

TRATADO ELEMENTAL

DE

GEOMETRÍA EUCLÍDEA

DE ACUERDO CON LAS IDEAS MODERNAS Y MÉTODOS MÁS RIGUROSOS

POR

C. C. DASSEN

Ingeniero civil; doctor en ciencias físico-matemáticas
profesor de matemáticas superiores y doblemente laureado de la Facultad de Ciencias
Exactas, Físicas y Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Tomo II. — GEOMETRÍA DEL ESPACIO

Texto adaptable a los programas de los Colegios Nacionales y Escuelas Normales



BUENOS AIRES

IMPRESA Y CASA EDITORA DE CONI HERMANOS

684 — CALLE DEL PERÚ — 684

1905

CAPÍTULO V. — <i>Los poliedros</i>	153
I. Generalidades.....	153
II. Igualdad de dos tetraedros y de dos poliedros en general.....	164
CAPÍTULO VI. — <i>Cono recto circular</i>	169
CAPÍTULO VII. — <i>Inscripción y circunscripción de poliedros en una superficie esférica, y de una pirámide en un cono</i>	174
CAPÍTULO VIII. — <i>Principio de dualidad en el espacio</i> ...	179
Resumen de las principales proposiciones de Geometría del espacio comunes á las geometrías euclídeas y no euclídeas.....	181
Ejercicios relativos á esta primera parte.....	197

SEGUNDA PARTE

PRINCIPIOS ESPECIALES Á LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA

LIBRO PRIMERO

Teoría de las rectas y planos paralelos

CAPÍTULO I. — <i>Rectas paralelas</i>	217
CAPÍTULO II. — <i>Rectas y planos paralelos entre sí</i>	223
CAPÍTULO III. — <i>Prismas y cilindros</i>	251
I. Prismas.....	251
a) Superficie prismática.....	251
b) Prisma.....	254
II. Cilindro recto circular.....	262
CAPÍTULO IV. — <i>Prismas inscriptos ó circunscriptos en cilindros</i>	271

LIBRO SEGUNDO

Áreas y volúmenes

CAPÍTULO I. — <i>Área de las superficies que limitan los</i>	
--	--

<i>cuerpos geométricos elementales</i>	273
I. Poliedros.....	273
II. Cuerpos redondos desarrollables.....	278
III. Superficie esférica y porciones principales de ésta..	284
CAPÍTULO II. — <i>Medida de los volúmenes de los cuerpos geométricos elementales</i>	300
I. Preliminares.....	300
II. Volúmenes de los poliedros.....	304
III. Cuerpos redondos desarrollables.....	325
IV. Esfera y principales porciones de ellas.....	330

LIBRO TERCERO

Cuerpos semejantes

I. Poliedros semejantes.....	345
II. Conos y cilindros de revolución.....	359
Resumen de las principales proposiciones de Geometría del espacio dependientes del postulado de Euclides..	361
Ejercicios relativos á este libro.....	368

APÉNDICE

I Definición del plano.....	389
II. Dos clases de figuras iguales en el espacio. Simetría respecto de un centro, de un eje y de un plano.....	394
III. Nociones de topografía.....	402
I. Preliminares, Planimetría.....	402
II. Altimetría. Nivelación.....	416
III. Agrimensura.....	421
IV. Curvas y superficies especiales.....	423
Elipse.....	426
Hipérbola.....	433
Parábola.....	440
Cicloide, epicloide y espiral de Arquímedes.....	442
Secciones cónicas.....	445
Hélice.....	448
Generalidades sobre las superficies.....	455
Ejercicios relativos á las curvas especiales.....	464

<i>cuerpos geométricos elementales</i>	273
I. Poliedros.....	273
II. Cuerpos redondos desarrollables.....	278
III. Superficie esférica y porciones principales de ésta..	284
CAPÍTULO II. — <i>Medida de los volúmenes de los cuerpos geométricos elementales</i>	300
I. Preliminares.....	300
II. Volúmenes de los poliedros.....	304
III. Cuerpos redondos desarrollables.....	325
IV. Esfera y principales porciones de ellas.....	330

