sin embargo, la energía magnética de cada modo satura en un valor menor que el obtenido en la simulación MHD. Es de destacar que la razón $E_m(k)/E_c(k)$ se mantiene aproximadamente constante al alcanzarse el estado de saturación.

El espectro de energía cuando $\epsilon = 0,1$ puede observarse en la Figura 5.6.b. En este caso, los valores de las energías cinética y magnética en las escalas intermedias son similares, mientras que en las escalas mas grandes y pequeñas la energía magnética es mayor que la cinética. En este espectro se puede ver claramente la emergencia de un intenso campo magnético macroscópico. La Figura 5.7 muestra la intensidad del campo magnético en

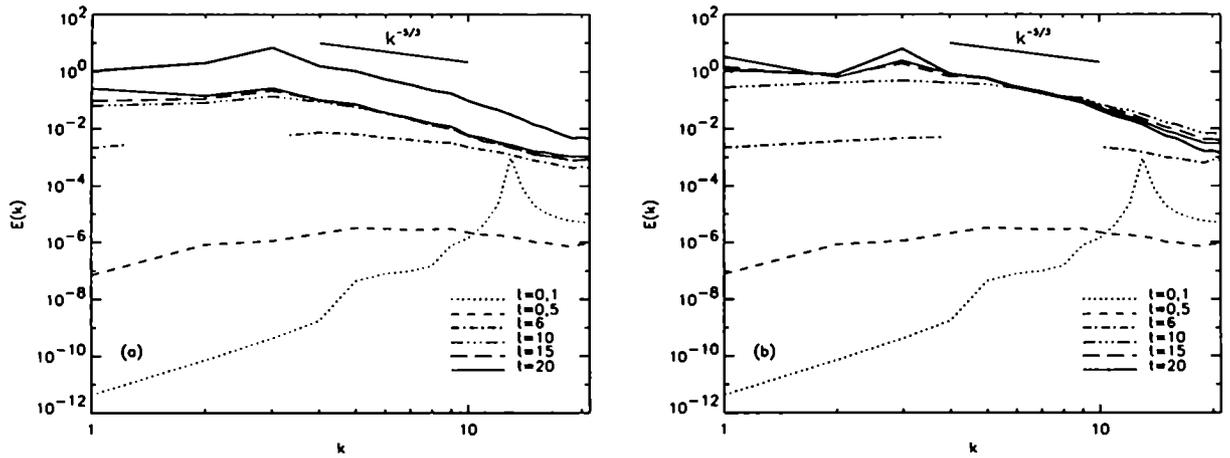


Fig. 5.6: Espectros de energía cinética (línea gruesa) y de energía magnética para diferentes tiempos: (a) $\epsilon = 1$, y (b) $\epsilon = 0,1$. La ley de potencias de Kolmogorov se muestra como referencia.

rodajas del recinto de integración, para diferentes tiempos. Algunas de las propiedades observadas en los espectros pueden identificarse en esta figura, como la aparición de un campo en escalas grandes a partir de una semilla en escalas pequeñas.

A medida que la amplitud del efecto Hall aumenta, la intensidad de la corriente \mathbf{J} disminuye. Por lo tanto, la escala de disipación magnética (dada por $k_\eta = (\langle J^2 \rangle / \eta^2)^{1/4}$) se reduce al aumentar ϵ y la disipación tiene lugar en escalas mas grandes. A su vez, la helicidad media del flujo de electrones disminuye al aumentar ϵ . Esta magnitud está directamente asociada a la amplitud del efecto α .

En las simulaciones, el efecto Hall parece inhibir la creación de helicidad magnética media observada en el dínamo MHD (Figura 5.8). En el caso MHD, la helicidad generada alcanza un valor máximo que satisface $|\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle| / \langle B^2 \rangle \approx 0,4$. Sin embargo, en presencia del efecto Hall la helicidad magnética oscila con $|\langle \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \rangle| / \langle B^2 \rangle < 0,05$ para las simulaciones con $\epsilon = 0,5$ y 1. Aun en el caso en que el efecto Hall solo es relevante cerca de la escala de disipación ($\epsilon = 0,066$), la generación de helicidad magnética se ve reducida en un 50%.

