



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis de Licenciatura

Obtención de funciones de partición vía el Teorema de
Atiyah-Bott-Singer y Cuantización Geométrica

Joel Alejandro Acosta

Director: Dr. Mauricio Leston
Codirector: Dr. Alan Garbarz

Fecha de Presentación: Marzo 2017

Tema: Obtención de funciones de partición vía el Teorema de Atiyah-Bott-Singer y Cuantización Geométrica

Alumno: Joel A. Acosta

L.U.: 721/10

Lugar de trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio IAFE - CONICET-UBA

Director del trabajo: Dr. Mauricio Leston

Codirector del trabajo: Dr. Alan Garbarz

Fecha de iniciación: Septiembre 2016

Fecha de finalización: Marzo 2017

Fecha de examen: Miércoles 22 de Marzo de 2017

Informe final aprobado por:

Autor

Director

Jurado

Codirector

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En esta tesis se estudia el teorema de punto fijo de Atiyah-Bott-Singer. Este teorema conecta varias ramas de la matemática y mostraremos que tiene un gran potencial para ser utilizado en distintas situaciones físicas, donde la función de partición juega un papel relevante. Por ejemplo, y como meta a largo plazo, se podría utilizar dicho teorema para la obtención de una función de partición cuántica de la gravedad AdS_3 , incluso como resultado previo a la obtención de una descripción completa y explícita de la teoría cuántica.

Dado que el teorema de Atiyah-Bott-Singer involucra varios objetos matemáticos en principio desconexos, se introducen aquí con cierto detalle. Se comienza estableciendo la estructura geométrica del problema clásico para luego introducir el método de cuantización geométrica. Éste es un tema principal de la presente tesis y puede entenderse como una generalización de la cuantización canónica en término de elementos geométricos del espacio de fases del sistema clásico. En particular, en la presente tesis se explica de manera autocontenida las estructuras necesarias para que el lector pueda familiarizarse con el programa de cuantización geométrica señalando sus ventajas y debilidades. Lograda la cuantización geométrica de un sistema, se puede calcular la función de partición asociada a cierta transformación. Por otro lado, aquí se muestra que gracias a sofisticados resultados matemáticos, se puede hacer uso del teorema de Atiyah-Bott-Singer para calcular dicha función de partición, sin descansar en la maquinaria de la cuantización geométrica. La matemática adicional necesaria se introduce lentamente, partiendo de fórmulas de punto fijo simples e intuitivas, hasta llegar finalmente al teorema de Atiyah-Bott-Singer y la fórmula para obtener la función de partición que nos brinda.

El objetivo principal del trabajo es poner a ambos, cuantización geométrica y fórmula de Atiyah-Bott-Singer, dentro del mismo contexto de búsqueda de una función de partición en una teoría cuántica. En especial, se resaltan las virtudes del teorema de Atiyah-Bott-Singer frente al laborioso programa de cuantización geométrica. En particular la aplicación de estos dos elementos al caso de gravedad AdS_3 (donde el grupo relevante es el de Virasoro) presenta enormes dificultades técnicas, motivo por el cual en este trabajo se estudiará en detalle el caso del grupo $SU(2)$, en el que las técnicas y resultados a presentar resultan manejables.

Agradecimientos

Antes que nada, quisiera expresar mi profundo agradecimiento a mi familia, por su apoyo incondicional durante toda mi formación académica.

Agradezco a Mauricio y Alan, por brindarme la oportunidad de trabajar con ellos, y orientarme en cada paso desde el inicio del desarrollo de este trabajo, agradezco además por su infinita paciencia a la hora de leerlo y por la gran cantidad de comentarios útiles que me brindaron. De igual manera, agradezco a los miembros del grupo, en especial a Joan, David y Guillem, por hacer este último año realmente amigable y, espero, productivo. Las constantes reuniones de grupo, charlas durante los almuerzos y las muy extendidas sobremesas me enriquecieron enormemente. En particular quiero agradecer a Joan, con quien compartí incontables discusiones las cuales aportaron de manera significativa a mi entendimiento general.

