Problemas de ruteo de vehículos

Zabala, Paula

2006

Problemas de Ruteo de Vehículos

Tesis Doctoral

Paula Zabala

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Directores: Dr. Abilio Lucena - Dra. Isabel Méndez-Díaz

Agosto de 2006

A mi gran familia

Agradecimientos

A mi familia, al grupo de Optimización Combinatoria, a la Subcomisión de Doctorado y a todos los que colaboraron de alguna manera en el desarrollo de mi doctorado

¡¡¡ Muchas gracias !!!

Resumen

El *Problema del Repartidor*, PR, consiste en encontrar un camino que recorra un conjunto de clientes, comenzando en un punto dado, minimizando la suma de los tiempos de espera de estos clientes. Este es un problema de optimización simple y natural, que puede ser encontrado en diversas situaciones de la vida real, dentro de la industria y en el sector de servicios. La gran cantidad de aplicaciones hacen que este problema no sólo tenga interés teórico, sino también, una gran importancia práctica.

PR pertenece a la clase de problemas NP-Difícil. Para estos problemas no se conoce un algoritmo que encuentre la solución en tiempo polinomial. La mayor parte de la literatura sobre el PR está dedicada al desarrollo de algoritmos aproximados y heurísticas y son pocos los algoritmos exactos propuestos.

Como muchos de los problemas de Optimización Combinatoria, PR puede ser modelado mediante formulaciones de programación lineal entera o entera mixta. Los algoritmos *Branch-and-Cut* son la herramienta más efectiva que se conoce para resolver un modelo de programación lineal entera. Especialmente las implementaciones basadas en combinatoria poliedral han permitido incrementar el tamaño de las instancias resueltas.

El objetivo de esta tesis es abordar la resolución del *Problema del Repartidor* utilizando modelos de programación lineal entera binaria. Con este fin, proponemos una nueva formulación para modelar este problema. Realizamos un estudio poliedral de la cápsula convexa de las soluciones factibles, encontrando varias familias de desigualdades válidas que, bajo ciertas condiciones, demostramos que definen facetas del poliedro. Es la primera vez que se realiza un estudio poliedral asociado al *Problema del Repartidor*. En base a estas familias de desigualdades válidas, desarrollamos e implementamos un algoritmo *Branch-and-Cut*.

Abstract

The Traveling Deliveryman Problem, PR, is a generalization of the Minimum Cost Hamiltonian Path Problem where the starting vertex of the path, i.e. a depot vertex, is fixed in advance and the cost associated with a Hamiltonian path equals the sum of the costs for the layers of paths (along the Hamiltonian path) going from the depot vertex to each of the remaining vertices. Applications of DMP frequently arise in delivery situations where some kind of fairness criteria (for the visiting of clients) must be enforced.

PR is known to be NP-hard for arbitrary graphs. The practical importance of the problem makes neccesary to devise algorithms capable of solving, in acceptable computational times, medium to moderate instances arising in real-world applications. A lot of work has been spent in an attempt to develop efficient algorithms for the problem, mainly by using approximation algorithms and heuristic techniques to deal with large instances. Relatively few methods for solving the problem exactly can be found in the literature.

Like most optimization problems on graphs, PR can be formulated as a linear integer programming problem. LP-based Branch-and-Cut algorithms are currently the most successfull tool to deal with these models computationally. However, the amount of research effort spent in attempts to solve PR by this method is not comparable with that devoted to other problems, like TSP or maximum stable set.

In this thesis, we present a new integer programming formulation. We develop a polyhedral study of the polytope associated with the proposed model in order to derive families of facet-defining inequalities.

Branch-and-Cut implementations that take advantage of the particular structure of the problem under consideration have proved to be the most successfull. In this sense, the use of cutting planes arising from a polyhedral study of the feasible solution set allowed many instances of hard combinatorial optimization problems to be solved to proven optimality for the first time.

We develop a Branch-and-Cut algorithm based on our theoretical polyhedral results. We also take into account many others factors like preprocessing, search and branching strategies, lower and upper bounds and streghthening of the LP-relaxation.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Problemas de Ruteo de Vehículos

En la industria y en el sector de servicios, el costo del transporte representa una parte importante del valor final de la mercadería o del servicio brindado.

Problemas de Ruteo de Vehículos es el nombre genérico dado a una gran familia de problemas referentes a la distribución de mercadería o personal, búsqueda de información o prestación de servicios, a un conjunto de *clientes* mediante una flota de *vehículos*.

Los vehículos realizan sus movimientos a través de una red de rutas partiendo de puntos fijos, llamados depósitos. Cada tramo de esta red, que puede ser de una sola mano o de ambas, tiene asociado un costo o tiempo de viaje que puede depender de muchos factores, como por ejemplo del tipo de vehículo o del período durante el cual el tramo es recorrido.

Ejemplos de estos problemas son la recolección y distribución de correspondencia, de alumnos por el micro escolar, el recorrido de un médico que atiende enfermos a domicilio, recorrido de personal de manteniemiento, entrega de pedidos de comida, etc. El ejemplo más famoso de esta familia es el conocido como *Problema del Viajante de Comercio* (PVC). En este caso, se dispone de un vehículo que debe visitar un conjunto de clientes, pasando por cada uno de ellos una única vez y retornar al origen. El objetivo es minimizar el tiempo total de viaje.

Las principales características de estos problemas están dadas por las restricciones de operación o reglas de factibilidad que deben cumplir las rutas de los vehículos, como por ejemplo la capacidad del vehículo o la relación de precedencia entre las visitas a los clientes. Otra particularidad en la que pueden diferir los miembros de esta familia de problemas es el objetivo que debe ser optimizado. Algunas de las características más usuales son:

- *cada cliente tiene asociada una demanda o cantidad de mercadería que debe recibir (o*

entregar). Puede además existir la restricción que dicha demanda deba ser satisfecha por un único vehículo o que exista la posibilidad que más de un vehículo visite a los clientes.

- *cada cliente dispone de un período del día en el cual puede ser visitado*. Este caso se presenta frecuentemente en problemas de abastecimiento de mercadería en grandes ciudades. Las reglamentaciones de tránsito suelen prohibir tareas de carga y descarga en determinadas horas para evitar congestionamientos de tránsito. En otro casos, como por ejemplo la distribución de diarios, las entregas deben ser hechas antes de determinada hora.

- *cantidad y capacidad de vehículos disponibles*. La flota de vehículos puede ser homogénea (vehículos de igual capacidad) o heterogénea. En algunos casos, los clientes tienen restricciones respecto al tamaño del vehículo que los abastece. Por ejemplo, si las rutas de acceso para llegar al cliente no permiten superar cierto peso del vehículo o si no se dispone de un lugar de maniobras suficientemente grande.

- *cantidad de depósitos*. La empresa de distribución puede tener varios puntos de abastecimiento. Cada uno de ellos tiene asociado un posible subconjunto de clientes (o todos) a los cuales abastecer.

- *punto de partida y finalización de las rutas*. En general, los vehículos tienen que retornar al depósito del cual salieron. En algunas aplicaciones esta exigencia no existe, por ejemplo si el chofer del vehículo regresa a su casa después de finalizado el reparto sin la necesidad de pasar por el punto del cual partió. Tal es el caso a la salida del colegio, el chofer después de distribuir a los chicos en sus casas, no regresa al colegio.

- *red de comunicación entre clientes*. En algunas instancias, existe via de comunicación entre todo par de clientes, mientras que en otras la red vial no es completa.

- *costo de traslado*. Entre un par de clientes, el costo de traslado puede ser fijo, depender de la distancia, del tamaño del camión, etc.

Los objetivos típicos que pueden ser considerados en los problemas de ruteo de vehículos son:

- *minimizar el tiempo total de transporte*

- *minimizar la suma de los tiempos de espera de los clientes*

- *minimizar el número de vehículos utilizados*

Cada combinación de estos factores da como resultado un problema de ruteo de vehículos particular. En este trabajo abordaremos uno de los problemas más aplicados en situaciones de la vida diaria.

1.2. El *Problema del Repartidor*

El viernes a la noche, varios vecinos hicieron su pedido para la cena a la pizzería de la zona. Como todos sabemos, las pizzas frías no son muy apetitosas, por lo tanto, estos vecinos desean recibir sus pizzas lo más calientes posible. Por tal motivo, cuando el repartidor de pizzas comienza una ronda de entregas, no tiene como objetivo terminar la distribución rápidamente, sino intentar que, en promedio, los clientes esperen lo menos posible, y de esta forma, disfruten de sus pizzas calientes.

El *Problema del Repartidor* (PR) consiste en encontrar un camino que recorra un conjunto de clientes, comenzando en un punto dado, minimizando la suma de los tiempos de espera de estos clientes. Este es un problema de optimización simple y natural, que puede ser encontrado en diversas situaciones de la vida real, como la planteada anteriormente.

Dentro del área de redes de computadoras, el PR tiene aplicaciones en la búsqueda de información en esa red. Queremos encontrar información que se encuentra en algún punto de la red en forma equiprobable mediante un agente que se mueve a través de ella. El objetivo es diseñar una forma de recorrer estos puntos que minimice el tiempo esperado de búsqueda [7, 36].

Otra motivación surge en la diagramación del recorrido de algún servicio de reparaciones. Supongamos que un técnico tiene que reparar un conjunto de máquinas que se encuentran en distintos lugares, y que el tiempo de reparación es insignificante o el mismo para todas las máquinas. El objetivo es encontrar una ruta que minimice el tiempo total de espera de todas las máquinas.

Más aplicaciones se pueden encontrar en ruteo de vehículos guiados automáticamente a través de celdas en un sistema flexible de manufactura [49], operaciones de recolección de mercadería por camiones, distribución postal, transporte escolar, distribución de mercadería perecedera, etc. El PR también puede ser interpretado como un problema de programación de tareas (*scheduling*) en una única máquina. En la literatura, este problema también es referenciado como *The Minimum Latency Problem* [6] o *The Traveling Repairman Problem* [2].

Cualquier recorrido de n clientes puede ser pensado como una permutación u orden de n elementos. El conjunto de todos los posibles órdenes tiene cardinal finito. Si cada orden tiene asociado un *costo*, algunos problemas de ruteo de vehículos (en particular el PR) se reducen a buscar en este conjunto finito, un orden que tenga el costo mínimo. Teniendo en cuenta este enfoque, podemos afirmar que el PR pertenece a la conocida familia de problemas de Optimización Combinatoria. Esta clase de problemas es un área de la Optimización que busca la resolución de problemas de optimización caracterizados por tener un número finito, pero muy grande, de posibles soluciones.

En términos de teoría de grafos, los problemas de ruteo son modelados naturalmente mediante un digrafo completo, cuyo conjunto de vértices representa el conjunto de clientes. Los posibles caminos o circuitos hamiltoniamos del grafo corresponden a los diferentes órdenes en que pueden ser visitados los clientes. Dependiendo de la función de costo utilizada, se pueden definir distintos problemas de optimización. El problema más común es cuando la función de costo sólo depende de los pares de clientes consecutivos, definiendo así el problema de *Camino Hamiltoniano de Costo Mínimo* (CHM) [15]. Una situación algo más compleja es la que se presenta en el PR, ya que el costo del camino no sólo depende de que un par de clientes sean consecutivos en él, sino también en que posición del camino se encuentran. En este trabajo, asumiremos que el cliente que debe ocupar el primer lugar de la permutación es un dato del problema. Esto es posible sin pérdida de generalidad, ya que de lo contrario podemos introducir un cliente artificial junto con los costos asociados definidos de alguna manera conveniente.

Formalmente, el PR puede ser definido como sigue. Sea $D = (V, A)$ un digrafo completo, con un conjunto $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ de vértices y un conjunto A de arcos. El vértice v_0 representa el depósito y los vértices $v_1, \ldots, v_n$ los clientes. Cada arco $(v_i, v_j) \in A$ tiene asociado una distancia o costo positivo c_{ij}. Las soluciones factibles del PR están caracterizadas por los caminos hamiltonianos de D que comienzan en v_0. A estos caminos los llamaremos caminos PR. Dado un camino PR el arco que sale de v_0 ocupa la primera de las n posiciones disponibles. Los arcos siguientes, a lo largo de este camino, ocupan secuencialmente las posiciones 2 a n. Bajo esta convención, el arco (v_i, v_j) en un camino PR contribuye en $(n - k + 1)c_{ij}$ al costo total del camino, donde k es la posición ocupada por ese arco. El PR consiste en encontrar un camino PR de menor costo.

A pesar que el PR y el CHM aparentemente son problemas muy similares, los objetivos y características de cada uno son muy distintos. El CHM es un problema orientado al repartidor, mientras que el PR está orientado a la perspectiva del cliente. En el CHM el objetivo es que el repartidor termine sus entregas lo antes posible, en el PR el objetivo es minimizar, en promedio, el tiempo de espera de los clientes. Por ejemplo, si el conductor del micro escolar usa el objetivo del PR para el diseño de su ruta de la tarde (cuando los chicos son llevados del colegio a sus casas), entonces la ruta óptima minimiza la suma de los tiempos de viaje de los alumnos, mientras que si considera el CHM minimizará su propio tiempo de viaje.

Otra propiedad que caracteriza al PR es que pequeñas variaciones en el costo de algún arco puede causar grandes cambios en la solución óptima, no sólo cambios locales. Contrariamente a esto, el impacto correspondiente sobre el CHM generalmente está restringido a una (pequeña) vecindad de la solución. En el caso del PR, tampoco es posible descomponer el grafo en componentes más pequeñas, resolver el problema en cada una de ellas, y luego unir los resultados de alguna manera para obtener la solución del problema entero (esque-

ma general usado por algunas heurísticas para CHM). Ambos problemas pueden ser vistos como casos particulares de un problema más general, el *Time-dependent traveling salesman problem* [45]. En este, la función de costo varía con la posición que ocupa el arco en el camino hamiltoniano, es decir, si el arco (i, j) es el k-ésimo arco del camino, contribuye en un costo $c(c_{ij}, k)$ al costo total del camino. El objetivo es encontrar un camino hamiltoniano de costo mínimo. En el CHM la función de costo es definida como $c(c_{ij}, k) = c_{ij}$, independientemente de k y en el PR como $c(c_{ij}, k) = (n - k + 1)c_{ij}$.

Tanto PVC como CHM han recibido gran atención por parte de la comunidad científica. Infinidad de trabajos se pueden encontrar en literatura, abordando el problema de diferentes puntos de vista. Instancias con cientos de clientes son resueltas satisfactoriamente por varias técnicas. A pesar de la gran similitud, esta situación no se refleja en la literatura dedicada al PR, para el cual instancias de 30 clientes ya pueden ser consideradas de tamaño medio a grande.

Debido a la dificultad del *Problema del Repartidor*, se han propuesto numerosos algoritmos aproximados, como por ejemplo los desarrollados en [4, 5, 6, 12, 13, 26, 27]. También han sido implementadas varias heurísticas [53, 55], mientras que en [3] se analiza una versión estocástica del problema y en [21, 37] versiones on-line, donde nuevos clientes aparecen en el grafo cuando el repartidor ya está viajando. La mayor parte de la literatura sobre el PR está dedicada al desarrollo de estos algoritmos y son pocos los algoritmos exactos propuestos.

Hasta donde llega nuestro conocimiento, los trabajos de Bianco et al. [11], Fischetti et al. [22], Lucena [40], Picard and Queyranne [45], van Eijl [20], Wu, Huang and Zhan [57] son los únicos que proponen algoritmos exactos.

En algunos trabajos de la literatura se considera una versión levemente diferente a la tratada acá. Contrariamente a la definición que dimos, imponen que el vehículo debe retornar al depósito después de visitar al último cliente. Claramente esta diferencia es sólo menor y es sencillo adaptar los algoritmos correspondientes a la definición del problema considerada en este trabajo.

1.3. Objetivo de la Tesis

Los problemas de Optimización Combinatoria aparecen en la vida real en una gran variedad de disciplinas, desde genética, física, química hasta finanzas, marketing y la industria. Generalmente, estos problemas son fáciles de formular matemáticamente, pero computacionalmente difíciles de resolver.

Para resolver un problema necesitamos de un *algoritmo*, es decir de un procedimiento sin

ambigüedades que consiste de una sucesión finita de pasos a realizar en un orden específico. Para los problemas de Optimización Combinatoria, la enumeración de los elementos de F (conjunto de soluciones factibles del problema) constituye un algoritmo. Sin embargo, si el cardinal de F es grande, es claro que éste no es un método práctico ni eficiente. Es fácil programar un algoritmo de enumeración completa para el *Problema de Viajante de Comerio*. Sin embargo, una instancia con sólo 30 vértices tiene tantas soluciones que no viviríamos lo suficiente para ver la respuesta. Esto *casi* parece decir que la enumeración completa no *resuelve* el problema.

¿Cuándo consideramos a un algoritmo eficiente? La teoría de complejidad fue iniciada por Cook en 1971 [16] y estableció criterios para decidir si un algoritmo resuelve un problema de manera *eficiente*. Se considera que un algoritmo es eficiente si encuentra la solución de tal manera que, en el peor de los casos, el tiempo requerido (número de operaciones elementales) está acotado por un polinomio en la medida de los datos de entrada. Son los llamados algoritmos polinomiales. Hay problemas para los cuales se dispone de un algoritmo polinomial. Éstos conforman la clase P. Tal es el caso del problema de flujo máximo, el camino más corto entre dos ciudades, entre otros.

Muchos problemas de Optimización Combinatoria pertenecen a una clase de problemas aparentemente difíciles desde el punto de vista computacional. Esta clase es denominada NP-Difícil en la teoría de la complejidad. Para estos problemas no se conoce aún un algoritmo que encuentre la solución en tiempo polinomial. Sin embargo, si para alguno de estos problemas se encontrara un algoritmo polinomial, esto implicaría que muchos otros problemas también podrían ser resueltos en tiempo polinomial. Entre los problemas de la clase NP-Difícil, podemos mencionar el *Problema de Coloreo de Grafos* (encontrar la cantidad mínima de colores que se asignan a los vértices de un grafo de tal manera que a dos vértices conectados por una arista no le correspone el mismo color) [34], el *Problema de Máximo Conjunto Independiente* (encontrar la mayor cantidad de *vértices* de un *grafo* donde todo par de *vértices* no está conectado por una *arista*) y el *Problema de Camino Hamiltoniano* (encontrar la manera de recorrer todos los *vértices* de un *grafo* pasando una y sólo una vez por cada uno). El libro de Garey y Johnson [28] y el de Papadimitriou y Steiglitz [44] son buenas referencias donde se pueden encontrar los conceptos de complejidad y una extensa clasificación de problemas.

El *Problema del Repartidor* pertenece a la clase de problemas NP-Difícil para métricas en general [48] y aún cuando la métrica es inducida por un árbol con peso en las aristas [50] (donde el CHM es trivial). En el caso particular que el árbol tenga peso unitario el problema se vuelve polinomial [41]. Si la métrica es definida por puntos en una línea el PR también puede ser resuelto polinomialmente. Para este caso particular, en 1986 en [2] se presentó un algoritmo $O(n^2)$ utilizando programación dinámica, y luego, en 2001 en [24] se mostró uno lineal.

Muchos de los problemas de Optimización Combinatoria pueden ser modelados mediante formulaciones de programación lineal entera o entera mixta, como por ejemplo la asignación de la tripulación a la flota de aviones de una aerolínea, el diseño de líneas de producción, la asignación de recursos, la asignación de frecuencias radiales y control de inventario, donde personas, máquinas, actividades, recursos, aviones, son indivisibles, etc. En estos modelos el objetivo es buscar el óptimo de una función lineal donde algunas o todas las variables están restringidas a ser enteras y deben verificar un sistema de desigualdades lineales.

La versatilidad dada por los modelos de programación lineal entera hace que este área tenga gran importancia dentro de la Optimización Combinatoria. Si bien el problema general de programación entera pertenece a la clase NP-Difícil, se ha invertido mucho esfuerzo en el desarrollo de algoritmos competitivos. Durante los últimos 30 años, se produjo un gran progreso en las técnicas capaces de resolver exitosamente estos problemas. Especialmente las basadas en combinatoria poliedral han permitido incrementar el tamaño de las instancias resueltas. El área combinatoria poliedral estudia cómo describir la cápsula convexa del conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal entero. El trabajo inicial en este sentido fue hecho por Dantzig, Fulkerson y Johnson en 1954 [19], quienes desarrollaron un método para resolver el *Problema del Viajante de Comercio*.

A comienzos de los 80's se comenzó a aplicar una metodología mixta que conjuga los algoritmos y las ideas que se habian desarrollado hasta entonces dando origen a los llamados algoritmos *Branch-and-Cut*. De esta manera se lograron resolver exitosamente instancias de tamaño considerable de una gran cantidad de problemas de programación lineal entera, como por ejemplo el *Problema de Viajante de Comercio*, el *Problema de Ordenamiento lineal*, el *Problema de Corte Máximo*, etc.

El objetivo de esta tesis es el desarrollo de un algoritmo tipo *Branch-and-Cut* para la resolución del *Problema del Repartidor*. Con este fin, introduciremos una nueva formulación de programación lineal entera. Evaluaremos la calidad de la cota inferior de la relajación lineal de este modelo comparándola con las cotas inferiores de los modelos de van Eijl [20], Fischetti, Laporte and Martello [22], Fox, Gavish y Graves [23] y Picard y Queyranne [45], únicos modelos de programación lineal entero propuestos en la literatura.

Como consecuencia de la calidad de la relajación lineal del modelo propuesto, realizaremos un estudio poliedral de la nueva formulación, derivando facetas y desigualdades válidas para el poliedro asociado. Estas desigualdades serán utilizadas para el desarrollo de un algoritmo de planos de corte para resolver el PR. Finalmente, el procedimiento de planos de corte será incorporado a un algoritmo *Branch-and-Cut*.

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 introducimos conceptos básicos de programación lineal entera y describimos los principales algoritmos utilizados para su resolución. En el capítulo 3 describimos los modelos de programación lineal ente-

ra para el PR propuestos en la literatura y presentamos nuestro nuevo modelo. Se realiza además una comparación entre los modelos. Los resultados del estudio poliedral se presentan en el capítulo 4. En el capítulo 5 detallamos los procedimientos y diferentes alternativas que fueron consideradas para desarrollar ***BC-R***, un algoritmo *Branch-and-Cut* para resolver el PR. El comportamiento del algoritmo es analizado sobre instancias generadas al azar. Finalizamos el capítulo comparando ***BC-R*** con un algoritmo de propósito general. La tesis termina describiendo las conclusiones del trabajo en el capítulo 6.

Capítulo 2

Programación lineal entera

2.1. Definición

En las últimas décadas, el uso de modelos de programación lineal entera mixta para resolver problemas de Optimización Combinatoria se ha incrementado enormemente. Mediante un problema de programación lineal entera mixta se pueden modelar situaciones donde se debe minimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones, también lineales, donde algunas, o todas, las variables sólo pueden tomar valores enteros. Este es el caso del *Problema del Viajante de Comercio*, problemas en redes, problemas de asignación de recursos, problemas de teoría de grafos, y muchísimos otros problemas de optimización combinatoria provenientes de una gran cantidad de disciplinas.

Un problema de programación lineal entera mixta (PEM) puede ser formulado de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimizar} \quad & \sum_{j \in I} c_j x_j + \sum_{j \in C} c_j x_j \\
\textit{sujeto a} \quad & \\
& \sum_{j \in I} a_{ij} x_j + \sum_{j \in C} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \\
& x_j \in \mathbb{Z}_+ \qquad \forall j \in I \\
& x_j \in \mathbb{R}_+ \qquad \forall j \in C
\end{aligned}
$$

donde I es el conjunto de variables enteras y C es el conjunto de variables continuas.

Generalmente, hay diferentes formas de representar matemáticamente el mismo problema. De la formulación utilizada puede depender el éxito de resolver en forma óptima *grandes*

instancias en una cantidad de tiempo razonable. Algunas veces, contrariamente a la intuición, puede resultar ventajoso incrementar, en lugar de disminuir, el número de variables o restricciones.

Cada formulación PEM tiene asociado un poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$ con $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ y $b \in \mathbb{R}^m$ y el conjunto de soluciones factibles $S = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \in \mathbb{Z}\ \forall j \in I\}$. A P se lo denomina relajación lineal de S.

Si llamamos $conv(S)$ a la cápsula convexa de S (menor poliedro que contiene a S), entonces PEM es equivalente a resolver $Min\ cx : x \in conv(S)$. Si $P = conv(S)$, el problema PEM puede ser resuelto en forma eficiente por cualquier algoritmo de programación lineal. Este es el caso del conocido *Problema de Transporte*.

Si conociéramos la descripción de $conv(S)$ mediante un número polinomial (en la cantidad de variables) de desigualdades lineales, podríamos resolver el problema como uno de programación lineal, lo cual es computacionalmente fácil. Es más, aún en el caso que esta caracterización no fuese polinomial, bajo ciertas circunstancias el problema podría ser resuelto en tiempo polinomial [32]. Desafortunadamente, para la mayoría de los problemas no se ha podido obtener la descripción completa de la cápsula convexa y, en general, el número de restricciones lineales que la caracterizan es exponencial.

El procedimiento más simple para resolver un problema de programación entera pura es enumerar todas las posibilidades. Sin embargo, debido a la *explosión combinatoria* esta técnica sólo resulta aplicable a instancias sumamente pequeñas. En la siguiente sección describimos los algoritmos más usados en la práctica.

2.2. Algoritmos para Problemas de Programación Lineal Entera Mixta

Los algoritmos más utilizados se encuadran dentro de algunos de estos esquemas básicos:

- Enumeración inteligente: algoritmos *Branch-and-Bound*.
- Caracterización de $conv(S)$ o ajuste de la relajación lineal: algoritmos de planos de corte.
- Una combinación de las dos técnicas anteriores: algoritmos *Branch-and-Cut*.

A continuación describiremos los puntos más sobresalientes de cada uno.

2.2.1. Algoritmos *Branch-and-Bound*

Ya mencionamos que la enumeración de las soluciones factibles en busca de la solución óptima no es un procedimiento aconsejable para usar en la práctica. Para mejorar esta técnica básica muchas veces es posible eliminar algunas posibilidades mediante argumentos de dominancia o factibilidad. Es decir, argumentos que permiten afirmar que el óptimo no pertenece a un determinado subconjunto de soluciones sin la necesidad de enumerarlo.

Dentro de esta línea, en los años 60 fueron propuestos los algoritmos *Branch-and-Bound*, donde el *branching* se refiere a la parte enumerativa y el *bounding* al proceso de poda de posibles soluciones.

Estos algoritmos están asociados al concepto *divide y conquista*: si resulta difícil buscar el óptimo en un conjunto S, entonces es mejor buscar en partes de S y luego quedarse con la mejor solución.

Este esquema puede ser representado mediante un árbol cuya raíz corresponde al problema original y sus ramas resultan de la división en partes del espacio de búsqueda. A cada nodo del árbol le corresponde un subproblema que consiste en buscar el óptimo en una parte del espacio de soluciones. Los argumentos de dominancia y factiblidad son los que permitirán descartar ramas del árbol en el proceso de búsqueda.

Una forma de llevar a cabo la poda, *bounding*, es calcular en los nodos del árbol cotas inferiores del óptimo del problema restringido a esa parte del espacio de soluciones. Si la cota es peor que la mejor solución obtenida hasta el momento, no es necesario explorar dicha parte. El cálculo de estas cotas debe lograr un equilibrio entre calidad y esfuerzo en obtenerla. Una cota débil hará que se explore innecesariamente ramas del árbol, pero un procedimiento que brinde buenas cotas a un costo alto puede no justificarse.

Para obtener cotas inferiores, una posibilidad es relajar el problema de forma de obtener una relajación *fácil* de resolver. La idea es reemplazar un PEM difícil por un problema de optimización más simple cuyo valor óptimo sea menor o igual al óptimo del problema original. Obviamente, es deseable obtener relajaciones *ajustadas*, es decir, que la diferencia relativa (*gap*) entre el valor óptimo de la relajación y el valor óptimo del PEM sea chica. Hay dos posibilidades obvias para que el problema relajado tenga esta característica. Se puede agrandar el conjunto de soluciones factibles sobre el cual se optimiza o reemplazar la función objetivo por otra que tenga igual o menor óptimo. Dentro de la primera posibilidad se encuentra la relajación lineal y en la segunda se enmarca la relajación lagrangeana. Las relajaciones no sólo son útiles para obtener cotas inferiores, algunas veces permiten probar optimalidad.

La relajación lineal consiste en borrar del PEM la imposición de ser entera sobre las

variables que la tengan. Es la relajación más natural y una de las más utilizadas. La relajación lagrangeana consiste en remover un subconjunto de las restricciones que no incluya las restricciones de no negatividad. La violación de las restricciones relajadas es penalizada incluyendo estas restricciones, con un multiplicador no negativo, en la función objetivo. Los multiplicadores son iterativamente actualizados para maximizar la cota inferior obtenida del problema relajado. En [9], Beasley hace una muy buena reseña de la aplicación de esta técnica.

Esencialmente, hay dos factores decisivos en la implementación de un algoritmo de este tipo: las reglas de *branching* y el esquema de selección del próximo nodo a explorar. No hay una combinación de estos factores que resulte mejor para todos los problemas. Es necesario utilizar criterios basados en una combinación de teoría, sentido común y experimentación.

El proceso de *branching* consiste en dividir la región factible anterior en dos o más regiones factibles más pequeñas. Cada nueva región da origen a un nuevo subproblema o nodo hijo, originado por la adición de una nueva restricción al problema del nodo padre. Un requerimiento esencial es que cada solución entera factible del nodo padre pertenezca a, al menos, uno de los hijos. Estos nuevos subproblemas son agregados a la lista de nodos activos, es decir, aún no explorados. La regla de *branching* más simple consiste en considerar alguna variable entera que tiene valor fraccionario, d, en la solución actual. Se parte al problema en dos hijos, imponiendo en uno de ellos como cota superior de este variable el valor $\lfloor d \rfloor$ y en el otro como cota inferior $\lceil d \rceil$. Este procedimiento es aplicado recursivamente a cada nodo del árbol.

La próxima decisión que se debe tomar es la selección del siguiente nodo a explorar de la lista de nodos activos. En la práctica hay varios argumentos contradictorios que pueden ser utilizados. Como sólo es posible podar significativamente el árbol de enumeración si se cuenta con buenas cotas superiores, entonces deberíamos descender lo más pronto posible en el árbol para encontrar rápidamente solucions factibles. Esto sugiere el uso de una estrategia de *búsqueda en profundidad*. Otra estrategia sugiere elegir el nodo activo con mejor cota (más chica). De esta manera, nunca dividiríamos un nodo con cota inferior mayor que el valor óptimo del problema. Esta estrategia es llamada *mejor cota primero*.

El esquema básico del algoritmo es el siguiente. Llamamos PEM el problema entero mixto que queremos resolver, $\mathcal{N}$ al conjunto de subproblemas o nodos del árbol de enumeración activos. Para cada nodo k, $PL(k)$ representa la relajación lineal del PEM asociado a este nodo y Z^k el valor óptimo de $PL(k)$. En Z^* se almacena el valor de la mejor solución obtenida.

---

1. **Inicialización:**
   $\mathcal{N} = \{\text{PEM}\} \quad Z^* = \infty$

2. **Elección de próximo nodo:**

Si $\mathcal{N} = \{\}$ el algoritmo termina. Si $Z^* \neq \infty$ entonces es óptimo. Si no, PEM es no factible
Si $\mathcal{N} \neq \{\}$, elegir y borrar un nodo k de $\mathcal{N}$

3. **Evaluación:**
   Resolver $PL(k)$.
   a) Si no es factible, ir a **Elección**.
   b) *Bound*: si $Z^k > Z^*$, ir a **Elección**.
   c) Si la solución óptima cumple las condiciones de integralidad, actualizar $Z^* = \text{mín}\{Z^*, Z^k\}$ e ir a **Elección**.
4. **División:** (*Branch*) Particionar la región factible de $PL(k)$ en dos o más regiones, agregando un nuevo nodo a $\mathcal{N}$ por cada nueva región. Ir a **Elección**.

2.2.2. Algoritmos de Planos de Corte

Los algoritmos de planos de corte fueron originalmente propuestos por Gomory en los 60's [29] como un método general para resolver problemas de programación lineal entera.

Un algoritmo básico de planos de corte en un primer paso relaja las condiciones de integralidad sobre las variables y resuelve el programa lineal resultante. Si el programa lineal es infactible, el programa entero también lo es. Si la solución óptima del programa lineal cumple las condiciones de integralidad, se ha encontrado un óptimo del problema. En caso contrario, se busca identificar desigualdades lineales (*problema de separación*) que estén violadas por la solución fraccionaria del programa lineal y sean válidas para los puntos enteros factibles. Es decir, desigualdades que *separen* el óptimo fraccionario de $conv(S)$.

El algoritmo continúa hasta que:

- una solución entera es encontrada, en cuyo caso el problema es resuelto con éxito
- el programa lineal es infactible, lo que significa que el problema entero es infactible
- no se pudo identificar alguna desigualdad lineal, ya sea porque no se conoce la descripción completa de la cápsula convexa o porque estos algoritmos de separación no son exactos.

El éxito del algoritmo depende en gran medida de la posibilidad y la eficiencia de encontrar desigualdades violadas (*planos de corte*) que puedan ser agregadas a la formulación para separar las soluciones fraccionarias.

Los planos de corte pueden ser generados bajo dos enfoques:

- *Con herramientas generales aplicables a cualquier problema de programación lineal entera*

  El algoritmo original propuesto por Gomory utiliza como planos de corte desigualdades derivadas del *tableau* óptimo de la relajación lineal, llamados *cortes de Gomory*. Aunque fue demostrado que este algoritmo, bajo ciertas condiciones, termina en un número finito de pasos, en la práctica su convergencia parece ser muy lenta. Por otro lado, la implementación computacional es numéricamente inestable, aunque en la actualidad han sido fortalecidos lográndose buenas implementaciones.

  Posteriormente, se han desarrollado algoritmos que utilizan una variedad de cortes aplicables a cualquier PEM, como por ejemplo los cortes *disyuntivos, clique, cover*, etc. Si bien estos algoritmos tienen propiedades teóricas de mucho interés, su éxito en la práctica es discutible. Cualquiera de las técnicas menciondas tienen la ventaja de poder ser utilizadas para cualquier problema de programación entera, independientemente de su estructura. Si bien esto es una propiedad deseable en un algoritmo, no siempre brinda la herramienta más adecuada para casos particulares. Un estudio más específico del problema ayuda a obtener mejores procedimientos. Este es el sentido del próximo enfoque.

- *Explotando la estructura particular del problema.*

  En los 70's, resurgió el interés por los algoritmos de planos de corte debido al desarrollo de la teoría poliedral. Mediante el estudio de combinatoria poliedral, la intención es reemplazar el conjunto de restricciones de un programa de programación entera mixta por la descripción de la cápsula convexa del conjunto de soluciones factibles. Las desigualdades lineales necesarias para describir a $conv(S)$ se denominan *facetas*. Si se conoce de forma completa esta descripción, el problema entero puedo ser resuelto como un problema de programación lineal. De esta manera, explotando la estructura particular de cada problema, los planos de corte resultarán más efectivos a la hora de cortar soluciones.

  Desafortunadamente, no es fácil tener esta descripción y los problemas pertenecientes a la clase NP-Difícil tienen una cantidad exponencial de facetas, a menos que $P = NP$. Alternativamente, es posible utilizar cualquier desigualdad válida para el conjunto de soluciones factibles como planos de corte, pero, en general, la eficiencia del algoritmo depende de la *fortaleza* de estas desigualdades, siendo las facetas los *mejores* cortes posibles.

  Con fines algorítmicos, el estudio poliedral debe estar acompañado de algoritmos de separación eficientes. En este sentido, hay un resultado muy importante debido a Grötschel, Lovász y Schrijver [32] que relaciona la complejidad del problema de separación con la complejidad del problema de optimización. Se establece que el problema de

optimización $max\{cx : x \in conv(S)\}$ puede resolverse polinomialmente si y sólo si el problema de separación ($x \in conv(S)$ *ó encontrar una desigualdad válida violada*) es polinomial. Es decir que si el problema que estamos tratando no es polinomial, existe al menos alguna familia de facetas que no puede separarse en tiempo polinomial. Esto de alguna manera implica el grado de dificultad de encontrar la descripción de todas las facetas de la cápsula convexa y del desarrollo de algoritmos de separación.

En forma general, para desarrollar un algoritmo de planos de corte, primero se busca una descripción parcial de la cápsula convexa del conjunto de las soluciones factibles enteras o desigualdades válidas *fuertes* para este conjunto. Luego es necesario el diseño de rutinas de separación para las familias de desigualdades encontradas. Estas rutinas toman como entrada una solución y retornan restricciones de estas familias violadas por este punto, si es que existe alguna. El problema de separación, en algunos casos, puede ser NP-difícil o tener complejidad alta, lo que lleva en la práctica a utilizar algoritmos heurísticos, o sea, que es posible que no sean capaces de encontrar una desigualdad violada aunque exista. La estrategia que se utilice para decidir la búsqueda en la diferentes familias es clave para la performance del algoritmo.

El esquema básico de un algoritmo de planos de corte es el siguiente. Llamamos PEM al problema entero mixto que queremos resolver, $PL(P)$ a la relajación lineal del problema P y x^P la solución óptima de esta relajación.

---

1. **Inicialización:**
   $P =$ PEM
2. **Evaluación:**
   Resolver $PL(P)$
   - *a*) Si es no factible, entonces PEM es no factible y el algoritmo termina.
   - *b*) Si x^P cumple las condiciones de integralidad, x^P es la solución óptima de PEM y el algoritmo termina.
   - *c*) **Separación:** Caso contrario, resolver el problema de separación para x^P.
     - Si se encuentran cortes, agregarlos a P e ir a **Evaluación**.
     - Caso contrario, retornar el funcional evaluado en x^P como una cota inferior de PEM.

El algoritmo de planos de corte puede no resolver el problema de forma óptima, ya sea por no encontrar desigualdades válidas violadas o porque el tiempo consumido excede el tiempo disponible. Sin embargo, puede ser utilizado para generar buenas cotas inferiores del valor

óptimo del problema. Además, muchas veces a partir de la solución óptima de la relajación actual es posible encontar buenas soluciones enteras mediante una heurística, brindando una cota superior del valor óptimo.

2.2.3. Algoritmos Branch-and-Cut

En muchas instancias, los dos algoritmos descriptos arriba fallan en la resolución del problema. A comienzos de los 80's se comenzó a aplicar una metodología mixta que conjuga las dos ideas dando origen a los llamados algoritmos *Branch-and-Cut*. De esta manera se lograron resolver exitosamente instancias de tamaño considerable de una gran cantidad de problemas de programación lineal entera, como por ejemplo el *Problema de Viajante de Comercio*, el *Problema de Ordenamiento Lineal*, el *Problema de Corte Máximo*, etc.

Uno de los factores que influye en el fracaso de los algoritmos *Branch-and-Bound* es la baja calidad de las cotas obtenidas mediante las relajaciones lineales. Esto significa que resulta crucial poder ajustar las formulaciones, por ejemplo con planos de corte.

Un algoritmo *Branch-and-Cut* es un *Branch-and-Bound* en el cual se generan planos de corte a través del árbol de enumeración. El objetivo de esto es reducir significativamente el número de nodos del árbol mejorando la formulación de los subproblemas. En un *Branch-and-Cut*, la enumeración y los planos de corte se benefician mutuamente. Generalmente, la cota producida en cada nodo del árbol de enumeración es mejor que en un *Branch-and-Bound*, debido a las nuevas desigualdades agregadas a la formulación del correspondiente subproblema. Por otro lado, el proceso de *branching* perturba la solución fraccionaria ayudando a los algoritmos de separación.

Estos algoritmos no sólo son capaces de producir la solución óptima, también pueden brindar soluciones aproximadas al óptimo con certificado de calidad en tiempos de cómputo moderado.

En la implementación de un algoritmo *Branch-and-Cut* hay que tener en cuenta las estrategias propias de un algoritmo *Branch-and-Bound* sumadas a las de un algoritmo de planos de corte. Además, se agregan nuevas decisiones como ¿cuándo buscar planos de cortes?, ¿cuántos cortes agregar?, etc.

El esquema de un algoritmo *Branch-and-Cut* es el siguiente.

---

1. **Inicialización:**
   $\mathcal{N} = \{\text{PEM}\} \quad Z^* = \infty$

2. **Elección de próximo nodo:**
   Si $\mathcal{N} = \{\}$ Z^* es óptimo y el algoritmo termina
   Si no, elegir y borrar un nodo k de $\mathcal{N}$

3. **Evaluación:**
   Resolver $PL(k)$.

   a) Si es no factible, ir a **Elección**.

   b) Si $Z^k > Z^*$, ir a **Elección**.

   c) Si la solución óptima cumple las condiciones de integralidad, poner $Z^* = \text{mín}\{Z^*, Z^k\}$ e ir a **Elección**.

4. **División vs Separación:**
   Decidir si se buscarán planos de corte:

   - **SI:** Ir a **Separación**
   - **NO:** Ir a **División**

5. **División:** Particionar la región factible de PL(k) en dos o más regiones, agregando un nuevo nodo a $\mathcal{N}$ por cada nueva región. Ir a **Elección**.

6. **Separación:** Resolver el problema de separación para la solución fraccionaria de $PL(k)$.

   - Si son encontrados cortes, agregarlos a la formulación e ir a **Evaluación**.
   - Si no se encuentran, ir a **División**.

.

Capítulo 3

Formulaciones de PEM para el Problema del Repartidor

El *Problema del Repartidor* ha sido abordado con modelos de programación lineal entera por diferentes autores. Sin embargo, hasta donde llega nuestro conocimiento, no hay en la literatura ningún estudio poliedral ni desarrollo de un algoritmo *Branch-and-Cut* sobre dichos modelos. Esta realidad muestra una sustancial diferencia con el PVC y con muchas de las versiones del *Problema de Ruteo de Vehículos* para los cuales existe una gran cantidad de trabajos en esta línea.

A continuación describimos los modelos de programación lineal entera que aparecen en la literatura y luego presentaremos nuestro nuevo modelo.

3.1. Modelos de la literatura

- *Modelo PQ*

  En 1978, Picard y Queyranne [45] proponen 2 formulaciones lineales enteras.