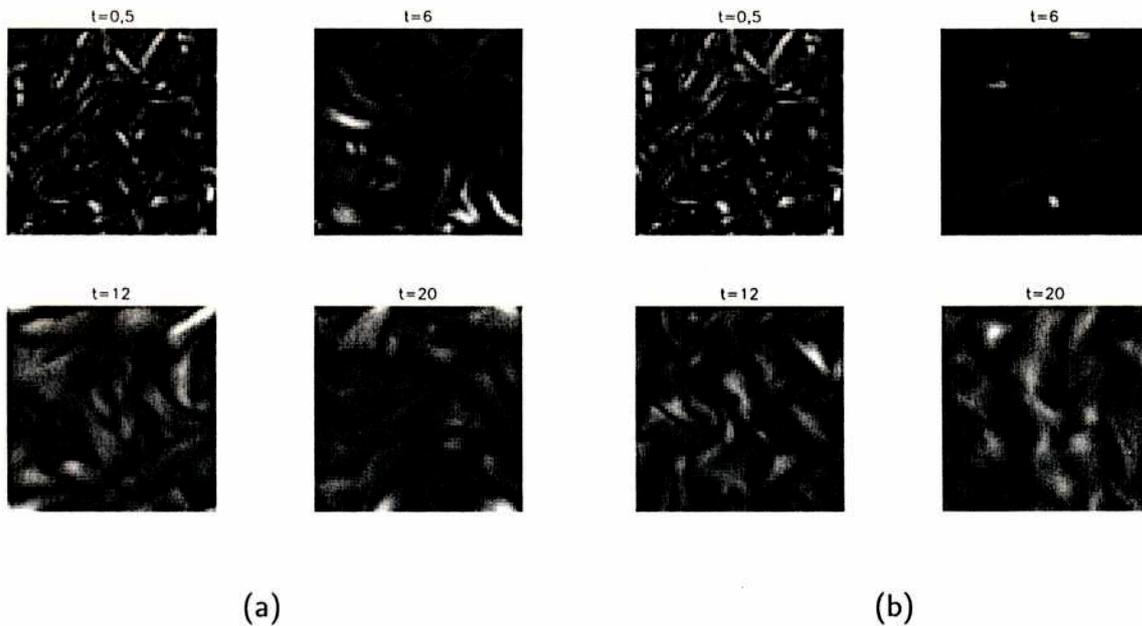


Fig. 5.7: Rodajas del recinto de integración en diferentes tiempos. Los tonos de gris marcan la intensidad del campo magnético $(B^2)^{1/2}$ en cada punto: (a) $\epsilon = 1$, y (b) $\epsilon = 0,1$. Puede observarse la aparición de un campo macroscópico en las últimas imágenes.

Esta reducción en la helicidad magnética media está en buen acuerdo con resultados teóricos que predicen que el dínamo MHD transporta helicidad magnética del campo turbulento al campo medio, mientras que en presencia del efecto Hall la helicidad magnética solo es advectada en el espacio [Ji99].

Una explicación posible de esta menor acumulación de helicidad media en presencia de efecto Hall es la siguiente. Recordemos primeramente que el mecanismo de dínamo necesita reconectar las líneas de campo magnético en escalas pequeñas para poder funcionar (ver la Figura 2.3). Por otra parte, la ecuación (5.12) es perfectamente válida en el sistema Hall-MHD. Por lo tanto, el dínamo debe crear igual cantidad de helicidad magnética en la escala grande (con el mismo signo que el efecto α) y en las escalas pequeñas (con signo opuesto). Pero en presencia del efecto Hall, los eventos de reconexión en las escalas pequeñas son mas rápidos [Pri00] y disipan menos helicidad magnética [Fre93]. El exceso relativo de helicidad en estas escalas (comparado con el caso MHD) sufre una cascada inversa hacia las escalas

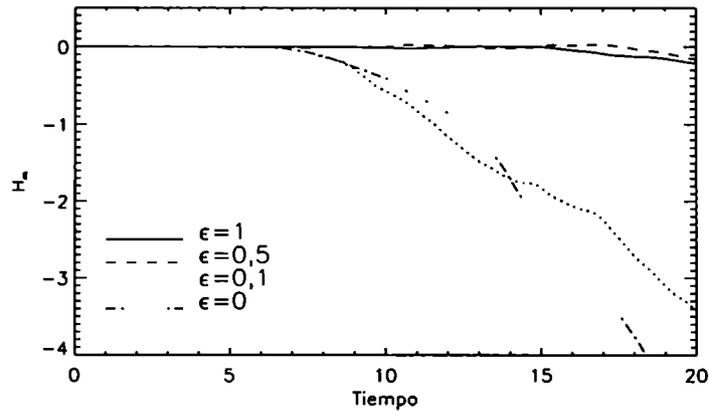


Fig. 5.8: Helicidad magnética en función del tiempo para $\epsilon = 0, 0,1, 0,5$ y 1 .

mas grandes [Pou76], donde cancela la helicidad macroscópica de signo opuesto. De hecho, se puede observar en el espectro de helicidad que los signos de H_m en las escalas grandes y pequeñas coinciden con lo predicho por la teoría de campo medio.

Como se observa en los resultados presentados en esta sección, la eficiencia del dínamo no es una función monótona de ϵ (ver la Figura 5.5). En la Figura 5.9 resumimos los resultados obtenidos a partir de varias simulaciones del sistema Hall-MHD. Esta figura muestra el valor máximo alcanzado por la energía magnética en función de ϵ , y la magnitud de las diversas escalas características del sistema en cada simulación. Como referencia, se muestra también el máximo valor alcanzado por la energía magnética en una simulación MHD bajo las mismas condiciones.

Claramente podemos identificar en la figura tres regímenes del dínamo Hall. (1) *Dínamo Hall masivo*: cuando el efecto Hall domina en todas las escalas del sistema ($k_{Hall} < k_f$) el mecanismo de dínamo es fuertemente inhibido (área blanca en la Figura 5.9). (2) *Dínamo Hall microscópico*: cuando la longitud L_{Hall} se encuentra entre la escala del forzado y de la semilla ($k_f < k_{Hall} < k_s$) el dínamo es mas eficiente que en el caso MHD (gris claro en la Figura 5.9). (3) *Límite MHD*: cuando L_{Hall} es la menor de las escalas características del