Agradezco a los compañeros y amigos que conocí a lo largo de la carrera, los cuales contribuyeron de manera inconmensurable tanto a mi formación académica como a mi formación como persona. Agradezco a Ariel y Nachito, a quienes conocí al principio de la carrera y desde ese momento comenzaron a alimentar mi, inicialmente pobre, interés en la física. A Agustín quien me enseñó que cuando es necesario, los días pueden tener mas de veinticuatro horas y que un año puede separarse en tres cuatrimestres de cinco meses cada uno. A Christian, a quien conocí en el secundario y con quien puedo disfrutar conversar tanto de temas académicos como puramente lúdicos. Agradezco a Hernan, Juan, Noe, Juanma, Mariel, Ceci, Jony, Yanina, Augusto, Quinti y muchos otros que hicieron que gradualmente la facultad se convierta en un hogar para mi.

Agradezco especialmente a Belén con quien compartimos muchísimas charlas, discusiones, quejas, sonrisas, tiempo de estudio, berrinches y enojos. Su constante preocupación, consejos y retos hicieron que estos dos últimos años sean terriblemente productivos.

Finalmente agradezco de corazón a Sebastian, Mari y Jime a quienes aprecio profundamente. Ellos supieron acompañarme en el trayecto final ayudándome a alcanzar un equilibrio entre estudio y diversión, soportando en mayor o menor medida, mis constantes cambios de humor. Su compañía y amistad son, sin lugar a duda, el motivo por el cual concluyo esta etapa en pleno uso de mis facultades mentales.

Índice general

Resumen	i
Agradecimientos	iii
Índice general	v
Introducción	vii
1. Geometría Simpléctica	1
1.1. Espacios vectorial simplécticos	1
1.2. Variedades simplécticas	4
1.3. Campos vectoriales Hamiltonianos	7
1.4. Corchetes de Poisson	11
2. Cuantización Geométrica	17
2.1. Precuantización	21
2.2. Polarización	30
2.3. Más correcciones	38
2.4. Observaciones	40
2.5. Cuantizando las simetrías	40
3. Órbitas Coadjuntas de grupos de Lie	43
3.1. Grupos de Lie, representación adjunta y coadjunta	43
3.2. Estructura de las órbitas coadjuntas	47
3.3. Equivalencia entre órbitas adjuntas y coadjuntas	51
4. Cuantización Geométrica de SU(2)	53
4.1. El grupo y su álgebra	53
4.2. Órbitas coadjuntas del grupo	56
4.3. Forma de Kirillov para SU(2)	57
4.4. La esfera como variedad simpléctica	58
4.5. Condición de integrabilidad	59
4.6. Campos hamiltonianos y corchetes de Poisson	59
4.7. Polarización y espacio de Hilbert	60

4.8. Operadores sobre el Hilbert	63
5. Teoremas de Punto fijo	67
5.1. Fórmulas de punto fijo para grupos discretos	67
5.2. Acción en el espacio de funciones	70
5.3. Acción en el espacio de secciones	72
5.4. Representaciones inducidas	73
5.5. Teorema de punto fijo de Lefschetz	74
5.6. Teorema de punto fijo de Atiyah-Bott-Singer	77
5.7. Aplicación al grupo $SU(2)$	81
6. Conclusiones	85
Appendices	89
A. Fibrados de línea con conexión y condición de integrabilidad	89
B. Variedades complejas	95
C. Definiciones varias	97
Bibliografía	103

Introducción

La búsqueda por obtener una unificación entre la mecánica cuántica y la relatividad general puede abordarse de muchas formas distintas. Un posible acercamiento es estudiar un caso mucho más simple, como por ejemplo la teoría de gravitación de Einstein en $2 + 1$ dimensiones con y sin constante cosmológica. En particular, la gravedad en tres dimensiones con constante cosmológica negativa (denominada gravedad AdS_3) es ciertamente más simple que la versión de cuatro dimensiones (que es la teoría que la comunidad científica aspira a cuantizar); por ejemplo, en dicho caso las soluciones de la ecuación de Einstein son localmente difeomorfas a AdS , y difieren entre ellas solamente en cuestiones globales, lo que implica ausencia de gravitones. La finalidad de tratar de cuantizar gravedad AdS_3 es ganar intuición para luego abordar el problema realista de la gravitación en nuestro mundo $(3 + 1)$ -dimensional. Para que este enfoque tenga sentido, debe suceder que la gravitación AdS_3 tenga soluciones y propiedades similares a las que se encuentran en su análoga tetradimensional.

A principio de los 90 Bañados *et al.* [7],[8] demostraron la existencia de agujeros negros en AdS_3 con propiedades similares a las que poseen los agujeros negros en nuestro universo: están completamente caracterizados por su masa, momento angular y carga, cumplen la primera ley de la termodinámica, su entropía es proporcional al área (que en este caso es el perímetro) del agujero negro, y para el caso de agujeros negros rotantes se presenta la región denominada ergosfera. Adicionalmente, se demostró la existencia de radiación de Hawking en dichos agujeros negros [40].