  La primera formulación usa variables binarias x_{ij}^t tales que x_{ij}^t toma valor 1 si el cliente v_i es visitado en la $(t-1)$-ésima posición y es seguido por el cliente v_j.

  Consideremos C_{ij}^t el costo cuando el cliente v_i es visitado en el $(t-1)$-ésimo lugar de la secuencia y el v_j en el t-ésimo lugar, es decir:

  $$\begin{aligned} C_{0i}^1 =& nc_{0i} \\ C_{ij}^t =& (n-t+1)c_{ij} \qquad \forall t = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

  La formulación es la siguente:

$$\min \sum_{j=1}^{n} C_{0j}^{1} x_{0j}^{1} + \sum_{t=2}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{j=1} \\ j \neq i}}^{\mathrm{n}} C_{ij}^{t} x_{ij}^{t}$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^{n} x_{0j}^{1} = 1 \tag{3.1}$$

$$x_{0j}^{1} = \sum_{\substack{\mathrm{k=1} \\ k \neq j}}^{\mathrm{n}} x_{jk}^{2} \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.2}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=1} \\ i \neq j}}^{\mathrm{n}} x_{ij}^{t} = \sum_{\substack{\mathrm{k=1} \\ k \neq j}}^{\mathrm{n}} x_{jk}^{t+1} \qquad \forall t = 2, \ldots, n-1 \;\; \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.3}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=1} \\ i \neq j}}^{\mathrm{n}} x_{ij}^{n} = x_{j0}^{n+1} \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

$$x_{0j}^{1} + \sum_{\substack{\mathrm{i=1} \\ i \neq j}}^{\mathrm{n}} \sum_{t=2}^{n} x_{ij}^{t} = 1 \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.5}$$

$$x_{ij}^{k} = 0, 1 \;\; \forall i, j, k \tag{3.6}$$

Se asume que las variables $x_{0j}^{t} \;\; \forall t \neq 1, \;\; x_{ij}^{1} \;\; \forall i \neq 0, \;\; x_{ij}^{n+1} \;\; \forall j \neq 0, \;\; x_{j0}^{t} \;\; \forall t \neq n+1$ toman siempre valor 0.

Para describir la segunda formulación se define una red $N = (V, A, C)$. El conjunto de vértices V consiste de los vértices (0), $(i,t) \quad i,t = 1, \ldots, n$ y $(n+1)$, donde el vértice (i,t) representa la visita del cliente v_i en la posición t. Los arcos en A son: arcos iniciales $((0),(i,1))$ con peso C_{0i}^{1}, arcos intermedios $((i,t),(j,t+1))$ $i \neq j$ con peso C_{ij}^{t+1} y arcos finales $((i,n),(n+1))$ con peso 0. Un camino P en N une el vértice

0 con el $n+1$ a través de n vértices intermedios, uno de cada tiempo. Si cada cliente aparece una única vez en el camino, este representa una solución factible del problema. Para representar esto, definimos a_i^P como el número de ocurrencias del vértice (i,t) en el camino P, $l(P)$ como la suma de los arcos que integran P y una variable x_P es asociada a cada camino P en N. Entonces la formulación es:

$$\min \sum_P l(P)x_P$$

$$\sum_P a_i^P x_P = 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.7}$$

$$x_P \geq 0 \qquad \text{entero} \tag{3.8}$$

Segun los resultados presentados en [45], los valores óptimos de las relajaciones lineales de las dos formulaciones coinciden.

- *Modelo FGG*

  Fox, Gavish y Graves [23], en 1980, proponen un modelo basado en las mismas variables del primer modelo de Picard y Queyranne. En un principio el modelo es formulado con $4n$ restricciones de la siguiente manera:

$$\min \sum_{j=0}^{n} C_{0j}^1 x_{0j}^1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\text{j=1} \\ i\neq j}}^{\text{n}} \sum_{t=2}^{n} C_{ij}^t x_{ij}^t$$

$$\text{s.a.} \sum_{\substack{\text{j=0} \\ j\neq i}}^{\text{n}} \sum_{t=2}^{n+1} x_{ij}^t = 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j}^1 = 1 \tag{3.10}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=0}\\ i\neq j}}^{\mathrm{n}}\sum_{t=1}^{n} x_{ij}^{t} = 1 \qquad \forall j = 1,\ldots,n \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0}^{n+1} = 1 \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{\mathrm{j=1}\\ j\neq i}}^{\mathrm{n}} x_{ij}^{t} = 1 \qquad \forall t = 2,\ldots,n \tag{3.13}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{n+1} t x_{ij}^{t} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=1}^{n} t x_{ij}^{t} = 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.14}$$

$$x_{ij}^{t} = 0,1 \qquad \forall i,j,t \tag{3.15}$$

Las restricciones (3.13) pueden ser derivadas como combinación de las restricciones (3.9) y (3.11), por lo tanto no son necesarias para modelar el problema y pueden ser eliminadas de la formulación. Si se reeemplazan estas restricciones por la suma de todas ellas, se logra la siguiente formulación más compacta con $n+1$ restricciones.

$$\min \sum_{i=0}^{n}\sum_{\substack{\mathrm{j=0}\\ i\neq j}}^{\mathrm{n}}\sum_{t=1}^{n+1} C_{ij}^{t} x_{ij}^{t} \tag{3.16}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=0}^{n+1} x_{ij}^{t} = n+1 \tag{3.17}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{t=2}^{n+1} t x_{ij}^{t} - \sum_{j=0}^{n}\sum_{t=1}^{n} t x_{ij}^{t} = 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n \tag{3.18}$$

$$x_{ij}^{t} = 0,1 \qquad \forall i,j,t \tag{3.19}$$

- *Modelo FLM*

  En 1993, Fischetti, Laporte y Martello [22], consideraron la versión de circuito Hamiltoniano del problema. Se definen las variables binarias y_{ij} asumiendo valor 1 si y sólo si el arco (v_i, v_j) aparece en el camino Hamiltoniano solución. Además, se asume que una variable entera x_{ij} toma valor 0 si el arco (v_i, v_j) no es usado en el camino, y toma el valor $n - t + 1$ si (v_i, v_j) aparece como el t-ésimo arco en el camino. Basado en estas variables, el modelo resulta:

$$\min \sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{j=1} \\ j \neq i}}^{\mathrm{n}} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a.} \sum_{\substack{\mathrm{j=0} \\ j \neq i}}^{\mathrm{n}} y_{ij} = 1 \qquad \forall i = 0, \ldots, n \tag{3.20}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=0} \\ i \neq j}}^{\mathrm{n}} y_{ij} = 1 \qquad \forall j = 0, \ldots, n \tag{3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i0} = 0 \tag{3.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{0j} = n \tag{3.23}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=0} \\ i \neq k}}^{\mathrm{n}} x_{ik} - \sum_{\substack{\mathrm{j=0} \\ j \neq k}}^{\mathrm{n}} x_{kj} = 1 \qquad \forall k = 1, \ldots, n \tag{3.24}$$

$$x_{ij} \leq r_{ij} y_{ij} \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n \quad i \neq j$$

$$x_{ij} \in Z^+ \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n \quad i \neq j$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n \quad i \neq j$$

donde

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si j=0} \\ n & \text{si i=0} \\ n-1 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3.25}$$

Las ecuaciones (3.20) y (3.21) aseguran que todo vértice (cliente) es visitado exactamente una vez. Las restricciones (3.22, 3.23, 3.24) imponen que v_0 es el vértice de partida y también que cada uno de los otros vértices ocupa sólo un lugar en el camino. Estas restricciones eliminan la posibilidad de que se formen subciclos.

- *Modelo Eijl*

En 1995, C. A. van Eijl [20], quien estudió la versión de circuito Hamiltoniano del problema, propuso una formulación entera mixta que luego adapta al problema con ventanas de tiempo. Esta es la formulación de PEM más reciente que se encuentra en la literatura.

En el modelo se consideran los siguientes dos tipos de variables. Para un arco dado (v_i, v_j), una variable binaria x_{ij} indica si el arco (v_i, v_j) está incluído ($x_{ij} = 1$) en el camino solución o no ($x_{ij} = 0$). Además, una variable continua p_{ij} es usada para expresar, en el caso que $x_{ij} = 1$, el tiempo de partida desde el vértice v_i (cuando $x_{ij} = 0$, p_{ij} toma valor 0). El modelo propuesto es el siguiente:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\text{j=0} \\ j \neq i}}^{\text{n}} p_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{\substack{\text{j=0} \\ j \neq i}}^{\text{n}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i = 0, \ldots, n \tag{3.26}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=0}\\ i\neq j}}^{\mathrm{n}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j = 0, \ldots, n \tag{3.27}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{i=1}\\ i\neq j}}^{\mathrm{n}} p_{ij} + \sum_{\substack{\mathrm{i=0}\\ i\neq j}}^{\mathrm{n}} c_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{\mathrm{k=0}\\ k\neq j}}^{\mathrm{n}} p_{jk} \qquad \forall j = 1, \ldots, n \tag{3.28}$$

$$0 \leq p_{ij} \leq Cx_{ij} \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n, i \neq j, i \neq 0 \tag{3.29}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 0, \ldots, n, i \neq j$$

donde C representa una constante suficientemente grande ($C = n \operatorname{máx} p_{ij}$).
Las restricciones (3.26,3.27) aseguran que todo cliente es visitado exactamente una vez. Las restricciones (3.28) garantizan, en el caso que $x_{ij} = 1$, que el tiempo de partida desde el cliente v_j debe ser igual al tiempo de partida desde el cliente v_i más el tiempo de viaje desde v_i a v_j. Esta relación entre las variables elimina la posibilidad de formación de subciclos en la solución. Finalmente, las desigualdades (3.29) imponen que t_{ij} sea nula en el caso que el arco (v_i, v_j) no forme parte del camino.

3.2. Nuevo modelo de programación lineal entera

Nuestra formulación del PR explota la conexión entre el *Problema del Repartidor* y el de *Ordenamiento lineal* (POL).

Un *orden lineal* de los $n + 1$ elementos de un conjunto finito N es una biyección

$$\pi : \{0, 1, \ldots, n\} \to N$$

Para un elemento $i \in N$ y un orden π, la *posición* de i en π está dada por $\pi^{-1}(i)$. El costo del orden $d(\pi)$ es computado utilizando un conjunto de costos de *precedencia*, $\{c_{ij} : i, j \in N, i \neq j\}$. Todo par de elemetos distintos $i, j \in N$ contribuye con c_{ij} or c_{ji} a $d(\pi)$. Si $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ entonces es considerado c_{ij}, y en caso contrario c_{ji}. El POL consiste en encontrar un orden π de N con $d(\pi)$ tan chico como sea posible.

En términos de teoría de grafos, el POL puede ser enunciado como sigue. Los elementos de N son representados por los vértices en $D = (V, A)$, donde $A = \{(v_i, v_j) : i, j \in N, i \neq j\}$ es definido como el conjunto de arcos y los costos de precedencia introducidos anteriormente son los costos de los arcos. Un subgrafo $D' = (V, A')$, $A' \subseteq A$, es un *tournament* si, para todo par de vértices distintos $v_i, v_j \in V$, exactamente uno de los arcos, (v_i, v_j) o (v_j, v_i), pertenece a A'. De esta manera, una solución óptima del POL para N será un *tournament* acíclico D' con menor suma de sus arcos.

Consideremos para todo par de vértices v_i, v_j, una variable binaria x_{ij} que indica si el vértice v_i se encuentra o no antes que el vértice v_j en el camino PR. Además, para todo vértice v_k, consideramos las variables f_{ij}^k que indican si el arco (v_i, v_j) es usado en el camino antes de llegar hasta el vértice v_k. Notar que las variables f_{0j}^k pueden ser reemplazadas por f_{0j}^j ya que el primer arco del camino está incluído en el camino hacia todos los vértices. El nuevo modelo propuesto para el PR es el siguiente:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\mathrm{j=1} \\ j \neq i}}^{\mathrm{n}} c_{ij} \sum_{\substack{\mathrm{k=1} \\ k \neq i}}^{\mathrm{n}} f_{ij}^k + n \sum_{i=1}^{n} c_{0i} f_{0i}^i$$

$$\text{s.a. } x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad i < j \tag{3.30}$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n \quad i < j < k \tag{3.31}$$

$$x_{ik} + x_{kj} + x_{ji} \leq 2 \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n \quad i < j < k$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{0i}^i = 1 \tag{3.32}$$

$$\sum_{\substack{\mathrm{k=1} \\ k \neq j}}^{\mathrm{n}} x_{jk} - \sum_{\substack{\mathrm{k=1} \\ k \neq j,i}}^{\mathrm{n}} x_{ik} \leq f_{ij}^j - n x_{ij} + n - 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad i \neq j \tag{3.33}$$

$$f_{ki}^i + x_{ij} - f_{ki}^j \leq 1 \qquad \forall i, j, k = 1, \ldots, n \quad i \neq j \neq k \tag{3.34}$$

$$x_{jk} = \sum_{\substack{\mathrm{i=1} \\ i \neq j,k}}^{\mathrm{n}} f_{ij}^k + f_{0j}^j \qquad \forall j,k = 1,\ldots,n \quad j \neq k \tag{3.35}$$

$$x_{jk} = \sum_{\substack{\mathrm{i=1} \\ i \neq j}}^{\mathrm{n}} f_{ji}^k \qquad \forall j,k = 1,\ldots,n \quad j \neq k \tag{3.36}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n \quad i \neq j$$

$$0 \leq f_{ij}^k \leq 1 \qquad \forall i,j,k = 1,\ldots,n \quad i \neq j,k$$

$$0 \leq f_{0i}^i \leq 1 \qquad \forall i = 1,\ldots,n$$

Las restricciones (3.30, 3.31) definen el conjunto de ordenamientos lineales. La restricción (3.32) impone que hay sólo un arco que parte desde el vértice v_0. Si v_i es el vértice predecesor de v_j, entonces la restricción (3.33) asegura que el arco (v_i, v_j) se usa para llegar a v_j. Las desigualdades (3.34) establecen que si el vértice v_i se encuentra antes que el vértice v_j, el arco usado para llegar hasta v_i es tambien usado para llegar a v_j. Finalmente, si v_j no se encuentra antes de v_k, las ecuaciones (3.35, 3.36) imponen que ningun arco (v_i, v_j) o (v_j, v_i) es usado para llegar hasta v_k.

Es importante señalar que la condición de binaridad de las variables x_{ij} implica que la condición de entera de las variables f_{ij}^j, f_{ij}^k y f_{0i}^i puede ser relajada. La restricción (3.33) asegura que $f_{ij}^j = 1$ si $x_{ij} = 1$ y el vértice v_i es el predecesor del vértice v_j ya que $\sum_{k=1,k\neq j}^n x_{jk} - \sum_{k=1,k\neq i,j}^n x_{ik} = 0$. Caso contrario, $f_{ij}^j = 0$ por la restricción (3.36). Argumentos similares pueden ser utilizados para f_{ij}^k, f_{0i}^i con las restricciones (3.34) y (3.35) respectivamente.

Finalmente, dado que estamos trabajando con un problema de minimización, si las restricciones (3.36) y (3.35) son omitidas del modelo, serán satisfechas implícitamente por una solución óptima. Sin embargo, desde el punto de vista de eficiencia computacional, resultó más conveniente incluírlas.

Esta formulación contiene $n(n^2 - n + 1)$ variables y $\frac{n(n-1)(8n+5)}{6} + 1$ restricciones. Llamaremos MR a este modelo y $\mathcal{CR}$ a la cápsula convexa de sus soluciones factibles.

3.3. Comparación de modelos de PLE

Un primer criterio que utilizamos para comparar la calidad de los modelos propuestos en la literatura con nuestro modelo es el valor óptimo de la relajacion lineal asociada a cada uno. Obtener cotas inferiores de *buena* calidad ayuda en la poda de un árbol de búsqueda asi como también en la generación de soluciones heurísticas.

En los experimentos computacionales se utilizaron tres tipos de instancias aleatorias. La primera familia corresponde a instancias simétricas euclideanas y las denotamos con la letra D. Fueron obtenidas generando puntos con distribución uniforme en el cuadrado de 100×100. Estos puntos son asociados con los vertices de D y los costos de los arcos correspondientes fueron tomados como la distancia euclideana entre los correspondientes puntos (redondeada al entero más próximo). Por lo tanto, los costos de los arcos son simétricos, i.e. $c_{ij} = c_{ji}$, para todo par v_i y v_j de vértices distintos de D. La segunda familia corresponde a instancias asimétricas denotadas con la letra A. El costo c_{ij} es un entero generado al azar entre 1 y 100 para todo par v_i y v_j. La tercera familia, S, está compuesta por instancias simétricas cuyo costo $c_{ij} = c_{ji}$ es un entero generado al azar entre 1 y 100 para todo par v_i y v_j con $i < j$. Las pruebas computacionales fueron realizados en una SUN UltraSparc III con 2GB de RAM y 1Ghz utilizando las rutinas del paquete CPLEX 8.1 [17].

Antes de comenzar la comparación, hicimos un análisis sobre nuestro modelo con el objetivo de reducir su tamaño. La eficiencia en la resolución de un problema de programacion lineal está ligada, entre otros factores, a la cantidad de variables y restricciones envueltas. En nuestra formulación del PR, el uso de las restricciones (3.35) y (3.36) permiten que las variables x puedan ser eliminadas de la formulación. Sin embargo, después de los reemplazos, la restricciones del modelo resultan mucho más densas, implicando una pérdida de eficiencia. Otra posible eliminación de variables resulta del uso de las igualdades 3.30, disminuyendo de $n(n-1)$ a $n(n-1)/2$ el número de variables x. En este caso, la reducción resultó beneficiosa. Sin embargo, a pesar del número polinomial de restricciones implicadas, el tiempo de CPU demandado para resolver las relajaciones lineales resultantes resultó ser excesivo aún para instancias de tamaño mediano. Por esta razón, finalmente consideramos una relajación lineal que involucra sólo las igualdades del modelo. De esta manera, el número de restricciones se reduce a $2n(n-1)+1$.

En la Tabla 3.1 comparamos el porcentaje de *gap* de las relajaciones en ambos casos y el tiempo insumido en resolver las relajaciones lineales correspondientes. Para cada tipo de instancia y cada tamaño reportamos el promedio sobre 5 instancias.

Como puede observarse, si bien la cota inferior brindada por la relajación compacta es menor, la disminución significativa del tiempo insumido justifica considerar la relajación lineal que involucra sólo las igualdades del modelo. Es importante tener en cuenta que eliminamos $O(n^3)$ restricciones y esta es la causa de la diferencia de los tiempos de CPU.

n	Completo		Sin <>	
	tiempo	% Gap	tiempo	% Gap
20	5,48	10,98	0,09	17,58
22	9,93	16,19	0,11	22,75
24	17,79	17,15	0,17	22,97
26	33,38	16,62	0,22	22,12
28	49,07	18,13	0,40	23,29
30	101,85	16,44	0,48	21,78
35	376,82	19,52	0,91	24,58
40	954,72	21,47	2,01	26,20
Promedio D	193,63	17,06	0,55	22,66
20	6,19	20,36	0,08	35,84
22	11,77	18,64	0,13	28,03
24	25,06	29,07	0,19	43,67
26	48,96	22,99	0,27	36,52
28	76,22	25,67	0,42	38,77
30	148,66	26,61	0,58	38,76
35	613,47	32,00	1,04	46,40
40	1913,54	33,11	2,71	44,84
Promedio S	355,48	26,06	0,68	39,10
20	5,24	3,36	0,14	10,33
22	9,77	3,91	0,20	11,20
24	16,98	6,36	0,25	13,48
26	36,63	3,95	0,44	11,78
28	62,49	5,56	0,74	11,89
30	114,54	7,34	0,79	14,43
35	390,12	3,74	1,56	16,36
40	1071,10	10,10	5,78	17,37
Promedio A	213,36	5,54	1,24	13,35
Promedio	254,16	16,22	0,82	25,04

Tabla 3.1: Modelo con/sin desigualdades

Para evaluar la calidad de la nueva formulación, en la Tabla 3.2 comparamos el valor de la función objetivo de las relajaciones lineales de los cuatro modelos. Considerando los resultados anteriores, para la experimentación con nuestro modelo hemos eliminado todas las desigualdades no triviales y consideramos la relajación definida por las ecuaciones. Para cada medida de instancias testeada, las entradas de la tabla muestran el promedio de porcentaje de *gap* entre la cota superior y el valor de la relajación lineal correspondiente y el tiempo promedio de CPU. Para cada medida y tipo de instancia considerada, el promedio

es dado sobre 5 instancias.

n	MR		FLM		$Eijl$		FGG		PQ	
	tiempo	%Gap	tiempo	%Gap	tiempo	%Gap	tiempo	%Gap	tiempo	%Gap
20	0,09	17,58	0,03	26,20	0,03	90,36	0,03	94,53	0,57	11,48
22	0,11	22,75	0,03	35,57	0,04	91,43	0,04	96,23	1,02	16,30
24	0,17	22,97	0,05	33,64	0,05	92,47	0,06	95,47	1,63	17,03
26	0,22	22,12	0,05	34,90	0,06	93,02	0,08	96,34	2,36	15,52
28	0,40	23,29	0,06	35,79	0,07	93,62	0,12	97,12	3,74	18,94
30	0,48	21,78	0,07	32,53	0,09	93,78	0,14	96,64	5,78	16,43
35	0,91	24,58	0,12	38,87	0,14	94,63	0,29	97,89	15,60	20,28
40	2,01	26,20	0,21	41,02	0,18	95,38	0,54	98,13	37,42	21,62
Prom. D	0,55	22,66	0,08	34,81	0,08	93,09	0,16	96,54	8,51	17,20
20	0,08	35,84	0,02	59,14	0,03	88,56	0,05	99,43	0,55	23,73
22	0,13	28,03	0,03	41,86	0,03	93,35	0,06	97,96	0,95	65,05
24	0,19	43,67	0,05	68,40	0,05	91,08	0,11	100,00	1,64	30,54
26	0,27	36,52	0,06	56,97	0,06	80,86	0,13	100,00	2,28	25,02
28	0,42	38,77	0,07	59,34	0,09	92,16	0,18	100,00	3,48	27,47
30	0,58	38,76	0,09	59,59	0,12	93,42	0,21	100,00	5,39	28,87
35	1,04	46,40	0,13	69,78	0,16	93,84	0,41	100,00	12,91	34,61
40	2,71	44,84	0,19	66,71	0,23	94,97	0,79	100,00	31,96	34,00
Prom. S	0,68	39,10	0,08	60,22	0,10	91,03	0,24	99,67	7,39	33,66
20	0,14	10,33	0,03	24,47	0,03	87,98	0,06	97,57	0,52	0,55
22	0,20	11,20	0,03	24,56	0,04	89,15	0,10	98,47	0,88	1,19
24	0,25	13,48	0,05	28,99	0,05	89,91	0,14	98,91	1,47	2,73
26	0,44	11,78	0,05	25,53	0,07	90,85	0,19	99,13	2,36	1,04
28	0,74	11,89	0,07	25,41	0,08	91,55	0,24	99,00	3,92	2,31
30	0,79	14,43	0,10	30,25	0,10	92,01	0,31	99,31	5,47	4,25
35	1,56	16,36	0,12	25,77	0,15	92,86	0,56	99,13	14,97	0,77
40	5,78	17,37	0,15	37,68	0,22	93,68	1,35	99,89	39,97	5,48
Prom. A	1,24	13,35	0,07	27,83	0,09	91,00	0,37	98,93	8,69	2,29

Tabla 3.2: Relajaciones LP

Las relajaciones lineales de los modelos $Eijl$ y FGG son resueltas muy rápidamente, sin embargo la calidad de la cota es muy pobre. En todas las instancias testeadas, el porcentaje de *gap* superó el 90 % y no se evidencia diferencia entre los distintos tipos de instancias.

El modelo FLM es el que, en promedio, tiene un menor tiempo de resolución logrando en promedio un 40 % de *gap*. En este caso, las cotas inferiores de las instancias asimétricas son de

mejor calidad y la peor calidad la presentan las instancias simétricas. Comparado con nuestro modelo, casi duplica el porcentaje de *gap*, aunque a costo de tiempo de CPU muy inferior.

El modelo PQ es el de mejor calidad de cotas. En las instancias euclídeas y simétricas la diferencia con nuestro modelo no es muy significativa, pero el costo de tiempo de CPU es más de 10 veces superior . En las instancias asimétricas la diferencia a favor del modelo PQ es más marcada, sin embargo, nuevamente el tiempo de CPU requerido es mayor.

Observando los resultados de la tabla 3.1 correspondientes a nuestro modelo completo, podemos afirmar que se alcanza y en algunos casos se supera significativamente la calidad de la cota del modelo de Picard y Queyranne, pero a un costo prohibitivo de tiempo de CPU.

La comparación de las cotas inferiores de los diferentes modelos no nos lleva a una conclusión netamente favorable a ninguno de los modelos, ya que buena calidad viene acompañada de un costo de CPU superior.

Para obtener una evaluación más adecuada de los modelos, experimentamos con un algoritmo *Branch and Bound*. Sabemos que buenas cotas inferiores ayudan a la poda del árbol de búsqueda, pero rápidas resoluciones de las relajaciones lineales permiten recorrer nodos a bajo costo. Por lo tanto, no podemos inferir de la calidad de las cotas como va a ser la performance de cada modelo en un algoritmo *Branch-and-Cut*.

Para esta experimentación, tenemos en cuenta nuestro modelo completo, incorporando las desigualdades originales omitidas en la comparación de las relajaciones. Esto trae como consecuencia, tal como vimos antes, que la resolución de nuestro modelo necesite más tiempo de CPU.

Dada la dificultad del problema, experimentamos con instancias pequeñas de 16, 20 y 26 clientes.

En el caso de instancias de 16 clientes, los modelos $Eijl$ y FGG no alcanzan a resolver el problema dentro de un límite de 1800 segundos. Por el contrario, los modelos FLM, PQ y el nuestro en apenas segundos obtienen el óptimo.

Debido a la pobre calidad de las cotas de los modelos $Eijl$ y FGG, el árbol de enumeración que se genera es muy grande, resultando el algoritmo de *Branch-and-Bound* casi como un algoritmo enumerativo con muy escasa poda.

Debido a estos resultados, descartamos a los modelos $Eijl$ y FGG de la experimentación con instancias de mayor tamaño.

En la Tabla 3.3 se pueden observar para cada uno de los modelos, el tiempo promedio de CPU y la cantidad promedio de nodos explorados para 5 instancias de diferente tipo y de 20 y 26 clientes. Para la resolución de instancias de 20 clientes impusimos un límite de 1800 segundos y de 7600 segundos para 26 clientes. Si ninguna instancia se resolvió dentro del tiempo límite, aparecen ***** en la tabla. En el caso de instancias asimétricas de 20 clientes, los resultados del modelo FLM se obtuvieron sobre 4 instancias ya que una de ellas superó el tiempo límite.

n	MR		PQ		FLM	
	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos
D-20	87,30	23,00	300,86	8998,40	*****	*****
S-20	104,50	29,20	98,79	2818,00	*****	*****
A-20	8,22	2,00	1,20	1,60	92,55 (4)	32875
D-26	4608,42	429,25	7548,98	80966,75	*****	*****
S-26	2686,28	286,40	4510,49	48294,00	*****	*****
A-26	34,60	4,40	8,64	28,20	*****	*****

Tabla 3.3: Branch-and-Bound

Como ya observamos, el modelo FLM tiene un promedio de porcentaje de *gap* razonable a un costo de CPU muy bajo. Sin embargo, contrariamente a lo que esperábamos, la performance de un *Branch-and-Bound* es muy pobre. Salvo las instancias asimétricas de 20 clientes, el resto de las instancias no pudieron ser resueltas dentro del límite de CPU impuesto.

Excepto para instancias asimétricas, el modelo PQ genera un árbol de tamaño mucho mayor al generado a partir de nuestro modelo. En promedio el tamaño del árbol es 200 veces más grande. Es notable la escasa cantidad de nodos que recorre el algoritmo *Branch-and-Bound* con nuestro modelo, lo que pone de manifiesto la calidad del mismo. La relación entre los tamaños de los árboles no se refleja de la misma manera en el tiempo total de CPU. Claramente, el tiempo insumido en cada nodo es superior con nuestro modelo. Sin embargo, dado que el árbol de enumeración es notablemente mas chico, nuestro modelo es más eficiente, reduciendo el tiempo casi a la mitad en la mayoría de los casos.

En las instancias asimétricas es donde el modelo PQ saca ventaja en tiempos, aunque el tamaño del árbol sigue siendo superior.

Basándonos en toda la experimentación realizada, concluimos que nuestro modelo brinda buenas cotas inferiores y que usado en un algoritmo *Branch-and-Bound*, muestra una muy buena performance. Por lo tanto, consideramos que nuestro modelo es un muy buen punto de partida para realizar un estudio poliedral para identificar buenas desigualdades válidas y embeberlas en un algoritmo *Branch-and-Cut* con el objetivo de desarrollar un algoritmo

competitivo.

.

Capítulo 4

Estudio poliedral del *Problema del Repartidor*

Más allá del interés estrictamente teórico de las propiedades del poliedro, éstas adquieren mayor relevancia cuando brindan una herramienta útil para desarrollar algoritmos. Como primera fase en la implementación de un algoritmo *Branch-and-Cut* es esencial el estudio del poliedro de soluciones factibles asociadas a nuestra formulación MR, con el objetivo de caracterizar *buenas* desigualdades válidas que puedan ser utilizadas como planos de corte. La efectividad de una desigualdad en este contexto está relacionada en gran medida con la dimensión de la cara que defina la misma. De ahí la importancia de caracterizar caras con dimensión alta, en particular facetas del poliedro.

La teoría poliedral establece que todo poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ puede ser descripto por ecuaciones e inecuaciones lineales. Es decir,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : A^{=}x = b^{=}, A^{\leq}x \leq b^{\leq}\}$$

El sistema $A^{=}x = b^{=}$ (*sistema minimal de ecuaciones*) determina la dimensión del poliedro, siendo $dim(P) = n - rango(A^{=})$.

Toda desigualdad válida (ω, ω_0) de un poliedro P, $\omega x \leq \omega_0 \forall x \in P$, define una cara F siendo $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \omega x = \omega_0\}$. Si $dim(F) = dim(P) - 1$, entonces F es una *faceta*. Las únicas desigualdades necesarias y suficientes para la descripción de P son las que definen facetas. Es decir, para caracterizar la cápsula convexa de un conjunto de puntos se necesita y es suficiente encontrar un sistema minimal de ecuaciones y desigualdades válidas que definan facetas.

La metodología utilizada para demostrar que un sistema $A^{=}x = b^{=}$ es un sistema minimal es la siguiente. Se asume la existencia de una igualdad (π, π_0) válida para P. Conociendo las propiedades que tienen los coeficientes de una combinación lineal de las filas de $A^{=}$, se trata de verificar que son cumplidas por los coeficientes de π. En general esta deducción se

hace considerando puntos en P o propiedades de los mismos que implican las propiedades deseadas. Si $X_1, \ldots, X_r \in P$, entonces $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \pi X_i = \pi_0 \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$. Eligiendo convenientemente $X_1, \ldots, X_r$ y los multiplicadores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, se deducen condiciones sobre los coeficientes de π. Esto se repite hasta completar la descripción.

Para determinar si una desigualdad válida (ω, ω_0) es faceta hay que:

- exhibir algún punto que satisfaga estrictamente la desigualdad.
- encontrar $dim(P)$ vectores afínmente independientes en F.

En algunos casos no es fácil obtener los puntos afínmente independientes. Un alternativa para reconocer si una cara es una faceta es usar la metodología descripta anteriormente junto con el siguiente resultado:

Lema: *Sea $A^{=}x = b^{=}$ el sistema minimal de ecuaciones del poliedro P y (ω, ω_0) una cara F de P. (ω, ω_0) define faceta de P si y sólo si para cualquier (π, π_0) desigualdad válida para P tal que $\pi x = \pi_0$ para todo $x \in F$ existe un escalar $\lambda > 0$ y un vector u tal que $(\pi, \pi_0) = (\lambda\omega + uA^{=}, \lambda\omega_0 + ub^{=})$.*

Comenzamos por estudiar la dimensión de $\mathcal{CR}$.

4.1. Dimensión de $\mathcal{CR}$

Teorema 4.1 *Las siguientes ecuaciones determinan un sistema minimal de $\mathcal{CR}$.*

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad i < j \tag{4.1}$$

$$x_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j,k}^{n} f_{ij}^{k} + f_{0j}^{j} \qquad \forall j, k = 1, \ldots, n \quad j \neq k \tag{4.2}$$

$$x_{jk} = \sum_{i=1, i \neq j}^{n} f_{ji}^{k} \qquad \forall j, k = 1, \ldots, n \quad j \neq k \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{0i}^{i} = 1 \tag{4.4}$$

Demostración:

Tenemos que probar que:

1. toda solución factible de $\mathcal{CR}$ satisface el sistema de ecuaciones

2. la matriz definida por las ecuaciones (4.1-4.4) tiene rango completo

3. cualquier otra ecuación válida para toda solución factible de $\mathcal{CR}$ puede ser escrita como una combinación lineal de las ecuaciones (4.1-4.4)

Como las ecuaciones (4.1-4.4) forman parte de MR, la demostración de 1. es obvia.

Para demostrar 2. realizamos una permutacion de filas y columnas de la matriz definida por las restricciones (4.1-4.4). Consideramos el siguiente orden en las filas:

- Ecuaciones (4.1) en orden lexicográfico según ij $(i < j)$
- Ecuaciones (4.2) para $j = 1$ $k = 2$
- Ecuaciones (4.2) para $j = 2, \ldots, n-1$ $k = 1$
- Ecuación (4.4)
- Ecuaciones (4.2) para $j = 1$ y $k = 3, \ldots, n$
- Ecuaciones (4.2) para $j = 2, \ldots, n$ y $k = 2, \ldots, n$ $(j \neq k)$
- Ecuaciones (4.2) para $j = n$ y $k = 1$
- Ecuaciones (4.3) en orden lexicográfico según jk $(j \neq k)$

Las columnas las ordenamos

- Variables x_{ij} con $i < j$ en orden lexicográfico según ij
- Variables f_{0j}^{j} $j = 1, \ldots, n$
- Variables f_{21}^{k} $k = 3, \ldots, n$
- Variables f_{1j}^{k} $j = 2, \ldots, n$ $k = 2, \ldots, n$ $j \neq k$
- Variable f_{2n}^{1}
- Variables f_{ij}^{j} $i = 1, \ldots, n$ $j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$
- Para el resto de las variables considerar cualquier orden

Con esta permutación de filas y columnas, la matriz de restricciones tiene un bloque cuadrado de tamaño $\frac{n(n-1)}{2} + 2n(n-1) + 1$ triangular inferior con todos los elementos de la diagonal distintos de 0, lo que nos permite afirmar que tiene rango completo.

Para probar 3. asumamos que toda solución factible de $\mathcal{CR}$ satisface la ecuación

$$\alpha X + \beta F_{ini} + \gamma F_{sig} + \delta F_{cam} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_{0i}^{i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \gamma_{ij} f_{ij}^{j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{k=1, k\neq i,j}^{n} \delta_{ijk} f_{ij}^{k} = \pi_0 \qquad (4.5)$$

Para ver que es posible escribirla como combinación lineal de las ecuaciones (4.1-4.4), se deben determinar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3) y d (ecuación 4.4) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \;\; \forall i < j$
- $\alpha_{ij} = a_{ji} + b_{ij} + c_{ij} \;\; \forall i > j$
- $\beta_i = d - \sum_{j=1\; i\neq j}^{n} b_{ij} \;\; \forall i$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij} \;\; \forall i \neq j$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk} \;\; \forall i \neq j \neq k$

Entonces, definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij} \;\; \forall i \neq j$
- $b_{jk} = \gamma_{ik} - \delta_{ijk} \;\; \forall j \neq k$ para algún $i \neq j, k$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\; r\neq i}^{n} b_{ir}$ para algún i
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - \gamma_{ki} + \delta_{kij} + \gamma_{ij} \;\; \forall i < j$ para algún $k \neq i, j$

Para que las definiciones anteriores sean consistentes y cumplan los requisitos, debemos probar que:

- *Caso 1*: La definición de b_{jk} no depende del i, es decir

$$\gamma_{ik} - \delta_{ijk} - \gamma_{i'k} + \delta_{i'jk} = 0 \;\; \forall i \neq i'$$

- *Caso 2*: La definición de d no depende del i

$$\beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1\ r\neq i'}^{n} b_{i'r} \ \ \forall i \neq i'$$

Reemplazando la definición de b_{ij} y asumiendo verdadero el caso 1, debemos probar, para algún k que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1, r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} - \beta_{i'} - \gamma_{ki} + \delta_{ji'k} + \sum_{r=1, r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r} = 0 \ \ \forall i \neq i'$$

- *Caso 3*: Como debe cumplirse que $\alpha_{ij} = a_{ji} + b_{ij} + c_{ij}$ para $i < j$, nuevamente utilizando la definición de b_{ij} y c_{ij} y asumiendo verdadero el caso 1, tenemos que ver que

$$\alpha_{ji} + \delta_{kji} + \gamma_{ji} + \gamma_{kj} - \alpha_{ij} - \delta_{kij} - \gamma_{ij} - \gamma_{ki} = 0 \ \ \forall i < j, \text{ para algún } k$$

Para derivar cada una de las condiciones vamos a considerar la ecuación 4.5 evaluada en diferentes soluciones de $\mathcal{CR}$ y multiplicar cada una de ellas por un escalar apropiado de tal manera que el resultado

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda^i (\alpha X^i + \beta F^i_{ini} + \gamma F^i_{sig} + \delta F^i_{cam}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \pi_0$$

sea igual a la relación deseada entre los coeficientes de la ecuación.

En la demostración del primer caso entraremos en detalles. En el resto de los casos los argumentos son idénticos por lo cual sólo mostraremos la elección de las r soluciones y los multiplicadores λ que permiten deducir la igualdad buscada.

- *Demostración Caso 1*: Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$	7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$	8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$	9: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$	10: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$	11: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$	12: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$.

Sea $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Para cada índice $p \in \{i, i', j, k\}$, los caminos donde v_p ocupa el lugar siguiente a $v_{j_{n-4}}$ tienen asociados coeficientes λ

cuya suma da cero. Como además la suma de todos los coeficientes es cero, podemos afirmar que todas las variables que involucran índices en $\{0, j_1, \ldots, j_{n-4}\}$ se anulan en la combinación. Por lo tanto, sólo restan las variables asociadas con índices $\{i, i', j, k\}$. En las tablas 4.1 y 4.2 mostramos las soluciones arriba definidas para las cuales estas variables no son nulas y entre paréntesis la suma de los coeficientes λ correspondientes a dichas soluciones.

	i	j	k	i'
i	-	1,2,3,4,5,6 (0)	1,2,6,7,8,9 (0)	1,2,3,4,7,10 (0)
j	7,8,9,10,11,12 (0)	-	1,2,6,7,8,9 (0)	1,3,7,8,10,11 (0)
k	3,4,5,10,11,12 (0)	3,4,5,10,11,12 (0)	-	3,4,5,10,11,12 (0)
i'	5,6,8,9,11,12 (0)	2,4,5,6,9,12 (0)	1,2,6,7,8,9 (0)	-

Tabla 4.1: Variables x

	i	j	k	i'
ij	-	1,3,5,6 (0)	1,6 (-1)	1,3 (0)
ji'	8,11 (0)	-	1,8 (0)	1,3,8,11 (0)
$i'k$	-	-	1,7 (-1)	-
ii'	-	2,4 (0)	2,7 (0)	2,4,7,10 (0)
$i'j$	9,12 (0)	2,4,9,12 (0)	2,9 (-1)	-
jk	-	-	2,6 (0)	-
ki	3,4 (0)	3,4 (0)	-	3,4 (0)
ki'	5,12 (0)	5,12 (0)	-	5,12 (0)
$i'i$	5,6,8,11 (0)	5,6 (0)	6,8 (0)	-
ik	-	-	8,9 (1)	-
ji	7,9,10,12 (0)	-	7,9 (0)	7,10 (0)
kj	10,11 (0)	10,11 (0)	-	10,11 (0)

Tabla 4.2: Variables f

Teniendo en cuenta los multiplicadores λ asociados a cada una de las soluciones, la combinación de las soluciones anula todas los coeficientes salvo $\delta_{ijk}, \gamma_{ik}, \delta_{i'jk}, \gamma_{i'k}$ que tienen $-1, 1, 1$ y -1 respectivamente. Se obtiene entonces la igualdad $\gamma_{ik} - \delta_{ijk} - \gamma_{i'k} + \delta_{i'jk} = 0$

- *Demostración Caso 2*: Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_j$
2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_j$
3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}$
4: $v_0\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}$
5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_j$
6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_j$
7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i$
8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$. Definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ para probar la igualdad deseada.

- *Demostración Caso 3*: Sean las soluciones factibles de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

  1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-3}}\ v_k\ v_i\ v_j$
  2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-3}}\ v_k\ v_j\ v_i$

  donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-3}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_j, v_k\}$. Tomando $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

□

Corolario 4.1 *La dimensión de $\mathcal{CR}$ es $n(n-1)(n-\frac{5}{2}) + n - 1$.*

Demostración:
El sistema (4.1-4.4) tiene $\frac{5}{2}n(n-1) + 1$ ecuaciones. Como la cantidad de variables es $2n(n-1) + n(n-1)(n-2) + n$ obtenemos el resultado buscado. □

4.2. Desigualdades válidas para $\mathcal{CR}$

En esta sección describiremos varias familias de desigualdades válidas para $\mathcal{CR}$ que luego serán incorporadas en un algoritmo de planos de corte. En cada caso, enunciamos argumentos suficientes para probar la validez y para la mayoría de las desigualdades válidas demostramos que definen facetas de $\mathcal{CR}$.

Dividimos a las desigualdades válidas en dos conjuntos. Por un lado aquellas que surgieron del análisis de las características propias del problema. Por otro, desigualdades válidas derivadas de algunas familias conocidas para el *Problema de Ordenamiento Lineal*.

Respecto a las desigualdades que definen nuestro modelo, podemos afirmar que son caras de $\mathcal{CR}$ pero no de dimensión máxima. Algunas de ellas pudimos reforzarlas llegando incluso a probar que definen facetas.

Para facilitar la lectura del trabajo, en esta sección sólo vamos a incluir la demostración de defición de faceta para la primera familia, el resto se encuentra en el apéndice A.