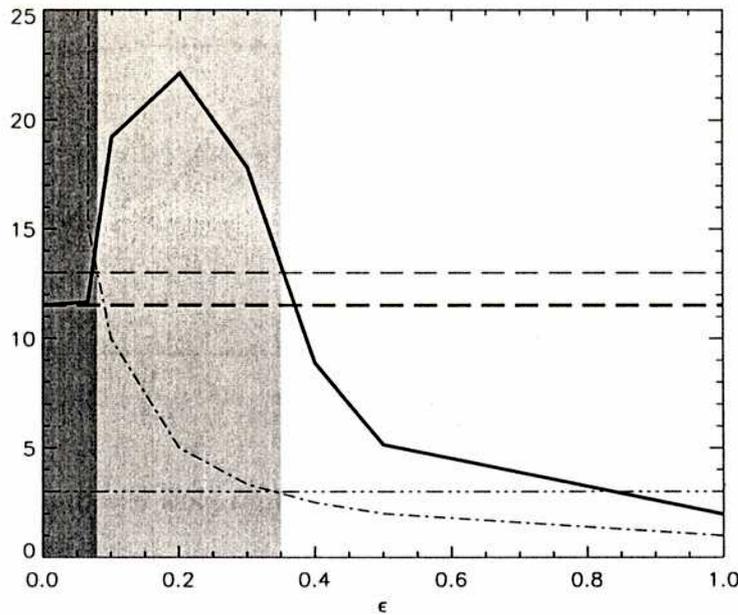


Fig. 5.9: Eficiencia de los dínamos Hall-MHD. La línea gruesa continua corresponde al máximo valor de energía magnética alcanzado en las simulaciones en función del valor de ϵ , y la línea gruesa punteada indica el valor de referencia MHD. En la figura también se indican las escalas relevantes en líneas delgadas: el número de onda de la semilla magnética k_s (---), el número de onda del forzado k_f (-...-), y de Hall k_{Hall} (-·-). Las regiones sombreadas marcan los diferentes regímenes: dínamo Hall masivo (blanco), dínamo Hall microscópico (gris claro), y límite MHD (gris oscuro).

sistema ($k_{Hall} > k_s$), el resultado tiende suavemente al dínamo MHD a medida de k_{Hall} se acerca a la escala de disipación (gris oscuro en la Figura 5.9).

En el dínamo Hall microscópico, la intensificación de la energía magnética obtenida en las simulaciones llega a ser el doble de la obtenida en el caso MHD, mientras que en el régimen del dínamo Hall masivo la energía generada cae hasta un orden de magnitud. El aumento de la eficiencia en algunos casos por un factor dos es alentador, y cabe preguntarse como escalará este resultado al aumentar la separación de escalas. Si bien la resolución espacial

en las simulaciones numéricas no nos permite aumentar aún mas la separación entre las escalas relevantes, los resultados teóricos obtenidos en el Capítulo 2 utilizando equilibrios doble-Beltrami sugieren que este factor de intensificación puede aumentar en varios ordenes de magnitud (Figura 2.7).

La dependencia observada en el nivel de saturación con ϵ tiene implicaciones importantes en astrofísica. Dado que el valor de ϵ está determinado por parámetros físicos del objeto (como por ejemplo la densidad de portadores de carga y el grado de ionización del plasma), las estimaciones de la intensidad del campo magnético basadas en la teoría MHD pueden estar alejadas de la realidad.

Los números de Reynolds y la separación de escalas utilizados en las simulaciones que presentamos, se encuentran lejos de los valores observados en astrofísica. Sin embargo, teniendo en mente esta limitación podemos discutir potenciales aplicaciones de nuestros resultados a sistemas reales. Como se indicó previamente, en un disco protoestelar $H/O \approx 10^2$ y $H/I \approx 10^{-4}$. Esto indica que la escala de Hall es dos ordenes de magnitud mas grande que la escala de disipación, pero menor que las escalas mas grandes del sistema. Por lo tanto, es de esperarse que un mecanismo de dínamo funcionando en estos objetos se encuentre en el régimen donde el efecto Hall solo domina en la microescala, y que de por resultado una fuerte intensificación del campo. En discos alrededor de novas enanas o discos protoplanetarios, $H/I \approx 1$ o mayor (Tabla 2.2), y en este caso nuestros resultados predicen para estos objetos una reducción drástica en la eficiencia del dínamo.

Los resultados de las simulaciones MHD y Hall-MHD presentadas en este capítulo coinciden cualitativamente con lo esperado por la teoría de campo medio. Un análisis cuantitativo requiere mayor resolución espacial, de forma tal de poder establecer una separación clara entre las escalas microscópicas y macroscópicas en la simulación. Sin embargo, aún siendo conscientes de estas severas limitaciones, nuestros resultados muestran claramente la presencia de regímenes cualitativamente diferentes. En virtud de la imposibilidad tecnológica (tanto en el presente como en el futuro cercano) de incrementar sensiblemente la resolución

espacial de las simulaciones, el análisis de los resultados obtenidos y su aplicación en la construcción de mejores modelos de clausura de las ecuaciones, parece el camino mas adecuado para comprender el problema de la generación de campos magnéticos en astrofísica.

Capítulo 6

Conclusiones

6.1 Una visión en perspectiva

El estudio del origen de los campos magnéticos observados en la mayoría de los objetos astronómicos es una de las áreas más activas de investigación en astrofísica. En casi todos los objetos que presentan campos magnéticos, existe evidencia que sugiere que la región de generación de los campos se encuentra en un estado turbulento. En todos estos objetos el número de Reynolds es muy grande [Zel83], y en algunos casos existen observaciones que permiten reconstruir el espectro de energía de las fluctuaciones del fluido [Arm95, Min96, Esp93, Kri02]. En esos casos, el espectro de energía está dado por una ley de potencias (muchas veces coincidente con la ley de Kolmogorov) y la dinámica cubre un amplio rango de escalas espaciales.

Otra característica en común de todos estos objetos es que son rotantes. Existe una ruptura de la simetría de reflexión introducida por la rotación del objeto alrededor de un eje privilegiado. La aparente universalidad de los campos magnéticos junto con estas propiedades dio origen a una teoría que explica la amplificación del campo magnético causada por el movimiento de un fluido conductor.

Debido a que históricamente la generación de campos magnéticos estuvo íntimamente ligada a escenarios turbulentos, la teoría del dínamo heredó todas las limitaciones, incertezas y problemas que rodean a las teorías de turbulencia en fluidos. El desarrollo formal de la teoría comenzó a partir de 1960, cuando M. Steenbeck, F. Krause y K.-H. Rädler presentaron la teoría de campo medio [Ste66, Kra80]. Aunque muchas de las aproximaciones usadas por esta teoría son incorrectas y no encuentran justificación en las observaciones, la simplicidad y la validez de sus resultados han hecho que se convierta de todas maneras en el punto de partida o de referencia de casi cualquier modelo. Con la ayuda de esta teoría, muchos de los ingredientes necesarios para la generación de campos magnéticos fueron puestos de manifiesto, como por ejemplo la necesidad de flujos helicoidales. Sin embargo, varios aspectos de la teoría son aún motivo de debate.