Por todo lo mencionado anteriormente, la gravedad AdS_3 se convierte en un modelo prometedor para aprender sobre cómo cuantizar teorías de gravitación. A continuación resumiremos los resultados mas relevantes sobre el tema.

En 1986 Brown & Henneaux [12] encuentran que las simetrías clásicas de la gravedad AdS_3 están dadas por dos copias del grupo de Virasoro con carga central $c = \frac{3l}{2G}$. El grupo de Virasoro es un grupo infinito dimensional que aparece adicionalmente como el grupo de simetrías conformes en teorías de campos de dos dimensiones; este fue uno de los primeros indicios de la dualidad AdS/CFT .

En 1988 Witten [59] muestra que la gravedad AdS_3 es un sistema soluble en el sentido que puede ser pensado como una teoría de Chern-Simons para el grupo $SL(2, R)$. En 2007 Witten [62] revisa su trabajo previo y propone una función de partición para gravedad AdS_3 motivada en cierta hipótesis de teoría de campos conformes de dos dimensiones, llegando a una función de partición que reproduce correctamente algunos aspectos de la entropía de los agujeros negros de AdS_3 .

En 2010 Maloney & Witten [41] abordan la cuantización AdS_3 utilizando una integral funcional euclídea, junto con resultados previos de Witten sobre el grupo de Virasoro ([60]). Proponen una fun-

ción de partición compuesta de sumas de contribuciones “semiclásicas”, pero no llegan a un resultado físicamente satisfactorio, pues la misma no puede escribirse como la traza de la exponencial de un operador hermítico. Sin embargo de este trabajo se desprende que un papel importante es desempeñado por la “función de partición” de un elemento del grupo de Virasoro, sobre esto hablaremos más adelante.

En 2015 Kim & Porrati [29] proponen realizar la cuantización de gravedad AdS_3 , al menos para el caso semiclásico $c \gg 1$ (con c la carga de Brown-Hennex), mediante un procedimiento denominado cuantización geométrica. Este es un trabajo reciente en el que los autores se basan en algunos resultados de Maloney & Witten, pero no logran reproducir la entropía del agujero negro.

De estos trabajos, vale remarcar un aspecto de interés y que sirve de motivación para la presente tesis: Maloney y Witten señalan que en el caso de Virasoro, existe un elemento L_0 en su álgebra que juega el papel de hamiltoniano. L_0 genera infinitesimalmente al elemento del grupo $\exp(-itL_0)$ y el carácter (traza) de dicho elemento resulta ser la función de partición canónica del sistema, la cual entre otras cosas condensa la información de la degeneración de energías del sistema. Por este motivo, es de sumo interés obtener una expresión para estos caracteres, aunque sea como resultado parcial, previo a la formulación completa del sistema cuántico.

Los caracteres de representaciones irreducibles de grupos de simetría son relevantes en distintas ramas de la física; por ejemplo, es bien conocido que los picos de interferencia en un experimento de espectroscopia están determinados por la forma de la molécula o cristal explorado. Los modos de vibración de dichas moléculas pueden caracterizarse y encuadrarse en representaciones irreducibles de su grupo puntual de simetrías, una vez conocido el carácter de los elementos del grupo en dichas representaciones puede inferirse la existencia o ausencia de picos de intensidad.

Una manera de encontrar representaciones irreducibles de grupos de simetrías (para luego calcular sus caracteres) es mediante el método de órbitas de Alexandre Kirillov [32] el cual relaciona representaciones unitarias e irreducibles de grupos de Lie con sus órbitas coadjuntas. El método de órbitas guarda una estrecha relación con el procedimiento de cuantización geométrica con el que Kim & Porrati proponen cuantizar la gravedad AdS_3 .

El método de cuantización geométrica [64], es una forma de generalizar la cuantización canónica de un sistema clásico, partiendo de la formulación geométrica del espacio de fases del sistema. El método comienza con una variedad simpléctica, que es la descripción clásica de un sistema físico, y buscar dar una descripción cuántica del mismo, brindando los espacios de Hilbert “más chicos” posibles (representaciones irreducibles) respecto del grupo de simetrías de la teoría clásica.