LIBRO TERCERO

Cuerpos semejantes

I. Poliedros semejantes.....	345
II. Conos y cilindros de revolución.....	359
Resumen de las principales proposiciones de Geometría del espacio dependientes del postulado de Euclides..	361
Ejercicios relativos á este libro.....	368

APÉNDICE

I Definición del plano.....	389
II. Dos clases de figuras iguales en el espacio. Simetría respecto de un centro, de un eje y de un plano.....	394
III. Nociones de topografía.....	402
I. Preliminares, Planimetría.....	402
II. Altimetría. Nivelación.....	416
III. Agrimensura.....	421
IV. Curvas y superficies especiales.....	423
Elipse.....	426
Hipérbola.....	433
Parábola.....	440
Cicloide, epicicloide y espiral de Arquímedes.....	442
Secciones cónicas.....	445
Hélice.....	448
Generalidades sobre las superficies.....	455
Ejercicios relativos á las curvas especiales.....	464

PREFACIO

Después de lo manifestado en el prefacio del tomo I de esta obra, sólo nos resta indicar el plan y la originalidad de este segundo tomo, así como apuntar algunas consideraciones más de carácter general.

Como es natural, se ha conservado la distinción entre las proposiciones comunes á las geometrías euclídea y no euclídeas, y las especiales á la primera, quedando así dividido el tomo en dos partes. Se me ha objetado que tal división, si bien encomiable por su franqueza lógica, implica dar al postulado de Euclides una importancia demasiado considerable, siendo así que es un postulado como cualquier otro. Indudablemente (1), la geometría exclusivamente racional está basada en *nociones fundamentales*, por medio de las cuales todas las otras pueden ser construidas por simples definiciones lógicas, y en *axiomas* que expresan ciertas propiedades de aquellas nociones, de suerte que toda imagen sensoria queda eliminada y no hay por qué atribuir á un axioma, mayor importancia que

(1) Véase G. COMBEBIAC, *Los principios analíticos de la Geometría*. (*L'enseignement mathématique*, 1904, Paris.)

á otro. Tales son los sistemas de HILBERT (1), PADOA (2), MINKOWSKI (3), HAMEL (4). Pero la cuestión cambia cuando se estudia, no el tema de los *fundamentos ó principios analíticos de la Geometría abstracta* sino la geometría especial de nuestro espacio con un fin pedagógico. POINCARÉ (5) dice á ese respecto : « Este libro (se refiere al citado de HILBERT) debuta de la siguiente manera : « Pensemos tres sistemas de objetos « que llamaremos *puntos, rectas y planos*. ¿ Qué objetos son éstos ? No lo sabemos ni tenemos por qué « saberlo ; más aún, no conviene buscar lo que son ; « todo lo que tenemos derecho á saber de ellos es lo que « nos enseñan los axiomas... He aquí un libro del cual « tengo la mejor opinión pero que me guardaría de recomendar á los alumnos de los liceos. »

Tratándose de la geometría de nuestro espacio la distinción especial del postulado de Euclides está justificada por la importancia histórica de este postulado y por el número considerable de proposiciones elementales que derivan de él, así como por su vasta aplicación en la práctica.

(1) D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1899; traducción francesa de L. Laugel, Gauthier Villars, Paris, 1900.

(2) *Un nouveau système de définitions pour la Geometrie Euclidienne* (Compte-rendu du Congrès International de mathématiciens); Gauthier Villars, Paris, 1902.

(3) *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, Teubner, 1896.

(4) *Ueber die Geometricen, en denen die Geraden die Kürzesten sind*, Göttingen, Dietrich, 1901.

(5) *Les Définitions générales en mathématiques*. Conferencia en el Museo Pedagógico de Paris, 1904.