En muchos objetos, como la Tierra y otros planetas, el Sol y estrellas de diferentes tipos espectrales, los modelos de dínamo construidos por diversos autores describen correctamente muchas de las propiedades observadas. En algunos de estos objetos, como el Sol [Dik99, Cha00, Min02a] y la Tierra [Gla95, Kag97, Kua97, Chr98] difícilmente otra teoría pueda describir la dinámica de los campos con el detalle que se obtiene utilizando la teoría del dínamo. En otros objetos, como las galaxias, todavía se discute si un mecanismo de dínamo puede generar los campos observados o si otros efectos son responsables de su aparición [Kul92].

En la presente tesis, el estudio de la teoría clásica del dínamo está principalmente centrado alrededor del caso solar. Allí aparecen la mayoría de los problemas comúnmente encontrados en otros objetos, con la ventaja de que la cantidad de observaciones disponibles del ciclo solar permiten alcanzar un detalle mayor en los modelos. En este sentido, el Sol es un excelente laboratorio para probar los avances en la teoría, los modelos numéricos, y encontrar posibles fallas y limitaciones. En la tesis también hemos extendido el rango de aplicabilidad de la teoría del dínamo del caso MHD a escenarios en los que el efecto Hall es relevante. La inclusión del efecto Hall tiene un impacto profundo en el dínamo. El hecho de que en presencia del efecto Hall el campo magnético esté congelado al flujo

de electrones y no al campo de velocidades hidrodinámico, permite amplificar o inhibir (a veces de manera muy notoria) el mecanismo del dínamo. Esta generalización permite aplicar la teoría en escenarios donde hasta el momento se aplicaba la aproximación MHD, o incluso donde la relevancia de los campos magnéticos era directamente despreciada. Estos escenarios incluyen discos de acreción, estrellas de neutrones, enanas blancas, y turbulencia en el universo primitivo.

6.2 Dínamos cinemáticos

En vista de las observaciones en las cuales la presencia de campos magnéticos va acompañada por el movimiento de fluidos conductores, corresponde preguntarse si esos movimientos son los responsables de la generación del campo magnético.

¿Bajo que condiciones el flujo puede generar y amplificar el campo magnético? Considerando la complejidad asociada a la resolución completa de las ecuaciones del dínamo, una aproximación cinemática es la más adecuada para responder esta pregunta. En esta aproximación, el campo de velocidades se considera conocido y se estudia la evolución del campo magnético bajo la acción del mismo, despreciando el efecto del campo sobre la dinámica del fluido.

En el caso solar, las observaciones recientes permiten conocer con gran detalle los perfiles de velocidad en su interior. Tomando como base estos datos, hemos construido un modelo cinemático del dínamo solar, que incluye los resultados de la teoría de campo medio (el efecto α y la difusividad turbulenta), y que considera el efecto de supresión de la turbulencia por el campo magnético en forma semi-empírica. Este efecto es el responsable de la saturación del ciclo y del acoplamiento entre modos. En los resultados del modelo se puede observar un ciclo magnético con un período cercano a los 22 años y con una inversión del campo poloidal cada 11 años, 3 años después del máximo de intensidad toroidal, lo cual está en buen acuerdo con las observaciones [Har92]. También se observa la característica migración

de la actividad magnética hacia el ecuador a medida que el ciclo progresa. Utilizando este modelo encontramos que la velocidad del flujo meridional tiene mayor impacto en la determinación del período del ciclo que la amplitud del efecto α .

Si bien los modelos cinemáticos explican correctamente la dinámica regular de los campos medios, la causa de las irregularidades observadas en el ciclo solar no ha sido aún claramente establecida. Hemos realizado un análisis detallado de las observaciones disponibles del ciclo solar utilizando modernas técnicas matemáticas. El análisis se centra en la correlación observada en el número de Wolf entre amplitud y fase, y en la descomposición bi-ortogonal de la distribución espacial y temporal del área de manchas. Ambos estudios sugieren que las irregularidades en el ciclo son correctamente explicadas por efectos estocásticos, los cuales a su vez están asociados a la complejidad de los movimientos turbulentos en la zona convectiva. En la descomposición bi-ortogonal de los datos no se halló ninguna evidencia de caos de baja dimensionalidad, al menos en las escalas temporales que pueden ser analizadas con los datos disponibles.

Los resultados de estos análisis fueron utilizados para modelar las irregularidades utilizando el modelo cinemático del dínamo solar. El modelo consiste en un esqueleto determinista dado por las ecuaciones del dínamo cinemático, y un forzado estocástico que modela empíricamente los movimientos turbulentos de la región convectiva solar. Este modelo explica correctamente las características medias del ciclo, así como la dispersión observada en las fluctuaciones de amplitud y período. Otras características morfológicas del ciclo, como las asimetrías entre hemisferios, también son explicadas por este modelo. Creemos que el análisis detallado de las observaciones, y su comparación cuantitativa con modelos teóricos como el presente, permitirán mejorar dichos modelos y explicar otros aspectos del ciclo, como así también adquirir una mejor capacidad predictiva.

6.3 Dínamos magnetohidrodinámicos

La teoría cinemática del dínamo ha resultado exitosa en muchos objetos, en particular cuando es aplicada al caso solar o en estrellas de otros tipos espectrales. En el caso particular de la Tierra, el bajo número de Reynolds ha permitido también la realización de simulaciones directas de las ecuaciones MHD, que muestran que la teoría del dínamo puede explicar correctamente las inversiones del campo y otras características dinámicas [Gla95, Chr98].