En [60] Witten estudia las órbitas coadjuntas de Virasoro y calcula, en particular, la función de partición $\text{Tr} \exp(-itL_0)$ de dos maneras perturbativas diferentes; luego da un argumento heurístico por el cual el resultado valdría incluso a nivel no perturbativo. El punto clave en el argumento de Witten es una fórmula de punto fijo llamada teorema de punto fijo de Atiyah-Bott-Singer [3]. En general esta fórmula relaciona cierto número (llamado *número de Lefschetz*) calculado a partir de los grupos de cohomología de cadenas elípticas sobre una variedad, con cantidades locales geométricas de un operador que actúa sobre dicha cadena. El punto crucial es el siguiente: si los grupos de cohomología son todos nulos salvo el primero, entonces el número de Lefschetz es el carácter (o función de partición) que uno busca, y la fórmula dice que para calcularlo basta hacer unas operaciones locales. De manera

esquemática, lo que se obtiene es

$$Z\left(e^{-\beta L_0}\right) = \sum_{\text{puntos fijos}} \left(\begin{array}{c} \text{Rotaciones en puntos fijos,} \\ \text{dadas por } L_0 \end{array} \right)$$

Witten realmente no da las bases necesarias para la utilización de dicha fórmula, pero asume que existe alguna cuantización (la geométrica en particular) en la que tiene sentido pensar que va a surgir una cadena elíptica, los grupos de cohomología serán todos cero menos el primero, y en la que basta con calcular cantidades locales asociadas al generador del grupo (como su jacobiano al actuar sobre coordenadas de la órbita). Bajo toda esta gran hipótesis, el teorema de Atiyah-Bott-Singer regala de manera muy simple la función de partición *no perturbativa*. Esto es notable, al ser un resultado no perturbativo, en el cual uno incluso podría desconocer algunos aspectos de la teoría cuántica.

Entender cómo este importante resultado de la matemática puede ser utilizado para calcular funciones de partición tiene interesantes aplicaciones no solo en teorías de gravedad cuántica y AdS/CFT, sino en mecánica estadística, teorías de campos de materia condensada, y en particular en teorías supersimétricas donde el fenómeno de localización ocurre (y se sabe que se relaciona con el teorema de Atiyah-Bott-Singer [45]).

Esta tesis surge como primera aproximación al estudio de dos de los elementos cruciales que ya se mencionaron: el método de cuantización geométrica y la obtención de caracteres de representaciones mediante la utilización del teorema de Atiyah-Bott-Singer de punto fijo. El objetivo principal es ponerlos dentro del mismo contexto de búsqueda de una función de partición en una teoría cuántica. En especial, se busca involucrar el teorema de Atiyah-Bott-Singer y mostrar sus virtudes frente al laborioso programa de cuantización geométrica. La aplicación de estos dos elementos al caso de Virasoro presenta enormes dificultades técnicas, motivo por el cual en este trabajo se estudiarán ambos elementos en el caso del grupo $SU(2)$, en el que éstos resultan manejables.

La tesis estará organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se darán los rudimentos de la formulación geométrica de la mecánica hamiltoniana. Los sistemas físicos pueden ser descritos en términos geométricos en donde conceptos como ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas o corchetes de Poisson pueden expresarse sin hacer referencia a ningún sistema de coordenadas. Dicha formulación es el punto de partida de la cuantización geométrica; de esta forma dicho capítulo hablará, a grandes rasgos, del sistema a cuantizar.

El capítulo 2 tiene como objetivo introducir el método de cuantización geométrica de una manera constructiva; esto quiere decir que los elementos necesarios en su formulación irán apareciendo para cubrir alguna necesidad o requerimiento que en general será la correcta definición del método o la ampliación de su rango de aplicabilidad. El método de cuantización geométrica busca generalizar la cuantización canónica a sistemas clásicos más generales, utilizando elementos puramente geométricos de dichos sistemas. En el camino, entre otras cosas, logra independizar la cuantización del sistema de coordenadas elegido y dar un marco unificado en el cual surgen las distintas representaciones de un mismo sistema cuántico. En muchos casos la cuantización geométrica se construye tratando de imitar los resultados de la cuantización canónica. En la medida de lo posible se compararán los resultados

parciales al introducir en el proceso nuevas estructuras, con los resultados conocidos de la cuantización canónica.

El capítulo 3 busca dar las bases para entender cómo se aplica el método de cuantización geométrica a grupos de Lie (que serán los grupos de simetría de los sistemas físicos). Para comenzar con la cuantización geométrica se requiere partir de una variedad simpléctica. El resultado importante de dicho capítulo será que para cualquier grupo de Lie se puede encontrar una variedad simpléctica donde el grupo actúa. Estas variedades serán las órbitas coadjuntas del grupo, y la aplicación del método de cuantización geométrica a dichas órbitas dará como resultado representaciones irreducibles del grupo (este es el mencionado método de Kirillov).