4.2.1. Desigualdades propias de la formulación

Proposición 4.1 *(Familia1) Sean $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ distintos. La desigualdad*

$$f_{i_0 j_0}^{k_0} \leq f_{i_0 j_0}^{j_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si v_{i_0} no es el predecesor inmediato de v_{j_0} en el camino PR , entonces el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) no puede ser utilizado en el camino PR hacia otro vértice v_{k_0}. Esto demuestra que la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia1* define una cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración de que la desigualdad define una faceta utilizaremos un procedimiento similar al empleado en el teorema 4.1.

Sea F la cara de $\mathcal{CR}$ definida por la desigualdad *Familia1*. Supongamos que

$$\alpha X + \beta F_{ini} + \gamma F_{sig} + \delta F_{cam} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_{0i}^{i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \gamma_{ij} f_{ij}^{j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \sum_{k=1, k\neq i,j}^{n} \delta_{ijk} f_{ij}^{k} \leq \pi_0 \qquad (4.6)$$

es una desigualdad válida para $\mathcal{CR}$ tal que $F \subseteq \mathcal{CR} \cap \{(X, F_{ini}, F_{sig}, F_{cam}) : \alpha X + \beta F_{ini} + \gamma F_{sig} + \delta F_{cam} = \pi_0\}$. Para demostrar que *Familia1* define una faceta de $\mathcal{CR}$, tenemos que probar que la igualdad anterior puede ser escrita como combinación lineal de las ecuaciones (4.1-4.4) más *Familia1*.

Como en el teorema 4.1, vamos a definir los multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y agregamos el multiplicador e correspondiente a *Familia1*. Proponemos una definición de estos multiplicadores y luego probaremos las condiciones que se deben cumplir para que la definición sea consistente. Para derivar cada una de las condiciones vamos a considerar la ecuación evaluada en diferentes soluciones de $\mathcal{CR}$ y multiplicamos cada una de ellas por un escalar apropiado de tal manera que el resultado

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda^i (\alpha X^i + \beta F_{ini}^i + \gamma F_{sig}^i + \delta F_{cam}^i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \pi_0$$

sea igual a la relación deseada entre los coeficientes de la ecuación.
En cada caso mostraremos la elección de las r soluciones y los coeficientes λ.

Se debe cumplir que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \;\; \forall i < j$
- $\alpha_{ij} = a_{ji} + b_{ij} + c_{ij} \;\; \forall i > j$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\; r\neq i}^{n} b_{ir} \;\; \forall i$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij} \;\; \forall i \neq j \quad (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk} \;\; \forall i \neq j \neq k \quad (i,j,k) \neq (i_0, j_0, k_0)$
- $\gamma_{i_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} - e$
- $\delta_{i_0 j_0 k_0} = -c_{i_0 k_0} - b_{j_0 k_0} + e$

Definimos:

- $e = \delta_{i_0 j_0 k_0} - \gamma_{i_0 k_0} + \gamma_{i k_0} - \delta_{i j_0 k_0}$ para algún $i \neq i_0, j_0, k_0$
- $c_{ij} = -\gamma_{ij} \;\; \forall (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $c_{i_0 j_0} = -\gamma_{i_0 j_0} + e$
- $b_{jk} = \gamma_{ik} - \delta_{ijk}$ para algún i, $(i,k) \neq (i_0, j_0)$, $(i,j,k) \neq (i_0, j_0, k_0)$
- $d = \beta_i + \sum_{j=1\; i\neq j}^{n} b_{ij}$ para algún i
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij} \;\; \forall i < j$

Para que las definiciones anteriores sean consistentes y comprobar que cumplen lo necesario, debemos ver que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende de i:

  $$\gamma_{ik} - \delta_{ijk} - \gamma_{i'k} + \delta_{i'jk} = 0$$

  $\forall i, j, k, i' \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $(i,j,k) \neq (i_0, j_0, k_0)$, $(i,k) \neq (i_0, j_0)$ y $(i', k) \neq (i_0, j_0)$

- *Caso 2:* Para $(i,k) = (i_0, j_0)$, sabemos que $b_{jj_0} = \gamma_{i_0 j_0} - \delta_{i_0 j j_0} + e$ y $b_{jj_0} = \gamma_{ij_0} - \delta_{ijj_0} \;\; \forall i \neq i_0$, entonces se debe cumplir que

  $$e = -\gamma_{i_0 j_0} + \delta_{i_0 j j_0} + \gamma_{ij_0} - \delta_{ijj_0}$$

  para $i, j \neq i_0, j_0$. Utilizando la definición de e y el ítem anterior, debemos probar que

  $$\gamma_{ij_0} + \delta_{i_0 j j_0} - \gamma_{i_0 j_0} - \delta_{ijj_0} + \gamma_{i_0 k_0} + \delta_{i j_0 k_0} - \gamma_{ik_0} - \delta_{i_0 j_0 k_0} = 0$$

  $\forall j \neq i_0, j_0$ y algún i que podemos suponer distinto de k_0.

- *Caso 3:* Para ver que la definición de d no depende del i debemos probar que

$$\beta_{i_0}+\gamma_{ki'}-\sum_{r=1\ r\neq i_0,k}^{n}\delta_{ki_0r}-\delta_{ji_0k}-\beta_{i'}-\gamma_{ki_0}+\sum_{r=1\ r\neq i',k}^{n}\delta_{ki'r}+\delta_{ji'k}=0\ \ \forall i'\neq i_0,k,j\notin\{i_0,j_0,k_0\}$$

- *Caso 4:* Para $i<j$ $((i,j),(j,i)\neq(i_0,j_0))$ debe cumplirse que $a_{ij}=\alpha_{ji}-b_{ji}-c_{ji}=\alpha_{ij}-b_{ij}-c_{ij}$. Entonces, tenemos que probar que $\alpha_{ij}+\delta_{kij}-\gamma_{kj}+\gamma_{ij}=\alpha_{ji}+\delta_{kji}-\gamma_{ki}+\gamma_{ji}$. Si (i,j) o $(j,i)=(i_0,j_0)$, debe verificarse que $\alpha_{i_0j_0}+\delta_{ii_0j_0}-\gamma_{ij_0}+\gamma_{i_0j_0}+e=\alpha_{j_0i_0}+\delta_{ij_0i_0}-\gamma_{ii_0}+\gamma_{j_0i_0}$

Mostraremos las soluciones de $\mathcal{CR}$ y el λ que nos permite demostrar cada una de las condiciones.

- *Demostración Caso 1:* Se pueden presentar 5 posibilidades:

1. $i,j,k,i'\notin\{i_0,j_0,k_0\}$
   Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   2: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   3: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$
   6: $v_0\ v_{j_1}\dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   7: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i'\ v_i\ v_k$
   9: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   10: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   11: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   12: $v_0\ v_{j_1}\dots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$

   con $\{v_{j_1},\dots,v_{j_{n-7}}\}=V\setminus\{v_0,v_{i_0},v_{j_0},v_{k_0},v_i,v_{i'},v_j,v_k\}$.
   Definiendo $\lambda=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ surge la igualdad deseada.

2. Exactamente uno de los índices i,j,k pertenece a $\{i_0,j_0,k_0\}$
   Consideramos los mismos caminos y multiplicadores λ que en el ítem anterior, eliminando de la terna $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ el vértice correspondiente al índice en consideración.

3. Exactamente dos de los índices i,j,k,i' pertenecen a $\{i_0,k_0\}$ o a $\{j_0,k_0\}$
   Nuevamente tomamos los mismos caminos y multiplicadores λ, eliminando de la terna $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ los vértices correspondientes a los índices en consideración.

4. Exactamente dos de los índices i,j,k,i' pertenecen a $\{i_0,j_0\}$
   Hay 6 posibilidades.

   a) $i=i_0$ y $j=j_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_k$ 5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ 6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_k$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k$ 7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{i_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}$ 8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_k$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{i'}, v_k\}$. Definimos

$$\lambda = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$$

b) $i = i_0$ y $i' = j_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_j\ v_k$ 5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_j\ v_k$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_k$ 6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_j$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_j$ 7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_k$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}$ 8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_j, v_k\}$ y

$$\lambda = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$$

c) $i = j_0$ y $j = i_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_k$ 5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_k$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}$ 6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{i'}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$ 7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_0}$ 8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_k\ v_{k_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{i'}, v_k\}$ y

$$\lambda = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$$

d) $i = j_0$ y $k = i_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_j$ 5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_{i_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i'}$ 6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_{i_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_j$ 7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_j\ v_{i_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}$ 8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{i'}, v_j\}$ y

$$\lambda = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1)$$

e) $j = i_0$ y $k = j_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}$ 5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_0}$ 6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{j_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}$ 7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ 8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{i'}, v_i\}$ y

$$\lambda = (1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1)$$

f) $j = j_0$ y $k = i_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_i$
2: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_{j_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}$
4: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}$
5: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_{i_0}$
6: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
7: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i'}\ v_{i_0}$
8: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{i_0, j_0, k_0, i', i\}$ y

$$\lambda = (-1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1)$$

5. Exactamente tres de los índices i, j, i', k pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$
Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_l$
2: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_l\ v_{k_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_l$
4: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_l\ v_{j_0}$
5: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_l\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
6: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_l\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
7: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_l$
8: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_l\ v_{k_0}$
9: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_l$
10: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_l\ v_{i_0}$
11: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_l\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
12: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_l\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
13: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_l\ v_{j_0}$
14: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_l$
15: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_l\ v_{i_0}$
16: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_l\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
17: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_l\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
18: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_l\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
19: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_l\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
20: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_l\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
21: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_l\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{i_0, v_{j_0}, k_0, l\}$.

Tenemos 9 posibilidades. Para cada una mostraremos la elección de λ para obtener la igualdad buscada.

a) $i = i_0$, $j = j_0$, $i' = k_0$ y $l = k$.
$\lambda = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

b) $i = i_0$, $k = j_0$, $i' = j_0$ y $l = j$.
$\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

c) $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ y $l = k$
$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

d) $i = j_0$, $j = i_0$, $k = k_0$ y $l = i'$
$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

e) $i = j_0$, $j = i_0$, $i' = k_0$ y $l = k$
$\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 1, -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

f) $i = j_0$, $k = i_0$, $i' = k_0$ y $l = j$.
$\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

g) $i = j_0$, $j = k_0$, $k = i_0$ y $l = i'$.
$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

h) $i = k_0$, $j = i_0$, $k = j_0$ y $l = i'$.
$\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1, 1, -\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}, -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

i) $i = k_0$, $j = j_0$, $k = i_0$ y $l = i'$
$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

- *Demostración Caso 2:* Se presentan dos casos:

1. $j = k_0$ Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i\}$ y

$$\lambda = (-1, 1, 1, -1)$$

2. $j \neq k_0$

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_{i_0}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_{i_0}\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j\ v_{k_0}$
6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_j\ v_i\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_j\ v_i\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
9: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
10: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j\}$ y

$$\lambda = (1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)$$

- *Demostración Caso 3:* Se presentan 3 posibilidades:

1. $i' = j_0$

1: $v_0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
2: $v_0\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
4: $v_0\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
5: $v_0\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
6: $v_0\ v_k\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
8: $v_0\ v_j\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_j, v_k\}$ y

$$\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$$

2. $i' = k_0$

   1: $v_0\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$ 5: $v_0\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
   2: $v_0\ v_k\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$ 6: $v_0\ v_k\ v_{k_0}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
   3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$ 7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$
   4: $v_0\ v_j\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$ 8: $v_0\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}$

   con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_j, v_k\}$ y

$$\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$$

3. $i' \notin \{j_0, k_0\}$

   1: $v_0\ v_{i_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$ 5: $v_0\ v_{i'}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$
   2: $v_0\ v_k\ v_{i_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$ 6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$
   3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$ 7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$
   4: $v_0\ v_j\ v_{i_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$ 8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$

   con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{i'}, v_j, v_k\}$ y

$$\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$$

- *Demostración Caso 4:* Las posibilidades son:

1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Tenemos que probar que $\alpha_{ij} + \delta_{kij} - \gamma_{kj} + \gamma_{ij} = \alpha_{ji} + \delta_{kji} - \gamma_{ki} + \gamma_{ji}$ Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$ 2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$

   con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j, v_k\}$ y $\lambda = (1, -1)$.
2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$.
   Tomamos las mismas soluciones y multiplicadores del caso anterior, eliminando de la terna $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ el vértice correspondiente al índice en consideración.
3. Exactamente dos de los índices i, j pertenecen a $\{i_0, k_0\}$ o a $\{j_0, k_0\}$.
   Utilizamos los caminos y multiplicadores del caso anterior,eliminando de la terna $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$ los vértices correspondientes a los índices en consideración.
4. Exactamente dos de los índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0\}$.
   Tenemos que probar que $\alpha_{i_0j_0} + \delta_{ii_0j_0} - \gamma_{ij_0} + \gamma_{i_0j_0} + e = \alpha_{j_0i_0} + \delta_{ij_0i_0} - \gamma_{ii_0} + \gamma_{j_0i_0}$. Utilizando la definición de e, $\alpha_{i_0j_0} + \delta_{ii_0j_0} - \delta_{ijj_0} + \delta_{i_0jj_0} = \alpha_{j_0i_0} + \delta_{ij_0i_0} - \gamma_{ii_0} + \gamma_{j_0i_0}$, para algún i que podemos suponer distinto de k_0. Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_i\ v_j\ v_{j_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j\ v_{j_0}$
3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_i\ v_{j_0}$
4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_i\ v_j$
5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_i$
6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j$
7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i_0}$
8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_{k_0}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j\}$ y

$$\lambda = (-1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, -1)$$

obtenemos la igualdad buscada, completando la demostración.

□

Proposición 4.2 *(Familia 2) Sean $i_0, j_0, k_0, l_0 \in \{1, \dots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{i_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 l_0} + f^{l_0}_{k_0 j_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{k_0 j_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que es válida para $\mathcal{CR}$.

Si el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) es utilizado en el camino PR, entonces v_{i_0} debe estar antes que v_{j_0} y ningún otro arco que parta de v_{i_0} o que llegue a v_{j_0} podrá pertenecer al camino.

Si el arco (v_{i_0}, v_{l_0}) pertenece al camino desde v_0 hacia v_{j_0}, entonces v_l se debe encontrar antes que v_{j_0} en el camino y por lo tanto no se podrá utilizar un arco que llegue v_{j_0} en el camino hacia v_{l_0}. Por otro lado, v_{i_0} debe estar antes que v_{j_0} en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}.

Finalmente, si el arco (v_{k_0}, v_{j_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{l_0}, el vértice v_{i_0} debe estar antes que el vértice v_{j_0} o después de él. En el último caso, el arco (v_{k_0}, v_{j_0}) también debe ser utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{i_0}.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 2* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.3 *(Familia 3) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \dots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{k_0}_{j_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{j_0 k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si el arco (v_{k_0}, v_{i_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}, entonces no puede ser utilizado en el camino el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) ni el arco (v_{j_0}, v_{k_0}). Por otro lado, el vértice v_{i_0} se debe encontrar antes que el vértice v_{j_0} en el camino.

Lo mismo sucede si el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}.

Por último, si el arco (v_{j_0}, v_{k_0}) se utiliza en el camino PR, se presentan dos posibilidades: el vértice v_{i_0} está antes que el vértice v_{j_0} o el arco (v_{j_0}, v_{k_0}) es usado en el camino desde v_0 hacia v_{i_0}. Esto prueba que la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{k_0} y v_{i_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 3* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.4 *(Familia 4) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{k_0}_{i_0 j_0} + f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{k_0}, el vértice v_{i_0} debe aparecer en el camino antes que el vértice v_{j_0} mientras que v_{j_0} debe figurar antes que v_{k_0}. Por lo tanto, ningún arco involucrando a v_{k_0} puede ser usado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}.

Si el arco (v_{k_0}, v_{i_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0} entonces no puede ser utilizado el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) en el camino. Análogamente, si el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) es usado en este camino, el arco (v_{k_0}, v_{i_0}) no puede pertenecer a él. En ambos casos, v_{i_0} se encontrará antes que v_{j_0}. Por lo tanto la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 4* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.5 *(Familia 5) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{i_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 l_0} + f^{j_0}_{k_0 l_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{k_0 l_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Para ver que es una desigualdad válida, consideremos primero el caso donde el vértice v_{i_0} se encuentra antes que el v_{j_0} en el camino PR. Si v_{j_0} es el vértice visitado inmediatamente despues que el v_{i_0} y el arco (v_{k_0}, v_{l_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}, este arco también debe pertenecer al camino desde v_0 hacia v_{i_0}.

Si v_{j_0} se encuentra antes que v_{i_0}, ningún arco partiendo de v_{i_0} puede ser utilizado en al camino desde v_0 hacia v_{j_0}. Si el arco (v_{k_0}, v_{l_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}, este arco también debe aparecer en el camino desde v_0 hacia v_{i_0}. Entonces, la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 5* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.6 *(Familia 6) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f_{0i_0}^{i_0} + f_{i_0j_0}^{j_0} \leq x_{i_0j_0} + f_{i_0j_0}^{k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si v_{i_0} no se encuentra antes que v_{j_0} en el camino, entonces v_{i_0} no puede ser el primer vértice en este camino y el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) no podrá pertenecer a él.

Si el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) está en el camino y v_{i_0} es el vértice siguiente a v_0 en este camino, entonces (v_{i_0}, v_{j_0}) debe pertenecer a todos los caminos desde v_0 hacia v_{k_0}, para $v_{k_0} \neq v_{i_0}$. Con esto probamos que la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 6* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.7 *(Familia 7) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f_{j_0k_0}^{k_0} + f_{i_0k_0}^{j_0} + f_{i_0j_0}^{j_0} \leq x_{i_0j_0} + f_{i_0j_0}^{k_0} + f_{j_0k_0}^{i_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que es válida. Si en el camino PR, v_{i_0} es el predecesor inmediato de v_{j_0} y v_{k_0} su sucesor inmediato, entonces el arco (v_{i_0}, v_{j_0}) debe ser utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{k_0}.

Si el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) es usado en el camino desde v_0 hacia v_{j_0}, ningún otro arco partiendo de v_{i_0} o llegando a v_{k_0} puede ser utilizado en el camino.

Si v_{j_0} es el predecesor inmediato de v_{k_0} en el camino PR, se presentan dos posibilidades: el vértice v_{i_0} precede al vértice v_{j_0} o el arco (v_{j_0}, v_{k_0}) es utilizado en el camino desde v_0 hacia v_{i_0}. Entonces la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{k_0}, v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer, segundo y tercer lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 7* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.8 *(Familia 8) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{k_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 j_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{k_0 j_0}$$

es una desigualdad válida para $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si v_{i_0} es el predecesor inmediato de v_{j_0} en el camino PR, entonces ningún arco llegando a v_{j_0} desde otro cliente puede pertenecer al camino. Si v_{k_0} es el predecesor inmediato de v_{j_0} en el camino, entonces el arco (v_{k_0}, v_{j_0}) es usado en el camino desde v_0 hacia v_{i_0} o v_{i_0} está antes que v_{j_0} en el camino. Esto demuestra la validez de la desigualdad.

Todo camino PR para el cual v_{i_0} y v_{j_0} son los vértices que ocupan el primer y segundo lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 8* es cara de $\mathcal{CR}$.

□

Proposición 4.9 *(Familia 9) Sean $i_0, j_0, k_0, l_0 \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{k_0}_{i_0 l_0} + f^{k_0}_{i_0 j_0} + f^{k_0}_{j_0 l_0} + f^{k_0}_{j_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0} + x_{j_0 k_0}$$

es una desigualdad válida para $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que es válida. Si el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) aparece en el camino desde v_0 a v_{j_0}, entonces ningún otro arco saliendo de v_{i_0} o entrando a v_{k_0} puede pertenecer al camino y v_{i_0} y v_{k_0} figuran antes que v_{j_0}. Si el arco (v_{k_0}, v_{i_0}) aparece en el camino desde v_0 a v_{j_0}, entonces v_{k_0} aparece antes que v_{i_0} y v_{j_0}.

Si (v_{i_0}, v_{l_0}) aparece en el camino desde v_0 a v_{k_0}, entonces ningún otro arco saliendo de v_{i_0} o entrando a v_{l_0} puede pertenecer al camino. Para la posición de v_{j_0} en el camino hay tres posibilidades:

- v_{j_0} aparece antes que v_{i_0}, y entonces v_{j_0} está previo a v_{k_0}
- v_{j_0} aparece entre v_{i_0} y v_{k_0}
- v_{j_0} está posterior a v_{k_0}

En cualquier camino PR, sólo hay un arco saliendo de v_{j_0}. Si (v_{i_0}, v_{j_0}) aparece en el camino de v_0 a v_{k_0}, entonces v_{i_0} aparece antes que v_{j_0} y v_{k_0} después que v_{j_0}.

Si (v_{j_0}, v_{l_0}) o (v_{j_0}, v_{k_0}) aparecen en el camino de v_0 a v_{k_0}, entonces v_{j_0} será anterior a v_{k_0}.

Todo camino PR para el cual v_{i_0}, v_{j_0} y v_{k_0} son los vértices que ocupan el primer, segundo y tercer lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *Familia 9* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

4.2.2. Desigualdades derivadas del LOP

Como las variables x de nuestro modelo definen ordenamientos lineales, todas las desigualdades válidas para el LOP serán válidas para $\mathcal{CR}$. En [31] fueron introducidas varias familias de facetas para el LOP, y en [30] fueron utilizadas en la implementación de un algoritmo de planos de corte. En este trabajo los autores reportan que las desigualdades válidas con mejor desempeño dentro de este algoritmo fueron las *3-diciclo* y las *k-fence*. Si bien trabajos más actuales han caracterizado nuevas facetas del LOP, éstas son generalizaciones de las familias presentadas en [31] y no resultan significativas en la implementación de una algoritmo de planos de corte.

Desigualdades 3-diciclo

Las desigualdades *3-diciclo*

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \quad i, j, k = 1, \ldots, n \quad i \neq j, k \quad j \neq k$$

forman parte de nuestra formulación. Sin embargo, no definen facetas de $\mathcal{CR}$, ya que $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 2$ implica $f^l_{ji} = f^l_{kj} = f^l_{ik} = 0$ para todo $l = 1, \ldots, n$.

Mediante un proceso de *lifting* logramos reforzar la desigualdad, incrementando la dimensión de la cara y obtenemos dos familias de facetas.

Proposición 4.10 *(3-diciclo-1) Sean $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tres índices distintos. La desigualdad*

$$x_{i_0 j_0} + x_{j_0 k_0} + x_{k_0 i_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{i_0}_{j_0 i_0} \leq 2$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que la desigualdad es válida para $\mathcal{CR}$.

Si el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) es utilizado en el camino desde el origen al vértice v_{j_0} entonces el vértice v_{k_0} se encuentra antes que el v_{j_0} y el v_{i_0} antes que el v_{k_0} y no es posible utilizar el arco (v_{j_0}, v_{i_0}) en el camino.

Por otro lado, si el arco (v_{j_0}, v_{i_0}) pertenece al camino PR, el arco (v_{i_0}, v_{k_0}) no puede ser utilizado en el camino hacia v_{j_0} y el vértice v_{k_0} se encuentra después que el v_{j_0} o antes que el v_{i_0}.

Todo camino PR para el cual v_{i_0}, v_{j_0} y v_{k_0} son los vértices que ocupan el primer, segundo y tercer lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *(3-diciclo-1)* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Proposición 4.11 *(3-diciclo-2) Sean $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tres índices distintos. La desigualdad*

$$x_{i_0 j_0} + x_{j_0 k_0} + x_{k_0 i_0} + f^{i_0}_{k_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{k_0}_{j_0 i_0} \leq 2$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Si el arco (v_{k_0}, v_{j_0}) es utilizado en el camino PR desde el origen al vértice v_{i_0} entonces el vértice v_{j_0} se encuentra antes que el v_{i_0} y el v_{k_0} antes que el v_{j_0} y no es posible utilizar los arcos (v_{i_0}, v_{k_0}) o (v_{j_0}, v_{i_0}) en el camino. Una situación similar se presenta para los otros

casos. Esto demuestra que la desigualdad es válida.

Todo camino PR para el cual v_{i_0}, v_{j_0} y v_{k_0} son los vértices que ocupan el primer, segundo y tercer lugar respectivamente satisface la desigualdad por igualdad. Es decir, *(3-diciclo-2)* es cara de $\mathcal{CR}$.

Para la demostración sobre la dimensión de la cara, ver detalles en el Apéndice. □

Desigualdades k-fence

Las desigualdades k-fence son definidas de la siguiente manera. Dados dos conjuntos de vértices de cardinalidad $k \geq 3$, $U = \{v_{u_1}, \ldots, v_{u_k}\}$ y $W = \{v_{w_1}, \ldots, v_{w_k}\}$, se define el conjunto de arcos $A = \cup_{i=1}^{k}(\{(v_{u_i}, v_{w_i})\} \cup \{(v_{w_i}, v) | v \in U \setminus \{v_{u_i}\}\})$. Entonces

$$\sum_{(v_i v_j) \in A} x_{ij} \leq k^2 - k + 1$$

es una desigualdad k-fence. A los arcos de la forma (v_{u_i}, v_{w_i}) los llamaremos *postes* y a los (v_{w_i}, v_{u_j}) *travesaños*.

Estas desigualdades no definen facetas para $\mathcal{CR}$. Si $\sum_{(v_i v_j) \in A} x_{ij} = k^2 - k + 1$, implica, por ejemplo, $f_{0u_i}^{u_i} = 0 \ \ \forall i = 1, \ldots, k$. Nuevamente, reforzando la desigualdad obtenemos una más fuerte que la original aun válida para $\mathcal{CR}$.

Proposición 4.12 *Sean $U \subset V \backslash \{v_0\}$ $U = \{v_{u_1}, \ldots, v_{u_k}\}$ y $W \subset V \backslash \{v_0\}$ $W = \{v_{w_1}, \ldots, v_{w_k}\}$, con $k \geq 3$. La desigualdad*

$$(k-2) \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} f_{0u_i}^{u_i} + \sum_{i=1}^{k} f_{w_i u_i}^{u_i} + \sum_{i=1}^{k} x_{u_i w_i} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{\mathrm{j}=1 \\ j \neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_i u_j} \leq k^2 - k + 1$$

es una desigualdad válida para $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Vamos a dividir la demostración en dos casos:

- *Caso 1:* $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} f_{0u_i}^{u_i} = 0$

  Si $\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} f_{w_i u_i}^{u_i} = 0$ obtenemos la clásica desigualdad k-fence del LOP y por lo tanto es válida para el PR.

  Si $f_{w_i u_i}^{u_i} = 1$ para algún i, entonces $x_{u_i w_i} = 0$. Si $x_{u_j w_j} = 1$, las posibilidades son:

- $0\ v_{u_j}\ \ldots\ v_{w_i}\ v_{u_i}\ \ldots\ v_{w_j}\ \ldots$ que implica $x_{w_iu_j} = 0$
- $0\ v_{u_j}\ \ldots\ v_{w_j}\ \ldots\ v_{w_i}\ v_{u_i}\ \ldots$ que implica $x_{w_iu_j} = 0$
- $0\ v_{w_i}\ v_{u_i}\ \ldots\ v_{u_j}\ \ldots\ v_{w_j}\ \ldots$ que implica $x_{w_ju_i} = 0$

Si l postes tienen valor 1, la suma de los travesaños disminuye en al menos $\binom{l}{2}$. Esto resulta de considerar que si $x_{u_iw_i} = x_{u_jw_j} = 1$, entonces $x_{w_iu_j} = 0$ y/o $x_{w_ju_i} = 0$

Resumiendo, si $\sum_{i=1}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} = r$ y $\sum_{i=1}^{k} x_{u_iw_i} = l$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} + \sum_{i=1}^{k} x_{u_iw_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{j=1}\\ j\neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_iu_j} \leq r + k^2 - k - \binom{l}{2} + l - rl =$$

$$k^2 - k - \frac{l(l-1)}{2} + l + r(1-l)$$

Si $l = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} x_{u_iw_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{j=1}\\ j\neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_iu_j} = k^2 - k + 1$$

Si $l > 1$, entonces $r(1-l) < 0$ y $l - \frac{l(l-1)}{2} \leq 1$, obteniendo que

$$\sum_{i=1}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} x_{u_iw_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{j=1}\\ j\neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_iu_j} \leq k^2 - k + 1$$

- *Caso 2:* $\sum_{i=1}^{k} f_{0u_i}^{u_i} = 1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $f_{0u_1}^{u_1} = 1$. La demostración la hacemos por inducción.

  Para $k = 3$ es fácil ver que la desigualdad es válida.

  Por ser v_{u_1} el primer cliente visitado, podemos afirmar que $x_{u_1w_1} = 1$, $x_{w_ju_1} = 0\ \ \forall j = 2, \ldots, k$ y $f_{w_1u_1}^{u_1} = 0$. Entonces,

$$(k-2)\sum_{i=1}^{k} f_{0u_i}^{u_i} + \sum_{i=1}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} + \sum_{i=1}^{k} x_{u_iw_i} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{j=1}\\ j\neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_iu_j} =$$

$$(k-2) + 1 + \sum_{i=2}^{k} f_{w_iu_i}^{u_i} + \sum_{i=2}^{k}\sum_{\substack{\mathrm{j=2}\\ j\neq i}}^{\mathrm{k}} x_{w_iu_j} + \sum_{i=2}^{k} x_{u_iw_i} + \sum_{j=2}^{k} x_{w_ju_1} + \sum_{j=2}^{k} x_{w_1u_j}$$

Usando la hipótesis inductiva para $k-1$,

$$\leq k-1+(k-1)^2-(k-1)+1+0+\sum_{j=2}^{k} x_{w_1 u_j}$$

$$\leq k-1+(k-1)^2-(k-1)+1+k-1 \leq k^2-k+1$$

Por lo tanto la desigualdad es válida.

$\square$

.

Capítulo 5

Algoritmo *Branch-and-Cut* para el Problema del Repartidor

En este capítulo describiremos las características principales de nuestro algoritmo *Branch-and-Cut*, al que denominaremos ***BC-R***.

Como mencionamos en el capítulo 2, la performance de un algoritmo *Branch-and-Cut* depende de muchos factores. Una buena relajación lineal y planos de corte con procedimientos de separación adecuados, ayuda al mejoramiento de las cotas inferiores. Esto es clave para podar ramas del árbol y disminuir el espacio de búsqueda y es aquí donde el estudio poliedral del problema es fundamental para considerar buenas desigualdes válidas. Por otro lado, las estrategias de recorrido del árbol, selección de nodos y algunos otros detalles de implementación aportan al conjunto del comportamiento del algoritmo. No hay una elección óptima de cada una de las alternativas del algoritmo válida para cualquier problema ni instancia. Las características propias del problema son las que ayudan a determinar una buena elección.

En este capítulo estudiaremos detenidamente estos factores.

5.1. Cota Superior Inicial

La experiencia demuestra que contar con cotas superiores iniciales de buena calidad es fundamental para reducir el tamaño del árbol de búsqueda en un algoritmo *Branch-and-Cut*. La eficiencia del proceso de *Bound* depende en gran medida de la bondad de las cotas. Sin embargo, en un contexto de un algoritmo *Branch-and-Cut*, es necesario lograr un equilibrio entre el tiempo requerido en obtener las cotas y la calidad de las mismas. Por este motivo elegimos procedimientos rápidos y sencillos que, de acuerdo a nuestra experimentación, brindan cotas de muy buena calidad.

La cota superior inicial se obtiene a partir de la aplicación de una heurística golosa se-

guida de búsqueda local. La heurística golosa es inicializada colocando el vértice depósito en la posición 0 del camino PR. Luego el camino es extendido agregando recursivamente el vértice aún no incorporado más cercano al último colocado en el camino bajo construcción. Este procedimiento es aplicado n veces, considerando en la k-ésima iteración del algoritmo el vértice v_k como el primer cliente visitado. Finalmente la solución generada es mejorada mediante un procedimiento de intercambio 3-opt [38].

La Table 5.1 muestra para diferentes tamaños de instancia, el promedio sobre 5 instancias del porcentaje de *gap* entre el valor óptimo y el valor dado por la heurística inicial.

	D	S	A
n	% gap	% gap	% gap
20	2,90	13,80	30,15
22	2,46	13,65	33,23
24	0,70	15,66	30,48
26	1,79	16,28	39,90
28	3,77	24,52	27,17
30	0,21	25,67	46,73
35	1,38	26,17	34,61
40	1,77	19,30	31,72
Promedio	1,87	19,38	34,25

Tabla 5.1: Heurística Inicial

Como puede observarse, en instancias euclideanas la heurística inicial brinda cotas superiores de muy buena calidad. En las instancias simétricas y más aún en las asimétricas, el *gap* es mayor. Esta situación resulta al menos curiosa ya que la heurística no tiene explícitamente en cuenta propiedades de los costos. De cualquier manera, por el bajo costo de tiempo de CPU (menos de una décima de segundo), la calidad de la cota resulta lo suficientemente buena para ser tenida en cuenta en nuestro algoritmo ***BC-R***.

5.2. Preprocesamiento

La etapa de preprocesamiento tiene dos objetivos, mejorar la cota inferior provista por las relajaciones lineales y reducir el tamaño del problema en el número de variables y/o restricciones. En muchos casos, esta etapa marca la diferencia entre poder resolver o no una instancia tanto desde el punto de vista del tiempo como de requerimiento de memoria.

Nuestro modelo de programación lineal entera tiene $n(n^2-n+1)$ variables y $\frac{n(n-1)(8n+5)}{6}+1$ restricciones. Con esta medida, la resolución de las relajaciones lineales puede consumir mu-

cho tiempo, incluso para instancias no demasiado grandes.

Utilizamos dos estrategias para mejorar la relación lineal:

- Para cada cliente v_i realizamos el siguiente procedimiento. Sea j tal que $c_{ik} \geq c_{ij} \;\; \forall k \neq i$ y consideremos $a_1, \ldots, a_{n-2}$ los $n-2$ arcos de menor costo que no inciden sobre v_i. Definimos $s = nc_{0i} + (n-1)c_{ij} + \sum_{k=1}^{n-2}(n-1-k)c_{a_k}$. Si s es mayor que una cota superior podemos afirmar que v_i no será el primer cliente visitado en el camino PR óptimo y por lo tanto la variable f_{0i}^i es nula.

  Este preprocesamiento resulta efectivo en grafos para los cuales los costos de los arcos son heterogéneos, situación que suele darse en instancias que corresponden a casos reales.

- Después de la aplicación de los procedimientos arriba descriptos, la cantidad de restricciones todavía es grande cuando se resuelven las relajaciones lineales. Analizamos varias alternativas para reducir aún más el tamaño de la formulación, pero no resultaron efectivas computacionalmente. Si bien el tiempo insumido en resolver las relajaciones era menor, la cota obtenida era signicativamente peor, y la cantidad de iteraciones con planos de corte necesarias para mejorarla era tan grande que no resultaba conveniente esta alternativa. Finalmente, consideramos la relajación lineal definida por las restricciones por igualdad, usando las desigualdades del modelo como planos de corte.

  Para mejorar la cota dada por la relajación lineal, ajustamos las desigualdades (3.34) agregando la variable f_{ji}^i, obteniendo la desigualdad

  $$f_{ji}^i + f_{ki}^i + x_{ij} - f_{ki}^j \leq 1 \qquad\qquad i, j, k = 1, \ldots, n \quad i \neq j \neq k$$

  Esta modificación resultó efectiva en el algoritmo.

5.3. Algoritmo de Planos de Corte

Para lograr un algoritmo de planos de corte eficiente es necesario desarrollar buenos algoritmos de separación y llevar a cabo una etapa previa de evaluación de las diferentes familias de desigualdades válidas .

Si bien el fin buscado es el incremento de las cotas inferiores, hay que buscar un balance entre varios aspectos. Si los cortes son muy densos se incrementa el requerimiento de memoria y la resolución de la relajación es más lenta. Si los algoritmos de separación consumen mucho tiempo en relación al beneficio obtenido no vale la pena incluirlos en el algoritmo.

A continuación mostramos el análisis sobre distintos aspectos que hicimos de las desigualdades válidas que fundamenta nuestro juicio sobre las mismas.

5.3.1. Algoritmos de Separación

La aplicación de un algoritmo de planos de corte tiene una etapa decisiva, la etapa de *separación*. Debemos ser capaces de encontrar desigualdades violadas, es decir, identificar una desigualdad que *corte* la solución fraccionaria actual, o probar que tal desigualdad no existe.

Para lograr una buena performance global los procedimientos de separación deben ser rápidos. En algunos casos este objetivo puede cumplirse con algoritmos exactos, pero en otros es necesario implementar heurísticas. Estas últimas no aseguran que siempre se pueda detectar desigualdades violadas, pero es una solución de compromiso ante el alto costo computacional de algunos problemas de separación.

En nuestra implementación desarrollamos procedimientos de separación para las desigualdades válidas obtenidas a partir del estudio poliedral de $\mathcal{CR}$ que presentamos en la sección 4.2.1.

Las familias de desigualdades válidas que utilizamos conforman dos grupos. El primer grupo de desigualdades son las que derivamos especificamente para el poliedro de nuestro modelo. Todas ellas pertenecen a familias de cardinal polinomial de a lo sumo orden cúbico, motivo por el cual implementamos algoritmos de separación de búsqueda exhaustiva.

La segunda familia de desigualdades válidas está conformada por las desigualdades derivadas por Grötschel et al. en [31] para el problema de ordenamiento lineal, reforzadas para nuestro modelo.

Las restricciones (3.31) que omitimos en la relajación inicial del modelo están dominadas por las desigualdades *3-diclico-1*, entonces basta incluir sólo estas últimas como cortes. La búsqueda de cortes violados es exhaustiva. En experimentos preliminares, las desigualdades *3-diciclo-2* mostraron un comportamiento muy pobre, por tal motivo no son incluidas en el análisis.

Para la separación de las desigualdades *3-fence* usamos una heurística.

La estructura particular de las soluciones fraccionarias de la relajación lineal que violan esta desigualdad es:

- valor cercano a 0.5 en las variables $f^{u_i}_{w_i u_i}$
- valor cercano a 0.5 en $x_{u_i w_i}$
- valor cercano a 1 en $x_{w_i u_j}$ para $i \neq j$

Basados en esta estructura, el algoritmo de separación elige como candidatos para formar un par u_s, w_s a los clientes i, j si en la solución actual f_{ij}^j y x_{ij} se encuentra entre 0.4 y 0.6. Por cada terna de candidatos se construye una 3-fence.

5.3.2. Evaluación de las Familias de Desigualdades Válidas

Mediante la experimentación computacional tratamos de obtener conclusiones sobre el comportamiento de cada una de las familias considerando diferentes criterios y alternativas.

En los experimentos computacionales que hicimos hemos considerado las desigualdades del modelo original como planos de corte. El algoritmo termina cuando no es posible encontrar desigualdades violadas o cuando alcanza un máximo de 100 iteraciones. Una desigualdad es incorporada como un plano de corte cuando la violación es mayor a 0.02. Las instancias de prueba son las descriptas en el capítulo 3, diferenciando su origen sólo en aquellos casos en que los resultados y conclusiones dependan del mismo.

Tiempo de Separación

Si los algoritmos de separación insumen mucho tiempo en relación al beneficio obtenido en el incremento de la cota inferior, no vale la pena incluirlos en el algoritmo. Este no es un factor que influye en nuestra implementación. Ejecutando un máximo de 100 iteraciones en instancias con 20 a 50 clientes, el total de tiempo invertido en estos procedimientos fue despreciable, no superando en ningun caso el 0,1 % del tiempo total.

Cantidad de Cortes por Familia

El total de cortes violados encontrados por cada algoritmo de separacion es una medida a tener en cuenta. Si la cantidad de cortes violados es pequeña puede ser porque el algoritmo de separacion no sea eficiente o porque la familia no sea violada por las soluciones fraccionarias. En el primer caso, deberia implementarse un algoritmo mejor. En el segundo caso, salvo que la adición de un número pequeño de desigualdades incremente significativamente la funcion objetivo, indicaria que la familia no aporta a la performance del algoritmo. Cabe señalar que un número grande de desigualdades válidas violadas no garantiza que su inclusión favorezca el incremento de la funcion objetivo, además de agrandar el tamaño de las relajaciones y por lo tanto requerir más tiempo de CPU.

Para evaluar esta situación ejecutamos 20 iteraciones del algoritmo de planos de corte por cada familia, con una máximo de 600 cortes por iteracion. En las Tablas 5.2, 5.3 y 5.4 mostramos los resultados promedios cada 5 iteraciones del algoritmo de planos de corte en instancias de diferentes tamaños.

Podemos observar que salvo las desigualdades *k-fence*, la separación del resto de las familias encuentra un número aceptable de desigualdades en las primeras iteraciones, dismi-

nuyendo a medida que el algoritmo progresa. Los datos sobre la violación de las mismas nos indica que la *profundidad* de los cortes es significativa.

Las *Familias 2, 5 y 9* son las que aportan la mayor cantidad de cortes violados, no sólo en las iteraciones iniciales sino también en el transcurso de las etapas medias y finales.

Las *Familias 1, 4 y 6* aportan pocos cortes en relación al resto, aún en las primeras iteraciones y continúan con este comportamiento en el transcurso de las interaciones.

Las *Familias 3, 7 y 8* aparecen en las primeras iteraciones y en algunos casos, finalizando el algoritmo no aportan ninún corte.

Las desigualdades *3-diciclo* son abundantes al comienzo y casi desaparecen al promediar las iteraciones.

La falta de desigualdades *k-fence* violadas podría deberse a que la heurística utilizada no es capaz de encontrarlas o que efectivamente sean pocas. En instancias de pocos clientes, utilizando búsqueda exhaustiva detectamos que las desigualdades *k-fence* violadas efectivamente son muy pocas. Es decir, la heurística es eficiente pero las desigualdades *k-fence* no están frecuentemente violadas.

Evolución de la Cota Inferior

Para la evaluación final de la eficiencia de las distintas familias de desigualdades válidas utilizamos como criterio la evolución de la cota inferior de la relajación lineal cuando es ajustada por la adición de éstas. A mayor incremento, mejor la calidad de la desigualdad válida. Como ya mencionamos antes, hay que buscar un balance entre diferentes aspectos. No siempre vale la pena insumir mucho tiempo con el fin de obtener calidad de cota.

El análisis lo hemos hecho por familia y por combinación de familias.