Debido a las limitaciones de la teoría, el estudio del dínamo requiere indefectiblemente de simulaciones numéricas que permitan validar y extender los resultados obtenidos con las clausuras del sistema de ecuaciones. En una simulación numérica se puede estudiar en forma directa las condiciones para que el campo magnético sea amplificado por acción del movimiento del fluido, así como la posterior evolución de los campos. No obstante, es importante aclarar que estas simulaciones se encuentran limitadas porque los recursos de cálculo actuales solo permiten alcanzar números de Reynolds bastante mas bajos que los imperantes en condiciones astrofísicas. En la tesis presentamos simulaciones directas del sistema turbulento MHD y Hall-MHD, que pueden ser utilizadas para enriquecer la teoría de campo medio MHD usada en la mayoría de los dínamos estelares y verificar los resultados de la nueva teoría Hall-MHD.

Si bien los dínamos estudiados en simulaciones directas presentan propiedades diferentes a las de los dínamos cinemáticos, muchas de las predicciones de la teoría de campo medio pueden ser confirmadas por los resultados numéricos. En las simulaciones MHD con flujo helicoidal, durante los primeros instantes la energía magnética crece exponencialmente y la energía cinética no varía. Esta etapa puede identificarse con el dínamo cinemático; la energía cinética no disminuye ya que la intensidad del campo magnético es pequeña y el efecto de la fuerza de Lorentz sobre el fluido es despreciable. Finalmente, la energía magnética satura y alcanza equipartición con el valor de la energía cinética. Las simulaciones con helicidad cinética media nula también muestran crecimiento de la energía magnética, aunque el campo

generado espacial y temporalmente intermitente. En estos casos, la energía magnética crece con una tasa menor y muestra fuertes fluctuaciones temporales.

En las simulaciones Hall-MHD, la eficiencia del dínamo no es una función monótona de la intensidad del efecto Hall. Dependiendo de la amplitud de este efecto, la intensificación de la energía magnética obtenida en las simulaciones puede llegar a ser el doble que la obtenida en el caso MHD, o puede también reducirse en un orden de magnitud. Análisis teóricos utilizando equilibrios doble-Beltrami sugieren que el factor de intensificación puede aumentar en varios ordenes de magnitud al aumentar la separación entre las escalas espaciales. La dependencia observada del nivel de saturación con la intensidad del efecto Hall tiene importantes implicaciones en astrofísica, ya que la relevancia del efecto Hall está determinada por parámetros físicos del objeto, tales como la densidad de portadores de carga o el grado de ionización del medio.

Tanto la teoría de campo medio, los modelos de dínamos cinemáticos, y las simulaciones directas presentadas en esta tesis (así como otros trabajos citados) muestran que bajo condiciones muy generales un fluido conductor puede efectivamente amplificar y sostener campos magnéticos. Los dos ingredientes necesarios en el flujo para que un dínamo opere eficientemente son: helicidad y rotación diferencial. Tanto la teoría como las simulaciones muestran que la presencia de estos ingredientes son suficientes para tener conversión espontánea de energía mecánica en energía magnética. La validez y generalidad de este tipo de resultados le han dado un gran impulso a la teoría del dínamo.

Sin embargo, todavía subsisten muchos problemas. Las simulaciones muestran que en el mejor de los casos el proceso satura cuando la energía magnética es del mismo orden que la energía almacenada en los movimientos del fluido. Sin embargo, en astrofísica se observan regiones en las que el campo magnético es aparentemente más intenso que el campo de velocidades. Otro de los problemas está asociado con la naturaleza de la difusividad turbulenta, de la cual dependen crucialmente los modelos de dínamo. Si un campo magnético crece, debería suprimir la turbulencia que lo alimenta, en parte por el mecanismo mismo de

la difusión turbulenta. Las simulaciones muestran que aún bajo estas condiciones el dínamo puede sostenerse, pero no se conoce a ciencia cierta que ocurre en escenarios con números de Reynolds grandes.

Si bien en los últimos treinta años ha habido considerables avances en nuestra comprensión del fenómeno del dínamo, existen todavía muchas preguntas por responder. En esta tesis hemos hecho aportes significativos a la teoría de campo medio, y al modelado de los dínamos cinemáticos, con aplicaciones particulares al caso solar. Sin embargo, y en vista de las limitaciones y de la cantidad de problemas presentes, la generación de campos magnéticos continuará siendo un desafío por muchos años en astrofísica.

Bibliografía

- [Alf42] Alfvén, H. 1942, *Arkiv. f. Mat. Astron. Fysik* **29B**, 7
- [Arm95] Armstrong, J.W., Rickett, B.J., y Spangler, S.R. 1995, *Astrophys. J.* **443**, 209
- [Aub92] Aubry, N., Guyonnet, R., y Lima, R. 1992, *J. Nonlinear Sci.* **2**, 183
- [Bab55] Babcock, H.W. y Babcock, H.D. 1955, *Astrophys. J.* **121**, 349
- [Bab61] Babcock, H.W. 1961, *Astrophys. J.* **133**, 572
- [Bac58] Backus, G.E. 1958, *Ann. Phys.* **4**, 372
- [Bal68] Balakrishnan, A.V. 1968, *Communication Theory*. McGraw-Hill, New York
- [Bal01] Balbus, S.A. y Terquem, C. 2001, *Astrophys. J.* **552**, 235
- [Bar80] Barnes, J.A., Sargent III, H.H., y Tryon, P.V. 1980, en *Proc. Conf. Ancient Sun*, 159. R. Pepin, J.A. Eddy, y R. Merrill (eds.). Pergamon Press, Oxford
- [Bec99] Beck, J.G. 1999, *Solar Phys.* **191**, 47
- [Bee98] Beer, J., Tobias, S., y Weiss, N. 1998 *Solar Phys.* **181**, 237
- [Bla99] Blackman, E.G. y Field, G.B. 1999, *Astrophys. J.* **521**, 597
- [Bra53] Bracewell, R.N. 1953, *Nature* **133**, 512
- [Bra85] Bracewell, R.N. 1985, *Australian J. of Phys.* **38**, 1009