En el capítulo 4 se aplicará detalladamente el proceso de cuantización geométrica al grupo $SU(2)$. En dicho caso las órbitas coadjuntas son esferas de dimensión dos (casualmente las únicas esferas que como variedades son simplécticas). En el caso de variedades compactas el proceso de cuantización geométrica es bien conocido y no presenta mayores dificultades. Se obtendrá como resultado la conocida cuantización de momento angular para cualquier spin total. Se calculará el carácter del elemento del grupo generado infinitesimalmente por L_z . En el caso de que éste pueda interpretarse como el generador de evolución temporal, el carácter será además la función de partición canónica del sistema.

Finalmente, en el capítulo 5 se introducirán algunas fórmulas de punto fijo, partiendo de casos muy simples como la acción de grupos discretos en conjuntos discretos de puntos y llegando, por último, al teorema de Atiyah-Bott-Singer. Se pretende de esta forma que, al momento de enunciarse el teorema, sus ideas básicas o bien se hayan visto previamente, o bien se entiendan como una generalización (probablemente monstruosa) de sus versiones más pedestres. Se utilizará dicho teorema para calcular los caracteres del grupo $SU(2)$ y se obtendrán los mismos resultados que en el capítulo 4. Esperamos, de esta manera, mostrar que el uso del teorema de Atiya-Bott-Singer brinda un camino riguroso y a la vez mucho más simple para calcular la función de partición, en comparación con el procedimiento de cuantización geométrica.

Capítulo 1

Geometría Simpléctica

La mecánica hamiltoniana admite una descripción en términos puramente geométricos, en esta descripción la estructura central es la conocida como estructura simpléctica. El espacio de fases de un sistema mecánico es descrito en términos geométricos como el espacio cotangente del espacio de configuraciones del sistema. Este espacio carga siempre un estructura simpléctica con la que se puede desarrollar la formulación geométrica de la mecánica hamiltoniana. En dicha formulación se construyen todos los elementos que uno conoce (como las ecuaciones de Hamilton, los corchetes de Poisson, transformaciones canónicas, etc.), de manera general e independientes de las coordenadas elegidas para describir al sistema. Esta descripción geométrica admite localmente sistema de coordenadas, llamadas canónicas, en donde todos los elementos construidos adquieren la forma familiar que uno recuerda de los cursos de mecánica clásica.

Como veremos mas adelante la cuantización geométrica requiere de variedades simpléctica para poder aplicarse. Por ese motivo se requiere dar una introducción de la descripción geométrica de la mecánica hamiltoniana. Primero se definirá la estructura simpléctica en espacios vectoriales para luego dar la noción equivalente en el caso de variedades y se enunciará el teorema de Darboux, el cual garantiza la existencia de sistemas de coordenadas canónicas. Sobre dichas variedades (que serán variedades simplécticas) se definirán las estructuras relevantes como corchete de Poisson o campo vectorial hamiltoniano, finalmente se mostrará la forma que adquieren dichas estructuras en coordenadas canónicas.

En este capítulo (y en toda la tesis en general) tanto los espacios vectoriales como las variedades tienen dimensión finita. Todas las variedades son variedades diferenciables. Todas las funciones, mapas, secciones, etc. son infinitamente diferenciables. Cuando se encuentren “multiplicando” un elemento de un espacio vectorial con uno de su dual se sobrentiende que es el resultado de la aplicación del dual en el espacio vectorial. Por lo demás, la notación se irá aclarando en la medida que aparezca. Este capítulo se encuentra basado en el libro de Abraham & Marsden [1] y Puta [48].

1.1. Espacios vectorial simplécticos

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y $L^2(V, \mathbf{R})$ el espacio de todos los mapas bilineales de $V \times V$ a \mathbf{R} .

Definición 1.1.1 Sea $\omega \in L^2(V, \mathbf{R})$, es decir $\omega : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$. Decimos que ω es **no degenerada** si

$$\omega(X, Y) = 0 \quad \text{para todo } Y \in V \quad \text{implica} \quad X = 0$$

Existen distintas formas equivalentes de establecer la definición anterior, para ello se necesita un poco de notación:

(a) Si $\hat{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de V , denotamos $[\omega]_{\hat{e}}$ a la matriz cuyas componentes son $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$.