Después de publicado el primer tomo de esta obra, he tenido oportunidad de conocer el excelente texto de ENRIQUES Y AMALDI (1), en el que los autores han separado también las proposiciones derivadas del postulado de las paralelas de los demás, independientes de él. El método seguido por estos autores es parecido al nuestro, ambos tienden á separar netamente, en el estudio geométrico del espacio en que nos encontramos, la parte empírica y la parte puramente de lógica. Las observaciones experimentales preceden y se condensan en forma de postulados, y luego, de éstas, por el raciocinio, se desprenden los teoremas. De ahí la naturaleza *física* de los postulados,

Así como en geometría plana la teoría de la circunferencia es, en gran parte, la repetición de la de los triángulos, en la del espacio, la teoría de la superficie esférica es una repetición de la de las rectas y planos perpendiculares ú oblicuos, y por lo tanto deben estudiarse simultáneamente. Alguien ha objetado que este sistema tiene el inconveniente de fraccionar la teoría de la circunferencia, de la esfera, etc., en vez de presentarla en un todo homogéneo. Contesto que el encadenamiento lógico de las proposiciones es más fundamental que la agrupación arbitraria de las mismas en base á una línea, superficie ó cuerpo determinado, y que esta tarea está, por otra parte, realizada en nuestro texto en los resúmenes que figuran al final de cada libro.

El ángulo diedro ha sido definido de una manera análoga al ángulo rectilíneo; los enunciados y demostraciones de los teoremas han sido revisados con esme-

(1) *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 2ª edizione, 1905.

ro á fin de que sean lo más correctos posibles; sobre este particular se notan, en la generalidad de los textos usuales, bastante negligencia.

La geometría de la radiación y la esférica tienen sus postulados fundamentales análogos á la geometría plana, con excepción del postulado que establece que la línea recta es abierta y del de las paralelas. Luego, demostrada esta analogía ó *principio de dualidad*, quedan de paso demostradas todas las proposiciones de la geometría de la radiación y de la esférica, basta traducir convenientemente las proposiciones correlativas de la geometría plana, independientes de los postulados indicados.

Nos ha bastado, en consecuencia, recordar las proposiciones que constituyen el libro I del primer tomo de este texto, proposiciones independientes del postulado de las paralelas, y luego distinguir á su vez entre éstas, aquellas independientes del postulado que establece que la línea recta es abierta. Así quedan demostradas casi todas las proposiciones relativas á los anguloides, tan mal tratadas por lo general.

A la par de constituir un ejercicio muy provechoso, la aplicación del principio de dualidad á las proposiciones correlativas de geometría plana, evita recordar las demostraciones especiales que ordinariamente se dan de los teoremas relativos á los anguloides poliedros.

La teoría de las rectas y planos paralelos guarda armonía con su correspondiente del tomo I, y lo mismo lo restante de la obra. La colección de ejercicios escogidos permitirá á los alumnos perfeccionar los conocimientos adquiridos, con lo que se hallarán en condiciones de estudiar las obras más completas de HADA-

MARD, ROUCHÉ et COMBEROUSSE, MERAY, VERONÈSE, etc.

En el apéndice figuran tres notas : una relativa á la definición del plano, destinada á alumnos que estudian este tomo sin poseer el primero ; otra relativa á la distinción fundamental entre las figuras *congruentes* y las *simétricas*, así como á la teoría general de la simetría ; por último, una tercera que contiene los principios geométricos en que se basa la topografía, tema exigido por algunos de los planes de estudio vigentes poco ha.

Como lo manifestamos en el prefacio del tomo I de esta obra, hemos conservado la división del estudio de la geometría, en geometría plana y del espacio separadamente á pesar de la tendencia actual de los autores de nota en fusionar ambas geometrías, sólo por la necesidad de no chocar demasiado con las costumbres. Sin embargo, la conveniencia de esta fusión es un hecho hoy casi incuestionable ó por lo menos á la orden del día (1).