- **Análisis por Familia**

  Como disponemos de 11 familias de cortes, cabe preguntarse si existe alguna de ellas que tenga una mejor performance comparada con las otras. De todos los factores que estudiamos, este fue el de mayor dificultad y que nos llevó el mayor tiempo de experimentación para obtener una respuesta. Experimentamos con muchas instancias de diferente cantidad de clientes, buscando alguna característica que nos indicara la ventaja de un corte sobre otro.

  En las Tablas 5.5 y 5.6 reportamos nuestra experiencia con cada familia de cortes sobre instancias entre 20 y 40 clientes. Para cada tamaño consideramos el promedio sobre

5 instancias. Indicamos el porcentaje de *gap* entre el valor óptimo y la cota inferior alcanzada utilizando esa familia como cortes, el tiempo total y número de iteración en la que es obtenida. En la primera fila (Relaj) de cada tipo de instancia mostramos el valor del *gap* inicial.

El comportamiento de las distintas familias no parece estar influenciado por el tamaño de la instancia. En instancias euclideanas, la reduccion mínima de *gap* es del orden del 30 % y la máxima del 80 %. En las instancias simétricas, el *gap* se reduce en al menos 40 % y con un máximo de 90 %. En instancias asimétricas es donde mayor reducción de *gap* se obtiene, lográndose una reducción de al menos 60 % y un máximo de casi el 90 %. Es decir, todas las familias en mayor o menor medida influyen en el mejoramiento de la cota inferior.

En todos los casos las mejores cotas fueron obtenidas cuando se utiliza la *Familia 3*, obteniendo en promedio un *gap* de $2,98\,\%$ en 170 segundos (alrededor de un 90 % de reducción del gap inicial). La *Familia 4* también presentó una alta eficiencia, logró un *gap* de $4,07\,\%$ en 96 segundos (un 80 % de reducción). Las *Familias 1* y *9* tienen un comportamiento muy aceptable, con *gap* chicos (reducción del 70 %) pero insumiendo más tiempo, en particular en el caso de la *Familias 9*. Las *3-diciclo* si bien se aplican en pocas iteraciones, reducen el *gap* en poco tiempo, especialmente en instancias asimétricas. Las *Familias 6, 7, 8, kfence* realizan pocas iteraciones de planos de corte y, aunque en algunos casos el tiempo es bajo, la cota inferior lograda es de inferior calidad (alrededor del 40 %) Las *Familias 2* y *5* realizan gran cantidad de iteraciones insumiendo un tiempo importante reduciendo el *gap* entre un 30 % y un 40 %.

- **Análisis de Combinaciones de Familias**

  En un primer paso, nos interesa comparar la eficiencia de las desigualdades válidas derivadas especificamente para nuestro problema con respecto a las provenientes del LOP. Con este objetivo, para los resultados presentados en la Tabla 5.7, hemos dividido a las desigualdades válidas en tres grandes grupos. El primer conjunto, llamado Set 0, contiene sólo las desigualdades no consideradas del modelo original. El segundo conjunto, denominado Set 1, contiene las desigualdades derivadas especificamente para nuestra formulación. El tercer grupo, llamado Set 2, contiene las desigualdades originales del problema de ordenamiento lineal propuestas por Grotschel et al. [31] reforzadas para nuestro modelo.

  Experimentamos cuatro opciones. La primera usa como planos de corte, sólo desigualdades del Set 0. En el segundo experimento nos restringimos a las desigualdades en Set 0 y Set 1. Para el tercero, utilizamos las desigualdades de Set 0 y Set 2, mientras que el cuarto involucra las desigualdades de todos los conjuntos.

Los resultados de la tabla 5.7 muestran que el algoritmo obtiene una mejora significativa de la cota inferior inicial mediante el uso de las desigualdades válidas caracterizadas en este estudio. Esto es particularmente cierto para las desigualdades derivadas para el modelo (Set 1). Sin embargo, para algunas de las instancias testeadas, usando las desigualdades de Set 2 logramos mejorar un poco la cota y reduciendo en algunos casos el tiempo de CPU. Como conclusión, consideramos que la estrategia de considerar la combinación de los tres conjuntos es las más apropiada.

El último análisis nos llevó a experimentar con el orden en el cual se buscan y agregan desigualdades de las distintas familias. Después de varios experimentos, finalmente consideramos 6 combinaciones que involucran a todas las familias y que definen el orden en el cual se buscan cortes entre las diferentes familias.

- *C1*: Flia 3, Flia 4, Flia 1, Flia 6, Flia 7, Flia 2-5, Flia 9 y k-fence
- *C2*: Flia 3, Flia 4, Flia 1, Flia 8, Flia 7, Flia 6, Flia 9, Flia 2-5, k-fence
- *C3*: Flia 3, Flia 4, Flia 1, Flia 7, Flia 8
- *C4*: Flia 3, Flia 4, Flia 1, Flia 9, Flia 2-5, Flia 6, Flia 8, k-fence
- *C5*: k-fence (en las primeras 5 iteraciones), Flia 3, Flia 4, Flia 1, Flia 8, Flia 7, Flia 6, Flia 9, Flia 2-5
- *C6*: Flia 3, Flia 4, Flia 9, Flia 1, Flia 8, Flia 7, Flia 6, Flia 2-5, k-fence

En cada iteración del algoritmo de planos de corte permitimos incorporar un máximo de 200 desigualdades para cada familia y 600 desigualdades en total. Los resultados del algoritmo de planos de corte utilizando cada una de estas combinaciones son mostrados en las Tablas 5.8, 5.9 y 5.10.

No hay una diferencia demasiado marcada en el porcentaje de *gap* entre los diferentes criterios. En cambio, se presentan diferencias en los tiempos de ejecución, siendo la combinación 2 la que obtiene la mejor relación *gap* vs tiempo insumido. En las instancias D, la combinación 6, si bien logra una disminución del *gap* levemente superior, el tiempo de CPU es casi duplicado.

Son varios los criterios que utilizamos para evaluar las desigualdades válidas: evolución de la cota inferior, tiempos de los algoritmos de separación y violación de los cortes. Todos ellos están relacionados y nos inducen a conclusiones que no entran en conflicto. Debido al pequeño *gap* entre el valor óptimo y la cota inferior obtenida por el procedimiento de planos de corte, estos experimentos confirman que nuestro modelo es una formulación fuerte a partir de la cual se pueden generar buenas cotas inferiores mediante la incorporación de las desigualdades válidas caracterizadas.

5.4. Algoritmo Branch-and-Bound

En esta sección describiremos las principales características de los factores que definen el esquema *Branch-and-Bound* de nuestro algoritmo. Esencialmente están enfocados en las estrategias de generación y manejo del árbol de búsqueda. En general, no hay una elección óptima de cada una de las alternativas del algoritmo válida para cualquier instancia. Las características propias del problema son las que ayudan a determinar una buena elección.

5.4.1. Heurística Primal

Cuando la solución de la relajación lineal es buena, explotar esta información puede generar soluciones factibles de muy buena calidad. Mediante procedimientos heurísticos se construyen soluciones enteras basadas en el óptimo fraccionario de la relajación. Estos procedimientos cuentan con más información del problema que al comienzo del algoritmo y esto hace suponer que serán capaces de encontrar mejores soluciones.

Las heurísticas que hacen uso de la solución fraccionaria para crear una solución factible son conocidas como heurísticas primales. El ejemplo más simple de una heurística primal es redondear las variables fraccionarias a valores enteros factibles. En nuestro caso, dado que las relajaciones brindan soluciones con valores cercanos al óptimo entero, es de esperar que una heurística basada en esto brinde muy buenos resultados y así poder obtener excelentes cotas superiores. Sin embargo, es necesario encontrar un balance correcto entre la efectividad del procedimiento y el tiempo de cómputo requerido.

En nuestro algoritmo, experimentamos con cuatro criterios para construir una solución entera a partir de la solución de las relajaciones. En todos los casos, a la solución encontrada se le aplica un procedimiento de intercambio 3-opt.

- *Criterio 1:* Siguiendo la idea de la heurística inicial, se realizan n iteraciones, tomando como primer cliente en la iteración k el cliente v_k. Recursivamente, elegimos como siguiente cliente v_j, entre los que aún no pertenecen al camino, al que maximiza f_{ij}^j, donde v_i representa al último cliente incorporado al camino.
- *Criterio 2:* Se aplica *Criterio 1* resolviendo los desempates con la elección del arco de menor costo.
- *Criterio 3:* Es similar al *Criterio 1*, pero elige como próximo cliente v_j a incorporar al camino al que maximiza $\sum_{l \neq i} f_{ij}^l$, donde v_i representa al último cliente incorporado al camino.
- *Criterio 4:* Forma el camino PR eligiendo como próximo arco a incorporar al camino al que maximiza f_{ij}^j entre los clientes v_i que aún no tienen sucesor y los clientes v_j que aún no tienen antecesor.

El *Criterio 4* no resultó ser efectivo. El tiempo consumido por el procedimiento es elevado en comparación a su efectividad en encontrar buenas soluciones. Los otros 3 criterios son muy rápidos y se complementan. La utilización combinada de ellos mostró los mejores resultados, obteniendo soluciones de alta calidad en las primeras iteraciones del algoritmo. Cabe señalar que las soluciones óptimas de las instancias testeadas fueron obtenidas, en todos los casos, por la aplicación de la heurística primal.

5.4.2. Selección de Variable de *Branching* y Fijado de Variables por Implicaciones Lógicas

La generación del árbol de búsqueda está definida por el proceso de *Branching*. En este etapa, el espacio de soluciones factibles asociado a un nodo se divide en dos o más conjuntos que representan los nuevos nodos (hijos) del árbol.

Las dos primeras alternativas de *Branching* implementadas utilizan el criterio clásico de dicotomía en una variable para generar los nodos del árbol. Se generan dos subproblemas por nodo, asociando a cada uno el conjunto de soluciones factibles donde la variable de *Branching* es fijada en 0 ó 1 respectivamente. Las otras alternativas están basadas en las propiedades del problema.

Los criterios analizados para la elección de la variable de *branching* son los siguientes:

- *B1:* La variable x_{ij} con parte fraccionaria más cercana a 1/2.
- *B2:* La variable x_{ij} con parte fraccionaria más cercana a 0 ó 1.
- *B3:* Elegimos el cliente v_i con $r_i = \sum_{j \neq i} x_{ji}$ fraccionaria más cercana a $\lceil n/2 \rceil - 1$. Generamos dos nuevos subproblemas, agregando la restricción $\sum_{j \neq i} x_{ji} \leq \lfloor r \rfloor$ en uno de ellos y $\sum_{j \neq i} x_{ji} \geq \lceil r \rceil$ en el otro. En el primero, estamos obligando que el cliente v_i sea uno de los primeros $\lfloor r \rfloor + 1$ clientes del camino PR, mientras que en el segundo lo contrario.
- *B4:* La variable f_{ij}^j fraccionaria más cercana a 1.
- *B5:* Cada nodo del árbol de búsqueda tiene asociado un camino parcial de clientes $0, v_1, \ldots, v_k$. Como variable de *Branching* elegimos la f_{kj}^j fraccionaria con menor c_{kj}. Se crean dos nuevos subproblemas, en uno de ellos fijamos esta variable en 1 y en el otro en 0. Esto indica que en uno de los hijos se fija al cliente v_j como próximo en el camino y en el otro se prohibe esta situación.
- *B6:* Entre las variables f_{ij}^j fraccionaria con valor mayor a $0,85$ seleccionamos la de menor c_{ij}.

- *B7:* Los pseudo-costos brindan una manera de estimar la degradación del valor de la función objectivo cuando se fuerza que una variable con valor fraccionario tome un valor entero. La técnica fue introducida en 1970 en [10]. Para una variable candidata x_k, los pseudo-costos son calculados como:

$$U_k = \frac{\bar{z}_k - z_k^u}{1 - f_k} \qquad \text{y} \qquad D_k = \frac{\bar{z}_k - z_k^d}{f_k}$$

  donde $\bar{z}_k$ es el valor de la función objetivo del padre, z_k^u es el valor de la función objetivo obtenida al forzar que x_k tome el valor del entero superior, y z_k^d el valor de la función objetivo cuando x_k toma el valor del entero inferior. Se calcula la degradación de una variable como $D_k f_k + U_k(1 - f_k)$ y se selecciona como variable de *branching* la variable candidata con degradación máxima. Utilizamos una versión de pseudo costos menos intensiva computacionalmente provista por CPLEX.

En muchos problemas combinatorios, una decisión tomada en cierta variable del problema trae como consecuencia una serie de decisiones implícitas. En el caso del *problema de repartidor*, por ejemplo, si se decide que el cliente v_i será visitado después que el cliente v_j entonces el arco (v_j, v_i) no podrá pertenecer a la solución. Este tipo de situaciones se presenta cada vez que se elige una variable de *Branching*.

Para cada una de las reglas de *branching* utilizadas, mostraremos las variables que pueden ser fijadas mediante implicaciones lógicas. Nuestro algoritmo tiene implementadas estas simples consideraciones pues reducen el tamaño del problema y las relajaciones lineales resultan más rápidas de resolver.

- Cuando fijamos $x_{ij} = 1$ podemos deducir que:

  1. El cliente v_j no es el primer cliente del camino ($f_{0j}^j = 0$)
  2. El arco (j, i) no pertenece al camino ($f_{ji}^k = 0 \; \forall k \neq j$)
  3. Ningun arco incidente al cliente v_j es usado en el camino hacia el cliente v_i ($f_{jk}^i = 0 \; \forall k \neq j$ y $f_{kj}^i = 0 \; \forall k \neq i, j$)
  4. Todo cliente v_k visitado antes que v_i, también será visitado antes que v_j ($x_{ki} = 1 \rightarrow x_{kj} = 1$ y $f_{jh}^k = 0 \; \forall h \neq j$, $f_{hj}^k = 0 \; \forall k \neq j, k$, $f_{jk}^h = 0 \; \forall h \neq j$ y $f_{kj}^h = 0 \; \forall h \neq k$).
  5. Todo cliente v_k visitado después que v_j, también será visitado después que v_i. ($x_{jk} = 1 \rightarrow x_{ik} = 1$, $f_{kh}^i = 0 \; \forall h \neq k$, $f_{ki}^h = 0 \; \forall h \neq k$, $f_{hk}^i = 0 \; \forall h \neq i, k$ y $f_{ik}^h = 0$).

- Imponer $x_{ij} = 0$ es similar a fijar $x_{ji} = 1$, y es posible hacer las mismas deducciones que en el caso anterior intercambiando los roles de los clientes v_i y v_j.

- Fijar $f_{ij}^j = 1$ implica que el arco (i, j) es utilizado en el camino.

  Si $i \neq 0$, podemos deducir que $x_{ij} = 1$ y, a partir de esto, también fijar todas las variables que mostramos en el caso anterior. Adicionalmente, podemos imponer:

1. $f^l_{ik} = 0 \; \forall k \neq i, j \; \forall l \neq i$
2. $f^l_{kj} = 0 \; \forall k \neq i, j \; \forall l \neq i$
3. Si ya se encuentra fijado $x_{jk} = 1$ para algún k, podemos imponer $f^k_{ij} = 1$
4. Si $f^i_{ki} = 1$ fue impuesto, nos permite fijar $f^j_{ki} = 1$

Si $i = 0$ podemos deducir:

1. $x_{jk} = 1 \; \forall k \neq j$
2. $f^k_{lj} = 0 \; \forall l, k \neq j$
3. $f^j_{lk} = 0 \; \forall l, k \neq j$

- Fijar $f^j_{ij} = 0$ implica que $f^k_{ij} = 0$ para todo cliente k.

En la Tabla 5.11 mostramos el tiempo requerido por el algoritmo y la cantidad de nodos recorridos para cada una de los criterios de *branching* enunciados. Para cada tamaño consideramos 5 instancias tomando el promedio sólo sobre las que no se resolvieron en el nodo raíz. Los valores en letra itálica significan que alguna de las instancias de ese tamanño no fue resuelta dentro de las 8hs, mientras que los **** indican que ninguna instancia se resolvió en ese límite de tiempo. Para poder realizar una comparación entre todas las estrategias, en el promedio total no consideramos las instancias de 40 clientes. Todas las instancias S de 22 clientes y A de 22 y 26 clientes testeadas finalizaron en el nodo raíz.

El tamaño de las instancias que pueden resolverse en tiempos razonables mediante un *Branch-and-Bound* está limitado por poco más de 25 clientes. Por este motivo, para poder realizar una buena comparación de las estrategias de *branching* en instancias de mayor tamaño, las pruebas computacionales fueron hechas aplicando 30 iteraciones de planos de corte en el nodo raíz y 5 en cada nodo del árbol. Esta decisión resulta razonable ya que el objetivo final de las estrategias de branching es usarlas en un algoritmo *Branch-and-Cut* y además, en grafos de tamaño pequeño, observamos que el comportamiento de las estrategias es similar se aplique cortes o no.

En las *estrategias 4 y 6*, si f_{ij} es la variable de *Branching*, en el nodo hijo que resulta de fijar f^j_{ij} en 0 se incorpora una información poco relevante para el camino PR. Estamos diciendo que el cliente v_j no será el cliente visitado inmediatamente despues que el cliente v_i, dejando libertad para la elección de cualquier otro cliente. En cambio, el nodo hijo correspondiente a $f^j_{ij} = 1$ restringe mucho más la región. Esto marca un desequilibrio en el árbol al que le atribuimos la mala performance del algoritmo en algunas instancias.

Las *estrategias 1, 2 y 7*, al elegir una variable x como variable de *Branching*, evitan la situación anterior. Antes de la experimentación, teníamos confianza en que la *estrategia 3* tuviera un buen desempeño, basados en el hecho de que el árbol resultante es balanceado,

pero no resultó así .

Las *estrategia 7* y *estrategia 5* son las de mejor performance, con una ventaja para la primera. Tener en cuenta los costos para tomar decisión sobre la variable de *branching* es una muy buena estrategia que suele funcionar también en otro tipo de problemas. Por otro lado, ir construyendo el camino a medida que se genera el árbol también parece ser una buena estrategia, aunque en desventaja con los pseudo-costos.

5.4.3. Estrategias de Recorrido del Árbol

Después de la etapa de *Branching* se debe seleccionar un nodo de la lista de nodos aún no explorados (*abiertos*). Esto determina la forma en que es recorrido el árbol. Como ya mencionamos, las estrategias básicas son dos: **DFS** (profundidad, elige el último nodo creado), **BestF** (elige el nodo con mejor función objetivo para la relajación lineal asociada).

En experimentos preliminares combinando distintas estrategias de selección de variable y recorrido del árbol no obtuvimos una diferencia notable al utilizar DFS o BestF. Los resultados obtenidos fueron muy similares, con una leve ganacia con DFS. Por este motivo, decidimos recorrer el árbol de enumeración en profundidad y no presentar todas las combinaciones posibles provocando una comparación muy tediosa y poco significativa.

Las estrategias resultan neutralizadas aún mas en el marco del *Branch-and-Cut* donde, como podrá verse posteriormente, la cantidad de nodos generados es muy poca.

5.5. Algoritmo Branch-and-Cut

Habiendo analizado estrategias de recorrido y generación del árbol y la performance de las diferentes familias de desigualdades válidas, quedan dos puntos importantes a definir: cuando aplicar cortes y por cuantas iteraciones. Responder a estos interrogantes es el objetivo de esta sección.

Después de resolver la relajación lineal de un nodo del árbol, se debe decidir si se generan cortes o se procede a realizar el *branching*. Es de esperar que los planos de corte ayuden a mejorar las cotas y esto permita podar ramas del árbol. Sin embargo, el proceso de búsqueda de desigualdades violadas y la posterior resolución de la relajación tienen un costo. Las decisiones de cúando y por cúantas iteraciones aplicar un algoritmo de planos de corte antes de realizar un *branching* es un factor crucial en la performance del algoritmo. Los planos de corte son muy efectivos desde el punto de vista del incremento de la cota inferior. Sin embargo, dentro de un esquema *Branch-and-Cut*, debe lograrse un equilibrio entre estas dos posibilidades. Para manejar esta decisión utilizamos dos parámetros:

- ***IPC:*** limita la cantidad de iteraciones que se realizan del algoritmo de planos de corte en cada nodo del árbol.

- ***Skip Factor:*** este valor indica la frecuencia con la que se aplica planos de corte en los nodos del árbol. Puede relacionarse la decisión con el nivel del árbol o con los nodos.

Los valores de estos parámetros no son fáciles de determinar. A continuación analizamos posibles alternativas.

Iteraciones del Algoritmo de Planos de Corte: IPC

Las experiencias presentadas en la sección 5.3 sobre el mejoramiento de la cota inferior en la relajación inicial cuando son adicionadas desigualdades válidas, nos inducen a considerar que en ***BC-R*** vale la pena invertir esfuerzo en el nodo raíz realizando más de una iteración del algoritmo de planos de corte. En relación al tamaño de las instancias que consideramos en nuestra experimentación, y teniendo en cuenta los valores de tiempo y las iteraciones en las que se producen los incrementos, 30 iteraciones en el nodo raíz resulta un valor que logra cierto equilibrio entre el beneficio y el tiempo.

Una segunda etapa de nuestro análisis se enfocó en la determinación del número de iteraciones en el resto de los nodos del árbol. Esto es manejado a través del parámetro **IPC**. En general, obtenido un incremento significativo en el nodo raíz, los cambios en el valor de la cota inferior no son tan marcados en el resto de los nodos. Por lo tanto, no se justifica realizar muchas iteraciones del algoritmo de planos de corte salvo para el nodo raíz.

Experimentamos con ***BC-R*** con diferentes valores de **IPC**. En la Tabla 5.12 presentamos nuestros resultados con 30 iteraciones en el nodo raíz y 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6 iteraciones en el resto de los nodos del árbol. Los resultados están dados sobre el promedio de 5 instancias de distinto tamaño. Los valores en letra itálica significan que alguna de las instancias de ese tamaño no fue resuelta dentro del límite de 8hs de tiempo de CPU.

La tabla refleja claramente que a medida que aplicamos más iteraciones del algoritmo de planos de corte, mayor es la reducción en la cantidad de nodos explorados del árbol. Sin embargo, el tiempo de resolver las relajaciones no siempre se ve compensado por la disminución del tamaño del árbol. Para instancias de hasta 26 clientes, la formulación obtenida al finalizar el nodo raíz es lo suficientemente fuerte como para permitir que luego un *Branch-and-Bound* (IPC=0) sea la estrategia óptima para utilizar en el algoritmo. Sin embargo, al aumentar el tamaño de las instancias se evidencia la necesidad de incorporar planos de corte en los nodos del árbol. Con 4 iteraciones del algoritmo de planos de corte se obtiene el equilibrio buscado: reducción de nodos y tiempo. Esta es la opción que mejor performance tiene.

Skip Factor

En una segunda etapa analizamos con que frecuencia aplicar planos de corte. Uno de los criterios más usuales es relacionar esta decisión con los nodos del árbol. Por ejemplo, un *skip factor* de 0 significa que serán aplicados planos de corte en todos los nodos explorados, mientras que un *skip factor* de 2 hace que dos nodos sean ignorados entre cada par de nodos donde se aplicó cortes.

Para poder analizar el comportamiento de nuestro algoritmo frente a diferentes valores del *skip factor* experimentamos con instancias de entre 20 y 40 clientes. En la Tabla 5.13 mostramos el tiempo y cantidad de nodos para valores de *skip factor* de 0, 1, 2 y 3 respectivamente. Los resultados son los promedios sobre 5 instancias de cada una de los tamaños.

En las instancias de mayor tamaño se evidencia un claro dominio del valor 0 para el *skip factor*, ya sea desde el punto de vista del tiempo como del tamaño del árbol de búsqueda. En las instancias de menor tamaño, los planos de corte agregados en el nodo raíz ajustan lo suficiente la relajación como para no necesitar la adición de gran cantidad de nuevos cortes para resolver el problema. Este comportamiento es similar al mostrado cuando analizamos el **IPC**. Esta conclusión refuerza nuestra valoración sobre los planos de corte. La influencia sobre las relajaciones justifica usarlos en todos los nodos.

5.6. *Branch-and-Bound* vs *BC-R*

Si bien de alguna manera se desprende del análisis que hicimos sobre el *skip factor*, nos parece interesante remarcar el beneficio logrado al incluir planos de corte. Para eso comparamos nuestro algoritmo ***BC-R*** con *skip factor* igual a 0 con un algoritmo *Branch-and-Bound*. La comparación está hecha sobre la misma implementación, con igual estrategia de *branching*, recorrido del árbol y heurística primal, simplemente no llamamos a las rutinas de separación (las desigualdades del modelo son utilizados en ambos casos como planos de corte). En la Tabla 5.14 queda evidenciada la mejor performance del algoritmo que incluye los planos de corte. Estos resultados son los promedios sobre 5 instancias para cada tamaño.

La reducción obtenida por ***BC-R*** en los tiempos de ejecución es notable. Se logran resolver instancias que sin los planos de corte superan el límite de 8 hs. Cabe señalar que para poder obtener resultados con *Branch-and-Bound* dentro de las 8hs tuvimos que reducir el tamaño de las instancias de experimentación a 26 clientes. Para instancias con mayor cantidad de clientes, la inclusión de planos de corte resulta esencial para resolver el problema.

Estos resultados no hace más que confirmar que la inclusión de los planos de corte reduce drásticamente la cantidad de nodos explorados, llegando incluso a resolver instancias en el nodo raíz.

20								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	90,40	0,54	57,60	0,10	20,80	0,06	7,8	0,04
F2	519,80	0,49	140,80	0,06	12,2	0,02		
F3	171,60	1,51	31,60	1,07	1,2	0,21		
F4	94,60	0,45	6,60	0,07	1,4	0,01		
F5	478,40	0,45	103,20	0,05	5	0,02		
F6	39,40	0,48	37,00	0,10	14,2	0,04		
F7	178,60	0,56	73,80	0,10	29,2	0,07		
F8	138,80	0,62	136,80	0,23	4,8	0,02		
F9	588,60	0,54	112,00	0,06	11	0,04		
k-fence	2,2	0,36	3,20	0,28	1,2	0,15		
3-diciclo	139,00	0,43	17,40	0,02	1	0,02		
26								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	148,4	0,47	68,2	0,09	35,8	0,06	16	0,04
F2	600	0,44	469	0,11	68,2	0,05	19,8	0,03
F3	303,6	1,38	62,8	1,07	16,2	0,63		
F4	179	0,43	21,6	0,07	0,6	0,01		
F5	600	0,51	349,6	0,08	95,4	0,05	0,6	0,01
F6	49,6	0,61	19	0,14	24,6	0,07	18,2	0,01
F7	261,2	0,47	97,4	0,07	78,8	0,10	13	0,03
F8	271	0,49	224,8	0,16	8,6	0,01		
F9	600	0,56	600	0,24	166	0,07	24,2	0,04
k-fence	7,8	0,51	2,6	0,21	0,2	0,12		
3-diciclo	341,6	0,39	10,6	0,03				

Tabla 5.2: Cantidad de Cortes I

28								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	167,40	0,49	84,60	0,08	45,20	0,04	20,40	0,04
F2	600,00	0,63	567,40	0,09	108,40	0,04	13,00	0,02
F3	512,60	1,42	81,80	1,05	3,80	0,21		
F4	219,60	0,45	37,20	0,10	9,40	0,04		
F5	600,00	0,68	434,40	0,07	63,20	0,04	4,60	0,02
F6	57,20	0,29	31,20	0,13	36,20	0,06	10,40	0,03
F7	436,80	0,51	178,00	0,16	71,80	0,07	6,40	0,03
F8	309,40	0,59	259,60	0,28	8,00	0,03		
F9	600,00	0,57	600,00	0,33	493,40	0,22	131,80	0,04
k-fence	18,60	0,51	8,60	0,32	3,00	0,18	1,40	0,22
3-diciclo	427,80	0,46	19,20	0,03	0,40	0,01		
30								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	198,8	0,54	127	0,09	69,8	0,05	32,8	0,04
F2	600	0,55	600	0,10	285,2	0,06	103,8	0,05
F3	535,4	1,52	116,4	1,08	12	0,62		
F4	274,6	0,50	39,2	0,09	11,8	0,04		
F5	600	0,44	530,4	0,09	111,4	0,03	52,4	0,04
F6	72,6	0,46	62	0,14	16,4	0,13	96,8	0,02
F7	466,6	0,60	324	0,12	64	0,08	59,8	0,06
F8	343	0,64	478,8	0,23	77,4	0,05	1,4	0,02
F9	600	0,62	600	0,33	600	0,29	600	0,21
k-fence	6	0,57	27,8	0,32	5,8	0,25	2,80	0,17
3-diciclo	441,4	0,45	46,4	0,05	8,4	0,01		

Tabla 5.3: Cantidad de Cortes II

35								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	223,2	0,52	122,2	0,08	71,4	0,05	42,8	0,04
F2	600	0,55	600	0,11	523	0,07	247,6	0,03
F3	585	1,47	406	1,12	61,2	1,04	5	0,62
F4	293,4	0,46	56,8	0,09	28,6	0,06	12	0,03
F5	600	0,64	600	0,09	338,8	0,05	91,2	0,03
F6	0	0,00	13,2	0,11	34,4	0,10	1,6	0,01
F7	535,6	0,55	408,8	0,17	119,6	0,07	82	0,05
F8	471	0,52	344,6	0,17	98,6	0,05	5,6	0,02
F9	600	0,73	600	0,34	600	0,18	600	0,21
k-fence	29,6	0,34	11,2	0,20	3,6	0,10	1	0,12
3-diciclo	563,2	0,48	60,4	0,03	16	0,02	2,2	0,01
40								
	1-5		6-10		11-15		16-20	
	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.	# cortes	viol.
F1	337	0,44	101,8	0,07	38,6	0,05	15,4	0,04
F2	600	0,40	600	0,14	600	0,09	543,6	0,07
F3	600	1,57	450,8	1,15	83	1,03	13,8	0,82
F4	479	0,52	43,4	0,09	39,6	0,08	18,6	0,03
F5	600	0,41	600	0,14	600	0,07	204,8	0,04
F6	60,6	0,70	0	0,00	45	0,08	7,6	0,02
F7	549,6	0,53	446,4	0,15	166,2	0,09	70,2	0,07
F8	542,4	0,52	504,2	0,26	199	0,13	2,2	0,02
F9	600	0,64	600	0,35	600	0,36	600	0,53
k-fence	78,8	0,46	26,6	0,26	16,4	0,12	3,8	0,13
3-diciclo	600	0,53	353,6	0,13	27,6	0,02	1,2	0,01

Tabla 5.4: Cantidad de Cortes III

	Familia	20			22			24			26		
		Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac
D	Relaj.	17,58	0,09		22,75	0,11		22,97	0,17		22,12	0,22	
	F1	7,23	25,00	11,90	6,50	27,00	13,31	8,01	25,20	17,04	7,18	26,20	29,12
	F2	11,34	18,20	36,54	12,22	20,60	40,29	13,55	18,80	45,78	13,42	23,20	88,40
	F3	6,05	8,60	7,26	3,52	15,60	13,97	3,95	14,00	23,61	3,32	17,40	39,86
	F4	6,67	14,40	5,49	4,48	16,80	6,42	4,55	17,40	14,61	3,95	19,40	23,63
	F5	11,07	16,00	36,25	11,96	17,60	41,93	13,38	16,40	47,15	13,37	19,60	89,56
	F6	13,97	17,40	6,07	15,59	19,00	5,29	16,61	18,80	7,95	15,81	21,60	13,69
	F7	11,73	16,20	15,07	13,23	17,40	14,92	14,70	15,80	20,44	14,51	20,60	37,78
	F8	13,85	15,40	6,06	14,98	15,00	5,93	16,14	14,00	8,40	15,76	15,80	12,78
	F9	8,06	16,40	22,21	7,04	20,00	24,32	7,30	22,80	52,91	6,37	26,40	86,12
	k-fence	13,78	17,60	8,37	14,92	18,80	10,10	16,11	20,20	15,84	15,73	20,20	23,38
	3-diciclo	9,31	12,00	7,48	8,79	13,80	7,45	9,55	11,60	11,99	8,39	13,40	20,77
S	Relaj.	35,84	0,08		28,03	0,13		43,67	0,19		36,52	0,27	
	F1	10,86	12,60	5,35	11,60	11,80	5,41	17,60	16,00	12,75	13,56	15,40	15,53
	F2	13,79	15,00	23,14	14,38	16,20	20,74	21,75	18,20	44,98	16,88	18,20	58,07
	F3	0,65	9,00	10,42	1,46	13,00	17,25	3,84	13,40	36,04	1,77	12,80	43,60
	F4	1,19	14,40	10,69	2,33	15,20	12,72	5,36	16,00	25,44	2,81	16,40	37,74
	F5	11,90	15,60	29,81	13,73	13,20	24,42	20,22	15,00	52,39	15,74	16,80	77,41
	F6	17,29	15,80	7,07	16,39	16,60	7,34	25,89	18,00	14,92	20,22	19,60	19,13
	F7	13,85	13,40	10,98	14,35	14,20	10,91	22,38	14,60	20,59	17,42	16,20	28,85
	F8	17,64	13,00	5,37	17,06	13,00	5,79	26,60	12,20	10,44	20,58	13,20	14,37
	F9	6,80	18,20	29,12	6,86	19,20	30,59	12,72	24,40	71,55	8,16	25,20	101,45
	k-fence	17,61	15,80	7,16	17,04	15,80	6,77	26,45	17,40	13,34	20,56	16,80	18,72
	3-diciclo	8,53	11,60	9,54	10,33	12,20	9,24	16,91	12,60	18,18	12,20	12,80	26,72
A	Relaj.	10,33	0,14		11,20	0,20		13,48	0,25		11,78	0,44	
	F1	1,19	10,60	3,16	1,48	12,00	4,53	3,44	13,40	7,52	0,90	13,80	14,92
	F2	0,40	12,20	10,64	0,36	12,80	12,96	2,52	13,60	19,96	0,56	14,40	34,45
	F3	0,28	11,40	5,53	0,64	10,60	6,52	2,46	13,80	11,85	0,43	13,40	17,94
	F4	1,85	11,40	3,87	2,60	13,00	4,68	4,10	12,00	7,06	2,17	16,00	13,18
	F5	0,22	10,40	10,93	0,33	12,20	12,87	1,91	12,60	23,58	0,50	13,20	36,01
	F6	2,42	13,60	4,49	3,26	14,80	4,97	5,44	15,20	7,13	3,20	17,20	14,05
	F7	0,33	10,60	5,48	0,83	11,20	6,40	3,01	12,40	10,44	0,74	12,80	17,17
	F8	2,80	11,80	3,63	3,40	12,00	4,25	5,70	10,60	6,10	3,27	14,40	12,19
	F9	1,16	12,80	8,54	1,46	12,40	8,42	3,28	13,20	14,58	1,36	15,80	24,57
	k-fence	2,72	16,00	4,81	3,40	13,80	4,87	5,64	13,80	7,30	3,25	17,20	13,58
	3-diciclo	0,80	11,00	5,51	1,22	10,60	5,48	3,41	11,40	9,24	1,06	15,00	17,89

Tabla 5.5: Comparación de las familias de desigualdades válidas I

	Familia	28			30			35			40		
		Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac	Gap	Tiempo	# Iterac
D	Relaj.	23,29	0,40		21,78	0,48		24,58	0,91		26,20	2,01	
	F1	8,73	32,00	48,66	7,58	39,80	79,08	10,13	40,40	253,44	10,56	40,40	560,23
	F2	15,01	23,20	123,94	12,93	26,20	238,32	17,38	40,00	989,10	18,39	45,20	2202,20
	F3	4,44	17,60	59,72	4,16	19,40	87,80	5,68	25,20	314,38	5,35	29,40	893,44
	F4	5,17	18,40	32,02	4,75	19,20	44,28	6,30	148,85	23,20	5,82	26,80	376,53
	F5	14,83	20,20	134,97	12,83	22,80	258,23	17,40	35,20	1025,50	18,26	40,40	2350,86
	F6	17,71	23,20	17,42	15,89	23,80	26,95	20,66	33,40	94,37	21,29	46,20	244,66
	F7	16,11	21,40	51,55	14,44	23,00	77,38	19,01	34,40	331,80	19,84	41,80	784,95
	F8	17,32	16,20	17,85	15,67	15,20	28,48	20,24	19,20	96,47	20,90	20,80	208,37
	F9	8,06	28,80	142,56	7,14	33,60	231,04	9,97	44,40	818,73	9,19	63,20	2793,29
	k-fence	17,29	21,40	37,22	15,65	23,60	52,25	20,21	32,40	205,07	20,88	43,20	579,68
	3-diciclo	10,32	14,60	29,76	9,35	15,00	43,55	20,98	27,40	77,66	16,29	28,60	280,70
S	Relaj.	38,77	0,42		38,76	0,58		46,40	1,04		44,84	2,71	
	F1	14,96	16,60	29,55	17,45	16,40	39,42	20,37	17,00	102,04	21,72	18,60	288,89
	F2	19,38	21,40	113,90	21,33	20,80	154,11	25,57	28,00	488,98	27,35	34,60	1584,90
	F3	2,29	15,00	79,81	2,82	15,40	126,39	3,08	17,60	393,27	4,91	22,40	1247,73
	F4	3,44	17,60	66,61	3,97	17,80	105,14	4,03	20,60	301,10	5,87	24,40	797,98
	F5	18,34	18,40	140,53	19,51	18,60	204,58	23,96	23,80	625,20	26,21	30,40	1891,56
	F6	23,04	19,20	34,47	24,10	21,20	54,67	29,50	26,20	178,42	31,05	34,20	525,39
	F7	19,98	16,20	49,98	21,49	17,40	77,53	26,76	20,60	221,10	28,33	26,60	639,93
	F8	23,58	12,80	26,07	24,63	12,40	37,41	29,96	16,00	106,33	31,28	17,00	294,93
	F9	10,24	27,00	191,30	10,98	33,00	373,22	12,15	46,40	1302,87	13,65	64,40	4163,22
	k-fence	23,53	19,00	33,94	24,56	19,80	53,30	29,90	26,00	171,40	31,24	33,00	553,46
	3-diciclo	14,43	12,80	46,27	15,42	13,80	73,84	18,30	16,20	215,17	20,19	21,00	606,39
A	Relaj.	11,89	0,74		14,43	0,79		16,36	1,56		17,37	5,78	
	F1	2,92	13,00	19,93	3,02	15,60	35,19	1,22	16,20	97,69	5,76	16,60	262,46
	F2	2,14	16,80	59,75	3,28	17,40	105,63	0,88	23,40	295,24	5,65	30,20	1211,69
	F3	2,38	13,80	28,61	1,73	16,00	49,35	1,24	18,20	140,98	5,09	21,00	424,78
	F4	4,04	14,80	20,04	3,29	17,40	35,20	2,35	17,00	83,55	6,52	20,20	266,19
	F5	1,89	14,20	58,59	2,97	14,80	103,85	0,81	20,80	352,08	5,47	25,60	1137,54
	F6	4,70	17,20	21,73	6,29	18,80	35,39	3,20	20,80	96,96	9,33	23,20	286,85
	F7	2,60	13,80	27,10	3,50	14,80	49,09	1,36	17,00	134,74	6,75	20,80	390,49
	F8	5,01	12,80	17,91	6,53	16,40	30,19	3,27	15,60	78,38	9,43	16,80	212,11
	F9	3,26	17,00	35,86	2,83	19,20	67,08	1,94	21,20	164,72	6,43	24,60	555,37
	k-fence	5,01	15,80	20,72	6,52	18,00	35,24	3,26	20,40	93,89	9,43	21,20	263,13
	3-diciclo	3,00	13,00	25,79	3,10	15,20	44,74	1,75	17,20	124,66	6,66	19,00	362,36

Tabla 5.6: Comparación de las familias de desigualdades válidas II

Instancia	Relaj.		Set0			Set0 + Set1			Set0 + Set2			Set0 + Set1 + Set2		
	Gap	tiempo	Gap	tiempo	#LP	Gap	tiempo	#LP	Gap	tiempo	#LP	Gap	tiempo	#LP
20	17,58	0,09	13,84	6,36	17,00	4,46	7,48	6,00	9,07	8,91	13,60	4,46	6,35	5,6
22	22,75	0,11	14,98	6,46	19,20	0,54	27,84	13,20	8,27	9,20	14,60	0,50	21,08	12,8
24	22,97	0,17	16,14	10,21	19,00	0,65	70,21	19,40	9,18	14,35	12,60	0,61	50,57	16,8
26	22,12	0,22	15,76	14,96	19,60	0,32	125,77	22,00	8,16	23,62	14,40	0,25	100,00	22,4
28	23,29	0,40	17,32	22,68	22,00	0,74	230,62	26,80	10,02	33,60	15,80	0,68	166,94	23,6
30	21,78	0,48	15,67	32,45	22,00	0,71	280,36	28,80	9,03	52,59	17,00	0,64	221,39	25,6
35	24,58	0,91	20,24	118,08	31,00	1,36	1233,72	33,40	12,35	159,94	20,80	1,29	694,50	26,2
40	26,20	2,01	20,90	318,25	42,20	1,66	3481,09	48,20	11,97	402,21	24,40	1,54	2090,91	39,6
Prom. D	22,66	0,55	16,86	66,18	24,00	1,30	682,14	24,73	9,76	88,05	16,65	1,25	418,97	21,58
20	35,84	0,08	17,64	6,23	14,80	0,00	8,55	5,60	8,53	9,67	11,20	0,00	8,69	5,6
22	28,03	0,13	17,06	6,32	16,40	0,00	20,94	8,60	10,33	9,57	13,00	0,00	21,42	8,6
24	43,67	0,19	26,60	12,38	16,60	0,25	61,92	15,20	16,91	19,37	13,20	0,11	63,17	13,4
26	36,52	0,27	20,58	17,51	16,00	0,30	50,12	9,40	12,20	28,20	13,60	0,23	52,99	9,8
28	38,77	0,42	23,58	30,17	18,00	0,12	117,54	13,00	14,43	50,45	14,80	0,05	124,01	13,6
30	38,76	0,58	24,63	47,35	18,20	0,36	216,72	16,40	15,42	77,67	14,80	0,22	221,22	15
35	46,40	1,04	29,96	154,17	24,00	0,20	729,99	23,80	18,30	245,79	17,80	0,07	704,96	19,6
40	44,84	2,71	31,28	511,89	31,40	1,69	2428,75	31,00	20,19	676,99	22,80	1,35	2566,65	33,2
Prom. S	39,10	0,68	23,92	98,25	19,43	0,37	454,32	15,38	14,54	139,71	15,15	0,25	470,39	14,85
20	10,33	0,14	2,80	3,94	13,80	0,00	3,27	5,60	0,80	5,58	11,40	0,00	3,28	5,6
22	11,20	0,20	3,40	4,69	13,60	0,00	4,40	5,20	1,22	5,54	10,40	0,00	4,46	5,2
24	13,48	0,25	5,70	6,91	13,60	0,18	16,55	10,60	3,41	9,59	11,60	0,15	16,10	9,4
26	11,78	0,44	3,27	13,30	15,80	0,00	14,05	6,60	1,06	18,69	14,80	0,00	14,17	6,6
28	11,89	0,74	5,01	20,75	16,20	0,52	63,74	20,00	3,00	27,92	14,00	0,47	64,06	17,8
30	14,43	0,79	6,53	32,53	17,60	0,61	66,09	12,60	3,10	48,06	16,40	0,58	69,46	13,2
35	16,36	1,56	3,27	92,29	19,60	0,11	183,92	13,20	1,75	133,13	18,20	0,10	176,04	13
40	17,37	5,78	9,43	252,13	22,20	1,97	993,85	27,80	6,66	390,66	20,40	1,90	1043,70	30,8
Prom. A	13,35	1,24	4,93	53,32	16,55	0,42	168,23	12,7	2,62	79,9	14,65	0,4	173,91	12,7