(b) Definimos la transpuesta ω^t de ω como:

$$\omega^t(e_i, e_j) = \omega(e_j, e_i);$$

ω es simétrica si $\omega^t = \omega$ y antisimétrica si $\omega^t = -\omega$.

(c) El mapa lineal $\omega^b : V \rightarrow V^*$ se define como:

$$\omega^b(X) \cdot Y = \omega(X, Y).$$

La definición de ω no degenerada se traduce en que ω^b tenga núcleo trivial, es decir que sea un mapa uno a uno entre V y V^* . Un mapa uno a uno entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión es un isomorfismo, de esta manera se obtiene que las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) ω es no degenerada;
- (ii) ω^t es no degenerada;
- (iii) la matriz de ω es no singular;
- (iv) $\omega^b : V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo.

Definición 1.1.2 Un **espacio vectorial simpléctico** es un par (V, ω) donde V es un espacio vectorial real de dimensión finita y $\omega \in L^2(V, \mathbf{R})$ un mapa bilinear antisimétrico y no degenerado. En este caso ω es una **forma simpléctica** sobre V . Si (V_1, ω_1) y (V_2, ω_2) son espacios vectoriales simplécticos, un mapa lineal $\rho : V_1 \rightarrow V_2$ se llama **simpléctico** o **transformación canónica** si $\rho^* \omega_1 = \omega_2$, es decir

$$\omega_1(\rho^{-1}X, \rho^{-1}Y) = \omega_2(X, Y) \quad \text{para todo } X, Y \in V_2$$

Un consecuencia importante de la definición anterior es que no todo espacio vectorial puede convertirse en espacio vectorial simpléctico, pues la dimensión del mismo debe ser par como se establece a continuación

Proposición 1.1.3 Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y $\omega \in L^2(V, \mathbf{R})$ un mapa bilinear en V . Si (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico entonces la dimensión de V es par. Además, siempre existe una base \hat{e} de V donde la matriz $[\omega]_{\hat{e}}$ de la forma simpléctica se escribe

$$[\omega]_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$$

Donde 1_n es la matriz identidad de $n \times n$. Esta es la **forma canónica** de la matriz, a

la base donde la matriz de la forma simpléctica adquiere su forma canónica se la llama **base canónica**.

(Dem.) Sea $\hat{e} = \{e_1, \dots, e_k\}$ una base de V . Dado que ω es antisimétrica $\omega(e_1, e_1) = 0$, y como ω es no degenerada existe al menos un e_j tal que $\omega(e_1, e_j) \neq 0$. Entonces la dimensión de V es al menos 2.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que e_j es e_2 y que $\omega(e_1, e_2) = 1$. Llamemos $V_0 \subset V$ al subespacio generado por $\{e_1, e_2\}$. Sea $V_1 \subset V$ definido por

$$V_1 = \{X \in V \mid \omega(X, Y) = 0, \text{ para todo } Y \in V_0\}$$

Claramente $V_1 \cap V_0 = \{\vec{0}\}$; además $V = V_0 + V_1$, pues para cada $X \in V$,

$$X - \omega(X, e_2)e_1 + \omega(X, e_1)e_2 \in V_1$$

Luego $V = V_0 \oplus V_1$. Además se puede ver que ω restringida al subespacio V_1 es antisimétrica y no degenerada, pues si no lo fuera, existiría un $Y \in V_1$ no nulo tal que $\omega(Y, Z) = 0$ para todo $Z \in V_1$, pero en particular como $Y \in V_1$ resulta que $\omega(Y, X) = 0$ para todo $X \in V_0$, y finalmente se obtendría que $\omega(Y, X) = 0$ para todo $X \in V$ con Y distinto de cero, esto implicaría que (V, ω) no es un espacio vectorial simpléctico.

El subespacio $V_1 \in V$ tiene dimensión $k-2$, realizando el mismo procedimiento se ve que no puede tener dimensión 1, eligiendo e_3 y e_4 tal que $\omega(e_3, e_4) = 1$ se construye nuevamente un subespacio V_2 con dimensión $k-4$ y se continúa iterativamente. El procedimiento termina en la iteración n cuando la dimensión el subespacio V_n es menor a 2 (esto efectivamente ocurre ya que V es de dimensión finita). Como el subespacio V_n no puede tener dimensión 1, tiene dimensión 0. Finalmente $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ y su dimensión es $k = 2n$. En base $\hat{e} = (e_1, e_3, \dots, e_n, e_2, e_4, \dots, e_{n+1})$ la matriz adquiere su forma canónica. ■

Veamos unos ejemplos de espacios vectoriales simplécticos.