La primera idea de esa fusión se atribuye á GERGONNE en 1825 ; este matemático observaba « que era el caso de preguntarse si nuestra manera de subdividir la geometría en geometría plana y del espacio es tan natural y tan exactamente conforme con la esencia de las cosas como puede habérselo persuadido veinte siglos de rutina ». En 1844 aparecieron dos obras, una de DE MAHISTRE y otra de CARL ANTON BRETSCHNEIDER, en las que dicha fusión se hallaba realizada ; sin em-

(1) Véase GINO LORIA, *Sobre la enseñanza de las matemáticas elementales en Italia*. Comunicación presentada ante el 3^{er} Congreso Internacional de matemáticos de Heidelberg, el 9 de agosto 1904.

bargo, la idea no progresó á pesar de la opinión favorable de SCHLÖMILCH y otros. Por último, mientras BRIOSCHI y CREMONA, en Italia, de 1871 á 1873, preconizaban la fusión, el geómetra MERAY publicaba en 1873, en Paris, sus *Nouveaux Eléments*, y en 1884 DE PAOLIS, en Turín, sus *Elementi di geometria*. Poco después otros autores, LAZZERI y BASSANI siguieron el ejemplo, iniciándose así en Italia largas discusiones entre los *fusionistas* y los *separatistas*. Estas discusiones en Italia volvieron á llamar la atención en Francia sobre la obra de MERAY, quien alentado por las opiniones favorables de LAISANT, MANNHEIN, J. TANNERY y otros se vió, en 1903, en el caso de editar nuevamente su obra (1) después de 26 años de una casi absoluta indiferencia.

En el excelente tratado de geometría publicado en Italia en 1897 por G. VERONESE (2), la fusión de las dos geometrías se halla perfectamente efectuada.

Se trata, por consiguiente, de un asunto sobre el cual deben las autoridades educacionales del país tener fija la atención para implantarle en los futuros programas, si llega á formalizarse por completo.

Terminaré recordando que, por bueno que sea un texto, no será capaz de suplir el estudio y contracción del alumno, y de infundir á éste, por virtud mágica, los conocimientos que su incapacidad ó pereza le impiden obtener; vale decir esto que los profesores que adopten este texto no deben exigirle que realice prodigios. Su

(1) CH. MERAY, *Nouveaux éléments de Géométrie*. Dijon, P. Jobard, 1903.

(2) G. VERONESE, *Elementi di Geometria ad uso dei licei*. Verona, Fratelli Drucker, 1897.

mérito, si lo tiene, consiste en la justeza de los principios, en la lógica de su desarrollo y en lo riguroso de sus demostraciones.

Es de capital importancia cuidar que en los cerebros jóvenes sólo se siembren principios exactos y nociones precisas á fin de que cuando, tarde ó temprano, germinen estas semillas, los productos no aparezcan contaminadas y carcomidas con falsos conceptos altamente perniciosos bajo cualquier punto de vista que se les considere. El alumno desaplicado ó refractario no aprenderá gran cosa ni con éste ni con texto alguno, pero es preferible que lo poco que pueda aprovechar esté desprovisto de conceptos erróneos y de vicios de lógica.

Las figuras y los modelos contribuirán poderosamente al estudio de esta ciencia, pues el ejercicio exclusivamente lógico cansa rápidamente á todos aquellos que no tienen privilegio intelectual sobre ese particular; al contrario, las sensaciones producidas por los objetos materiales, constituyen para los espíritus pasivos ó livianos, un agente eficaz de estudio con el cual se estimula poco á poco el raciocinio*. Por esta razón, todos los institutos secundarios debieran poseer un gabinete especial para la enseñanza de la Geometría.

Si esta obra tuviera el dón de cooperar en algo al progreso de la enseñanza de la geometría razonada en el país, quedarán satisfechos los deseos del

AUTOR.

* Véase FEDERICO ENRIQUES. *Questioni riguardanti le Geometria Elementale*. Bologna, Zanichelli, 1900, página 25.