Tabla 5.7: Set 0 - Set 1 - Set 2

	n	20	22	24	26	28	30	35	40	Promedio
Relaj.	Gap	17,58	22,75	22,97	22,12	23,29	21,78	24,58	26,20	22,66
	tiempo	0,09	0,11	0,17	0,22	0,40	0,48	0,91	2,01	0,55
	Gap	4,46	0,51	0,60	0,25	0,67	0,64	1,29	1,54	1,25
C1	tiempo	7,47	29,07	78,84	147,12	249,36	318,81	1241,01	3582,74	706,80
	#LP	5,80	12,40	18,00	23,80	27,20	28,00	33,00	46,80	24,38
	Gap	4,46	0,50	0,61	0,25	0,68	0,64	1,29	1,54	1,25
C2	tiempo	6,35	21,08	50,57	100,00	166,94	221,39	694,50	2090,91	418,97
	#LP	5,60	12,80	16,80	22,40	23,60	25,60	26,20	39,60	21,58
	Gap	4,46	0,62	0,72	0,46	0,90	0,93	1,53	1,85	1,44
C3	tiempo	8,05	23,62	62,80	105,14	199,80	223,08	950,97	2650,00	527,93
	#LP	6,20	13,20	19,80	22,20	27,20	28,20	29,80	38,80	23,18
	Gap	4,46	0,51	0,60	0,26	0,66	0,63	1,29	1,54	1,24
C4	tiempo	9,52	26,09	61,40	109,79	204,17	246,72	912,74	2919,20	561,20
	#LP	5,60	12,40	15,40	20,60	25,00	22,80	27,80	43,40	21,63
	Gap	4,46	0,51	0,60	0,26	0,67	0,64	1,29	1,55	1,25
C5	tiempo	7,11	26,99	70,91	134,70	239,17	289,93	1136,46	3262,39	645,96
	#LP	5,40	13,20	18,80	23,20	26,40	25,20	33,40	47,60	24,15
	Gap	4,46	0,51	0,60	0,26	0,66	0,64	0,69	1,55	1,17
C6	tiempo	11,83	36,42	82,12	161,29	307,83	362,82	1493,74	4583,01	879,88
	#LP	6,80	14,20	18,60	24,80	29,20	27,20	35,80	52,60	26,15

Tabla 5.8: Combinaciones de familias - Instancias D

	n	20	22	24	26	28	30	35	40	Promedio
Relaj.	Gap	35,84	28,03	43,67	36,52	38,77	38,76	46,40	44,84	39,10
	tiempo	0,08	0,13	0,19	0,27	0,42	0,58	1,04	2,71	0,68
	Gap	0,00	0,00	0,10	0,23	0,04	0,22	0,07	1,34	0,25
C1	tiempo	9,08	20,36	68,87	58,40	134,45	245,75	783,33	2901,65	527,74
	#LP	5,40	7,40	13,80	10,00	13,80	15,40	20,80	36,00	15,33
	Gap	0,00	0,00	0,11	0,23	0,05	0,22	0,07	1,35	0,25
C2	tiempo	8,69	21,42	63,17	52,99	124,01	221,22	704,96	2566,65	470,39
	#LP	5,60	8,60	13,40	9,80	13,60	15,00	19,60	33,20	14,85
	Gap	0,00	0,04	0,33	0,29	0,17	0,39	0,36	1,65	0,40
C3	tiempo	8,44	21,66	54,13	48,96	110,80	187,70	622,15	2070,60	390,55
	#LP	5,40	9,40	13,60	9,40	12,40	14,20	19,80	25,40	13,70
	Gap	0,00	0,00	0,11	0,23	0,05	0,23	0,07	1,36	0,26
C4	tiempo	8,31	19,54	51,68	43,91	107,48	186,83	607,44	2176,93	400,26
	#LP	5,00	7,40	10,80	9,00	11,80	13,20	16,80	28,60	12,83
	Gap	0,00	0,00	0,10	0,23	0,05	0,21	0,07	1,36	0,25
C5	tiempo	9,01	21,76	66,73	51,39	118,50	224,81	708,05	2487,35	460,95
	#LP	5,60	8,60	14,40	9,80	12,60	15,20	20,00	31,40	14,70
	Gap	0,00	0,00	0,10	0,23	0,05	0,22	0,07	1,36	0,26
C6	tiempo	10,98	24,97	70,32	57,49	132,83	242,23	733,90	2763,23	504,49
	#LP	6,00	9,80	14,80	10,60	14,00	16,20	21,20	35,00	15,95

Tabla 5.9: Combinaciones de familias - Instancias S

	n	20	22	24	26	28	30	35	40	Promedio
Relaj.	Gap	10,33	11,20	13,48	11,78	11,89	14,43	16,36	17,37	13,35
	tiempo	0,14	0,20	0,25	0,44	0,74	0,79	1,56	5,78	1,24
	Gap	0,00	0,00	0,15	0,00	0,45	0,57	0,09	1,90	0,39
C1	tiempo	4,36	4,48	16,85	14,05	72,83	67,21	172,29	1070,97	177,88
	#LP	5,80	4,80	8,40	5,60	19,00	11,80	11,00	30,00	12,05
	Gap	0,00	0,00	0,15	0,00	0,47	0,58	0,10	1,90	0,40
C2	tiempo	3,28	4,46	16,10	14,17	64,06	69,46	176,04	1043,70	173,91
	#LP	5,60	5,20	9,40	6,60	17,80	13,20	13,00	30,80	12,70
	Gap	0,00	0,00	0,62	0,00	1,13	0,85	0,27	2,79	0,71
C3	tiempo	3,33	4,47	11,65	14,67	35,05	46,49	142,87	613,67	109,03
	#LP	5,40	5,20	8,40	6,60	11,60	10,20	11,80	20,40	9,95
	Gap	0,00	0,00	0,15	0,00	0,48	0,58	0,10	1,93	0,41
C4	tiempo	4,06	4,48	15,18	14,27	60,95	61,84	156,61	913,56	153,87
	#LP	5,60	4,60	8,20	6,20	15,60	10,60	12,00	27,80	11,33
	Gap	0,00	0,00	0,15	0,00	0,46	0,57	0,10	1,91	0,40
C5	tiempo	3,28	4,32	15,82	13,48	64,08	65,13	167,30	959,58	161,62
	#LP	5,40	5,20	9,20	6,60	17,60	12,20	12,60	29,00	12,23
	Gap	0,00	0,00	0,15	0,00	0,48	0,58	0,10	1,92	0,40
C6	tiempo	4,23	5,21	16,96	15,23	69,85	71,86	176,07	1021,50	172,62
	#LP	5,40	5,00	8,60	6,60	19,00	12,80	13,20	28,40	12,38

Tabla 5.10: Combinaciones de familias - Instancias A

		n	22	24	26	28	30	35	40	Prom.
D	B1	tiempo	81,79	291,88	228,31	561,97	1320,38	2845,35	*12788,93*	888,28
		# nodos	4,00	9,00	3,34	5,50	10,67	6,67	*16,67*	6,53
	B2	tiempo	301,70	1514,82	673,41	2680,65	4603,46	12071,05	*14400,8*	3640,85
		# nodos	118,00	199,50	153,67	287,00	180,00	304,00	*288*	207,03
	B3	tiempo	****	****	****	****	****	****	****	****
		# nodos	****	****	****	****	****	****	****	****
	B4	tiempo	151,30	703,41	268,03	1358,20	1959,60	3583,05	*8996,47*	1337,26
		# nodos	24,00	47,50	10,00	50,00	33,33	18,00	*28*	30,47
	B5	tiempo	180,75	188,07	247,88	756,76	894,93	2494,38	*11557,35*	793,79
		# nodos	19,00	4,00	6,67	20,50	10,00	9,33	*18*	11,58
	B6	tiempo	177,64	660,78	257,60	1146,99	1946,48	3526,88	*9575,81*	1286,06
		# nodos	30,00	44,00	8,00	37,50	33,33	18,00	*35*	28,47
	B7	tiempo	85,29	195,51	139,54	474,74	627,76	2401,05	9262,64	653,98
		# nodos	3,00	4,00	2,00	6,00	5,33	8,00	12,40	4,72
S	B1	tiempo		188,58	181,34	423,33	665,61	885,57	13816,81	468,89
		# nodos		4,00	4,00	4,00	6,00	2,00	20,00	4,00
	B2	tiempo		353,52	724,48	941,18	2029,29	2463,57	*****	1302,41
		# nodos		124,00	194,00	180,00	256,00	252,00	****	201,20
	B3	tiempo		****	****	3986,06	****	****	****	3986,06
		# nodos		****	****	878,00	****	****	****	878,00
	B4	tiempo		123,72	185,25	230,15	753,73	1065,64	7854,10	471,70
		# nodos		4,00	12,00	4,00	14,00	12,00	30,00	9,20
	B5	tiempo		112,63	136,65	487,46	586,05	954,45	5880,72	455,45
		# nodos		4,00	6,00	12,00	8,00	8,00	12,80	7,60
	B6	tiempo		120,39	163,61	227,68	717,89	1083,00	7038,98	462,51
		# nodos		4,00	8,00	4,00	14,00	14,00	22,00	8,80
	B7	tiempo		126,32	148,63	219,23	608,21	894,15	6908,17	399,31
		# nodos		4,00	2,00	2,00	4,00	2,00	11,60	2,80
A	B1	tiempo		43,76		170,98	382,04	575,05	*12898,42*	292,96
		# nodos		2,00		4,50	8,00	4,00	*40*	4,63
	B2	tiempo		171,12		471,76	2647,52	1474,18	*15756,48*	1191,14
		# nodos		128,00		109,00	364,00	172,00	*465,5*	193,25
	B3	tiempo		****		****	****	****	****	****
		# nodos		****		****	****	****	****	****
	B4	tiempo		71,33		144,20	394,09	669,04	*7617,975*	319,67
		# nodos		18,00		15,50	23,00	24,00	*52*	20,13
	B5	tiempo		35,47		135,34	685,15	448,35	11092,29	326,08
		# nodos		2,00		7,00	31,00	10,00	42,20	12,50
	B6	tiempo		54,79		140,21	341,70	455,66	10770,68	248,09
		# nodos		6,00		12,50	17,00	8,00	61,20	10,88
	B7	tiempo		37,42		105,55	310,71	445,82	7410,79	224,88
		# nodos		2,00		2,00	5,00	4,00	21,00	3,25

Tabla 5.11: Comparación de los criterios de *branching*

n	0		1		2		3		4		5		6	
	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos	tiempo	nodos
22	75,6	9,0	72,9	5,0	87,1	5,0	84,3	3,5	84,8	3,0	85,3	3,0	85,7	3,0
24	147,9	8,0	164,7	7,0	180,8	7,0	186,1	5,0	191,2	4,0	195,5	4,0	198,4	4,0
26	188,0	3,3	212,2	4,7	187,0	2,7	188,7	2,7	190,3	2,7	191,3	2,7	191,3	2,7
28	420,0	15,0	409,4	8,0	419,1	6,5	444,7	6,5	462,6	6,0	474,7	6,0	486,1	6,0
30	569,1	10,7	572,4	7,3	602,8	6,7	588,9	4,7	619,2	5,3	627,8	5,3	630,7	5,3
35	2756,5	27,3	2206,7	12,0	2291,8	10,0	2369,1	8,7	2452,3	8,7	2401,1	8,0	2383,3	8,0
40	11315	163,6	9669	32,0	9488	21,6	9082	15,6	8097,6	14,0	9262,6	12,4	9064	13,2
D	2210,3	33,8	1901,0	10,9	1893,8	8,5	1849,1	6,7	1728,3	6,2	1891,2	5,9	1862,8	6,0
24	144,0	9,0	115,6	4,0	116,6	4,0	118,5	4,0	116,3	4,0	126,3	4,0	126,3	4,0
26	140,8	4,0	149,0	4,0	145,1	2,0	145,4	2,0	145,4	2,0	148,6	2,0	144,1	2,0
28	217,2	2,0	219,3	2,0	212,1	2,0	212,5	2,0	200,7	2,0	219,2	2,0	211,0	2,0
30	571,5	6,0	573,3	6,0	569,2	6,0	569,6	4,0	542,1	4,0	608,2	4,0	587,2	4,0
35	852,1	4,0	897,2	2,0	850,3	2,0	833,4	2,0	791,9	2,0	894,2	2,0	841,7	2,0
40	8140,2	47,5	5829,8	14,8	6670,3	13,2	6108,3	11,6	6011,7	11,2	6908,2	11,6	6686,3	11,2
S	1677,6	12,1	1297,3	5,5	1427,3	4,9	1331,3	4,3	1301,3	4,2	1484,1	4,3	1432,8	4,2
24	37,4	2,0	37,4	2,0	36,9	2,0	36,5	2,0	35,4	2,0	37,4	2,0	36,9	2,0
28	98,8	4,0	101,6	3,0	103,8	2,5	102,2	2,0	98,2	2,0	105,6	2,0	103,2	2,0
30	288,6	14,0	268,7	7,0	285,8	7,0	290,3	6,0	290,0	6,0	310,7	5,0	315,2	5,0
35	376,4	6,0	398,3	4,0	409,6	4,0	414,1	4,0	409,1	4,0	445,8	4,0	449,7	4,0
40	*4656,4*	*67,3*	7329,7	42,4	6866,3	28,6	5900,7	19,8	5358,9	16,2	7410,8	21,0	5578,0	15,0
A	*****	****	1627,1	11,7	1540,5	8,8	1348,8	6,8	1238,3	6,0	1662,1	6,8	1296,6	5,6

Tabla 5.12: Iteraciones de planos de corte

n	0		1		2		3	
	tiempo	#nodos	tiempo	#nodos	tiempo	#nodos	tiempo	#nodos
22	84,76	3,00	81,89	5,00	75,61	7,00	80,25	8,00
24	191,25	4,00	180,57	6,00	165,63	7,00	177,56	7,00
26	190,32	2,67	202,70	3,33	187,63	3,33	196,73	3,33
28	462,64	6,00	439,70	7,00	400,58	9,50	420,36	10,00
30	686,83	6,00	674,93	7,00	587,90	7,25	635,37	7,50
35	2452,34	8,67	2324,97	10,00	2130,75	12,67	2384,67	12,67
40	8097,56	14,00	9459,60	21,20	8948,45	28,60	9357,33	35,60
Prom. D	1737,96	6,33	1909,19	8,50	1785,22	10,76	1893,18	12,01
24	116,26	4	125,44	4	129,26	6	137,44	8
28	200,73	2	218,33	2	198,81	2	206,91	2
30	542,08	4	534,13	6	515,6	6	535,73	6
35	791,9	2	813,48	4	797,12	4	821,45	4
40	6011,65	11,20	5487,07	13,60	7277,20	21,60	7291,52	25,20
Prom. S	1532,52	4,64	1435,69	5,92	1783,60	7,92	1798,61	9,04
24	35,4	2,00	34,83	2	36,09	2	35,92	2
28	98,23	2,00	94,13	3,5	94,36	4	95,43	3,5
30	290,01	6,00	281,72	8	287,62	10	304,60	11
35	409,06	4	350,96	4	351,01	6	370,16	4
40	5358,86	16,20	6756,94	33,40	7288,77	38,00	6908,73	50,20
Prom. A	1238,31	6,04	1503,72	10,18	1611,57	12,00	1542,97	14,14

Tabla 5.13: *Skip factor*

5.7. CPLEX vs *BC-R*

Al implementar un *Branch-and-Cut* es natural plantearse la comparación contra algún algoritmo de propósito general. ¿Vale la pena todo el esfuerzo invertido en una implementación ad-hoc? ¿Por qué no usar la implementación de un buen paquete de optimización? ¿Es superior la eficiencia de los cortes específicos para un problema con respecto a los cortes generales para problemas lineales enteros mixtos generales? Para responder a estas preguntas, utilizamos el paquete CPLEX [17]. CPLEX brinda la posibilidad de incorporar cortes *clique*, *cover*, disyuntivos, *flow cover*, *flow path*, Gomory, *generalized upper bound (GUB) cover*, *implied bound* y *mixed integer rounding*.

En la Tabla 5.15 presentamos los promedios correspondientes a 5 instancias para cada tamaño. Reportamos los tiempos y cantidad de nodos para ***BC-R***, ***BC-R*** más los cortes de uso general ofrecidos por CPLEX y CPLEX con los parámetros *default* para un *Branch-and-Cut* y todas las ventajas que el paquete ofrece (las desigualdades del modelo son siempre utilizadas como planos de corte).

En los resultados obtenidos cuando sólo utilizamos los cortes de uso general provistos por CPLEX, podemos observar que se repite el comportamiento que ya señalamos con el algoritmo *Branch-and-Bound*. Los cortes del CPLEX no son efectivos en reducir el tamaño del árbol con respecto al *Branch-and-Bound* y el tiempo de resolución de cada nodo aumentó. Esto muestra, que para este problema los cortes de uso general no son efectivos. Los resultados de nuestro algoritmo ***BC-R*** son más que contundentes. El promedio de tiempo de resolución y el tamaño del árbol disminuyeron drásticamente. Puede observarse, por ejemplo en las instacias D de 26 clientes, tiempos que superaban una hora con el CPLEX que nuestro algoritmo las resuelve en 160 segundos.

Por otro lado, dada la performance de ***BC-R*** hemos podido resolver instancias con mayor número de clientes que, en el caso de utilizar el Cplex, superaban las 8 horas de proceso.

En los experimentos computacionales realizados podemos observar que el número de nodos explorados es significativamente pequeño, lo que demuestra que las desigualdades válidas constituyen la razón principal del éxito del algoritmo.

La incorporación en ***BC-R*** de cortes de uso general tiene escasa influencia en el algoritmo, salvo para instancias simétricas con menos de 28 clientes en las cuales el tiempo de CPU se redujo.

Si comparamos la relación tiempo-cantidad de nodos explorados, CPLEX genera mayor cantidad de nodos por unidad de tiempo. ***BC-R*** tiene una relación mucho menor. Esto se debe a varios factores. Los algoritmos de separación y las iteraciones del algoritmo de cortes aumentan el tiempo invertido en cada subproblema. Sin embargo, los resultados son más

n	*B-and-B*		***BC-R***	
	tiempo	#nodos	tiempo	#nodos
20	87,30	23,00	7,72	0,00
22	478,85	115,60	43,18	1,20
24	3276,89	430,00	108,66	1,60
26	4608,42	429,25	155,30	2,00
Prom. D	2112,87	249,46	78,72	1,20
20	104,50	29,20	8,68	0,00
22	309,43	79,60	20,80	0,00
24	3866,27	479,20	68,18	0,80
26	2686,28	286,40	60,08	0,40
Prom. S	1741,62	218,60	39,43	0,30
20	8,22	2,00	3,35	0,00
22	11,79	3,60	4,52	0,00
24	97,12	23,00	17,05	0,40
26	34,60	4,40	14,48	0,00
Prom. A	37,93	8,25	9,85	0,10

Tabla 5.14: Branch-and-Bound vs ***BC-R***

	BC-R		***BC-R*** + Cortes Cplex		Cplex	
	Tiempo	Nodos	Tiempo	Nodos	Tiempo	Nodos
20	7,72	0,00	7,62	0,00	108,10	30,20
22	43,18	1,20	43,38	1,20	472,38	115,60
24	108,66	1,60	108,87	1,60	3216,22	438,00
26	155,30	2,00	153,03	2,00	4629,42	429,25
28	424,32	4,80	427,68	4,80		
30	448,59	3,20	442,10	3,20		
35	1790,53	5,20	1796,45	5,20		
40	8097,56	14,00	8757,23	14,00		
Prom. D	1384,48	4,00	1467,04	4,00	****	****
20	8,68	0,00	4,04	0,00	103,71	28,40
22	20,80	0,00	4,75	0,00	296,20	79,60
24	68,18	0,80	17,83	0,40	3617,51	479,20
26	60,08	0,40	14,91	0,00	2704,52	286,40
28	120,79	0,40	107,68	0,40		
30	248,59	0,80	269,94	0,80		
35	682,79	0,40	709,07	0,40		
40	6011,65	11,20	6017,98	11,60		
Prom. S	902,69	1,75	893,27	1,70	****	****
20	3,35	0,00	4,04	0,00	8,29	2,00
22	4,52	0,00	4,75	0,00	11,73	3,60
24	17,05	0,40	17,83	0,40	94,64	23,00
26	14,48	0,00	14,91	0,00	36,07	4,40
28	81,09	1,60	85,51	1,60		
30	132,54	2,40	142,03	2,40		
35	198,69	0,80	211,55	0,80		
40	5358,86	16,20	5294,21	17,80		
Prom. A	726,32	2,68	721,85	2,88	****	****

Tabla 5.15: CPLEX vs ***BC-R***

que elocuentes. A pesar de la robustez y eficiencia de la implementación de CPLEX, los planos de corte y todas las estrategias específicas que desarrollamos para ***BC-R*** conforman un algoritmo exitoso.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo abordamos la resolución del *Problema del Repartidor* utilizando modelos de programación lineal entera binaria.

Propusimos una nueva formulación para modelar este problema. Las cotas inferiores brindadas por la relajación lineal de la nueva formulación resultaron de muy buena calidad, obteniendo un muy buen promedio de porcentaje de *gap* en instancias generadas al azar entre 20 y 40 clientes. Comparado con otros modelos de la literatura, los resultados mostraron un buen balance entre calidad de la cota y tiempo de CPU necesario para la resolución.

En la segunda parte del trabajo, motivados por la calidad de la relajación, realizamos un estudio poliedral de la cápsula convexa de las soluciones factibles del modelo. Encontramos varias familias de desigualdades válidas que bajo ciertas condiciones definen facetas del poliedro. Claramente no hemos logrado una caracterización completa. Debido a la complejidad del problema, lejos estaba éste de ser nuestro objetivo. Cabe señalar que hasta el momento no existe en la literatura un estudio poliedral del *Problema del Repartidor*.

En base a estas familias de desigualdades válidas, implementamos algoritmos de separación y experimentamos con un algoritmo de planos de corte buscando mejorar el *gap* inicial de la relajación del modelo. Sobre las mismas instancias aleatorias mencionadas anteriormente, el promedio del *gap* final del algoritmo disminuyó significativamente, permitiendo probar optimalidad en varias instancias.

La última parte del trabajo estuvo centrada en el desarrollo del algoritmo ***BC-R***. El algoritmo de planos de corte fue embebido dentro de un algoritmo *Branch-and-Cut*, en el que tuvimos en cuenta factores que consideramos esenciales para una buena performance.

- Una etapa inicial de preprocesamiento que reduce el número de variables del modelo, permitiendo resolver instancias de mayor tamaño.
- Heurísticas iniciales y primales para el cálculo de cotas superiores que reducen el espacio

de búsqueda.

- Procedimientos de separación rápidos y eficientes para varias de las familias de desigualdades válidas obtenidas de nuestro estudio poliedral.
- Estrategias de selección de variable de *branching* y recorrido del árbol que guian la búsqueda.

Para cada uno de estos factores consideramos distintas alternativas. Mediante la experimentación con instancias generadas al azar buscamos identificar aquellas alternativas que brindan la mejor performance. En algunos casos surgió claramente cual es la mejor opción. En otros, no pudimos llegar a una conclusión determinante. Esta situación es comprensible por la diversidad de tipos de costos que tienen las instancias.

Las desigualdades válidas surgidas del estudio poliedral constituyen un factor decisivo en la performance del algoritmo implementado. La incorporación de las mismas en la etapa de *cutting* permite mejorar sustancialmente el valor de la cota inferior y reducir el tamaño del árbol de búsqueda. La comparación que hicimos con un algoritmo *Branch-and-Bound* da muestras más que evidentes de esta afirmación donde observamos una reducción notable en los tiempos de ejecución. Las estrategias propuestas para selección de variable de *Branching* es clave para la generación de un árbol de menor tamaño.

El éxito del algoritmo fue obtenido gracias a las excelentes cotas inferiores dadas por la fase de planos de corte junto con muy buenas cotas superiores obtenidas por la heurística primal. En la mayoría de las instancias la heurística primal encuentra la solución óptima en los primeros nodos del árbol de enumeración, aún en las instancias A y S donde la heurística inicial tiene una performance más débil.

BC-R es un algoritmo exacto que tiene la característica de ir mejorando las cotas inferior y superior durante el tiempo de ejecución. De esta manera, aún en el caso que no logremos alcanzar el óptimo dentro del tiempo límite establecido, tenemos un intervalo donde tenemos garantía que se encuentra el óptimo del problema. Esto es muy importante para evaluar la calidad de una solución obtenida por una heurística.

Nuestro trabajo deja espacio para futuros estudios.

Lejos estamos de haber dado una caracterización completa del poliedro de soluciones factibles. Quedan aún familias de desigualdades válidas por caracterizar que, utilizadas como planos de corte, pueden contribuir a mejorar los resultados.

En nuestra experimentación hemos encontrado algunas diferencias en la performance del modelo de acuerdo al tipo de instancias. ¿Qué es lo que provoca estas diferencias? ¿Porqué las cotas inferiores tienen un menor *gap* para instancias asimétricas y en cambio la heurística inicial tiene un comportamiento contrario? ¿Hay algún procedimiento que pueda mejorarse

segun el tipo de instancia?

El modelo de Picard y Queyranne otorga buenas cotas inferiores y buen comportamiento bajo un esquema *Branch-and-Bound* en instancias asimétricas. ¿Qué propiedades del modelo influyen en estos resultados? ¿Puede explotarse esta situación para desarrollar un algoritmo para instancias asimétricas?

Otras versiones del problema de ruteo consideran costos que no sólo dependen del costo de traslado entre clientes y del orden en que son visitados, sino de otro tipo de función costo(*Time-dependent traveling salesman problem*). Dependiendo de las características de dicha función, nuestro modelo podría ser adaptado para modelar otra clase de problemas de ruteo.

El *Problema del Repartidor* tiene importantes aplicaciones prácticas y ha sido muy poco estudiado. Es nuestro deseo haber contribuido con resultados que signifiquen un avance en el conocimiento del mismo y que abran nuevas líneas de investigación para futuros resultados.

.

Apéndice A

Demostraciones de Definición de Faceta

En este apéndice incluimos las demostraciones sobre la definición de facetas para cada una de las desigualdades válidas que presentamos en el capítulo 4.

En las demostraciones hacemos referencia a los caminos PR que aparecen en las tablas A.1, A.2 y A.3. Los multiplicadores asociados a estas soluciones son identificados como λ_4,λ_5 y λ_6 respectivamente. Los clientes v_{i_1} y v_{i_2} serán especificados en cada caso según corresponda. Si la desigualdad involucra al cliente v_{l_0}, asumir que el cliente v_{i_1} que aparece en las soluciones de la tabla es v_{l_0}.

Proposición A.1 *(Familia 2) Sean $i_0, j_0, k_0, l_0 \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f_{i_0 j_0}^{j_0} + f_{i_0 l_0}^{j_0} + f_{k_0 j_0}^{l_0} \leq x_{i_0 j_0} + f_{k_0 j_0}^{i_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Vamos a suponer que $i_0 < j_0$. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia 2*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $\forall i < j$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $\forall (i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\gamma_{i_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} + e$

- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}\ \forall (i,j,k) \neq (i_0,l_0,j_0),(k_0,j_0,l_0),(k_0,j_0,i_0)$
- $\delta_{i_0l_0j_0} = -c_{i_0j_0} - b_{l_0j_0} + e$
- $\delta_{k_0j_0l_0} = -c_{k_0l_0} - b_{j_0l_0} + e$
- $\delta_{k_0j_0i_0} = -c_{k_0i_0} - b_{j_0i_0} - e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}\ \forall (i,j) \neq (i_0,j_0)$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + \gamma_{ik}\ \forall (i,j,k) \neq (i_0,l_0,j_0),(k_0,j_0,l_0),(k_0,j_0,i_0)$ y $k \neq j_0$
- $e = \delta_{k_0j_0l_0} - \gamma_{k_0l_0} + b_{j_0l_0}$
- $b_{jj_0} = -\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} - e$
- $c_{i_0j_0} = -\gamma_{i_0j_0} + e$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}\ \forall i < j,\ (i,j) \neq (i_0,j_0)$
- $a_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$ para algún i

Para que las definiciones verifiquen las condiciones enunciadas anteriormente y sean consistentes, debemos probar que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{i'k}$$

  $\forall (i,j,k),(i',j,k) \neq (i_0,l_0,j_0),(k_0,j_0,l_0),(k_0,j_0,i_0)$ y $(i,k),(i',k) \neq (i_0,j_0)$

- *Caso 2:* La definición de b_{jj_0} es consistente:

$$-\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} - e = -\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0}\ \ \forall i \neq i_0, j_0\ j \neq i_0, j_0, l_0$$

- *Caso 3:* La definición de e es consistente:

$$e = -\delta_{k_0j_0i_0} - c_{k_0i_0} - b_{j_0i_0} = \delta_{i_0l_0j_0} + c_{i_0j_0} + b_{l_0j_0}$$

- *Caso 4:* La definición de d no depende de i. Para todo $i \neq i'$ se debe cumplir:

$$\beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1\ r\neq i'}^{n} b_{i'r}$$

- *Caso 5:* La definción de a_{ij} es consistente:

$$a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji} \;\; \forall i < j, \; (i,j) \neq (i_0, j_0)$$

- *Caso 6:* La definción de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

Probamos cada ítem mostrando los caminos PR y el λ que nos permiten obtener la igualdad buscada.

- *Demostración Caso 1:* Vamos a considerar 5 posibilidades:

1. $i, j, k \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   Sean los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   2: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   3: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   6: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$
   7: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
   9: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   10: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   11: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   12: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$

   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$.
   Definamos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
2. Exactamente uno de los índices i, j, k, l pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Consideramos los multiplicadores λ y caminos PR del caso 1, modificando el comienzo de los caminos según el caso:
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{j_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset$, excluímos a v_{l_0} del comienzo del camino.
3. Exactamente dos de los índices i, j, k, l pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Para las siguientes posibilidades consideramos los caminos y multiplicadores λ del caso 1, tomando como comienzo del camino:
   - $i = i_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
   - $i = i_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
   - $i = j_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{j, k\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{j, k\} \cap \{j_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

- $i = l_0$ y $\{j,k\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
- $i = l_0$ y $\{j,k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
- $j = i_0$ y $\{k\} \cap \{k_0, l_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
- $j = j_0$ y $k = k_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
- $j = k_0$ y $k = i_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
- $j = k_0$ y $k = l_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
- $j = l_0$ y $k = i_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
- $j = l_0$ y $k = k_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

Para los casos que nos falta analizar definimos los multiplicadores λ_6 que debemos considerar:

- $i = i_0$ y $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[242] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[362] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[529] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[553] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[345] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[465] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[550] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[574] = -\frac{1}{2}$
- $i = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_6[17] = 1$, $\lambda_6[93] = -1$, $\lambda_6[541] = -1$, $\lambda_6[593] = 1$, $\lambda_6[605] = -1$, $\lambda_6[621] = 1$, $\lambda_6[201] = 1$, $\lambda_6[214] = -1$
- $i = j_0$ y $j = i_0 (i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[2] = -1$, $\lambda_6[69] = 1$, $\lambda_6[481] = 1$, $\lambda_6[498] = -1$, $\lambda_6[577] = -1$, $\lambda_6[601] = 1$, $\lambda_6[591] = 1$, $\lambda_6[655] = -1$
- $i = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[50] = -1$, $\lambda_6[59] = 1$, $\lambda_6[493] = 1$, $\lambda_6[496] = -1$, $\lambda_6[396] = 1$, $\lambda_6[430] = -1$, $\lambda_6[562] = -1$, $\lambda_6[570] = 1$
- $i = j_0$ y $j = l_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[245] = 1$, $\lambda_6[337] = -1$, $\lambda_6[410] = -1$, $\lambda_6[427] = 1$, $\lambda_6[445] = 1$, $\lambda_6[449] = -1$, $\lambda_6[530] = -1$, $\lambda_6[547] = 1$
- $i = j_0$ y $k = l_0 (i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[301] = 1$, $\lambda_6[305] = -1$, $\lambda_6[314] = -1$, $\lambda_6[331] = 1$, $\lambda_6[211] = -1$, $\lambda_6[235] = 1$, $\lambda_6[401] = 1$, $\lambda_6[407] = -1$
- $i = j_0$ y $i' = l_0 (i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_6[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[63] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[301] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[605] = \frac{1}{2}$, $\lambda_6[618] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[665] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[277] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_6[659] = \frac{1}{2}$
- $i = l_0$ y $j = j_0 (i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[601] = 1$, $\lambda_6[602] = -1$, $\lambda_6[122] = -1$, $\lambda_6[123] = 1$, $\lambda_6[310] = 1$, $\lambda_6[330] = -1$, $\lambda_6[664] = -1$, $\lambda_6[672] = 1$
- $i = l_0$ y $k = j_0 (i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[56] = -1$, $\lambda_6[60] = 1$, $\lambda_6[340] = -1$, $\lambda_6[495] = 1$, $\lambda_6[496] = -1$, $\lambda_6[548] = 1$, $\lambda_6[283] = 1$, $\lambda_6[539] = -1$
- $j = i_0$ y $k = j_0 (i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[248] = -1$, $\lambda_6[252] = 1$, $\lambda_6[315] = 1$, $\lambda_6[316] = -1$, $\lambda_6[475] = -1$, $\lambda_6[571] = 1$, $\lambda_6[407] = 1$, $\lambda_6[563] = -1$

- $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[61] = 1$, $\lambda_6[67] = -1$, $\lambda_6[439] = -1$, $\lambda_6[463] = 1$, $\lambda_6[505] = 1$, $\lambda_6[625] = -1$, $\lambda_6[514] = -1$, $\lambda_6[634] = 1$
- $j = j_0$ y $k = l_0(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[126] = 1$, $\lambda_6[170] = -1$, $\lambda_6[506] = -1$, $\lambda_6[517] = 1$, $\lambda_6[309] = -1$, $\lambda_6[345] = 1$, $\lambda_6[312] = 1$, $\lambda_6[358] = -1$
- $j = k_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[7] = 1$, $\lambda_6[10] = -1$, $\lambda_6[58] = -1$, $\lambda_6[66] = 1$, $\lambda_6[616] = 1$, $\lambda_6[618] = -1$, $\lambda_6[141] = -1$, $\lambda_6[142] = 1$
- $j = l_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[55] = 1$, $\lambda_6[58] = -1$, $\lambda_6[335] = 1$, $\lambda_6[615] = -1$, $\lambda_6[616] = 1$, $\lambda_6[671] = -1$, $\lambda_6[282] = -1$, $\lambda_6[660] = 1$

4. Exactamente tres de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.

   Para las siguientes posibilidades consideramos los caminos y λ del caso 1 tomando como comienzo del camino:

   - Si $i = i_0$ y $\{i', j, k\} \subset \{j_0, k_0\} \neq \emptyset \to v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}$
   - Si $i = l_0$, $\{i', j, k\} \subset \{i_0, k_0\} \neq \emptyset$ y $i' \neq i_0 \to v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}$
   - Si $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = l_0 \to v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}$
   - Si $i = k_0$, $j = l_0$ y $k = i_0 \to v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}$

   Para los casos que nos falta analizar definimos los multiplicadores λ_5 que nos permite probar la igualdad deseada.

   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
     $\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[58] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[1] = -1$, $\lambda_5[7] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[37] = -1$, $\lambda_5[107] = 1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[106] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[51] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[25] = -1$, $\lambda_5[103] = 1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[105] = -1$, $\lambda_5[63] = 1$, $\lambda_5[114] = -1$.
   - $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = j)$
     $\lambda_5[68] = 1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[30] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[56] = 1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[72] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.

- $i = i_0$, $j = l_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$.
- $i = i_0$, $k = l_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[50] = 1$, $\lambda_5[61] = -1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[113] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[46] = -1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[27] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[93] = -1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[61] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[63] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[82] = 1$, $\lambda_5[94] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[5] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[119] = 0$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[39] = -0$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[5] = 1$, $\lambda_5[14] = -1$, $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[7] = -1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[27] = -1$, $\lambda_5[37] = 1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[107] = -1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[34] = 1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[106] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[68] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[5] = 1$, $\lambda_5[14] = -1$, $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[61] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[33] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[106] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.
- $i = j_0$, $k = k_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[58] = -1$, $\lambda_5[60] = 1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$

$\lambda_5[6] = 1$, $\lambda_5[14] = -1$, $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.

- $i = j_0$, $j = l_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[39] = -1$, $\lambda_5[106] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
- $i = j_0$, $k = l_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[45] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[84] = 1$.
- $i = l_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[65] = 1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[45] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[46] = 1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[79] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[106] = 1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[105] = -1$, $\lambda_5[63] = 1$, $\lambda_5[81] = -1$, $\lambda_5[66] = -1$, $\lambda_5[94] = 1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[51] = -1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[68] = 1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$.
- $i = l_0$, $k = j_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[68] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[93] = -1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$.
- $i = l_0$, $j = k_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[68] = 1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$.
- $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[27] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[42] = 1$.
- $i = k_0$, $j = l_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[71] = 1$, $\lambda_5[89] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[36] = -1$, $\lambda_5[40] = 1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[46] = 1$.

- *Demostración Caso 2:* Reemplazando e por su definición y utilizando el *Caso 1*, debemos probar, $\forall i \neq i_0, j_0$ y $\forall j \neq i_0, j_0, l_0$ que

$$-\delta_{i_0 j j_0} + \gamma_{i_0 j_0} - \delta_{k_0 j_0 l_0} + \gamma_{k_0 l_0} + \delta_{i_0 j_0 l_0} - \gamma_{i_0 l_0} = -\delta_{i j j_0} + \gamma_{i j_0}$$

Definimos el λ_5 correspondiente a cada una de las alternativas posibles son:

1. $i \neq l_0$ y $j = k_0$ $(i_2 = i)$
   $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[43] = 1$, $\lambda_5[44] = -1$.

2. $i = k_0$ $(i_2 = j)$
   $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[16] = 1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[21] = -1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[29] = 1$.
3. $i = l_0$ y $j \neq k_0$ $(i_2 = j)$
   $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[21] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[29] = 1$.
4. $i = l_0$ y $j = k_0$ $(i_2 libre)$
   $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[103] = 1$, $\lambda_5[104] = -1$.
5. $i \neq l_0, k_0$ y $j \neq k_0$
   En este caso, consideramos las soluciones definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_j\ v_{k_0}$
   2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
   3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_j$
   4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{j_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
   5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_i$
   6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{j_0}$
   7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_j$
   8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_j\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$

   donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_j, v_i\}$ y

$$\lambda = (-1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)$$

- *Demostración Caso 3:* La primera igualdad que debemos demostrar es:

$$\delta_{k_0 j_0 l_0} - \gamma_{k_0 l_0} + \gamma_{i l_0} - \delta_{i j_0 l_0} = -\delta_{k_0 j_0 i_0} + \gamma_{k_0 i_0} - \gamma_{i i_0} + \delta_{i j_0 i_0}$$

  Por los casos anteriores, podemos asumir $i \neq k_0, j_0, l_0, i_0$. Asumimos $i_2 = i$ y definimos $\lambda_5[7] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[26] = 1$, $\lambda_5[27] = -1$, $\lambda_5[43] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[58] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.

  Utilizando el *Caso 2*, nos queda por demostrar, $\forall i \neq i_0, j_0$

$$-\delta_{i_0 l_0 j_0} + \gamma_{i_0 j_0} = -\delta_{i l_0 j_0} + \gamma_{i j_0}$$

  Para esto, tomamos $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[48] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[118] = 1$.

- *Demostración Caso 4:* Debemos probar que

$$\beta_i + \gamma_{k i'} - \delta_{j i k} - \sum_{r=1\ r \neq i,k}^{n} \delta_{k i r} = \beta_{i'} + \gamma_{k i} - \delta_{j i' k} - \sum_{r=1\ r \neq i',k}^{n} \delta_{k i' r}$$

  Podemos asumir $j, k \neq i_0, j_0, l_0, k_0$.

  Si $i, i' \neq i_0, j_0, l_0, k_0$, consideramos los caminos PR

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j'}$

2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j'}$

3: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

4: $v_0\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{j'}$

6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{j'}$

7: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

8: $v_0\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}\}$.

Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ se obtiene la igualdad deseada.

Para lo siguientes casos sea $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i_0}, v_j, v_k, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}\}$.

- Si $i' = i_0$, en los caminos anteriores reemplazamos $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$ por $v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$.
- Si $i' = j_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$.
- Si $i' = l_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$.
- Si $i' = k_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$.

En los tres casos con $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad deseada.

- *Demostración Caso 5:* Hay tres alternativas:

1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_j\ v_i$

   2: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_i\ v_j$

   con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_k.v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.
2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   En los caminos PR anteriores suprimir el cliente correspondiente, y en el caso de j_0 invertir el orden de v_{k_0} y v_{l_0}. Considerar los mismos coeficientes λ.
3. Los dos índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   En los caminos PR anteriores suprimir los dos clientes v_i, v_j. En el caso que $i, j = \{j_0, l_0\}$, considerar a v_k como v_{i_0}. En todos los casos usar los mismos multiplicadores λ.