Ejemplo 1.1.4 (\mathbf{R}^2 como espacio vectorial simpléctico) Tomemos es espacio vectorial \mathbf{R}^2 y definamos $\omega : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ como

$$\omega((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1 \quad \text{para todo } (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$$

Es facil convenserse de que ω define una forma simpléctica en \mathbf{R}^2 , pues es lo que todos conocemos como producto vectorial, el mismo es antisimétrico y lineal en sus dos argumentos. Recordando que vale $|\omega(X, Y)| = |X \times Y| = \|X\| \|Y\| \sin(\alpha)$ para todo $X, Y \in \mathbf{R}^2$ rapidamente se demuestra que es no degenerado. La forma ω representa gráficamente el área encerrada por el paralelogramo generado por los vectores X e Y .

La matriz $[\omega]_{\hat{e}}$ en la base $\hat{e} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ adopta la forma canónica

$$[\omega]_{\hat{e}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por ese motivo, dicha base es la base canónica. ▲

Ejemplo 1.1.5 (forma canónica) Sea V cualquier espacio vectorial de dimensión finita, tomemos ahora el espacio vectorial $V \times V^*$ y definamos $\omega : (V \times V^*) \times (V \times V^*) \rightarrow \mathbf{R}$ como

$$\omega((x, \alpha), (y, \beta)) = \alpha(y) - \beta(x)$$

Claramente ω es antisimétrica y bilineal. Mostremos que es no degenerada. Sea $(x, \alpha) \in V \times V^*$ tal que $\omega((x, \alpha), (y, \beta)) = 0$ para todo $(y, \beta) \in V \times V^*$, queremos demostrar que (x, α) tiene que ser 0. Tomemos $(y, 0), (0, \beta) \in V \times V^*$, entonces vale que

$$\omega((x, \alpha), (y, 0)) = \alpha(y) = 0 \quad \text{para todo } y \in V$$

$$\omega((x, \alpha), (0, \beta)) = -\beta(x) = 0 \quad \text{para todo } \beta \in V^*$$

de lo cual se concluye que $(x, \alpha) = 0$.

Este ejemplo muestra que dado un espacio vectorial V , siempre puede construirse un espacio vectorial simpléctico multiplicándolo por su espacio dual y definiendo la estructura simpléctica de manera similar. ▲

En el ejemplo 1.1.4 se ve que la forma simpléctica da una noción de “volumen” en \mathbf{R}^{2n} , esto no es casualidad, pues dado que las formas simplécticas son no degeneradas se puede definir la forma de volumen ω^n como el producto exterior de ω consigo mismo n veces, es decir $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$. Finalmente hay que remarcar lo siguiente: naturalmente todo espacio vectorial de dimensión $2n$ es isomorfo a \mathbf{R}^{2n} . Todo espacio vectorial simpléctico es además simplectomorfo (la definición precisa de esto se dará en la siguiente sección) a \mathbf{R}^{2n} . Es decir, solo hay un modelo de espacio vectorial simpléctico de dimensión $2n$ y es la generalización del ejemplo 1.1.4 a dimensión $2n$.

1.2. Variedades simplécticas

Lo siguiente por hacer es dar las mismas nociones para el caso de variedades; esto en general se hace de una forma razonable, las propiedades que se pedían para los espacios vectoriales se piden ahora para los espacios tangentes a cada punto de la variedad. Por supuesto una vez definidas las cosas para variedades, si se observa el caso particular $M = \mathbf{R}^n$ las definiciones se reducen a las que ya se mencionaron para espacios vectoriales.

Definición 1.2.1 Sea M una variedad, y $\omega \in \Omega^2(M)$ una 2-forma antisimétrica en M . Entonces ω es **no degenerada** si $\omega(m) : T_m M \times T_m M \rightarrow \mathbf{R}$ es no degenerada para cada $m \in M$

Es decir, $\omega(m)$ es un mapa bilineal de que toma dos vectores de $T_m M$ y devuelve un número real, lo que se pide es que en cada uno de los puntos de la variedad $\omega(m)$ sea no degenerada.