- [Bra01a] Brandenburg, A. 2001, *Astrophys. J.* **550**, 824
- [Bra01b] Brandenburg, A. y Dobler, W. 2001, *Astron. & Astrophys.* **369**, 329
- [Bul55] Bullard, E.C. 1955, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**, 744
- [Cal95] Caligari, P., Moreno-Insertis, F., y Schüssler, M. 1995, *Astrophys. J.* **441**, 886
- [Cam98] Cameron, R. y Hopkins, A. 1998, *Solar Phys.* **183**, 263
- [Can98] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., y Zang, T.A. 1988, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlín
- [Car93] Carbonell, M., Oliver, R., y Ballester, J.L. 1993, *Astron. & Astrophys.* **274**, 497
- [Car94] Carbonell, M., Oliver, R., y Ballester, J.L. 1994, *Astron. & Astrophys.* **290**, 983
- [Cat96a] Cattaneo, F. y Hughes, D.W. 1996, *Phys. Rev. E* **54**, R4532
- [Cat96b] Cattaneo, F., Hughes, D.W., y Kim, E. 1996, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2057
- [Cat99] Cattaneo, F. 1999, *Astrophys. J.* **515**, L39
- [Cha96] Charbonneau, P. y MacGregor, K.B. 1996, *Astrophys. J.* **473**, L59
- [Cha00] Charbonneau, P. y Dikpati, M. 2000, *Astrophys. J.* **543**, 1027
- [Cho92] Choudhuri, A.R. 1992, *Astron. & Astrophys.* **253**, 277
- [Chr98] Christensen, U., Olson, P., y Glatzmaier, G.A. 1998, *Geophys. Research Lett.* **25**, 1565
- [Däm93] Dämning, M. y Mitschke, F. 1993, *Phys. Lett. A* **178**, 385
- [Dic78] Dicke, R.H. 1978, *Nature* **276**, 676
- [Dic79] Dicke, R.H. 1979, *Nature* **280**, 24
- [Dik99] Dikpati, M. y Charbonneau, P. 1999, *Astrophys. J.* **518**, 508

- [Dur95] Durney, B.R. 1995, *Solar Phys.* **160**, 213
- [Dur96] Durney, B.R. 1996, *Solar Phys.* **166**, 231
- [Dur97] Durney, B.R. 1997, *Astrophys. J.* **486**, 1065
- [Eck92] Eckmann, J.P. y Ruelle, D. 1992, *Physica D* **56**, 185
- [Edd76] Eddy, J.A. 1976, *Science* **192**, 1189
- [Edd80] Eddy, J.A. 1980, en *Proc. Conf. Ancient Sun*, 119. R. Pepin, J.A. Eddy, y R. Merrill (eds.). Pergamon Press, Oxford
- [Esp93] Espagnet, O., Muller, R., Roudier, T., y Mein, N. 1993, *Astron. & Astrophys.* **271**, 589
- [Far81] Farmer, J.D. 1981, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 179
- [Fer01] Fernandez Borda, R.A., Mininni, P.D., Mandrini, C.H., Gómez, D.O., Bauer, O.H., y Rovira, M.G. 2001, *Am. Soc. Pacific Conf. Series* **248**, 149
- [Fer02] Fernandez Borda, R.A., Mininni, P.D., Mandrini, C.H., Gómez, D.O., Bauer, O.H., y Rovira, M.G. 2002, *Solar Phys.* **206**, 347
- [Fer94] Ferriz-Mas, A., Schmitt, D., y Schüssler, M. 1994, *Astron. & Astrophys.* **289**, 949
- [Fie99] Field, G.B., Blackman, E.G., y Chou, H. 1999, *Astrophys. J.* **513**, 638
- [Fou90] Foukal, P. 1990, *Solar Astrophysics*. John Wiley & Sons, New York
- [Fre93] Freedman, M.H. y Berger M.A. 1993, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **73**, 91
- [Fri75] Frisch, U., Pouquet, A., Liorat, J., y Mazure, A. 1975, *J. Fluid Mech.* **68**, 769
- [Gab46] Gabor, D. 1946, *JIEE (London)* **93**, 429
- [Gal94] Galanti, B., Kleeorin, N., y Rogachevskii, I. 1994, *Phys. of Plasmas* **1**, 3843

- [Gam99] Gammie, C. 1999, en *Interstellar turbulence*, 277. J. Franco y A. Carramiñana (eds.). Cambridge University Press, Cambridge
- [Gil98] Gilmore, R. 1998, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 1455
- [Gla95] Glatzmaier, G.A. y Roberts, P.H. 1995, *Nature* **377**, 203
- [Gok92] Gokhale, M.H., Javaraiah, J., Narayanan Kutty, K., y Varghese, B.A. 1992, *Solar Phys.* **138**, 35
- [Gru94] Gruzinov, A. y Diamond, P.H. 1994, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1651
- [Hal08] Hale, G.E. 1908, *Astrophys. J.* **28**, 315
- [Har92] Harvey, K.L. 1992, en *The Solar Cycle*, ASP Conference Series **27**, 335. K.L. Harvey (ed.). Astronomical Society of the Pacific, San Francisco
- [Hei83] Heintzmann, H. 1983, *JETP* **57**, 251
- [Her58] Herzenberg, A. 1958, *Phyl. Trans. R. Soc. Lond.* **A250**, 543
- [Hol02] Hollerbach, R. y Rüdiger, G. 2002, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **337**, 216
- [Hol96] Holmes, P., Lumley, J.L., y Berkooz, G. 1996, *Turbulence, coherent structures, dynamical systems, and symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge
- [Hoy93] Hoyng, P. 1993, *Astron. & Astrophys.* **272**, 321
- [Hoy94] Hoyng, P., Schmitt, D., y Teuben, L.J.W. 1994, *Astron. & Astrophys.* **289**, 265
- [Hoy96] Hoyng, P. 1996, *Solar Phys.* **169** 253
- [Jen91] Jennings, R.L. y Weiss, N.O. 1991, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **252**, 241
- [Ji99] Ji, H. 1999, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3198
- [Jon99] Joncas, G. 1999, en *Interstellar turbulence*, 154. J. Franco y A. Carramiñana (eds.). Cambridge University Press, Cambridge