- *Demostración Caso 6:* La definción de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-3}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

2: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-3}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-3}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}v_k\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

□

Proposición A.2 *(Familia 3) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{k_0}_{j_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{j_0 k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que la desigualdad determina una faceta. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia 3*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $\forall i < j$, $(i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $\forall i < j$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $\forall (i, j) \neq (j_0, k_0)$
- $\gamma_{j_0 k_0} = -c_{j_0 k_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}$ $\forall (i, j, k) \neq (i_0, k_0, j_0), (k_0, i_0, j_0), (j_0, k_0, i_0)$
- $\delta_{k_0 i_0 j_0} = -c_{k_0 j_0} - b_{i_0 j_0} + e$
- $\delta_{i_0 k_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} - b_{k_0 j_0} + e$
- $\delta_{j_0 k_0 i_0} = -c_{j_0 i_0} - b_{k_0 i_0} - e$
- $\beta_i = d - \sum_{j=1\ j \neq i}^{n} b_{ij}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ $\forall (i, j) \neq (j_0, k_0)$
- $b_{jk} = \gamma_{ik} - \delta_{ijk}$ $\forall (i, j, k) \neq (i_0, k_0, j_0), (k_0, i_0, j_0), (j_0, k_0, i_0)$
- $e = \delta_{i_0 j_0 k_0} + b_{j_0 k_0} + c_{i_0 k_0}$
- $b_{j k_0} = \gamma_{j_0 k_0} - \delta_{j_0 j k_0} - e$

- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ $\forall i < j$ $(i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $a_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} + e$
- $c_{j_0 k_0} = -\gamma_{j_0 k_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{j=1 i \neq j}^{n} b_{ij}$ (para cualquier i)

Para que las definiciones anteriores sean consistentes y correctas, debemos ver que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$\gamma_{ik} - \delta_{ijk} - \gamma_{i'k} + \delta_{i'jk} = 0$$

  $\forall i, i', j, k$ tal que $(i,j,k), (i',j,k) \neq (i_0, k_0, j_0), (k_0, i_0, j_0), (j_0, k_0, i_0)$ y $(i,k) \neq (j_0, k_0)$.

- *Caso 2:* La definición de b_{jk_0} no depende del i:

$$\gamma_{j_0 k_0} - \delta_{j_0 j k_0} - e - \gamma_{i k_0} + \delta_{i j k_0} = 0$$

  $\forall i, j$, tal que $i, j \notin \{j_0, k_0\}$.

- *Caso 3:* La definición de e es consistente:

$$e = \delta_{k_0 i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{k_0 j_0} = \delta_{i_0 k_0 j_0} + b_{k_0 j_0} + c_{i_0 j_0} = -\delta_{j_0 k_0 i_0} - b_{k_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

- *Caso 4:* La definición de a_{ij} es consistente:

$$a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji} \;\; \forall i < j, \;\; (i,j) \neq (i_0, j_0)$$

- *Caso 5:* La definición de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

- *Caso 6:* La definición de d no depende del i:

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \sum_{r=1 r \neq i,k}^{n} \delta_{kir} - \delta_{jik} = \beta_{i'} - \gamma_{ki} + \sum_{r=1 r \neq i',k}^{n} \delta_{ki'r} + \delta_{ji'k} \;\; \forall i, i'$$

Mostramos los caminos PR y el λ que permiten probar cada uno de los requisitos anteriores.

- *Demostración Caso 1:* Hay 4 posibilidades:

1. $i', i, j, k \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Sean los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   2: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   3: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   6: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$
   7: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
   9: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   10: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   11: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   12: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$

   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, j_0, k_0\}$.
   Definimos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Exactamente uno de los índices i', i, j, k pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$.
   Consideramos los mismos caminos PR y λ que en el ítem anterior, excluyendo del comienzo de los caminos el cliente v_{i_0}, v_{j_0} ó v_{k_0} según sea el caso.

3. Exactamente dos de los índices i', i, j, k pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$.

   a) Dos de los índices i, j, k, i' son i_0 y k_0.
   Nuevamente tomamos los caminos PR y λ anteriores, excluyendo del comienzo de los caminos los clientes v_{i_0} y v_{k_0}.

   b) Dos de los índices i, j, k, i' son j_0 y k_0.
   Se presentan 5 casos:

   - $i = j_0$, $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[19] = -1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[56] = -1$.
   - $i = j_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
     $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[19] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[77] = 1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$.
   - $i = k_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
   - $i = k_0$, $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[100] = -1$.
   - $j = j_0$, $k = k_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
     $\lambda_5[30] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $j = k_0$, $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
     $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[87] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.

c) Dos de los índices i, j, k, i' son i_0 y j_0.
Se presentan 5 casos:

- $i = i_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$.
- $i = i_0$, $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[23] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[27] = 1$, $\lambda_5[30] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
- $i = i_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[7] = 1$, $\lambda_5[9] = -1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[100] = 1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[63] = 1$, $\lambda_5[114] = -1$.
- $j = i_0$, $i = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[9] = 1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[100] = -1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $k = i_0$, $i = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[60] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$, $\lambda_5[112] = -1$.
- $j = i_0$, $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[43] = -1$, $\lambda_5[47] = 1$.
- $k = i_0$, $j = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[43] = -1$, $\lambda_5[47] = 1$.

4. Tres de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$.

- $i = i_0$, $j = j_0$, $k = k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = -0{,}5$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = i_0$, $j = j_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = i_0$, $k = j_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = i_0$, $j = k_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = j_0$, $j = i_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{5}$,

$\lambda_4[7] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{5}$.

- $i = j_0$, $k = i_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{5}$
- $i = j_0$, $j = k_0$, $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{5}$.
- $i = k_0$, $j = i_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = k_0$, $k = i_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[16] = 1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = k_0$, $j = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[18] = 1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{5}$.
- $i = k_0$, $j = j_0$, $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{5}$.
- $i = k_0$, $k = j_0$, $i' = i_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[14] = 1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{5}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{5}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{5}$.

- *Demostración Caso 2:* Tenemos que probar que

$$-\delta_{j_0jk_0} - \delta_{k_0i_0j_0} - \gamma_{ij_0} - \gamma_{ik_0} + \gamma_{j_0k_0} + \gamma_{k_0j_0} + \delta_{ii_0j_0} + \delta_{ijk_0} = 0 \ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0 \ j \neq j_0, k_0$$

Si $j \neq i_0$ $(i_1 = i, i_2 = j)$, sean $\lambda_5[12] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[26] = 1$, $\lambda_5[32] = 1$, $\lambda_5[35] = -1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[69] = 1$, $\lambda_5[104] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$.

Si $j = i_0$ $(i_1 = i)$, sean $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[46] = -1$, $\lambda_5[100] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[103] = 1$, $\lambda_5[104] = -1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$, $\lambda_5[116] = 1$, $\lambda_5[117] = -1$.

- *Demostración Caso 3:*

Para probar que

$$e = \delta_{k_0i_0j_0} + b_{i_0j_0} + c_{k_0j_0} = \delta_{i_0k_0j_0} + b_{k_0j_0} + c_{i_0j_0}$$

Consideramos $\lambda_4[11] = 1$, $\lambda_4[12] = -1$, $\lambda_4[20] = -1$, $\lambda_4[23] = 1$ $(i_1 = i)$.

Para el caso

$$e = \delta_{k_0 i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{k_0 j_0} = -\delta_{j_0 k_0 i_0} - b_{k_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

sean $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[7] = 1$, $\lambda_4[8] = 1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[11] = 1$, $\lambda_4[12] = -1$, $\lambda_4[14] = 1$, $\lambda_4[18] = -1$, $\lambda_4[20] = -1$, $\lambda_4[22] = 1$ $(i_1 = i)$.

- *Demostración Caso 4:*

  Hay tres alternativas:

  1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

     1: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-6}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$
     2: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-6}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$

     con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_k.v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.
  2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
     En los caminos PR anteriores suprimir el cliente correspondiente y considerar los mismos coeficientes λ.
  3. Los dos índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$
     En los caminos PR anteriores suprimir los dos clientes v_i, v_j. En el caso que $i, j = \{j_0, k_0\}$, considerar a v_k como v_{i_0}. En todos los casos usar los mismos multiplicadores λ.

- *Demostración Caso 5:* La definción de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

  $$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

  Sean $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[5] = -1$, $\lambda_4[7] = -1$, $\lambda_4[8] = 1$, $\lambda_4[9] = -1$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[11] = 1$, $\lambda_4[12] = -1$, $\lambda_4[14] = 1$, $\lambda_4[18] = -1$, $\lambda_4[20] = -1$, $\lambda_4[22] = 1$ $(i_1 = i)$.

- *Demostración Caso 6:* Debemos probar que

  $$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1\ r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} = \beta_{i'} + \gamma_{ki} - \delta_{ji'k} - \sum_{r=1\ r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r}$$

  Podemos asumir $j, k \neq i_0, j_0, k_0$.

  Si $i, i' \neq i_0, j_0, k_0$, consideramos los caminos PR

  1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j$
  2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_j$
  3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
  4: $v_0\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
  5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j$
  6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j$
  7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i$
  8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.

Definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ para probar la igualdad deseada.

Para los casos en que $i, i' \in \{i_0, j_0, k_0\}$ basta considerar los mismos caminos y multiplicadores sacando de la terna v_{j_0} v_{i_0} v_{k_0} del camino, el cliente correspondiente.

□

Proposición A.3 *(Familia 4) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{k_0}_{i_0 j_0} + f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Veamos que la desigualdad determina una faceta. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia4*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $\forall i < j$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $(\forall (i, j) \neq (i_0, j_0))$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}$ $\forall (i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0), (k_0, i_0, j_0), (i_0, k_0, j_0)$
- $\delta_{i_0 j_0 k_0} = -c_{i_0 k_0} - b_{j_0 k_0} + e$
- $\delta_{k_0 i_0 j_0} = -c_{k_0 j_0} - b_{i_0 j_0} + e$
- $\delta_{k_0 j_0 i_0} = -c_{i_0 j_0} - b_{k_0 j_0} + e$
- $\beta_i = d - \sum_{j=1\ j \neq i}^{n} b_{ij}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ $\forall (i, j)$
- $b_{jk} = \gamma_{ik} - \delta_{ijk}$ $\forall (i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0), (k_0, i_0, j_0), (i_0, k_0, j_0)$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ $\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, j_0)$

- $a_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e$
- $e = \delta_{i_0j_0k_0} + b_{j_0k_0} + c_{i_0k_0}$
- $d = \beta_i + \sum_{j=1 i\neq j}^{n} b_{ij}$ (para cualquier i)

Para que las definiciones anteriores sean consistentes y correctas, debemos ver que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$\gamma_{ik} - \delta_{ijk} - \gamma_{i'k} + \delta_{i'jk} = 0$$

  $\forall i, i', j, k$ tal que $(i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0), (k_0, i_0, j_0), (i_0, k_0, j_0)$

- *Caso 2:* La definición de e es consistente:

$$e = \delta_{k_0i_0j_0} + b_{i_0j_0} + c_{k_0j_0} = \delta_{i_0k_0j_0} + b_{k_0j_0} + c_{i_0j_0}$$

- *Caso 3:* La definición de a_{ij} es consistente:

$$a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$$

- *Caso 4:* La definición de $a_{i_0j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0j_0} = \alpha_{j_0i_0} - b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

  .

- *Caso 5:* Para ver que la definición de d no depende del i, debemos probar $\forall i'$ que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \sum_{r=1 r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} - \delta_{jik} = \beta_{i'} - \gamma_{ki} + \sum_{r=1 r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r} + \delta_{ji'k}$$

Mostramos los caminos PR y el λ que permite probar cada uno de los requisitos anteriores.

- *Demostración Caso 1:* Hay 4 posibilidades:

  1. $i', i, j, k \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     Sean los siguientes caminos PR:

     1: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
     2: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
     3: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
     4: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
     5: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
     6: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$
     7: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
     8: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
     9: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
     10: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
     11: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
     12: $v_0\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$

donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, k_0\}$.
Definimos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Exactamente uno de los índices i, j, k, i' pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
   Consideramos los mismos caminos PR y λ que en el caso 1, excluyendo del comienzo de los caminos el cliente v_{i_0} ó v_{j_0} ó v_{k_0} según sea el caso.
3. Exactamente dos de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$.
   - Dos de los índices i', i, j, k son i_0 y k_0.
     Nuevamente tomamos los caminos PR y λ del caso 1, excluyendo del comienzo de los caminos los clientes v_{i_0} y v_{k_0}.
   - Dos de los índices i', i, j, k son j_0 y k_0. Se presentan 14 casos:
     a) $i = j_0$ y $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[5] = 1$, $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[74] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[116] = -1$
     b) $i = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
     $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[7] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$
     c) $i = j_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[6] = 1$, $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[74] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[116] = -1$
     d) $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
     $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[83] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[64] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$
     e) $i = k_0$ y $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[38] = -1$, $\lambda_5[93] = -1$, $\lambda_5[107] = 1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[57] = 1$, $\lambda_5[96] = 1$, $\lambda_5[112] = -1$
     f) $i = k_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$, $\lambda_5[79] = 1$, $\lambda_5[117] = -1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[63] = -1$, $\lambda_5[36] = -1$, $\lambda_5[72] = 1$
     g) $j = k_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
     $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[87] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$
     h) $i = i_0$ y $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$
     i) $i = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[54] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[120] = -1$
     j) $i = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
     $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$

k) $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
$\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[100] = 1$, $\lambda_5[37] = 1$, $\lambda_5[41] = -1$

l) $i = j_0$ y $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
$\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$

m) $i = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = j')$
$\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[70] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$

n) $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
$\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[72] = -1$

4. Exactamente tres de los índices i', i, j, k pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$.
Se presentan 10 casos.

a) $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
$\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

b) $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
$\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

c) $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i')$
$\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -1$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[11] = 1$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$

d) $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
$\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$

e) $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
$\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -1$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$

f) $i = j_0$, $j = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
$\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$

g) $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
$\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[18] = 1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

h) $i = i_0$, $k = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
$\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$,

$\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

i) $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
$\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

j) $i = k_0$, $k = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
$\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[16] = 1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$

- *Demostración Caso 2:* Para probar

$$\delta_{i_0j_0k_0} - \delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0} - \gamma_{i_0k_0} = \delta_{ki_0j_0} - \delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} - \gamma_{k_0j_0}$$

definimos $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -1$, $\lambda_4[20] = 1$, $\lambda_4[7] = 1$, $\lambda_4[11] = -1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[15] = -1$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[16] = 1$, $\lambda_4[18] = 1$ $(i_1 = i)$.

Para probar

$$\delta_{ki_0j_0} - \delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} - \gamma_{k_0j_0} = \delta_{i_0k_0j_0} - \delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0} - \gamma_{i_0j_0}$$

definimos $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -1$, $\lambda_4[23] = 1$, $\lambda_4[7] = 1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[12] = -1$, $\lambda_4[15] = -1$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[16] = 1$, $\lambda_4[18] = 1$ $(i_1 = i)$.

- *Demostración Caso 3:* Utilizando las definiciones correspondientes, debemos ver que

$$\alpha_{ji} + \delta_{kji} + \gamma_{ji} + \gamma_{kj} = \alpha_{ij} + \delta_{kij} + \gamma_{ij} + \gamma_{ki}$$

Podemos suponer $k \neq i_0, j_0, k_0$. Se presentan 3 posibilidades:

1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Sean los siguientes caminos PR:
   - 1: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$
   - 2: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$

   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$ y $\lambda = (1, -1)$.
2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$. Consideramos los caminos PR y los multiplicadores λ anteriores, suprimiendo del comienzo del camino el cliente correspondiente.
3. $i, j \in \{i_0, j_0, k_0\}$. Hay 2 posibilidades:
   - $i, j \in \{i_0, k_0\}$
     Nuevamente, tomamos los caminos PR y el λ anteriores, suprimiendo del comienzo del camino los clientes v_{i_0} y v_{k_0}.

- $i, j \in \{j_0, k_0\}$
  Definimos $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = 1$, $\lambda_4[19] = 1$, $\lambda_4[20] = 1$, $\lambda_4[23] = -1$, $\lambda_4[7] = -1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[9] = -1$, $\lambda_4[15] = 1$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[12] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[18] = -1$ $(i_1 = k)$.

- *Demostración Caso 4:* Reemplazando e por su definición, tenemos que probar que

$$\alpha_{i_0 j_0} + \delta_{i i_0 j_0} + \delta_{i_0 k_0 j_0} - \delta_{i k_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} + \delta_{i j_0 i_0} - \gamma_{i i_0} + \gamma_{j_0 i_0}$$

Definimos $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[11] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[12] = 1$, $\lambda_4[18] = -1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$ $(i_1 = i)$.

- *Demostración Caso 5:* Consideramos $k, j \neq i_0, j_0, k_0$.
  Sean los siguientes caminos PR:

  - $i, i' \neq i_0, j_0, k_0$

    1: $0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_j$
    2: $0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_j$
    3: $0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}$
    4: $0\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}$
    5: $0\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_j$
    6: $0\ v_k\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_j$
    7: $0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i$
    8: $0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i$

    donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.
    Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad buscada.

  - $i = k_0$
    Consideremos las soluciones definidas por:

    1: $v_0\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_j$
    2: $v_0\ v_k\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_j$
    3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$
    4: $v_0\ v_j\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}$
    5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j$
    6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j$
    7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}$
    8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}$

    donde $\{j_1, \dots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.
    Definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$.

  - $i' = j_0$
    Sean los caminos PR definidos por:

    1: $v_0\ v_i\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j$
    2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_j$
    3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}$
    4: $v_0\ v_j\ v_i\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}$
    5: $v_0\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j$
    6: $v_0\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j$
    7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_i$
    8: $v_0\ v_j\ v_{j_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-6}}\ v_{k_0}\ v_i$

    donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.
    Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad buscada.

- $i = i_0$. Podemos asumir que $i' = j_0$
  Sean los siguientes caminos PR:

  1: $v_0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_j$
  2: $v_0\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_j$
  3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}$
  4: $v_0\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}$
  5: $v_0\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_j$
  6: $v_0\ v_k\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_j$
  7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}$
  8: $v_0\ v_j\ v_{j_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}$

  donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.
  Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad buscada.

□

Proposición A.4 *(Familia 5) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \dots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{i_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 l_0} + f^{j_0}_{k_0 l_0} \leq x_{i_0 j_0} + f^{i_0}_{k_0 l_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Demostración:
Vamos a suponer que $i_0 < j_0$. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \dots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \dots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia5*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\ \forall i < j\ (i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}\ \forall i < j$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}\ \forall (i, j) \neq (i_0, j_0)$
- $\gamma_{i_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}\ \forall (i, j, k) \neq (i_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, i_0)$
- $\delta_{i_0 l_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} - b_{l_0 j_0} + e$
- $\delta_{k_0 l_0 j_0} = -c_{k_0 j_0} - b_{l_0 j_0} + e$
- $\delta_{k_0 l_0 i_0} = -c_{k_0 i_0} - b_{l_0 i_0} - e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r \neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}\ \forall (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $e = \delta_{k_0 l_0 i_0} - c_{k_0 i_0} - b_{l_0 i_0}$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + \gamma_{ik}$ para algún i y $\forall (i,j,k) \neq (i_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, i_0),\ (i,k) \neq (i_0, j_0)$
- $b_{jj_0} = -\delta_{i_0 j j_0} + \gamma_{i_0 j_0} - e$
- $c_{i_0 j_0} = -\gamma_{i_0 j_0} + e$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}\ \forall i < j,\ (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $a_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$ (para cualquier i)

Para que las definiciones verifiquen las condiciones enunciadas anteriormente y sean consistentes, debemos probar que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{i'k}$$

  $\forall (i,j,k), (i',j,k) \neq (i_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, j_0), (k_0, l_0, i_0)$ y $(i,k), (i',k) \neq (i_0, j_0)$

- *Caso 2:* La definición de b_{jj_0} es consistente:

$$-\delta_{i_0 j j_0} + \gamma_{i_0 j_0} - e = -\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0}\ \ \forall i \neq i_0, j_0\ j \neq i_0, j_0, l_0$$

- *Caso 3:* La definición de $b_{l_0 j_0}$ es consistente:

$$-\delta_{il_0 j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0 l_0 j_0} + \gamma_{i_0 j_0}\ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0$$

$$-\delta_{il_0 j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{k_0 l_0 j_0} + \gamma_{k_0 j_0} + e\ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0$$

- *Caso 4:* La definción de a_{ij} es consistente:

$$a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}\ \ \forall i < j,\ (i,j) \neq (i_0, j_0)$$

- *Caso 5:* La definición de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

- *Caso 6:* La definición de d no depende de i. Para todo $i \neq i'$ se debe cumplir:

$$\beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1\ r\neq i'}^{n} b_{i'r}$$

Probamos cada ítem mostrando los caminos de PR y el λ que nos permiten obtener la igualdad buscada.

- *Demostración Caso 1:* Vamos a considerar 5 posibilidades:

1. $i, j, k, i' \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   Sean los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   3: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   6: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$
   7: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
   9: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   10: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   11: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   12: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$

   donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$.
   Definamos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Exactamente uno de los índices i, j, k, l pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Consideramos los multiplicadores λ y caminos PR del caso 1, modificando el comienzo de los caminos según el caso:

   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{j_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset$, el comienzo del camino será $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$.
   - Si $\{i, j, k, l\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset$, excluímos a v_{l_0} del comienzo del camino.

3. Exactamente dos de los índices i, j, k, l pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Para las siguientes posibilidades consideramos los caminos y λ del caso 1, tomando como comienzo del camino:

   - $i = i_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
   - $i = i_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
   - $i = j_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{j, k\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{j, k\} \cap \{j_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
   - $i = k_0$ y $\{i', j, k\} \cap \{l_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
   - $i = l_0$ y $\{j, k\} \cap \{i_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
   - $i = l_0$ y $\{j, k\} \cap \{k_0\} \neq \emptyset \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
   - $j = i_0$ y $k = k_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
   - $j = i_0$ y $k = l_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
   - $j = j_0$ y $k = k_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
   - $j = k_0$ y $k = i_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$

- $j = k_0$ y $k = j_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
- $j = k_0$ y $k = l_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
- $j = l_0$ y $k = i_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
- $j = l_0$ y $k = k_0 \rightarrow v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

Para los casos que nos falta analizar exponemos los multiplicadores λ que debemos considerar:

- $i = i_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[242] = -0{,}5$, $\lambda_6[362] = -0{,}5$, $\lambda_6[529] = 0{,}5$, $\lambda_6[553] = 0{,}5$, $\lambda_6[345] = 0{,}5$, $\lambda_6[465] = 0{,}5$, $\lambda_6[550] = -0{,}5$, $\lambda_6[574] = -0{,}5$.
- $i = i_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_6[495] = -1$, $\lambda_6[498] = 1$, $\lambda_6[136] = -1$, $\lambda_6[630] = 1$, $\lambda_6[567] = 1$, $\lambda_6[210] = 1$, $\lambda_6[576] = -1$, $\lambda_6[648] = -1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[248] = -1$, $\lambda_6[531] = 1$, $\lambda_6[590] = -1$, $\lambda_6[651] = 1$, $\lambda_6[299] = 1$, $\lambda_6[663] = -1$, $\lambda_6[544] = -1$, $\lambda_6[594] = 1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[32] = -1$, $\lambda_6[33] = 1$, $\lambda_6[105] = 1$, $\lambda_6[106] = -1$, $\lambda_6[300] = 1$, $\lambda_6[304] = -1$, $\lambda_6[664] = -1$, $\lambda_6[666] = 1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[251] = 1$, $\lambda_6[316] = -1$, $\lambda_6[599] = -1$, $\lambda_6[689] = 1$, $\lambda_6[146] = -1$, $\lambda_6[157] = 1$, $\lambda_6[588] = 1$, $\lambda_6[640] = -1$.
- $i = j_0$, $k = l_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[433] = 1$, $\lambda_6[449] = -1$, $\lambda_6[458] = 1$, $\lambda_6[475] = -1$, $\lambda_6[482] = -1$, $\lambda_6[547] = 1$, $\lambda_6[605] = -1$, $\lambda_6[697] = 1$.
- $i = j_0$, $i' = l_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_6[13] = -0{,}5$, $\lambda_6[63] = 0{,}5$, $\lambda_6[301] = 0{,}5$, $\lambda_6[605] = 0{,}5$, $\lambda_6[618] = -0{,}5$, $\lambda_6[665] = -0{,}5$, $\lambda_6[277] = -0{,}5$, $\lambda_6[659] = 0{,}5$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[242] = -1$, $\lambda_6[251] = 1$, $\lambda_6[337] = 1$, $\lambda_6[339] = -1$, $\lambda_6[529] = 1$, $\lambda_6[532] = -1$, $\lambda_6[547] = -1$, $\lambda_6[548] = 1$.
- $i = l_0$, $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[12] = -1$, $\lambda_6[71] = 1$, $\lambda_6[529] = 1$, $\lambda_6[532] = -1$, $\lambda_6[547] = -1$, $\lambda_6[548] = 1$, $\lambda_6[604] = 1$, $\lambda_6[617] = -1$.
- $j = i_0$, $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[242] = -1$, $\lambda_6[252] = 1$, $\lambda_6[529] = 1$, $\lambda_6[532] = -1$, $\lambda_6[603] = 1$, $\lambda_6[698] = -1$, $\lambda_6[219] = -1$, $\lambda_6[236] = 1$.
- $j = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[65] = -1$, $\lambda_6[71] = 1$, $\lambda_6[453] = 1$, $\lambda_6[477] = -1$, $\lambda_6[145] = 1$, $\lambda_6[146] = -1$, $\lambda_6[274] = -1$, $\lambda_6[276] = 1$.

- $j = j_0$, $k = l_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[148] = -1$, $\lambda_6[632] = 1$, $\lambda_6[175] = 1$, $\lambda_6[639] = -1$, $\lambda_6[441] = 1$, $\lambda_6[519] = -1$, $\lambda_6[454] = -1$, $\lambda_6[588] = 1$.
- $j = l_0$, $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[60] = 1$, $\lambda_6[64] = -1$, $\lambda_6[128] = -1$, $\lambda_6[129] = 1$, $\lambda_6[234] = -1$, $\lambda_6[240] = 1$, $\lambda_6[696] = 1$, $\lambda_6[720] = -1$.

4. Exactamente tres de los índices i, j, k, l pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.

   Para las siguientes posibilidades consideramos los caminos y λ del caso 1 poniendo en el comienzo del camino a v_{j_0}:

   1: $i = i_0$, $j = k_0$ y $k = l_0$
   2: $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = l_0$
   3: $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = l_0$
   4: $i = i_0$, $j = l_0$ y $k = k_0$
   5: $i = i_0$, $j = l_0$ y $i' = k_0$
   6: $i = i_0$, $k = l_0$ y $i' = k_0$
   7: $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$
   8: $i = k_0$, $j = i_0$ y $i' = l_0$
   9: $i = k_0$, $k = i_0$ y $i' = l_0$
   10: $i = l_0$, $j = i_0$ y $k = k_0$
   11: $i = l_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$

   Para los casos que nos falta analizar definimos el λ que nos permite probar la igualdad deseada.

   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
     $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
     $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[79] = 1$, $\lambda_5[93] = -1$, $\lambda_5[103] = 1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[37] = -1$, $\lambda_5[107] = 1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.
   - $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = j)$
     $\lambda_5[9] = -1$, $\lambda_5[10] = 1$, $\lambda_5[14] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[63] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = l_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = k)$
     $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$.
   - $i = i_0$, $k = l_0$ y $i' = j_0$ $(i_2 = j)$
     $\lambda_5[50] = 1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$.

- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[68] = -1$, $\lambda_5[100] = 1$, $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[69] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[9] = 1$, $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[100] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[25] = -1$, $\lambda_5[103] = 1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[105] = -1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[40] = 1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[57] = 1$, $\lambda_5[87] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$, $\lambda_5[112] = -1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[58] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[112] = -1$, $\lambda_5[120] = 1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[5] = 1$, $\lambda_5[14] = -1$, $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[89] = -1$, $\lambda_5[35] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[40] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.
- $i = j_0$, $k = k_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[68] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[83] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[104] = -1$, $\lambda_5[69] = 1$, $\lambda_5[64] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[5] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[60] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[112] = -1$, $\lambda_5[120] = 1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[6] = 1$, $\lambda_5[14] = -1$, $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[51] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.
- $i = j_0$, $k = l_0$ y $i' = k_0$ $(i_2 = j)$

$\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[83] = 1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$.

- $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[118] = 1$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = l_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = k)$
  $\lambda_5[27] = 1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[83] = 1$, $\lambda_5[117] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[120] = 1$.
- $i = k_0$, $k = j_0$ y $i' = l_0$ $(i_2 = j)$
  $\lambda_5[89] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[40] = 1$, $\lambda_5[42] = -1$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$, $\lambda_5[118] = 1$, $\lambda_5[120] = -1$.
- $i = l_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[100] = 1$, $\lambda_5[37] = 1$, $\lambda_5[41] = -1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[30] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[70] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[94] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$.
- $i = l_0$, $j = k_0$ y $k = j_0$ $(i_2 = i')$
  $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[87] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.

- *Demostración Caso 2:* Debemos probar la consistencia en la definición de b_{jj_0}. Es decir,

$$-\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} - e = -\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} \quad \forall i \neq i_0, j_0 \; j \neq i_0, j_0, l_0 \; (i, j, j_0) \neq (i_0, l_0, j_0)$$

Reemplazando la definición de e, hay que probar que

$$-\delta_{ijj_0} - \gamma_{i_0j_0} - \delta_{k_0l_0i_0} - \gamma_{ii_0} + \delta_{il_0i_0} + \gamma_{ij_0} + \delta_{i_0jj_0} + \gamma_{k_0i_0} = 0$$

Definimos los valores de λ para los diferentes casos:

- $j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$ y $i \notin \{l_0, k_0\}$ $(i_1 = i, i_2 = j)$
  $\lambda_6[16] = -1$, $\lambda_6[18] = 1$, $\lambda_6[250] = -1$, $\lambda_6[502] = 1$, $\lambda_6[532] = 1$, $\lambda_6[590] = -1$, $\lambda_6[652] = 1$, $\lambda_6[665] = -1$, $\lambda_6[198] = -1$, $\lambda_6[210] = 1$, $\lambda_6[306] = 1$, $\lambda_6[546] = -1$.

- $j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$ y $i = l_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_6[20] = -1$, $\lambda_6[21] = 1$, $\lambda_6[502] = 1$, $\lambda_6[593] = -1$, $\lambda_6[671] = 1$, $\lambda_6[689] = -1$, $\lambda_6[198] = -1$, $\lambda_6[210] = 1$, $\lambda_6[576] = -1$, $\lambda_6[600] = 1$.
- $j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$ y $i = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_6[51] = -1$, $\lambda_6[118] = 1$, $\lambda_6[449] = -1$, $\lambda_6[615] = 1$, $\lambda_6[129] = 1$, $\lambda_6[144] = -1$, $\lambda_6[220] = -1$, $\lambda_6[240] = 1$, $\lambda_6[400] = 1$, $\lambda_6[688] = -1$, $\lambda_6[696] = 1$, $\lambda_6[714] = -1$.
- $j = k_0$ y $i \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$ $(i_1 = i)$
  $\lambda_6[1] = 1$, $\lambda_6[6] = -1$, $\lambda_6[9] = 1$, $\lambda_6[13] = -1$, $\lambda_6[52] = 1$, $\lambda_6[95] = -1$, $\lambda_6[25] = -1$, $\lambda_6[27] = 1$, $\lambda_6[31] = -1$, $\lambda_6[40] = -1$, $\lambda_6[42] = 1$, $\lambda_6[48] = 1$, $\lambda_6[64] = -1$, $\lambda_6[82] = 1$.
- $j = k_0$ y $i = l_0$
  $\lambda_6[1] = 1$, $\lambda_6[6] = -1$, $\lambda_6[9] = 1$, $\lambda_6[13] = -1$, $\lambda_6[68] = 1$, $\lambda_6[89] = -1$, $\lambda_6[25] = -1$, $\lambda_6[27] = 1$, $\lambda_6[35] = -1$, $\lambda_6[48] = 1$, $\lambda_6[64] = -1$, $\lambda_6[82] = 1$.

- *Demostración Caso 3:* Para la consistencia de la definición de $b_{l_0 j_0}$ tenemos dos casos:
  - $-\delta_{il_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0l_0j_0} + \gamma_{i_0j_0} \;\; \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0$
    $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[16] = 1$, $\lambda_5[89] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[82] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$ $(i_2 = i)$.
  - $-\delta_{il_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{k_0l_0j_0} + \gamma_{k_0j_0} + e \;\; \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0$
    $\lambda_5[1] = -1$, $\lambda_5[6] = 1$, $\lambda_5[51] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[48] = -1$, $\lambda_5[64] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$ $(i_2 = i)$.

- *Demostración Caso 4:* Hay tres alternativas:

  1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
     Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

     1: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$

     2: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$

     con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_k.v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.
  2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
     En los caminos PR anteriores suprimir el cliente correspondiente y considerar los mismos coeficientes λ.
  3. Los dos índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
     En los caminos PR anteriores suprimir los dos clientes v_i, v_j. En el caso que $\{i, j\} = \{j_0, l_0\}$, considerar a v_k como v_{i_0}. En todos los casos usar los mismos multiplicadores λ.

- *Demostración Caso 5:* La definción de $a_{i_0j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0j_0} = \alpha_{j_0i_0} - b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

Sean los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

2: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_0, v_{i_0}, v_{j_0}, v_k, v_{l_0}, v_{k_0}\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

- *Demostración Caso 6:* Debemos probar que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1\ r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} = \beta_{i'} + \gamma_{ki} - \delta_{ji'k} - \sum_{r=1\ r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r}$$

Podemos asumir $j, k \neq i_0, j_0, l_0, k_0$.

Si $i, i' \neq i_0, j_0, l_0, k_0$, consideramos los caminos PR

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j'}$

2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j'}$

3: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

4: $v_0\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{j'}$

6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_{j'}$

7: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

8: $v_0\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}\}$.

Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ se obtiene la igualdad deseada.

- Si $i' = i_0$, en los caminos anteriores reemplazamos $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$ por $v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$.
- Si $i' = j_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$.
- Si $i' = l_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$.
- Si $i' = k_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$.

En los tres casos con $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad deseada.

□

Proposición A.5 *(Familia 6) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \dots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f_{0i_0}^{i_0} + f_{i_0j_0}^{j_0} \leq x_{i_0j_0} + f_{i_0j_0}^{k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Vamos a suponer que $i_0 < j_0$. Debemos encontrar multiplicadores $a_{ij}\ v_i, j = 1, \dots, n\ i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), $b_{ij}\ v_i, j = 1, \dots, n\ i \neq j$ (ecuaciones 4.2), $c_{ij}\ v_i, j = 1, \dots, n\ i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia6*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\ \forall i < j\ (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}\ \forall i < j$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}\ \forall (i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $\gamma_{i_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}\ \forall (i,j,k) \neq (i_0, j_0, k_0)$
- $\delta_{i_0 j_0 k_0} = -c_{i_0 k_0} - b_{j_0 k_0} - e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}\ \forall i \neq i_0$
- $\beta_{i_0} = d - \sum_{r=1\ r\neq i_0}^{n} b_{i_0 r} + e$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ para todo $(i,j) \neq (i_0, j_0)$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + \gamma_{ik}$ para cualquier i si $(i,k) \neq (i_0, j_0)$
- $e = -\delta_{i_0 j_0 k_0} + \delta_{i j_0 k_0} - \gamma_{i k_0} + \gamma_{i_0 k_0}$ para cualquier i
- $c_{i_0 j_0} = -\gamma_{i_0 j_0} + e$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} + b_{ij} - c_{ij}$ para $i < j$ y $(i,j) \neq (i_0 j_0)$
- $a_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$ para cualquier $i \neq i_0$

Para tener consistencia en las definiciones, debemos probar que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{i'k}$$

  $\forall i \neq i'$ si $(i,k) \neq (i_0, j_0)$,$(i',k) \neq (i_0, j_0)$ y $(i,j,k) \neq (i_0, j_0, k_0)$.

- *Caso 2:* Si $k = j_0$ y $i = i_0$, b_{jj_0} está bien definida:

$$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0 j j_0} + \gamma_{i_0 j_0} - e\ \ \forall i \neq i_0$$

- *Caso 3:* Como también debe cumplirse que $a_{ij} = \alpha_{ji} + b_{ji} - c_{ji}$ para $i < j$ y $(i,j) \neq (j_0, i_0)$, tenemos que probar que

$$\alpha_{ij} + b_{ij} - c_{ij} = \alpha_{ji} + b_{ji} - c_{ji}\ \ \forall (i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, i_0)$$

- *Caso 4:* Por otro lado, $a_{i_0j_0} = \alpha_{j_0i_0} + b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$. Entonces debemos ver que

$$\alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e = \alpha_{j_0i_0} + b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

- *Caso 5:* La definición de d no debe depender de i:

$$\beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1\ r\neq i'}^{n} b_{i'r} \quad \forall i, i' \neq i_0$$

- *Caso 6:* Para i_0, se debe cumplir $d = \beta_{i_0} + \sum_{r=1\ r\neq i_0}^{n} b_{i_0r} - e$, o sea que se debe cumplir que

$$\beta_{i_0} + \sum_{r=1\ r\neq i_0}^{n} b_{i_0r} - e = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} \quad \forall i \neq i_0$$

Probamos cada condición mostrando los caminos PR y multiplicadores λ que deben considerarse:

- *Demostración Caso 1:* Debemos considerar 5 alternativas:

1. $i, j, k, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Sean los siguientes caminos PR:
   1: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   2: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   3: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   6: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$
   7: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
   9: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   10: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   11: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   12: $0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$
   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.
   Definamos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
2. Exactamente uno de los índices i, j, k, i' pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$. Para obtener la igualdad buscada, considerar las soluciones y λ anteriores, excluyendo del comienzo del camino el cliente correspondiente.
3. Exactamente dos de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$.
   a) Dos de los índices i, j, k, i' son i_0, k_0 ó j_0, k_0.
   Nuevamente, tomamos los caminos PR y λ anteriores, excluyendo del comienzo del camino los clientes v_{i_0}, v_{k_0} o v_{j_0}, v_{k_0} según el caso.
   b) Dos de los índices i, j, k, i' son i_0, j_0. Hay 6 posibilidades:
   - $i = i_0$ y $j = j_0$ ($i_1 = k, i_2 = i'$)
     $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.

- $i = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[15] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[42] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$, $\lambda_5[108] = -1$.
- $i = j_0$ y $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
- $i = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[6] = -1$, $\lambda_5[15] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.
- $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[65] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$.
- $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[72] = -1$.

4. $i, j, k, i' \in \{i_0, j_0, k_0\}$ Para cada alternativa mostramos el λ que nos permite demostrar lo buscado.

- $i = i_0$ $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -1$, $\lambda_4[23] = 1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$ $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -1$, $\lambda_4[21] = 1$, $\lambda_4[15] = 1$, $\lambda_4[10] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$ $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = 1$, $\lambda_4[15] = 1$, $\lambda_4[10] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = j_0$ $j = i_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[11] = 1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$ $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[15] = -1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$ $k = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- $i = j_0$ $k = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = 1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[15] = -1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$ $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$ $j = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = 1$, $\lambda_4[21] = -1$, $\lambda_4[15] = -1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$ $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[17] = 1$, $\lambda_4[23] = -1$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$ $j = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -1$, $\lambda_4[15] = 1$, $\lambda_4[10] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = k_0$ $k = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = k_0$ $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = k_0$ $j = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[6] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = 1$, $\lambda_4[23] = -1$, $\lambda_4[9] = -1$, $\lambda_4[10] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[16] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- *Demostración Caso 2:* Reemplazando e por su definición, $\forall i \neq i_0, j_0$, $j \neq i_0, j_0$ tenemos que ver que

$$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} + \delta_{i_0j_0k_0} - \delta_{i'j_0k_0} + \gamma_{i'k_0} - \gamma_{i_0k_0}$$

1. Si $i \neq k_0$ y $j = k_0$. Podemos suponer $i = i'$ $(i_1 = i)$
   Sean $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[28] = 1$, $\lambda_5[93] = -1$, $\lambda_5[31] = 1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[58] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$.
2. Si $i, j \neq k_0$. Podemos suponer $i = i'$ $(i_1 = i, i_2 = j)$
   Sean $\lambda_5[6] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[50] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[56] = 1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[72] = -1$.

3. $i = k_0$ $(i_1 = j)$
   Sean $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[22] = 1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[28] = 1$, $\lambda_5[29] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[44] = -1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[57] = -1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[84] = 1$.

- *Demostración Caso 3:* Se debe cumplir que $a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$ si $i < j$ y $(i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, i_0)$. Reemplazando por las definiciones y tomando $k \neq i_0, j_0, k_0$, debemos probar que
$$\alpha_{ij} + \delta_{kij} - \gamma_{kj} + \gamma_{ij} = \alpha_{ji} + \delta_{kji} - \gamma_{ki} + \gamma_{ji}$$
  Consideremos los siguientes caminos PR:
  1: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_i\ v_j$ 2: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_j\ v_i$

  donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$ y definimos $\lambda = (1, -1)$ para obtener lo buscado.

  Si $\{i, j\} \cap \{i_0, j_0, k_0\} \neq \emptyset$ suprimir del comienzo del camino los clientes correspondientes.

- *Demostración Caso 4:* Reemplazando por las definiciones, debemos probar que
$$\alpha_{i_0 j_0} + \delta_{k i_0 j_0} + \gamma_{i_0 j_0} + \gamma_{k i_0} = \alpha_{j_0 i_0} + \delta_{k j_0 i_0} + \gamma_{j_0 i_0} + \gamma_{k j_0}$$
  para $k \neq i_0, j_0, k_0$
  Para demostrar esto, definimos $\lambda = (1, -1)$ y los caminos PR:
  1: $0\ v_j \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}$ 2: $0\ v_j \ldots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

  donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_0, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.

- *Demostración Caso 5:* Tenemos que ver que
$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1\ r \neq i,k}^{n} \delta_{kir} = \beta'_i + \gamma_{ki} - \delta_{ji'k} - \sum_{r=1\ r \neq i',k}^{n} \delta_{ki'r}$$
  Podemos suponer $k, j \neq i_0, j_0, k_0$

  1. $i' \neq i_0$
     Consideramos los caminos PR
     1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_j$ 5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_j$
     2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_j$ 6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_j$
     3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}$ 7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i$
     4: $v_0\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}$ 8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i$
     con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_0, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$, $v_{j_1} = v_{j_0}$, $v_{j_2} = v_{k_0}$, $v_{j_3} = v_{i_0}$
     Definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ para probar la igualdad deseada.

2. $i' = i_0$. Nos resta demostrar que

$$\beta_i+\gamma_{ki_0}-\delta_{jik}-\sum_{r=1\ r\neq i,k}^{n}\delta_{kir}=\beta_{i_0}+\gamma_{ki}-\delta_{ji_0k}-\sum_{r=1\ r\neq i_0,k}^{n}\delta_{ki_0r}+\delta_{i_0j_0k_0}-\delta_{kj_0k_0}+\gamma_{kk_0}-\gamma_{i_0k_0}$$

Para esto definimos $\lambda = (-1, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$ y consideramos las soluciones definidas por los caminos PR:

1: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_i\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_{k_0}$
2: $0\ v_{j_0}\ v_i\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
3: $0\ v_{j_0}\ v_j\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_{i_0}$
4: $0\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_k$
5: $0\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k\ v_{i_0}$
6: $0\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_i\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}$
7: $0\ v_{k_0}\ v_k\ v_{j_0}\ v_i\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}$
8: $0\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_i\ v_{j_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_k$
9: $0\ v_i\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_k$
10: $0\ v_k\ v_{j_0}\ v_j\ v_i\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}$
11: $0\ v_k\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_i\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}$
12: $0\ v_k\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_{i_0}$
13: $0\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}\ v_i\ v_{j_0}\ v_j\ v_{i_0}$
14: $0\ v_k\ v_i\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-6}}$

donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-6}}\} = V \setminus \{v_i, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.

□

Proposición A.6 *(Familia 7) Sean $i_0, j_0, k_0, \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{k_0}_{j_0k_0} + f^{j_0}_{i_0k_0} + f^{j_0}_{i_0j_0} \leq x_{i_0j_0} + f^{k_0}_{i_0j_0} + f^{i_0}_{j_0k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Vamos a suponer que $i_0 < j_0$. Debemos encontrar multiplicadores $a_{ij}\ v_i, j = 1, \ldots, n\ i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), $b_{ij}\ v_i, j = 1, \ldots, n\ i \neq j$ (ecuaciones 4.2), $c_{ij}\ v_i, j = 1, \ldots, n\ i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia7*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\ (\forall i < j\ (i, j) \neq (i_0, j_0))$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}\ (\forall i < j)$
- $\alpha_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} + b_{i_0j_0} + c_{i_0j_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}\ (\forall (i, j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0))$
- $\gamma_{i_0j_0} = -c_{i_0j_0} + e$
- $\gamma_{j_0k_0} = -c_{j_0k_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}\ (\forall (i, j, k) \neq (i_0, j_0, k_0), (i_0, k_0, j_0), (j_0, k_0, i_0))$
- $\delta_{i_0j_0k_0} = -c_{i_0k_0} - b_{j_0k_0} - e$

- $\delta_{i_0k_0j_0} = -c_{i_0j_0} - b_{k_0j_0} + e$
- $\delta_{j_0k_0i_0} = -c_{j_0i_0} - b_{k_0i_0} - e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ para todo $(i,j) \neq (i_0,j_0),(j_0,k_0)$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} - c_{ik}$ para todo $(i,j,k) \neq (i_0,j_0,k_0),(i_0,k_0,j_0),(j_0,k_0,i_0)$
- $e = -\delta_{j_0k_0i_0} + \delta_{ik_0i_0} - \gamma_{ii_0} + \gamma_{j_0i_0}$ para cualquier $i \neq i_0, j_0, k_0$
- $c_{i_0j_0} = -\gamma_{i_0j_0} + e$
- $c_{j_0k_0} = -\gamma_{j_0k_0} + e$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} + b_{ij} - c_{ij}$ para $i < j$ y $(i,j) \neq (i_0j_0)$
- $a_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$ para cualquier i

Para que las definiciones anteriores sean correctas y consistentes, debemos probar que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

  1. Si $k \neq i_0, j_0, k_0$, $\forall i, i' \neq i_0$:

  $$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{i'k}$$

  2. Si $k = i_0$ y $j \neq k_0$, $\forall i, i' \neq i_0$:

  $$-\delta_{iji_0} + \gamma_{ii_0} = -\delta_{i'ji_0} + \gamma_{i'i_0}$$

  3. Si $k = i_0$ y $j = k_0$, $\forall i, i' \neq i_0, j_0, k_0$:

  $$-\delta_{ik_0i_0} + \gamma_{ii_0} = -\delta_{i'k_0i_0} + \gamma_{i'i_0}$$

  4. Si $k = j_0$ y $j \neq i_0, k_0$, $\forall i \neq i_0, j_0$:

  $$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} - e$$

  5. Si $k = j_0$ y $j = i_0$, $\forall i, i' \neq i_0, j_0$:

  $$-\delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'i_0j_0} + \gamma_{i'j_0}$$

6. Si $k = j_0$ y $j = k_0$, $\forall i \neq i_0, j_0, k_0$:

$$-\delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0k_0j_0} + \gamma_{i_0j_0}$$

7. Si $k = k_0$ y $j \neq j_0$, $\forall i \neq j_0, k_0$:

$$-\delta_{ijk_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0jk_0} + \gamma_{j_0k_0} - e$$

8. Si $k = k_0$ y $j = j_0$, $\forall i \neq i_0, j_0, k_0$:

$$-\delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{i_0j_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} - e$$

- *Caso 2:* La definición de d no debe depender de i: $\forall i, i' \neq i_0$

$$\beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1\ r\neq i'}^{n} b_{i'r}$$

- *Caso 3:* Como también debe cumplirse que $a_{ij} = \alpha_{ji} + b_{ji} - c_{ji}$ para $i < j$ y $(i,j) \neq (j_0, i_0)$, tenemos que probar que, $\forall (i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, i_0)$

$$\alpha_{ij} + b_{ij} - c_{ij} = \alpha_{ji} + b_{ji} - c_{ji}$$

- *Caso 4:* Por otro lado, $a_{i_0j_0} = \alpha_{j_0i_0} + b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$. Entonces debemos ver que

$$\alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e = \alpha_{j_0i_0} + b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

Probamos cada condición mostrando las soluciones de $\mathcal{CR}$ y λ_5 que deben considerarse:

- *Demostración Caso 1:*

1. $k \neq i_0, j_0, k_0$. Debemos considerar 4 alternativas:

   a) $i, j, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   2: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   3: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   4: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   5: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   6: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   7: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   8: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   9: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   10: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   11: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
   12: $0\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$

   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$ y definamos

$$\lambda_5 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

b) Exactamente uno de los índices i, j, i' pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
Para obtener la igualdad buscada, considerar las soluciones y λ_5 anteriores, excluyendo del camino el cliente v_i, v_j o $v_{i'}$ según corresponda, y en el caso de k_0 invirtiendo el orden de v_{i_0} y v_{j_0}.

c) Dos de los índices i, j, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$

Hay 9 posibilidades, para cada una enunciamos el λ que consideramos para demostrar lo deseado:

- $i = i_0$ y $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[7] = 1$, $\lambda_5[67] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[89] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.
- $i = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[7] = 1$, $\lambda_5[11] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[69] = 1$, $\lambda_5[75] = -1$, $\lambda_5[76] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[90] = -1$.
- $i = i_0$ y $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$.
- $i = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[79] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
- $i = j_0$ y $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[9] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[100] = -1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $i = j_0$ y $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[33] = -1$, $\lambda_5[46] = 1$, $\lambda_5[50] = --1$, $\lambda_5[61] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[84] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$.
- $i = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[7] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[116] = -1$.
- $i = k_0$ y $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[45] = -1$, $\lambda_5[56] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[63] = -1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[84] = 1$.
- $i = k_0$ y $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$.

d) $\{i, j, i'\} = \{i_0, j_0, k_0\}$. Debemos analizar 4 situaciones, para cada una mostramos los coeficientes λ.

- $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[43] = -1$, $\lambda_5[83] = 1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[84] = -1$.

- $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_5[10] = 1$, $\lambda_5[11] = -1$, $\lambda_5[25] = -1$, $\lambda_5[79] = 1$, $\lambda_5[69] = 1$, $\lambda_5[34] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[43] = 1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[60] = 1$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[12] = -1$, $\lambda_5[19] = -1$, $\lambda_5[23] = 1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.

2. $k = i_0$

   a) $j \neq j_0$, $i, i' \neq j_0, k_0$: Consideramos el λ y los caminos definidos en el Caso 1 a) suprimiendo del comienzo del camino al clientes v_{i_0}.

   b) $j \neq j_0$, $i = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
   $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[70] = -1$.

   c) $j \neq j_0$, $i = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
   $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[46] = -1$, $\lambda_5[60] = 1$, $\lambda_5[84] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.

   d) $j = j_0$, $i, i' \neq k_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
   $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[79] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[106] = 1$.

   e) $j = j_0$, $i = k_0$ $(i_1 = i')$
   $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$, $\lambda_5[37] = 1$, $\lambda_5[107] = -1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$, $\lambda_5[108] = 1$, $\lambda_5[120] = -1$.

3. $k = i_0$, $j = k_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
   $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[42] = 1$, $\lambda_5[58] = -1$, $\lambda_5[108] = -1$, $\lambda_5[112] = 1$.

4. $k = j_0$, $j \neq i_0, j_0, k_0$, $i \neq i_0, j_0$.
   Reemplazando e por su definición, debemos probar que

$$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0jj_0} + \gamma_{i_0j_0} + \delta_{j_0k_0i_0} - \gamma_{j_0i_0} - \delta_{i'k_0i_0} + \gamma_{i'i_0}$$

- $i \neq i_0, j_0, k_0$ $(i_1 = i, i_2 = j)$
  $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[77] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[27] = -1$, $\lambda_5[28] = 1$, $\lambda_5[38] = -1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[81] = -1$, $\lambda_5[114] = 1$.
- $i = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_5[12] = -1$, $\lambda_5[23] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$, $\lambda_5[26] = 1$, $\lambda_5[30] = -1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.

5. $k = j_0$, $j = i_0$ $(i_1 = i)$
   Para todo $i, i' \neq i_0, j_0$, tenemos que probar que

$$-\delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'i_0j_0} + \gamma_{i'j_0}$$

   Podemos suponer que $i' = k_0$
   $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[100] = 1$, $\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[43] = -1$, $\lambda_5[42] = -1$, $\lambda_5[46] = 1$.

6. $k = j_0$, $j = k_0$ $(i_1 = i)$
   Tenemos que probar que

$$-\delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i_0k_0j_0} + \gamma_{i_0j_0}$$

   para todo $i \neq i_0, j_0, k_0$. $\lambda_5[8] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[37] = -1$, $\lambda_5[40] = 1$, $\lambda_5[60] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.

7. $k = k_0$, $j \neq j_0, k_0$
   Para todo $i \neq j_0, k_0$ tenemos que probar que

$$-\delta_{ijk_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0jk_0} + \gamma_{j_0k_0} + \delta_{j_0k_0i_0} - \gamma_{j_0i_0} - \delta_{i'k_0i_0} + \gamma_{i'i_0}$$

   Hay tres posibilidades:

   - $j \neq i_0$, $i \neq i_0$ $(i_1 = i, i_2 = j)$
     $\lambda_5[65] = 1$, $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[47] = -1$, $\lambda_5[83] = 1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[64] = -1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $j \neq i_0$, $i = i_0$ $(i_1 = j)$
     $\lambda_5[30] = -1$, $\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[56] = 1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[60] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$.
   - $j = i_0$, $i \neq i_0, j_0, k_0$ $(i_1 = i)$
     $\lambda_5[107] = -1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[108] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.

8. $k = k_0$, $j = j_0$ $(i_1 = i)$
   Tenemos que probar, para todo $i, i' \neq i_0, j_0, k_0$,

$$-\delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{i_0j_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} + \delta_{j_0k_0i_0} - \gamma_{j_0i_0} - \delta_{i'k_0i_0} + \gamma_{i'i_0}$$

   $\lambda_5[71] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[107] = -1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[108] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.

- *Demostración Caso 2:* Tenemos que ver que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1\ r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} = \beta_{i'} + \gamma_{ki} - \delta_{ji'k} - \sum_{r=1\ r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r}$$

  Podemos suponer $k, j \neq i_0, j_0, k_0$. Consideramos los caminos PR y λ del Caso 1 1.a) Para que las soluciones determinadas se encuentren en la cara:

- si $i, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$ ponemos en $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}$ a $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
- si $i' = i_0$ ponemos en $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}$ a $v_{j_0}\ v_{k_0}$
- si $i' = j_0$ ponemos en $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}$ a $v_{k_0}\ v_{i_0}$
- si $i' = k_0$ ponemos en $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}$ a $v_{i_0}\ v_{j_0}$

- *Demostración Caso 3:* Se debe cumplir que $a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$ si $i < j$ y $(i, j) \neq (i_0, j_0)$. Reemplazando por las definiciones, debemos probar que

$$\alpha_{ij} + \delta_{kij} - \gamma_{kj} + \gamma_{ij} = \alpha_{ji} + \delta_{kji} - \gamma_{ki} + \gamma_{ji}$$

  - $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$. Consideramos las soluciones de MR determinadas por los caminos PR:

    1: $v_0\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_i\ v_j$

    2: $v_0\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-5}}\ v_j\ v_i$

    donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j\}$ y definimos $\lambda = (1, -1)$.
  - Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$. Considerar los caminos y λ anteriores suprimiendo del comienzo del camino el cliente correspondiente.
  - Los dos índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$
    En los caminos PR anteriores suprimir los dos clientes v_i, v_j. En el caso que $i, j = \{j_0, k_0\}$, considerar a v_k como v_{i_0}. En todos los casos usar los mismos multiplicadores λ.

- *Demostración Caso 4:* Reemplazando por las definiciones, debemos probar que

$$\alpha_{i_0 j_0} + \delta_{i i_0 j_0} - \gamma_{i j_0} + \gamma_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} + \delta_{i j_0 i_0} - \gamma_{i i_0} + \gamma_{j_0 i_0}$$

  Podemos suponer que $i \neq i_0, j_0, k_0$. Para demostrar esto, definimos $\lambda = (1, -1)$ y los caminos PR:

  1: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}$

  2: $v_0\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-4}}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

  donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.

□

Proposición A.7 *(Familia 9) Sean $i_0, j_0, k_0, l_0 \in \{1, \ldots, n\}$ índices distintos. La desigualdad*

$$f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{j_0}_{k_0 i_0} + f^{k_0}_{i_0 l_0} + f^{k_0}_{i_0 j_0} + f^{k_0}_{j_0 l_0} + f^{k_0}_{j_0 k_0} \leq x_{i_0 j_0} + x_{j_0 k_0}$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:

Demostración:
Vamos a suponer que $i_0 < j_0 < k_0$. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *Familia9*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $(\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, j_0))$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $(\forall i < j)$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} - e$
- $\alpha_{j_0 k_0} = a_{j_0 k_0} + b_{j_0 k_0} + c_{j_0 k_0} - e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $(\forall (i, j) \neq (j_0, k_0))$
- $\gamma_{j_0 k_0} = -c_{j_0 k_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}$ $(\forall (i, j, k) \neq (i_0, l_0, k_0), (k_0, i_0, j_0), (i_0, k_0, j_0), (i_0, j_0, k_0), (j_0, l_0, k_0))$
- $\delta_{i_0 k_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} - b_{k_0 j_0} + e$
- $\delta_{k_0 i_0 j_0} = -c_{k_0 j_0} - b_{i_0 j_0} + e$
- $\delta_{i_0 l_0 k_0} = -c_{i_0 k_0} - b_{l_0 k_0} + e$
- $\delta_{i_0 j_0 k_0} = -c_{i_0 k_0} - b_{j_0 k_0} + e$
- $\delta_{j_0 l_0 k_0} = -c_{j_0 k_0} - b_{l_0 k_0} + e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r \neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ $(\forall (i, j) \neq (j_0, k_0))$
- $e = \delta_{i_0 k_0 j_0} + c_{i_0 j_0} + b_{k_0 j_0}$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + \gamma_{ik}$ (para algún i y $\forall k \neq j_0, k_0$)
- $b_{j j_0} = -\delta_{i j j_0} + \gamma_{i j_0}$ (para algún i y $\forall j \neq k_0, i_0$)
- $b_{k_0 j_0} = -\delta_{i k_0 j_0} + \gamma_{i j_0}$ (para algún $i \neq i_0$)
- $b_{i_0 j_0} = -\delta_{i i_0 j_0} + \gamma_{i j_0}$ (para algún $i \neq i_0$)
- $b_{j k_0} = -\delta_{i j k_0} + \gamma_{i k_0}$ (para algún $i \neq j_0, k_0$ y $\forall j \neq l_0, j_0$)

- $b_{l_0k_0} = -\delta_{il_0k_0} + \gamma_{ik_0}$ (para algún $i \neq l_0, k_0$)
- $b_{j_0k_0} = -\delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0}$ (para algún $i \neq j_0, k_0$)
- $c_{j_0k_0} = -\gamma_{j_0k_0} + e$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ $(\forall i < j,\ (i,j) \neq (i_0, j_0))$
- $a_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} + e$
- $a_{j_0k_0} = \alpha_{j_0k_0} - b_{j_0k_0} - c_{j_0k_0} + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$ (para cualquier i)

Para que las definiciones verifiquen las condiciones enunciadas anteriormente y sean consistentes, debemos probar que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i:

$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{i'k}$$

  para todo $k \neq j_0, k_0$.

- *Caso 2:* La definición de b_{jj_0} es consistente:

$$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'jj_0} + \gamma_{i'j_0} \ \ \forall i, i' \neq j_0\ j \neq i_0, k_0$$

- *Caso 3:* La definición de $b_{k_0j_0}$ es consistente:

$$-\delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'k_0j_0} + \gamma_{i'j_0} \ \ \forall i, i' \neq i_0$$

- *Caso 4:* La definición de $b_{i_0j_0}$ es consistente:

$$-\delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{k_0i_0j_0} + \gamma_{k_0j_0} + e \ \ \forall i \neq i_0, j_0$$

- *Caso 5:* La definición de b_{jk_0} es consistente:

$$-\delta_{ijk_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0jk_0} + \gamma_{j_0k_0} - e \ \ \forall i \neq j_0, k_0 \ \ j \neq l_0, j_0$$

- *Caso 6:* La definición de $b_{l_0k_0}$ es consistente:

$$-\delta_{il_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0l_0k_0} + \gamma_{j_0k_0} = -\delta_{i_0l_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} + e \ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0$$

- *Caso 7:* La definición de $b_{j_0k_0}$ es consistente:

$$-\delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{i_0j_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} + e \ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0$$

- *Caso 8:* La definción de a_{ij} es consistente:

$$a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji} \;\; \forall i < j, \; (i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0)$$

- *Caso 9:* La definción de $a_{i_0 j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0 j_0} = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$

- *Caso 10:* La definción de $a_{j_0 k_0}$ es consistente:

$$a_{j_0 k_0} = \alpha_{k_0 j_0} - b_{k_0 j_0} - c_{k_0 j_0}$$

- *Caso 11:* La definición de d no depende de i. Para todo $i \neq i'$ se debe cumplir:

$$\beta_i + \sum_{r=1 \; r \neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1 \; r \neq i'}^{n} b_{i'r}$$

Probamos cada ítem mostrando las soluciones de MR y el λ que nos permiten obtener la igualdad buscada.

- *Demostración Caso 1:* Vamos a considerar 4 posibilidades:

1. $i, j, k, i' \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   Sean las soluciones de MR definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_i \; v_j \; v_{i'} \; v_k$
   2: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_i \; v_{i'} \; v_j \; v_k$
   3: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_i \; v_j \; v_{i'}$
   4: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_i \; v_{i'} \; v_j$
   5: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_{i'} \; v_i \; v_j$
   6: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_{i'} \; v_i \; v_j \; v_k$
   7: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_j \; v_i \; v_{i'} \; v_k$
   8: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_j \; v_{i'} \; v_i \; v_k$
   9: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_{i'} \; v_j \; v_i \; v_k$
   10: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_j \; v_i \; v_{i'}$
   11: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_j \; v_{i'} \; v_i$
   12: $v_0 \; v_{j_1} \ldots v_{j_{n-8}} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{l_0} \; v_{k_0} \; v_k \; v_{i'} \; v_j \; v_i$

   donde $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$.
   Definamos $\lambda = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

2. Exactamente uno de los índices i, j, k, l pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Consideramos los multiplicadores λ y caminos PR del caso 1, sacando del comienzo de los caminos el cliente según el caso.

3. Exactamente dos de los índices i, j, k, l pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.
   Para las siguientes posibilidades consideramos los caminos y λ del caso anterior, tomando como comienzo del camino:

   - $v_{j_0} \; v_{l_0}$ para
     1: $i = i_0$, $j = k_0$

2: $i = k_0$, $j = i_0$

3: $i = k_0$, $k = i_0$

4: $j = k_0$, $k = i_0$

5: $j = k_0$, $k = l_0$

- v_{j_0} v_{k_0} para

  1: $i = i_0$, $j = l_0$

  2: $i = i_0$, $k = l_0$

  3: $j = i_0$, $k = l_0$

  4: $i = l_0$, $j = i_0$

  5: $i = l_0$, $k = i_0$

  6: $j = l_0$, $k = i_0$

Para los casos que nos falta analizar exponemos las soluciones PR y λ que debemos considerar:

- $i = i_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[242] = -0{,}5$, $\lambda_6[362] = -0{,}5$, $\lambda_6[529] = 0{,}5$, $\lambda_6[553] = 0{,}5$, $\lambda_6[345] = 0{,}5$, $\lambda_6[465] = 0{,}5$, $\lambda_6[550] = -0{,}5$, $\lambda_6[574] = -0{,}5$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[50] = -1$, $\lambda_6[59] = 1$, $\lambda_6[493] = 1$, $\lambda_6[496] = -1$, $\lambda_6[581] = -1$, $\lambda_6[613] = 1$, $\lambda_6[584] = 1$, $\lambda_6[627] = -1$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[251] = 1$, $\lambda_6[532] = -1$, $\lambda_6[146] = -1$, $\lambda_6[511] = 1$, $\lambda_6[156] = 1$, $\lambda_6[310] = -1$, $\lambda_6[514] = -1$, $\lambda_6[546] = 1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[1] = 1$, $\lambda_6[2] = -1$, $\lambda_6[250] = -1$, $\lambda_6[251] = 1$, $\lambda_6[186] = -1$, $\lambda_6[190] = 1$, $\lambda_6[454] = 1$, $\lambda_6[466] = -1$.
- $i = j_0$, $j = l_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[29] = 1$, $\lambda_6[32] = -1$, $\lambda_6[488] = -1$, $\lambda_6[489] = 1$, $\lambda_6[607] = -1$, $\lambda_6[609] = 1$, $\lambda_6[699] = 1$, $\lambda_6[700] = -1$.
- $i = j_0$, $k = l_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[30] = 1$, $\lambda_6[38] = -1$, $\lambda_6[56] = -1$, $\lambda_6[57] = 1$, $\lambda_6[608] = -1$, $\lambda_6[611] = 1$, $\lambda_6[675] = 1$, $\lambda_6[676] = -1$.
- $j = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[37] = 0{,}5$, $\lambda_6[43] = -0{,}5$, $\lambda_6[61] = 0{,}5$, $\lambda_6[67] = -0{,}5$, $\lambda_6[322] = -0{,}5$, $\lambda_6[346] = 0{,}5$, $\lambda_6[442] = -0{,}5$, $\lambda_6[466] = 0{,}5$.
- $j = j_0$, $k = l_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$
  $\lambda_6[257] = 1$, $\lambda_6[263] = -1$, $\lambda_6[412] = -1$, $\lambda_6[414] = 1$, $\lambda_6[148] = -1$, $\lambda_6[150] = 1$, $\lambda_6[391] = 1$, $\lambda_6[392] = -1$.

- $i = k_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[128] = -1$, $\lambda_6[195] = 1$, $\lambda_6[627] = 1$, $\lambda_6[644] = -1$, $\lambda_6[277] = -1$, $\lambda_6[347] = 1$, $\lambda_6[535] = 1$, $\lambda_6[549] = -1$.
- $i = k_0$, $j = l_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[128] = -1$, $\lambda_6[507] = 1$, $\lambda_6[627] = 1$, $\lambda_6[704] = -1$, $\lambda_6[166] = 1$, $\lambda_6[516] = -1$, $\lambda_6[634] = -1$, $\lambda_6[706] = 1$.
- $i = k_0$, $k = l_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[433] = 1$, $\lambda_6[451] = -1$, $\lambda_6[482] = -1$, $\lambda_6[577] = 1$, $\lambda_6[161] = -1$, $\lambda_6[167] = 1$, $\lambda_6[178] = 1$, $\lambda_6[180] = -1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[266] = -1$, $\lambda_6[283] = 1$, $\lambda_6[535] = 1$, $\lambda_6[539] = -1$, $\lambda_6[299] = -1$, $\lambda_6[309] = 1$, $\lambda_6[544] = 1$, $\lambda_6[546] = -1$.
- $i = l_0$, $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_6[173] = 1$, $\lambda_6[219] = -1$, $\lambda_6[518] = -1$, $\lambda_6[524] = 1$, $\lambda_6[283] = 1$, $\lambda_6[539] = -1$, $\lambda_6[272] = -1$, $\lambda_6[537] = 1$.

4. Exactamente tres de los índices i, j, k, l pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$.

   Para los posibles casos definimos el λ que nos permite probar la igualdad deseada.

   - $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
   - $i = i_0$, $j = k_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.
   - $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[66] = 1$.
   - $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[42] = 1$, $\lambda_5[90] = 1$, $\lambda_5[94] = -1$.
   - $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[105] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[94] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$.
   - $i = j_0$, $j = l_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[34] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[70] = -1$.
   - $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[105] = -1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
   - $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$

$\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[16] = -1$, $\lambda_5[101] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$, $\lambda_5[118] = 1$, $\lambda_5[120] = -1$.

- $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = l_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$.
- $i = k_0$, $j = l_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_5[10] = 1$, $\lambda_5[12] = -1$, $\lambda_5[13] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[66] = -1$, $\lambda_5[72] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[94] = 1$.
- $i = l_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_5[54] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[72] = -1$, $\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[90] = 1$.

- *Demostración Caso 2:* Para la consistencia en la definición de b_{jj_0} :

$$-\delta_{ijj_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'jj_0} + \gamma_{i'j_0} \quad \forall i, i' \neq j_0 \; j \neq i_0, k_0$$

Fijamos $i = i_0$. Para

- $j \neq l_0$ y $i' \neq l_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_6[25] = 1$, $\lambda_6[26] = -1$, $\lambda_6[34] = -1$, $\lambda_6[36] = 1$, $\lambda_6[455] = 1$, $\lambda_6[470] = -1$, $\lambda_6[189] = 1$, $\lambda_6[186] = -1$.
- $j \neq l_0$ y $i' = l_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$.
- $j \neq l_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_5[3] = -1$, $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[16] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[39] = 1$, $\lambda_5[42] = -1$.
- $j = l_0$ y $i' \neq k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_5[54] = 1$, $\lambda_5[86] = -1$, $\lambda_5[95] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[56] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[96] = -1$.
- $j = l_0$ y $i' = k_0$
  $\lambda_4[1] = -0{,}5$, $\lambda_4[2] = 0{,}5$, $\lambda_4[3] = -0{,}5$, $\lambda_4[4] = 0{,}5$, $\lambda_4[5] = 0{,}5$, $\lambda_4[6] = -0{,}5$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[23] = 1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[10] = -0{,}5$, $\lambda_4[12] = -0{,}5$, $\lambda_4[16] = 0{,}5$, $\lambda_4[18] = 0{,}5$, $\lambda_4[22] = -0{,}5$, $\lambda_4[24] = -0{,}5$.

- *Demostración de Caso 3:* Para la consistencia en la definición de $b_{k_0j_0}$:

$$-\delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{i'k_0j_0} + \gamma_{i'j_0} \quad \forall i, i' \neq i_0$$

Fijamos $i = l_0$ $(i_1 = j)$ y definimos $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[49] = 1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$.

- *Demostración de Caso 4:* Para la consistencia en la definición de $b_{i_0j_0}$:

$$-\delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} = -\delta_{k_0i_0j_0} + \gamma_{k_0j_0} + e \ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0$$

Reemplazando $e = \delta_{i_0k_0j_0} - \gamma_{i_0j_0} - \delta_{l_0k_0j_0} + \gamma_{l_0j_0}$, debemos probar

$$-\delta_{ii_0j_0} + \gamma_{ij_0} + \delta_{k_0i_0j_0} - \gamma_{k_0j_0} - \delta_{i_0k_0j_0} + \gamma_{i_0j_0} + \delta_{l_0k_0j_0} - \gamma_{l_0j_0} = 0 \ \ \forall i \neq i_0, j_0, k_0$$

Si $i \neq l_0$ ($i_1 = i$), definimos $\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[41] = 1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[111] = 1$, $\lambda_5[39] = -1$, $\lambda_5[87] = 1$, $\lambda_5[120] = -1$.

Si $i = l_0$, definimos $\lambda_5[107] = 1$, $\lambda_5[108] = -1$, $\lambda_5[116] = -1$, $\lambda_5[119] = 1$.

- *Demostración de Caso 5:* Para la consistencia de la definición de b_{jk_0}:

$$-\delta_{ijk_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0jk_0} + \gamma_{j_0k_0} - e \ \ \forall i \neq j_0, k_0 \ \ j \neq l_0, j_0, k_0$$

Reemplazando $e = \delta_{i_0k_0j_0} - \gamma_{i_0j_0} - \delta_{l_0k_0j_0} + \gamma_{l_0j_0}$ obtenemos

$$-\delta_{ijk_0} + \gamma_{ik_0} + \delta_{i_0k_0j_0} - \gamma_{j_0k_0} + \delta_{j_0jk_0} - \gamma_{i_0j_0} - \delta_{l_0k_0j_0} + \gamma_{l_0j_0} = 0 \ \ \forall i \neq j_0, k_0 \ \ j \neq l_0, j_0, k_0$$

Analizamos varios casos:

  - $j \neq i_0$ y $i \notin \{i_0, l_0\}$ ($i_1 = i, i_2 = j$)
    $\lambda_6[571] = -1$, $\lambda_6[572] = 1$, $\lambda_6[698] = 1$, $\lambda_6[702] = -1$, $\lambda_6[709] = -1$, $\lambda_6[710] = 1$, $\lambda_6[185] = -1$, $\lambda_6[220] = 1$, $\lambda_6[283] = -1$, $\lambda_6[274] = 1$.
  - $j \neq i_0$ y $i = i_0$ ($i_1 = j$)
    $\lambda_5[1] = -1$, $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[38] = -1$, $\lambda_5[41] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[107] = 1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[58] = 1$, $\lambda_5[106] = -1$.
  - $j \neq i_0$ y $i = l_0$ ($i_1 = j$)
    $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[41] = -1$, $\lambda_5[44] = 1$, $\lambda_5[59] = -1$, $\lambda_5[58] = 1$.
  - $j = i_0$ y $i \notin \{i_0, l_0\}$ ($i_1 = i$)
    $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[102] = -1$, $\lambda_5[109] = -1$, $\lambda_5[110] = 1$, $\lambda_5[28] = 1$, $\lambda_5[41] = -1$, $\lambda_5[55] = -1$, $\lambda_5[58] = 1$.
  - $j = i_0$ y $i = l_0$
    $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[18] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[104] = 1$, $\lambda_5[107] = -1$, $\lambda_5[69] = -1$, $\lambda_5[70] = 1$.

- *Demostración Caso 6:* Para la consistencia de la definición de $b_{l_0k_0}$ tenemos dos condiciones:

1. $-\delta_{il_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{j_0l_0k_0} + \gamma_{j_0k_0} \;\; \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0 \; (i_1 = i)$

   Definimos $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[9] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[91] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[35] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[66] = 1$, $\lambda_5[82] = 1$, $\lambda_5[90] = -1$, $\lambda_5[106] = -1$, $\lambda_5[118] = -1$.
2. $-\delta_{j_0l_0k_0} + \gamma_{j_0k_0} = -\delta_{i_0l_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} + e \;\; \forall i \neq i_0, j_0, k_0, l_0 \; (i_1 = i)$
   Definimos $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$.

- *Caso 7:* Para la consistencia de la definición de $b_{j_0k_0}$

$$-\delta_{ij_0k_0} + \gamma_{ik_0} = -\delta_{i_0j_0k_0} + \gamma_{i_0k_0} + e \;\; \forall i \neq i_0, j_0, k_0$$

  - $i \neq l_0 \; (i_1 = i)$
    $\lambda_5[4] = 1$, $\lambda_5[17] = -1$, $\lambda_5[49] = -1$, $\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[102] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[115] = 1$, $\lambda_5[116] = -1$.
  - $i = l_0$
    $\lambda_5[4] = -1$, $\lambda_5[7] = 1$, $\lambda_5[9] = 1$, $\lambda_5[10] = -1$, $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[18] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[75] = -1$, $\lambda_5[98] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$.

- *Demostración Caso 8:* Hay tres alternativas:

1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0 \; v_{j_1} \ldots j_{n-7} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{k_0} \; v_{l_0} \; v_k \; v_j \; v_i$

   2: $v_0 \; v_{j_1} \ldots j_{n-7} \; v_{i_0} \; v_{j_0} \; v_{k_0} \; v_{l_0} \; v_k \; v_i \; v_j$

   con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}, v_k.v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.
2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   En los caminos PR anteriores suprimir el cliente correspondiente y considerar los mismos coeficientes λ.
3. Los dos índices i, j pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0, l_0\}$
   En los caminos PR anteriores suprimir los dos clientes v_i, v_j. En el caso que $i, j = \{k_0, l_0\}$, considerar a v_k como v_{j_0}. En todos los casos usar los mismos multiplicadores λ.

- *Demostración Caso 9:* La definción de $a_{i_0j_0}$ es consistente:

$$a_{i_0j_0} = \alpha_{j_0i_0} - b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

$\lambda_5[1] = 0{,}5$, $\lambda_5[2] = -0{,}5$, $\lambda_5[3] = 0{,}5$, $\lambda_5[4] = -0{,}5$, $\lambda_5[5] = -0{,}5$, $\lambda_5[6] = 0{,}5$, $\lambda_5[20] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[10] = -0{,}5$, $\lambda_5[12] = -0{,}5$, $\lambda_5[16] = -0{,}5$, $\lambda_5[18] = 0{,}5$, $\lambda_5[22] = 0{,}5$, $\lambda_5[24] = 0{,}5$.

- *Demostración Caso 10:* La definción de $a_{j_0k_0}$ es consistente:

$$a_{j_0k_0} = \alpha_{k_0j_0} - b_{k_0j_0} - c_{k_0j_0}$$

Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_{j_0}\ v_{k_0}$

2: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_k\ v_{k_0}\ v_{j_0}$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{l_0}, v_{k_0}, v_k\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

- *Demostración Caso 11:* Debemos probar que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1\ r\neq i,k}^{n} \delta_{kir} = \beta_{i'} + \gamma_{ki} - \delta_{ji'k} - \sum_{r=1\ r\neq i',k}^{n} \delta_{ki'r}$$

Podemos asumir $j, k \neq i_0, j_0, l_0, k_0$.

Si $i, i' \neq i_0, j_0, l_0, k_0$, consideramos los caminos PR

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_j$

2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_j$

3: $v_0\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

4: $v_0\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$

5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_j$

6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i\ v_j$

7: $v_0\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

8: $v_0\ v_j\ v_{i'}\ v_k\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-8}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-8}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}\}$.

Definiendo $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ se obtiene la igualdad deseada.

Para lo siguientes casos sea $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i_0}, v_j, v_k, v_{j_0}, v_{k_0}, v_{l_0}\}$.

- Si $i = i_0$, en los caminos anteriores reemplazamos $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$ por $v_{j_0}\ v_{l_0}$.
- Si $i' = j_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$.
- Si $i' = l_0$, reemplazamos por $v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$.
- Si $i' = k_0$, reemplazamos por $v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$.

En los tres casos con $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$ obtenemos la igualdad deseada.

□

□

Proposición A.8 *(3-diciclo-1) Sean $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tres índices distintos. La desigualdad*

$$x_{i_0j_0} + x_{j_0k_0} + x_{k_0i_0} + f^{j_0}_{i_0k_0} + f^{i_0}_{j_0i_0} \leq 2$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Veamos que la desigualdad determina una faceta. Vamos a suponer que $i_0 < j_0 < k_0$. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *3-dicycle-1*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $(\forall i < j$ $(i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0))$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $(\forall i < j$ $(i,j) \neq (i_0, k_0))$
- $\alpha_{i_0j_0} = a_{i_0j_0} + b_{i_0j_0} + c_{i_0j_0} + e$
- $\alpha_{j_0k_0} = a_{j_0k_0} + b_{j_0k_0} + c_{j_0k_0} + e$
- $\alpha_{k_0i_0} = a_{i_0k_0} + b_{k_0i_0} + c_{k_0i_0} + e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $(\forall (i,j) \neq (j_0, i_0))$
- $\gamma_{j_0i_0} = -c_{j_0i_0} + e$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}$ $(\forall (i,j,k) \neq (i_0, k_0, j_0))$
- $\delta_{i_0k_0j_0} = -c_{i_0j_0} - b_{k_0j_0} + e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r\neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $e = \delta_{i_0k_0j_0} - \gamma_{i_0j_0} - \delta_{ik_0j_0} + \gamma_{ij_0}$ para algún $i \neq i_0$
- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ para todo $(i,j) \neq (j_0, i_0)$
- $c_{j_0i_0} = -\gamma_{j_0i_0} + e$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + c_{ik}$ para algún i tal que $(i,j,k) \neq (i_0, k_0, j_0)$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ para todo $i < j$ $(i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0)$
- $a_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - ci_0j_0 + e$
- $a_{j_0k_0} = \alpha_{j_0k_0} - b_{j_0k_0} - cj_0k_0 + e$

- $d = \beta_i + \sum_{r=1 r\neq i}^{n} b_{ir}$ para algún i

Para que las definiciones anteriores sean correctas y consistentes, debemos ver que:

- *Caso 1:* La definición de b_{jk} no depende del i. Para todo $(i,k) \neq (j_0, i_0)$, $(i,j,k) \neq (i_0, k_0, j_0)$ tenemos que probar que

$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{ik}$$

- *Caso 2:* La definición de b_{ji_0} es consistente cuando consideramos j_0. O sea, $-\delta_{iji_0} - c_{ii_0} = -\delta_{j_0ji_0} - c_{j_0i_0}$, para todo $j \neq i_0, j_0$. Reemplazando c_{ii_0} y $c_{j_0i_0}$ por sus definiciones, debemos probar para cualquier $i' \neq i_0, j_0, k_0$:

$$-\delta_{iji_0} + \gamma_{ii_0} = -\delta_{j_0ji_0} + \gamma_{j_0i_0} - \delta_{i_0k_0j_0} + \gamma_{i_0j_0} + \delta_{i'k_0j_0} - \gamma_{i'j_0}$$

- *Caso 3:* La definición de a_{ij} cumple las condiciones necesarias. Se debe cumplir $a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$. Entonces debemos ver, $\forall i < j$, $(i,j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0), (i_0, k_0)$, que

$$\alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$$

- *Caso 4:* Para $a_{i_0j_0}$, $a_{j_0k_0}$ y $a_{k_0i_0}$, debe cumplirse

$$\alpha_{i_0j_0} - b_{i_0j_0} - c_{i_0j_0} - e = \alpha_{j_0i_0} - b_{j_0i_0} - c_{j_0i_0}$$

$$\alpha_{j_0k_0} - b_{j_0k_0} - c_{j_0k_0} - e = \alpha_{k_0j_0} - b_{k_0j_0} - c_{k_0j_0}$$

$$\alpha_{i_0k_0} - b_{i_0k_0} - c_{i_0k_0} = \alpha_{k_0i_0} - b_{k_0i_0} - c_{k_0i_0} - e$$

- *Caso 5:* La definición de d no depende del i:

$$\beta_i + \sum_{r=1 r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1 r\neq i'}^{n} b_{i'r}$$

Probamos cada condición:

- *Demostración Caso 1:* Analizamos las cuatro posibilidades:

  1. $i, j, k, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$	7: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
2: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$	8: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
3: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$	9: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
4: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$	10: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
5: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$	11: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
6: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$	12: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$. Definiendo

$$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

surge la igualdad deseada.

2. Exactamente uno de los índices i, j, k, i' pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
Consideramos los caminos PR y λ anteriores suprimiendo el cliente v_{i_0}, v_{j_0} o v_{k_0}, según sea el caso.