- [Kag97] Kageyama, A. y Sato, T. 1997, *Phys. Rev. E* **55**, 4617
- [Kaz68] Kazantsev, A.P. 1968, *J. Exp. Theor. Phys.* **26**, 1031
- [Kip91] Kippenhahn, R. y Weigert, A. 1991, *Stellar structure and evolution*. Springer-Verlag, Berlín.
- [Kno95] Knobloch, E. y Landsberg, A.S. 1995, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **278**, 294
- [Kno98] Knobloch, E., Tobias, S.M., y Weiss, N.O. 1998, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **297**, 1123
- [Kol41a] Kolmogorov, A.N. 1941, *C.R. Acad. Sci. URSS* **30**, 301
- [Kol41b] Kolmogorov, A.N. 1941, *C.R. Acad. Sci. URSS* **32**, 16
- [Kra80] Krause, F. y Rädler, K.-H. 1980, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Pergamon Press, Oxford
- [Kri02] Krishan, V., Paniveni, U., Singh, J., y Srikanth, R. 2002, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **334**, 230
- [Krm97] Krmpotić, D. y Mindlin, G.B. 1997, *Phys. Lett. A* **236**, 301
- [Kua97] Kuang, W. y Bloxham, J. 1997, *Nature* **389**, 371
- [Kug99] Kugiumtzis, D. 1999, *Phys. Rev. E* **60**, 2808
- [Kul92] Kulsrud, R.M. y Anderson, S.W. 1992, *Astrophys. J.* **396**, 606
- [Kuz99] Kuzanyan, K., Bao, S., y Zhang, H. 1999, *Solar Phys.* **191**, 231
- [Lan80] Landau y Lifschitz. 1980, *Electrodinámica de los medios continuos*. Reverté, Madrid
- [Lar19] Larmor, J. 1919, *How could a rotating body such as the Sun become a magnet?* *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.* **1919**, 159

- [Lei69] Leighton, R.B. 1969, *Astrophys. J.* **156**, 1
- [Mah98] Mahajan, S.M. y Yoshida, Z. 1998, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4863
- [Man65] Mandel, L. y Wolf, E. 1965, *Rev. Mod. Phys.* **37**, 231
- [McC90] McComb, W.D. 1990, *The physics of fluid turbulence*. Clarendon Press, Oxford
- [Men81] Meneguzzi, M., Frisch, U., y Pouquet, A. 1981, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1060
- [Men89] Meneguzzi, M. y Pouquet, A. 1989, *J. Fluid Mech.* **205**, 297
- [Min98] Mindlin, G.B., Merener, N., y Boyd, P.T. 1998, *Europhys. Lett.* **42**, 31
- [Min00] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mindlin, G.B. 2000, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5476
- [Min01a] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mindlin, G.B. 2001, *Solar Phys.* **201**, 203
- [Min01b] Mininni, P.D. y Gómez, D.O. 2001, *Am. Soc. Pacific Conf. Series* **248**, 161
- [Min02a] Mininni, P.D. y Gómez, D.O. 2002, *Astrophys. J.* **573**, 454
- [Min02b] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mahajan, S.M. 2002, *Astrophys. J.* **567**, L81
- [Min02c] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mindlin, G.B. 2002, *Solar Phys.* **208**, 167
- [Min02d] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mindlin, G.B. 2002, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 061101
- [Min03a] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mahajan, S.M. 2003, *Astrophys. J.* **584**, 1020
- [Min03b] Mininni, P.D., Gómez, D.O., y Mahajan, S.M. 2003, *Astrophys. J.* **587** (en prensa)
- [Min96] Minter, A.H. y Spangler, S.R. 1996, *Astrophys. J.* **458**, 194
- [Mof78] Moffat, H.K. 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press, Cambridge

- [Mos92] Moss, D., Brandenburg, A., Tavakol, R., y Tuominen, I. 1992, *Astron. & Astrophys.* **265**, 843
- [Mus95] Muslimov, A.G., van Horn, H.M., y Wood, M.A. 1995, *Astrophys. J.* **442**, 758
- [Nor92] Nordlund, Å., Brandenburg, A., Jennings, R.L., Rieutord, M., Ruokolainen, J., Stein, R.F., y Tuominen, I. 1992, *Astrophys. J.* **392**, 647
- [Nor85] Norman, C. y Heyvaerts, J. 1985, *Astron. & Astrophys.* **147**, 247
- [Oli94] Oliver, R. y Ballester, J.L. 1994, *Solar Phys.* **152**, 481
- [Oli96] Oliver, R. y Ballester, J.L. 1996, *Solar Phys.* **169**, 215
- [Orz72] Orzag, S.A. y Patterson, G.S. 1972, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 76
- [Oss96] Ossendrijver, A.J.H. y Hoyng, P. 1996, *Astron. & Astrophys.* **313**, 959
- [Oss96] Ossendrijver, A.J.H., Hoyng, P., y Schmitt, D. 1996, *Astron. & Astrophys.* **313**, 938
- [Pal99] Paluš, M. y Novotná, D. 1999, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3406
- [Par55] Parker, E.N. 1955, *Astrophys. J.* **122**, 293
- [Par93] Parker, E.N. 1993, *Astrophys. J.* **408**, 707
- [Pik97] Pikovsky, A.S., Rosenblum, M.G., Osipov, G.V., y Kurths, J. 1997, *Physica A* **104**, 219
- [Pon73] Ponomarenko, Y.B. 1973, *Zh. Prikl. Mekh. & Tekh. Fiz. (USSR)* **6**, 47
- [Pot99] Potekhin, A.Y. 1999, *Astron. & Astrophys.* **351**, 787
- [Pou76] Pouquet, A., Frisch, U., y Leorat, J. 1976, *J. Fluid Mech.* **77**, 321
- [Pre86] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., y Vetterling, W.T. 1986, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge

- [Pri84] Priest, E.R. 1984, *Solar magneto-hydrodynamics*. D. Reidel Publishing Company, Holland
- [Pri00] Priest, E.R. y Forbes, T. 2000, *Magnetic reconnection*. Cambridge University Press, Cambridge
- [Pro94] Proctor, M.R.E., y Gilbert, A.D. (eds.). 1994, *Lectures in solar and planetary dynamos*. Cambridge University Press, Cambridge
- [Ros96] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S., y Kurths, J. 1996, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1804
- [Rue90] Ruelle, D. 1990, *Proc. R. Soc. A* **427**, 241
- [San02] Sano, T. y Stone, J.M. 2002, *Astrophys. J.* **570**, 314
- [Sch99] Schreiber, T. 1999, *Phys. Rep.* **308**, 1
- [Sch43] Schwabe, S.H. 1843, *Astron. Nacr.* **20**, 283
- [See96] Seehafer, N. 1996, *Phys. Rev. E* **53**, 1283
- [Sha97] Shalybkov, D.A., y Urpin, V.A. 1997, *Astron. & Astrophys.* **321**, 687
- [Shu94] Shu, F., Najita, J., Ostriker, E., y Wilkin, F. 1994, *Astrophys. J.* **429**, 781
- [Sou70] Southern, R.W. 1970, *Medieval Humanism*. Harper & Row, New York
- [Ste66] Steenbeck, M., y Krause, F. 1966, *Z. Naturforsch.* **21a**, 1285
- [Ste86] Stenflo, J.O. y Vogel, M. 1986, *Nature* **319**, 285
- [Sti76] Stix, M. 1976, *Astron. & Astrophys.* **47**, 243
- [Taj92] Tajima, T., Cable, S., Shibata, K., y Kulsrud, R.M. 1992, *Astrophys. J.* **390**, 309
- [Tam93] Tamura, M., Hayashi, S.S., Yamashita, T., Duncan, W.D., y Hough, J.H. 1993, *Astrophys. J.* **404**, L21

- [The86] Theiler, J. 1986, Phys. Rev. A **34**, 2427
- [Tob95] Tobias, S.M, Weiss, N.O., y Kirk, V. 1995, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **273**, 1150
- [Tob97] Tobias, S.M. 1997, Astron. & Astrophys. **322**, 1007
- [Vai72] Vainshtein, S.I., y Zeldovich, Ya.B. 1972, Sov. Phys. Usp. **15**, 159
- [Vät96] Vätth, H., Chanmugam, G., y Frank, J. 1996, Astrophys. J. **457**, 407
- [Wag01] Wagner, G., Beer, J., Masarik, J., y Muscheler, R. 2001, Geophys. Research Lett. **28**, 303
- [Wal35] Waldmeier, M. 1935, Astron. Mitt. Zürich **133**, 105
- [War99a] Wardle, M. y Ng, C. 1999, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **303**, 239
- [War99b] Wardle, M. 1999, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **307**, 849
- [Wat96] Watari, S. 1996, Solar Phys. **163**, 259
- [Wei84] Weiss, N.O., Cattaneo, F., y Jones, C.A. 1984, Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **30**, 305
- [Wit87] Wittmann, A.D. y Xu, Z.T. 1987, Astron. & Astrophys. Supplement Series **70**, 83
- [Zel83] Zeldovich, Ya.B., Ruzmaikin, A.A., y Sokoloff, D.D. 1983, *Magnetic Fields in Astrophysics*. Gordon and Breach Science Publishers, New York
- [Zwe88] Zweibel, E.G. 1988, Astrophys. J. **329**, 384

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a Daniel todo el tiempo y dedicación que puso en estos años. Especialmente porque al dirigir esta tesis me enseñó no solo mucho de física, sino sobre el compromiso asociado a una tarea de formación como es dirigir un doctorado. Daniel encaró con responsabilidad y compromiso su tarea, preocupándose no solo por la calidad de la producción científica sino también por crear un buen ambiente de trabajo.

A Gabriel Mindlin, con quien trabajamos en colaboración por mucho tiempo, y con quien desarrollamos muchas de las ideas y publicaciones que nutren esta tesis. Gabriel puso su entusiasmo y confianza en todos los emprendimientos. Asimismo, hago extensivo este agradecimiento a todos los que participaron directa o indirectamente en este trabajo.

Al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales por cederme el lugar de trabajo y el uso de las instalaciones. Al CONICET, a la Universidad de Buenos Aires y al sistema educativo y científico argentino en general, que a pesar de los difíciles momentos que sufre el país me permitieron contar con una beca y un cargo docente sin los cuales la realización de este trabajo hubiera sido imposible.

A mis padres y hermanos, por haberme apoyado y acompañado durante todos mis estudios. Muy especialmente a Vanesa, mi esposa, por el apoyo y la paciencia que tuvo durante todos estos años, y por el interés y colaboración constantes. Y a Tomás Agustín, a quien le dedico esta tesis y espero tener muy pronto en mis brazos.