3. Exactamente dos de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$
Las alternativas que se pueden presentar son:

- $i = i_0$ $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
$\lambda_5[2] = -1$,$\lambda_5[3] = 1$,$\lambda_5[91] = 1$,$\lambda_5[98] = -1$,$\lambda_5[35] = 1$,$\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$,$\lambda_5[108] = 1$.
- $i = i_0$ $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
$\lambda_5[13] = -1$,$\lambda_5[23] = 1$,$\lambda_5[86] = -1$,$\lambda_5[119] = 1$,$\lambda_5[27] = 1$,$\lambda_5[30] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$,$\lambda_5[118] = -1$.
- $i = i_0$ $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
$\lambda_5[7] = 1$,$\lambda_5[11] = -1$,$\lambda_5[75] = -1$,$\lambda_5[76] = 1$,$\lambda_5[55] = -1$,$\lambda_5[69] = 1$, $\lambda_5[87] = 1$,$\lambda_5[90] = -1$.
- $i = i_0$ $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
$\lambda_5[29] = 1$,$\lambda_5[80] = -1$,$\lambda_5[93] = 1$,$\lambda_5[103] = -1$,$\lambda_5[32] = -1$,$\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$,$\lambda_5[94] = -1$.
- $i = i_0$ $k = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
$\lambda_5[17] = -1$,$\lambda_5[23] = 1$,$\lambda_5[52] = 1$,$\lambda_5[54] = -1$,$\lambda_5[80] = -1$,$\lambda_5[93] = 1$, $\lambda_5[63] = 1$,$\lambda_5[66] = -1$.
- $i = i_0$ $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
$\lambda_5[25] = 1$,$\lambda_5[79] = -1$,$\lambda_5[103] = -1$,$\lambda_5[117] = 1$,$\lambda_5[31] = -1$,$\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$,$\lambda_5[118] = -1$.
- $i = j_0$ $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
$\lambda_5[53] = 1$,$\lambda_5[86] = -1$,$\lambda_5[32] = -1$,$\lambda_5[35] = 1$,$\lambda_5[69] = -1$,$\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[82] = -1$,$\lambda_5[90] = 1$.
- $i = j_0$ $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
$\lambda_5[50] = -1$,$\lambda_5[61] = 1$,$\lambda_5[109] = 1$,$\lambda_5[113] = -1$,$\lambda_5[33] = -1$,$\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[46] = 1$,$\lambda_5[84] = -1$.
- $i = j_0$ $k = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
$\lambda_5[6] = 1$,$\lambda_5[8] = -1$,$\lambda_5[74] = -1$,$\lambda_5[75] = 1$,$\lambda_5[98] = -1$,$\lambda_5[99] = 1$, $\lambda_5[115] = 1$,$\lambda_5[116] = -1$.
- $i = j_0$ $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
$\lambda_5[1] = 1$,$\lambda_5[19] = -1$,$\lambda_5[49] = -1$,$\lambda_5[53] = 1$,$\lambda_5[73] = -1$,$\lambda_5[77] = 1$, $\lambda_5[85] = 1$,$\lambda_5[86] = -1$.

- $i = k_0$ $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$,$\lambda_5[11] = 1$,$\lambda_5[73] = 1$,$\lambda_5[76] = -1$,$\lambda_5[97] = 1$,$\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$,$\lambda_5[116] = 1$.
- $i = k_0$ $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[26] = -1$,$\lambda_5[79] = 1$,$\lambda_5[93] = -1$,$\lambda_5[103] = 1$,$\lambda_5[36] = 1$,$\lambda_5[82] = -1$, $\lambda_5[94] = 1$,$\lambda_5[106] = -1$.
- $i = k_0$ $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$,$\lambda_5[11] = 1$,$\lambda_5[73] = 1$,$\lambda_5[76] = -1$,$\lambda_5[97] = 1$,$\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$,$\lambda_5[116] = 1$.
- $i = k_0$ $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$,$\lambda_5[12] = 1$,$\lambda_5[73] = 1$,$\lambda_5[76] = -1$,$\lambda_5[91] = -1$,$\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$,$\lambda_5[100] = -1$.

4. $\{i_0, j_0, k_0\} \subset \{i, j, k, i'\}$ Debemos considerar las siguientes alternativas:

- $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $k = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[17] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[18] = 1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$,

$\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- $i = j_0$, $k = k_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -1$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = 1$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[17] = 1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $j = i_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[18] = 1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $k = j_0$ y $i' = i_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = 1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- *Demostración Caso 2:* Debemos considerar 3 posibilidades.

  1. $i \neq i_0, j_0, k_0$ $(i_1 = i, i_2 = j)$. Por el *Caso 1* podemos utilizar $i = i'$
     $\lambda_5[2] = 1$,$\lambda_5[6] = -1$,$\lambda_5[10] = 1$, $\lambda_5[19] = -1$,$\lambda_5[54] = 1$,$\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[30] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[48] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$,$\lambda_5[106] = 1$.
  2. $i = k_0$ y $j \neq k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$. Asumimos $i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     $\lambda_5[2] = 1$,$\lambda_5[4] = -1$,$\lambda_5[10] = 1$, $\lambda_5[19] = -1$,$\lambda_5[62] = 1$,$\lambda_5[113] = -1$, $\lambda_5[26] = -1$, $\lambda_5[29] = 1$, $\lambda_5[33] = -1$, $\lambda_5[42] = 1$, $\lambda_5[66] = -1$,$\lambda_5[106] = 1$.
  3. $j = k_0$ y $i \neq k_0$ $(i_1 = i, i_2 = i')$. Asumimos $i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     $\lambda_5[12] = 1$,$\lambda_5[13] = -1$,$\lambda_5[52] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$,$\lambda_5[26] = -1$,$\lambda_5[27] = 1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[39] = -1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[42] = 1$,$\lambda_5[72] = -1$.

- *Demostración Caso 3:* Hay dos alternativas:

  1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$

con $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
En los caminos PR y λ anteriores suprimir el cliente correspondiente, y en el caso de j_0 invertir el orden de v_{k_0} y v_{i_0}.

- *Demostración Caso 4:*

1. La primera igualdad que debemos probar es

$$\alpha_{i_0 j_0} + \delta_{i i_0 j_0} - \gamma_{i j_0} + \gamma_{i_0 j_0} - \gamma_{j_0 i_0} = \alpha_{j_0 i_0} + \delta_{i j_0 i_0} - \gamma_{i i_0}$$

Para esto, definimos $\lambda = (1, -1)$ y consideramos las soluciones $\mathcal{CR}$ dadas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
2: $v_0\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

donde $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{n-4}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$.

2. Para demostrar la segunda igualdad,

$$\alpha_{j_0 k_0} + \delta_{i j_0 k_0} - \gamma_{i k_0} + \gamma_{j_0 k_0} - \delta_{i_0 k_0 j_0} + \gamma_{i_0 j_0} = \alpha_{k_0 j_0} + \gamma_{k_0 j_0}$$

Consideramos $(i_1 = i)$ $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$.

3. La tercera igualdad es

$$\alpha_{k_0 i_0} + \delta_{i k_0 i_0} - \gamma_{i i_0} + \gamma_{k_0 i_0} - \delta_{i_0 k_0 j_0} + \gamma_{i_0 j_0} + \delta_{i k_0 j_0} - \gamma_{i j_0} = \alpha_{i_0 k_0} + \delta_{i i_0 k_0} - \gamma_{i k_0} + \gamma_{i_0 k_0}$$

En este caso, definimos $(i_1 = i)$ $\lambda_4[17] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.

- *Demostración Caso 5:* Debemos probar, para todo $k, j \neq i_0, j_0, k_0$, que

$$\beta_i + \gamma_{k i'} - \delta_{j i k} - \sum_{r=1, r \neq k, i}^{n} \delta_{k i r} = \beta'_i + \gamma_{k i} - \delta_{j i k} - \sum_{r=1, r \neq k, i'}^{n} \delta_{k i' r}$$

1. $i, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_{j'}$
2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_{j'}$
3: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}$
4: $v_0\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}$
5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{j'}$
6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{j'}$
7: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i$
8: $v_0\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \dots v_{j_{n-7}}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$. Para probar la igualdad deseada definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$.

2. $i, i' \in \{i_0, j_0, k_0\}$

   - $i' = i_0$ Suprimir de los caminos PR anteriores a v_{i_0} y considerar el mismo λ.
   - $i' = j_0$ En los caminos PR reemplzar v_{i_0} v_{j_0} v_{k_0} por v_{k_0} v_{i_0} y considerar el mismo λ.
   - $i' = k_0$ Suprimir de los caminos PR anteriores a v_{k_0} y considerar el mismo λ.

□

Proposición A.9 *(3-diciclo-2) Sean $i_0, j_0, k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tres índices distintos. La desigualdad*

$$x_{i_0 j_0} + x_{j_0 k_0} + x_{k_0 i_0} + f^{i_0}_{k_0 j_0} + f^{j_0}_{i_0 k_0} + f^{k_0}_{j_0 i_0} \leq 2$$

define una faceta de $\mathcal{CR}$.

Demostración:
Igual que en la demostración anterior, vamos a suponer que $i_0 < j_0 < k_0$. Debemos encontrar multiplicadores a_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i < j$ (correspondientes a las ecuaciones 4.1), b_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.2), c_{ij} $v_i, j = 1, \ldots, n$ $i \neq j$ (ecuaciones 4.3), d (ecuación 4.4) y e (ecuación *3-dicycle-1*) tales que:

- $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ $(\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, j_0), (j_0, k_0))$
- $\alpha_{ji} = a_{ij} + b_{ji} + c_{ji}$ $(\forall i < j$ $(i, j) \neq (i_0, k_0))$
- $\alpha_{i_0 j_0} = a_{i_0 j_0} + b_{i_0 j_0} + c_{i_0 j_0} + e$
- $\alpha_{j_0 k_0} = a_{j_0 k_0} + b_{j_0 k_0} + c_{j_0 k_0} + e$
- $\alpha_{k_0 i_0} = a_{i_0 k_0} + b_{k_0 i_0} + c_{k_0 i_0} + e$
- $\gamma_{ij} = -c_{ij}$ $(\forall (i, j))$
- $\delta_{ijk} = -c_{ik} - b_{jk}$ $(\forall (i, j, k) \neq (i_0, k_0, j_0), (k_0, j_0, i_0), (j_0, i_0, k_0))$
- $\delta_{i_0 k_0 j_0} = -c_{i_0 j_0} - b_{k_0 j_0} + e$
- $\delta_{k_0 j_0 i_0} = -c_{k_0 i_0} - b_{j_0 i_0} + e$
- $\delta_{j_0 i_0 k_0} = -c_{j_0 k_0} - b_{i_0 k_0} + e$
- $\beta_i = d - \sum_{r=1\ r \neq i}^{n} b_{ir}$

Definimos:

- $e = \delta_{k_0 j_0 i_0} + c_{k_0 i_0} + b_{j_0 i_0}$
- $c_{ij} = -\gamma_{ij}$ para todo $(i,j) \neq (j_0, i_0)$
- $b_{jk} = -\delta_{ijk} + c_{ik}$ para algún i tal que $(i,j,k) \neq (i_0,k_0,j_0),(k_0,j_0,i_0),(j_0,i_0,k_0)$
- $a_{ij} = \alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij}$ para todo $i < j$ $(i,j) \neq (i_0,j_0),(j_0,k_0)$
- $a_{i_0 j_0} = \alpha_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0} - ci_0 j_0 + e$
- $a_{j_0 k_0} = \alpha_{j_0 k_0} - b_{j_0 k_0} - cj_0 k_0 + e$
- $d = \beta_i + \sum_{r=1 r\neq i}^{n} b_{ir}$ para algún i

Para que las definiciones anteriores sean correctas y consistentes, debemos ver que:

- *Caso 1:* La definicón de b_{jk} no depende del i. Para todo $(i,j,k) \neq (i_0,k_0,j_0),(k_0,j_0,i_0),(j_0,i_0,k_0)$ tenemos que probar que
$$-\delta_{ijk} + \gamma_{ik} = -\delta_{i'jk} + \gamma_{ik}$$
- *Caso 2:* La definición de e es consistente.
$$\delta_{k_0 j_0 i_0} + c_{k_0 i_0} + b_{j_0 i_0} = \delta_{i_0 k_0 j_0} + c_{i_0 j_0} + b_{k_0 j_0} = \delta_{j_0 i_0 k_0} + c_{j_0 k_0} + b_{i_0 k_0}$$
- *Caso 3:* La definición de a_{ij} cumple las condiciones necesarias. Se debe cumplir $a_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$. Entonces debemos ver, $\forall i < j$, $(i,j) \neq (i_0,j_0),(j_0,k_0),(i_0,k_0)$, que
$$\alpha_{ij} - b_{ij} - c_{ij} = \alpha_{ji} - b_{ji} - c_{ji}$$
- *Caso 4:* Para $a_{i_0 j_0}$, $a_{j_0 k_0}$ y $a_{k_0 i_0}$, debe cumplirse
$$\alpha_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_0} - c_{i_0 j_0} - e = \alpha_{j_0 i_0} - b_{j_0 i_0} - c_{j_0 i_0}$$
$$\alpha_{j_0 k_0} - b_{j_0 k_0} - c_{j_0 k_0} - e = \alpha_{k_0 j_0} - b_{k_0 j_0} - c_{k_0 j_0}$$
$$\alpha_{i_0 k_0} - b_{i_0 k_0} - c_{i_0 k_0} = \alpha_{k_0 i_0} - b_{k_0 i_0} - c_{k_0 i_0} - e$$
- *Caso 5:* La definición de d no depende del i:
$$\beta_i + \sum_{r=1 r\neq i}^{n} b_{ir} = \beta'_i + \sum_{r=1 r\neq i'}^{n} b_{i'r}$$

Probamos cada condición:

- *Demostración Caso 1:* Analizamos las cuatro posibilidades:

1. $i, j, k, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
   Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

   1: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i\ v_{i'}$
   2: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_{i'}\ v_i$
   3: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j\ v_{i'}$
   4: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_j$
   5: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_j\ v_i$
   6: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-7}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_{i'}\ v_i\ v_j$
   7: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_i\ v_{i'}\ v_k$
   8: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_j\ v_{i'}\ v_i\ v_k$
   9: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_j\ v_{i'}\ v_k$
   10: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_i\ v_{i'}\ v_j\ v_k$
   11: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_j\ v_i\ v_k$
   12: $v_0\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i'}\ v_i\ v_j\ v_k$

   con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_{i'}, v_j, v_k\}$. Definiendo

   $$\lambda = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

   surge la igualdad deseada.

2. Exactamente uno de los índices i, j, k, i' pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
   Consideramos los caminos PR y λ anteriores suprimiendo el cliente v_{i_0}, v_{j_0} o v_{k_0}, según sea el caso.

3. Exactamente dos de los índices i, j, k, i' pertenecen a $\{i_0, j_0, k_0\}$
   Las alternativas que se pueden presentar son:

   - $i = i_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[35] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[94] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
   - $i = i_0$, $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[54] = 1$, $\lambda_5[62] = -1$, $\lambda_5[110] = -1$, $\lambda_5[113] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[45] = 1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[46] = -1$.
   - $i = i_0$, $i' = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
     $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[13] = -1$, $\lambda_5[85] = -1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[101] = 1$, $\lambda_5[119] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $i = i_0$, $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[92] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$.
   - $i = i_0$, $k = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
     $\lambda_5[30] = 1$, $\lambda_5[80] = -1$, $\lambda_5[104] = -1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $i = i_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
     $\lambda_5[25] = 1$, $\lambda_5[79] = -1$, $\lambda_5[103] = -1$, $\lambda_5[117] = 1$, $\lambda_5[31] = -1$, $\lambda_5[105] = 1$, $\lambda_5[81] = 1$, $\lambda_5[118] = -1$.
   - $i = j_0$, $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
     $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[59] = 1$, $\lambda_5[111] = -1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[96] = 1$.

- $i = j_0$, $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[50] = -1$, $\lambda_5[85] = 1$, $\lambda_5[109] = 1$, $\lambda_5[119] = -1$, $\lambda_5[60] = 1$, $\lambda_5[88] = -1$, $\lambda_5[112] = -1$, $\lambda_5[120] = 1$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[62] = -1$, $\lambda_5[95] = -1$, $\lambda_5[113] = 1$, $\lambda_5[32] = -1$, $\lambda_5[33] = 1$, $\lambda_5[94] = 1$, $\lambda_5[106] = -1$.
- $i = j_0$, $k = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[17] = 1$, $\lambda_5[20] = -1$, $\lambda_5[52] = -1$, $\lambda_5[53] = 1$, $\lambda_5[28] = -1$, $\lambda_5[30] = 1$, $\lambda_5[55] = 1$, $\lambda_5[56] = -1$.
- $i = j_0$, $i' = k_0$ $(i_1 = j, i_2 = k)$
  $\lambda_5[1] = 1$, $\lambda_5[7] = -1$, $\lambda_5[73] = -1$, $\lambda_5[75] = 1$, $\lambda_5[91] = 1$, $\lambda_5[92] = -1$, $\lambda_5[97] = -1$, $\lambda_5[99] = 1$.
- $i = k_0$, $j = i_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[19] = 1$, $\lambda_5[53] = -1$, $\lambda_5[67] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[77] = -1$, $\lambda_5[86] = 1$, $\lambda_5[89] = -1$.
- $i = k_0$, $k = i_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[3] = 1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[98] = -1$, $\lambda_5[36] = 1$, $\lambda_5[40] = -1$, $\lambda_5[106] = -1$, $\lambda_5[108] = 1$.
- $i = k_0$, $j = j_0$ $(i_1 = k, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[11] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[99] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$.
- $i = k_0$, $k = j_0$ $(i_1 = j, i_2 = i')$
  $\lambda_5[2] = -1$, $\lambda_5[12] = 1$, $\lambda_5[73] = 1$, $\lambda_5[76] = -1$, $\lambda_5[97] = 1$, $\lambda_5[100] = -1$, $\lambda_5[115] = -1$, $\lambda_5[116] = 1$.

4. $\{i_0, j_0, k_0\} \subset \{i, j, k, i'\}$ Debemos considerar las siguientes alternativas:

- $i = i_0$, $j = j_0$ y $k = k_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $j = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $k = j_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = i_0$, $j = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.

- $i = i_0$, $k = k_0$ y $i' = j_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = -\frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $j = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = k)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $k = i_0$ y $i' = k_0$ $(i_1 = j)$
  $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = j_0$, $j = k_0$ y $k = i_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = -1$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.
- $i = k_0$, $j = i_0$ y $k = j_0$ $(i_1 = i')$
  $\lambda_4[1] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[17] = 1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[22] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- *Demostración Caso 2:* Para ver que

$$\delta_{k_0 j_0 i_0} + c_{k_0 i_0} + b_{j_0 i_0} = \delta_{i_0 k_0 j_0} + c_{i_0 j_0} + b_{k_0 j_0}$$

definimos $\lambda_4[1] = -1$, $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[3] = -1$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[7] = 1$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[9] = 1$, $\lambda_4[12] = -1$.

Para la condición

$$\delta_{k_0 j_0 i_0} + c_{k_0 i_0} + b_{j_0 i_0} = \delta_{j_0 i_0 k_0} + c_{j_0 k_0} + b_{i_0 k_0}$$

definimos $\lambda_4[1] = -1$, $\lambda_4[3] = -1$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[5] = 1$, $\lambda_4[13] = 1$, $\lambda_4[14] = -1$, $\lambda_4[17] = -1$, $\lambda_4[19] = 1$, $\lambda_4[8] = -1$, $\lambda_4[15] = 1$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[22] = -1$.

- *Demostración Caso 3:* Hay dos alternativas:

  1. $i, j \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
     Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

     1: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_j\ v_i$
     2: $v_0\ v_{j_1} \ldots j_{n-5}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_k\ v_i\ v_j$

     con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-5}}\} = V \setminus \{v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}, v_i, v_j\}$. Definiendo $\lambda = (1, -1)$ surge la igualdad deseada.

2. Exactamente uno de los índices i, j pertenece a $\{i_0, j_0, k_0\}$
En los caminos PR y λ anteriores suprimir el cliente correspondiente, y en el caso de j_0 invertir el orden de v_{k_0} y v_{i_0}.

- *Demostración Caso 4:*

1. La primera igualdad que debemos probar es

$$\alpha_{i_0j_0} + \delta_{ii_0j_0} + \gamma_{i_0j_0} + \gamma_{k_0i_0} - \gamma_{ij_0} - \delta_{k_0j_0i_0} - \alpha_{j_0i_0} - \gamma_{j_0i_0} = 0$$

Consideramos $(i_1 = i)$ $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[4] = 1$, $\lambda_4[13] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[17] = -1$, $\lambda_4[19] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = 1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

2. La segunda igualdad es

$$\alpha_{j_0k_0} + \delta_{ij_0k_0} - \gamma_{ik_0} + \gamma_{j_0k_0} - \delta_{k_0j_0i_0} + \gamma_{k_0i_0} + \delta_{ij_0i_0} - \gamma_{ii_0} = \alpha_{k_0j_0} + \delta_{ik_0j_0} - \gamma_{ij_0} + \gamma_{k_0j_0}$$

Consideramos $(i_1 = i)$ $\lambda_4[1] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[2] = 1$, $\lambda_4[3] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = \frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[12] = -1$, $\lambda_4[16] = 1$, $\lambda_4[22] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

3. La tercera igualdad es

$$\alpha_{k_0i_0} + \delta_{ik_0i_0} - \gamma_{ii_0} + \gamma_{k_0i_0} - \delta_{k_0j_0i_0} + \gamma_{k_0i_0} + \delta_{ij_0i_0} - \gamma_{ii_0} = \alpha_{i_0k_0} + \delta_{ii_0k_0} - \gamma_{ik_0} + \gamma_{i_0k_0}$$

En este caso, definimos $(i_1 = i)$ $\lambda_4[1] = 1{,}5$, $\lambda_4[2] = -1$, $\lambda_4[3] = 1{,}5$, $\lambda_4[4] = -1$, $\lambda_4[5] = -1$,$\lambda_4[13] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[14] = 1$, $\lambda_4[17] = 1$, $\lambda_4[19] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[20] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[23] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[7] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[8] = 1$, $\lambda_4[21] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[9] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[15] = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4[10] = -1$, $\lambda_4[12] = 1$, $\lambda_4[16] = -1$, $\lambda_4[22] = 1{,}5$, $\lambda_4[24] = \frac{1}{2}$.

- *Demostración Caso 5:* Debemos probar, para todo $k, j \neq i_0, j_0, k_0$, que

$$\beta_i + \gamma_{ki'} - \delta_{jik} - \sum_{r=1, r\neq k,i}^{n} \delta_{kir} = \beta'_i + \gamma_{ki} - \delta_{jik} - \sum_{r=1, r\neq k,i'}^{n} \delta_{ki'r}$$

1. $i, i' \notin \{i_0, j_0, k_0\}$
Sean las soluciones de $\mathcal{CR}$ definidas por los siguientes caminos PR:

1: $v_0\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j'}$
2: $v_0\ v_k\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_{j'}$
3: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
4: $v_0\ v_{j'}\ v_i\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}$
5: $v_0\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{j'}$
6: $v_0\ v_k\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i\ v_{j'}$
7: $v_0\ v_k\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i$
8: $v_0\ v_{j'}\ v_{i'}\ v_k\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{j_1} \ldots v_{j_{n-7}}\ v_i$

con $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-7}}\} = V \setminus \{v_i, v_{i'}, v_j, v_k, v_{i_0}, v_{j_0}, v_{k_0}\}$. Para probar la igualdad deseada definimos $\lambda = (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)$.

2. $i, i' \in \{i_0, j_0, k_0\}$

- $i' = i_0$ Suprimir de los caminos PR anteriores a v_{i_0} y considerar el mismo λ.
- $i' = j_0$ Suprimir de los caminos PR anteriores a v_{j_0}, definir a v_k como v_{i_0} y considerar el mismo λ.
- $i' = k_0$ Suprimir de los caminos PR anteriores a v_{k_0} y considerar el mismo λ.

□

1	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	13	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
2	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	14	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
3	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	15	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
4	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	16	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
5	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	17	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
6	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	18	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
7	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	19	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
8	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	20	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
9	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	21	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
10	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	22	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
11	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	23	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
12	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	24	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-4}}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

Tabla A.1: 4 índices

.

1	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	41	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	81	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
2	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	42	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	82	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
3	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	43	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	83	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
4	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	44	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	84	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
5	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	45	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	85	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$
6	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	46	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	86	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$
7	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	47	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	87	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
8	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	48	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	88	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
9	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	49	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	89	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
10	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	50	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	90	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
11	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	51	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	91	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
12	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	52	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	92	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
13	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	53	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	93	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
14	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	54	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	94	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
15	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	55	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	95	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
16	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	56	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	96	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
17	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	57	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	97	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
18	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	58	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	98	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
19	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	59	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	99	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
20	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	60	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	100	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
21	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	61	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	101	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
22	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	62	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	102	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
23	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	63	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	103	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
24	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	64	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	104	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
25	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	65	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	105	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
26	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	66	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	106	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
27	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	67	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	107	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
28	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	68	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	108	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
29	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	69	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	109	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
30	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	70	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	110	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
31	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	71	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	111	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
32	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	72	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	112	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
33	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	73	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	113	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
34	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	74	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	114	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
35	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	75	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	115	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
36	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	76	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	116	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
37	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	77	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	117	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
38	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	78	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	118	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
39	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	79	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	119	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
40	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	80	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	120	$v_0\ v_{j_1}..v_{j_{n-5}}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

Tabla A.2: 5 índices

1	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	41	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	81	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$
2	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	42	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	82	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$
3	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	43	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	83	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
4	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	44	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	84	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
5	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	45	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	85	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$
6	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	46	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	86	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$
7	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	47	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	87	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$
8	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	48	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	88	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$
9	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	49	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	89	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
10	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	50	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	90	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
11	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	51	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	91	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
12	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	52	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	92	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
13	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	53	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	93	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
14	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	54	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	94	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
15	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	55	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	95	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
16	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	56	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	96	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
17	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	57	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	97	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$
18	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	58	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	98	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$
19	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	59	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	99	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
20	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	60	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	100	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
21	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	61	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	101	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
22	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	62	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	102	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
23	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	63	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	103	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$
24	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	64	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	104	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$
25	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	65	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	105	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
26	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	66	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	106	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
27	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	67	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	107	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
28	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	68	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	108	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
29	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	69	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	109	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
30	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	70	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	110	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
31	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	71	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	111	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
32	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	72	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	112	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
33	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	73	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	113	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
34	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	74	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	114	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
35	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	75	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	115	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
36	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	76	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	116	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
37	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	77	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	117	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
38	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	78	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	118	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
39	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	79	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	119	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
40	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	80	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	120	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$

Tabla A.3: 6 índices

121	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	161	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	201	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}
122	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	162	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	202	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}
123	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	163	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	203	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}
124	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	164	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	204	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}
125	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	165	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	205	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}
126	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	166	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	206	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}
127	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	167	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	207	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}
128	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	168	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	208	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}
129	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	169	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	209	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}
130	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	170	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	210	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}
131	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	171	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	211	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}
132	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	172	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	212	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}
133	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	173	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	213	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}
134	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	174	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	214	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}
135	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	175	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	215	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}
136	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	176	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	216	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}
137	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	177	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	217	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}
138	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	178	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	218	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}
139	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	179	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	219	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}
140	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	180	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	220	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}
141	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	181	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	221	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}
142	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	182	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	222	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}
143	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}	183	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	223	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}
144	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}	184	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	224	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}
145	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	185	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}	225	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}
146	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	186	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}	226	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}
147	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	187	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	227	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}
148	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	188	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	228	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}
149	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	189	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	229	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_1}
150	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	190	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	230	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{k_0}
151	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	191	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}	231	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}
152	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	192	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}	232	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}
153	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	193	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	233	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}
154	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	194	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	234	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}
155	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	195	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_2}	235	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{k_0}	v_{l_0}
156	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	196	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	236	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{k_0}
157	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	197	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{k_0}	v_{l_0}	237	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}
158	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	198	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{k_0}	238	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}
159	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	199	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	239	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{k_0}
160	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	200	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	240	v_0	$v_{j_1}..j_{n-6}$	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{k_0}	v_{i_0}

Tabla A.4: 6 índices (continuación)

241	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	281	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	321	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}
242	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	282	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	322	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}
243	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	283	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	323	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}
244	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	284	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	324	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}
245	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	285	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	325	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}
246	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	286	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	326	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}
247	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	287	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	327	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}
248	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	288	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	328	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}
249	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	289	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	329	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}
250	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	290	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	330	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}
251	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	291	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	331	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}
252	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	292	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	332	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}
253	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	293	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	333	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}
254	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	294	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	334	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}
255	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	295	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	335	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}
256	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	296	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	336	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}
257	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	297	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	337	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}
258	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	298	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	338	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}
259	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	299	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	339	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}
260	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	300	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	340	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}
261	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	301	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	341	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}
262	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	302	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	342	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}
263	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}	303	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	343	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}
264	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}	304	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	344	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}
265	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	305	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}	345	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}
266	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	306	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}	346	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}
267	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	307	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	347	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}
268	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{l_0}	308	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	348	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}
269	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	309	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	349	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_1}
270	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	310	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	350	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{j_0}
271	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	311	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}	351	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_1}
272	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	312	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}	352	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}
273	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	313	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	353	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}
274	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_0}	314	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	354	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}
275	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	v_{i_1}	315	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_2}	355	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{j_0}	v_{l_0}
276	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	316	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	356	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{j_0}
277	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	317	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{j_0}	v_{l_0}	357	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}
278	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	318	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	v_{j_0}	358	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{l_0}	v_{i_0}
279	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	319	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{l_0}	v_{i_2}	359	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_0}	v_{j_0}
280	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{j_0}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{i_2}	v_{i_0}	320	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_1}	v_{j_0}	v_{i_0}	v_{i_2}	v_{l_0}	360	v_0	v_{j_1}	$..j_{n-6}$	v_{k_0}	v_{i_2}	v_{i_1}	v_{l_0}	v_{j_0}	v_{i_0}

Tabla A.5: 6 índices (continuación)

361	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	401	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	441	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
362	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	402	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	442	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
363	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	403	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	443	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
364	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	404	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	444	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
365	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	405	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	445	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$
366	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	406	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	446	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$
367	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	407	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	447	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
368	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	408	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	448	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
369	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	409	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	449	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
370	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	410	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	450	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
371	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	411	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	451	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
372	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	412	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	452	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
373	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	413	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	453	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
374	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	414	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	454	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
375	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	415	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	455	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
376	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	416	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	456	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
377	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	417	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	457	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
378	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	418	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	458	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
379	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	419	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	459	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
380	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	420	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	460	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
381	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	421	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	461	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
382	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	422	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	462	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
383	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	423	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	463	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$
384	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	424	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	464	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$
385	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	425	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	465	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
386	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	426	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	466	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
387	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	427	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	467	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
388	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	428	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	468	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
389	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	429	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	469	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
390	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	430	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	470	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
391	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}$	431	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	471	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
392	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}$	432	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	472	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
393	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	433	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	473	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
394	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	434	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	474	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
395	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	435	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	475	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
396	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	436	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	476	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
397	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	437	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	477	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
398	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	438	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	478	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
399	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	439	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	479	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
400	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	440	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	480	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{1_0}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

Tabla A.6: 6 índices (continuación)

481	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	521	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	561	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
482	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	522	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	562	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
483	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	523	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	563	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
484	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	524	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	564	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
485	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	525	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	565	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$
486	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	526	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	566	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$
487	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	527	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	567	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$
488	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	528	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	568	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$
489	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	529	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	569	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
490	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	530	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	570	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
491	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	531	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	571	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
492	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	532	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	572	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
493	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	533	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	573	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
494	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	534	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	574	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
495	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	535	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	575	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
496	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	536	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	576	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
497	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	537	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	577	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
498	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	538	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	578	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
499	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	539	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	579	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
500	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	540	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	580	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
501	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	541	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	581	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
502	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	542	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	582	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
503	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	543	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	583	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
504	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	544	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	584	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
505	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	545	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	585	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
506	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	546	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	586	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$
507	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	547	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	587	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
508	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	548	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	588	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
509	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	549	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	589	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
510	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	550	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	590	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
511	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}$	551	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	591	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
512	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}$	552	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	592	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$
513	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	553	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	593	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
514	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	554	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	594	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
515	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	555	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_2}$	595	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
516	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	556	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}$	596	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
517	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	557	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	597	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
518	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	558	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	598	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
519	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}$	559	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}$	599	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
520	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_2}\ v_{i_0}$	560	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_2}\ v_{k_0}$	600	$v_0\ v_{j_1}..\dot{j}_{n-6}\ v_{i_1}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

Tabla A.7: 6 índices (continuación)

601	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	641	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	681	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
602	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	642	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	682	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
603	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	643	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	683	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
604	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	644	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	684	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
605	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	645	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	685	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$
606	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	646	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	686	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$
607	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	647	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$	687	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$
608	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	648	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$	688	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$
609	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	649	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	689	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
610	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	650	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	690	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
611	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	651	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	691	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
612	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	652	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	692	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
613	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	653	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	693	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
614	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	654	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	694	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
615	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	655	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	695	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
616	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	656	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	696	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
617	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	657	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	697	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
618	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	658	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	698	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
619	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	659	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	699	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
620	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	660	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	700	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
621	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	661	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	701	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
622	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	662	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	702	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
623	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	663	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	703	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$
624	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	664	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	704	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$
625	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	665	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	705	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
626	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	666	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	706	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$
627	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	667	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$	707	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
628	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	668	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$	708	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
629	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}$	669	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	709	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}$
630	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}$	670	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	710	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}$
631	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}$	671	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$	711	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$
632	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}$	672	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$	712	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$
633	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	673	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	713	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
634	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	674	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	714	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$
635	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}\ v_{l_0}$	675	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_1}$	715	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$
636	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}$	676	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}$	716	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$
637	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	677	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{j_0}\ v_{k_0}$	717	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}$
638	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	678	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}\ v_{j_0}$	718	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}$
639	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}$	679	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}$	719	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_0}\ v_{j_0}$
640	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{j_0}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{i_1}\ v_{i_0}$	680	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{l_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}\ v_{i_1}\ v_{k_0}$	720	$v_0\ v_{j_1}..j_{n-6}\ v_{i_2}\ v_{i_1}\ v_{l_0}\ v_{k_0}\ v_{j_0}\ v_{i_0}$

Tabla A.8: 6 índices (continuación)

Bibliografía

[1] J. Araque, L. Hall and T. Magnanti. *Capacitated trees, capacitated routing and associated polyhedra*, Discussion paper, Center for Operations Research and Econometrics, Catholic University of Louvain, Belgium, 1990.

[2] F. Afrati, S. Cosmadakis, C. Papadimitriou, G. Papageorgiou, N. Papakostantinou. *The complexity of the travelling repairman problem*, RAIRO Informatique Theorique et Applications 20, 79-87, 1986.

[3] S. R. Agnihothri. *A mean value analysis of the travelling repairman problem*, IIE Transactions, 20(2), 223–229, 1998.

[4] A. Archer, A. Leviny and D. Williamson. *A Faster, Better Approximation Algorithm for the Minimum Latency Problem*, citeseer.ist.psu.edu/676049.html, 2004.

[5] A. Archer and D. Williamson. *Faster Approximation Algorithms for the Minimum Latency Problem*, Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms, Baltimore, 2003.

[6] S. Arora and G. Karakostas. *Approximation Schemes for Minimum Latency Problem*, Proceedings of the thirty-first annual ACM Symposium on Theory of computing, Atlanta, 688-693, 1993.

[7] G. Ausiello, S. Leonardi, and A. Marchetti-Spaccamela. *On salesmen, repairmen, spiders and other traveling agents*, Proc. of the Italian Conference on Algorithms and Complexity, 1-16, 2000.

[8] I. Averbakh and O. Berman. *Sales-delivery man problems on treelike networks*, Networks 25, 45–58, 1995.

[9] J. Beasley. *Lagrangean relaxation, ch. 6*, Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems, Blackwell Scientific Publications, 1993.

[10] M. Benichou, J. Gauthier, P. Girodet, G. Hehntges, G. Ribiere, and O. Vincent. *Experiments in Mixed Integer Linear Programming*, Mathematical Programming 1, 76-94, 1971.

[11] L. Bianco, A. Mingozzi, and S. Ricciardelli. *The traveling salesman problem with cumulative costs*, Networks 23(2), 81-91, 1993.

[12] A. Blum, P. Chalasani, D. Coppersmith, B. Pulleyblank, P. Raghavan and M. Sudan, *The Minimum Latency Problem*, Proceedings of 26th ACM Symp. on Theory Of Computing (STOC), 163-171, 1994.

[13] K. Chaudhuri, B. Godfrey, S. Rao and K. Talwar. *Paths, Trees, and Minimum Latency Tours*, Proc. 44th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 2003.

[14] T. Christof, A. Löbel and M. Stoer. *PORTA POlyhedron Representation Transformation Algorithm, version 1.3.2*, 1997, Konrad-Zuse-Zentrum für Infortionstechnik (ZIB), Alemania.

[15] V. Chvatal. *Hamiltonian cycles*, in: The traveling salesman problem - A guided tour of combinatorial optimization, L. Lawler, J. Lenstra, A. Rinnooy Kan, D. Shmoys (Eds.), Wiley & Sons, Chichester, 403-429, 1985.

[16] S. Cook. *The complexity of theorem-proving procedures*, 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing Machinery, 151-158, 1971.

[17] *CPLEX Linear Optimization 8.1 with Mixed Integer & Barrier Solvers*, ILOG, 1997-1998.

[18] H. Crowder, E. Johnson and M. Padberg. *Solving large scale zero-one linear programming problems*, Operations Research 31, 803-834, 1983.

[19] G. B. Dantzig, D.R. Fulkerson and S. M. Johnson, *Solution of a Large-Scale Travelling Salesman Problems*, Operations Research 2, 393-410, 1954.

[20] C. A. van Eijl, *A polyhedral approach to the delivery man problem*, Memorandum COSOR 95-19, Eindhoven University of Technology, 1995.

[21] E. Feuerstein and L. Stougie, *On-line single-server dial-a-ride problems*, Theoretical Computer Science 268(1), 91–105, 2001.

[22] M. Fischetti, G. Laporte and S. Martello, *The Delivery Man Problem and Cumulative Matroids*, Operations Research 41(6), 1055-1064, 1993.

[23] K. Fox, B. Gavish and S. Graves, *An n-Constraint Formulation of the (Time-Dependent) Traveling Salesman Problem*, Operations Research 28(4), 1018-1021, 1980.

[24] A. García, P. Jodrá, J. Tejel, *A note on the travelling repairman problem*, Networks 40(1), 27-31, 2002.

[25] P. Gilmore and R. Gomory. *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem*, Operations Research 9, 849-859, 1961.

[26] M. Goemans and J. Kleinberg. *An improved approximation ratio for the minimum latency problem*, Mathematical Programming 82, 111-124, 1998.

[27] M. Goemans and D. Williamson. *A general approximation technique for constrained forest problems*, SIAM Journal on Computing 24, 296-317, 1995.

[28] M. Garey and D. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman and Co., San Francisco, 1979.

[29] R. Gomory. *Outline of an algorithm for integer solution to linear programs*, Bulletin American Mathematical Society 64, 275-278, 1958.

[30] M. Grötschel, M. Jünger and G. Reinelt. *A Cutting Plane Algorithm for the Linear Ordering Problem*, Operations Research 32, 1195-1220, 1984.

[31] M. Grötschel, M. Jünger and G. Reinelt. *Facets of the linear ordering polytope*, Mathematical Programming 33, 43-60, 1985.

[32] M. Grötschel, L. Lovasz and A. Schrijver. *The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization*, Combinatorica 1, 169-197, 1981.

[33] M. Grötschel and M. Padberg. *On the Symmetric Traveling Salesman Problem I: inequalities*, Mathematical Programming 16, 265-280, 1979.

[34] R. Karp. *Reducibility among combinatorial problems*, in Complexity of Computer Computations, R. Miller and J. Thatcher (Eds.), Plenum Press, New York, 85-104, 1972.

[35] G. Karakostas, *Results on Approximation Algorithms*, Ph.D. Thesis, Princeton University TR-625-00, 2000.

[36] E. Koutsoupias, C. H. Papadimitriou, and M. Yannakakis, *Searching a Fixed graph*, ICALP, 280-289, 1996.

[37] S. Krumke, W. de Paepe, D. Poensgen, and L. Stougie, *News from the online traveling repairman*, Lecture Notes in Computer Science 2136, 487-498, 2001.

[38] S. Lin. *Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem*, Bell Syst. Tech. J. 44, 2245-2269, 1965.

[39] A. Lucena. *Exact solution approaches for the vehicle routing problem*. Ph.D. Thesis, Imperial College, University of London, 1986.

[40] A. Lucena. *Time-Dependent Traveling Salesman Problem - The Deliveryman Case*, Networks 20, 753-763, 1990.

[41] E. Minieka. *The Delivery Man Problem on a Tree Network*, Annals of Operations Research 18, 261-266, 1989.

[42] G. Nemhauser and L. Wolsey. *Integer Programming and Combinatorial Optifization*, John Wiley and Sons, 1988.

[43] M. Padberg and G. Rinaldi. *A branch-and-Cut algorithm for the resolution of a large scale symmetric traveling salesman problems*, SIAM review 33, 60-100, 1991.

[44] C. Papadimitriou and K. Steiglitz. *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*, Prentice Hall, 1985.

[45] J. Picard and M. Queyranne. *The Time-Dependent Traveling Salesman Problem and Its Application to the Tardiness Problem in One-Machine Scheduling*, Operations Research 26(1), 86-110, 1978.

[46] M. Queyranne and A. Schulz. *Polyhedral Approaches to Machine Scheduling*, Technical University of Berlin, Preprint 408/1994, 1994.

[47] J. van den Akker, C. van Hoesel and M. Savelsbergh. *A Polyhedral Approach to Single-Machine Scheduling Problems*, Mathematical Programming 85, 541-572, 1999. http://citeseer.ifi.unizh.ch/vandenakker97polyhedral.html

[48] S. Sahni, T. Gonzalez. *P-complete approximation problems*, Journal of the Association for Computing Machinery 23, 555-565, 1976.

[49] D. Simchi-Levi and O. Berman, *Minimizing the total flow time of n jobs on a network*, IIE Trans 23, 236-244, 1991.

[50] R. Sitters. *The minimum latency problem is NP-hard for weighted trees*, in Proceedings of the 9th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, 230-239, 2002.

[51] R. Sitters. *Complexity and Approximation in Routing and Scheduling*, Ph.D. Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2004, www.mpi-inf.mpg.de/∼sitters/papers/ThesisRene2004.pdf.

[52] Toth, P. and Vigo D. Eds. *The Vehicle Routing Problem*, SIAM, Monographs on Discrete Mathematics and Applications, 2002.

[53] R. Vander Wiel and N. Sahinidis. *Heuristic bounds and test problem generation for the time-dependent traveling salesman problem*, Transportation Science 29(2), 167-183, 1995.

[54] J. Tsitsiklis. *Special cases of traveling salesman and repairman problems with time windows*, Networks 22, 263-282, 1992.

[55] I. Webb. *Depth-first solutions for the deliveryman problem on tree-like networks: an evaluation using a permutation*, Lecture Notes in Computer Science 2368 (SWAT 2002), 190–199, 2002.

[56] B. Wu. *Polynomial time algorithms for some minimum latency problems*, Information Processing Letters 75(5), 225–229, 2000.

[57] B. Wu, Z. Huang and F. Zhan. *Exact algorithms for the minimum latency problem*, Information Processing Letters 92(6), 303-309, 2004.

[58] C. Yang. *A dynamic programming algorithm for the travelling repairman problem*, Asia-Pacific Journal of Operations Research 6, 192-206, 1989.