Definición 1.2.2 Una **Variedad simpléctica** es un par (M, ω) donde M es una variedad diferenciable y $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma no degenerada en M y cerrada^a (ie, $d\omega = 0$). En este caso a ω se la llama **forma simpléctica** sobre M . Si (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) son variedades simplécticas, entonces un mapa C^∞ $\rho : M_1 \rightarrow M_2$ se llama **simpléctico** o **transformación canónica** si $\rho^*\omega_2 = \omega_1$. Si además ρ es un difeomorfismo se lo llama **simpléctomorfismo**.

^aSi bien esta condición no parece necesaria a priori, juega un papel fundamental como se verá más adelante

Con esta definición resulta fácil convenserse de que si (M, ω) es una variedad simpléctica entonces $(T_m M, \omega(m))$ es un espacio vectorial simpléctico para cada $m \in M$, la condición de que la forma simpléctica sea cerrada es una condición de “pegado” global. Como los espacios vectorial simplécticos tienen dimensión par vale, las variedades simplécticas tienen dimensión par. La generalización del mapa $\omega^b : V \times V^* \rightarrow \mathbf{R}$ resulta bastante directa, se define $\omega^b : TM \rightarrow T^*M$ como el mapa que a cada campo vectorial $X(m)$ asigna el covector $\omega^b(m)X(m)$.

En el caso que la 2-forma ω sea no degenerada vale que el mapa $\omega^b : TM \rightarrow T^*M$ es un isomorfismo entre campos vectoriales y 1-formas.¹

Veamos ahora un par de ejemplos de variedades simplécticas.

Ejemplo 1.2.3 (\mathbf{R}^2 como variedad simpléctica) Naturalmente, el espacio vectorial simpléctico del ejemplo 1.1.4 es una variedad simpléctica. Sus coordenadas globales son (x, y) y la forma simpléctica ω resulta

$$\omega = dx \wedge dy$$

El espacio tangente $T_m \mathbf{R}^2$ en cada punto $m \in \mathbf{R}^2$ puede identificarse con \mathbf{R}^2 , $\omega(m)$ resulta ser, como en el ejemplo, antisimétrica, bilineal y no degenerada. Además ω es trivialmente cerrada (pues $d^2 = 0$). La base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_m, \frac{\partial}{\partial y} \Big|_m \right\}$$

es una base de vectores definida globalmente. Con esta base, en cada punto m la matriz de la forma simpléctica adquiere su forma canónica. ▲

Ejemplo 1.2.4 Sea la variedad \mathbf{R}^{2n} con coordenadas globales $x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n$ y definamos la 2-forma ω sobre \mathbf{R}^{2n} como

$$\omega = dx_i \wedge dp^i \quad (\text{se sobreentiende la suma sobre } i)$$

Nuevamente ω es antisimétrica, bilineal, no degenerada y cerrada. \mathbf{R}^{2n} junto con ω es una variedad

¹En las variedades simplécticas se puede pensar que la forma simpléctica sirve para *subir y bajar* índices, como lo hace la métrica en una variedad Riemanniana.

simpléctica. La base de vectores globalmente definidos

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_m, \frac{\partial}{\partial p_1} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial p_n} \Big|_m \right\}$$

hace que en cada punto m la matriz de la forma simpléctica adquiera su forma canónica. ▲

Ejemplo 1.2.5 (La esfera \mathbf{S}^2 como variedad simpléctica) Sea $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ definida por los puntos $\{x \in \mathbf{R}^3 \mid x \cdot x = 1\}$. En cada punto $p \in \mathbf{S}^2$ el espacio tangente está definido por

$$T_p \mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{R}^3 \mid p \cdot v = 0\}$$

Se puede definir la forma ω en \mathbf{S}^2 como

$$\omega_p(u, v) = p \cdot (u \times v)$$

para todo $u, v \in T_p \mathbf{S}^2$, donde \times es el producto vectorial usual en \mathbf{R}^3 . Por las propiedades del producto vectorial ω es bilineal y antisimétrica. En cada espacio tangente ω_p es no degenerada pues dado $u \neq 0$ en $T_p \mathbf{S}^2$ el vector $p \times u$ siempre pertenece a $T_p \mathbf{S}^2$ y es tal que $\omega_p(u, p \times u) \neq 0$. Entonces si $\omega(u, v) = 0$ para todo v ocurre que $u = 0$. Finalmente es una forma cerrada porque es de dimensión máxima.

La forma simpléctica ω define el elemento de superficie en la esfera. ▲

Tal y como sucede en el caso de espacios vectoriales simplécticos, las variedades simplécticas también tienen una forma natural de volumen. Dado (M, ω) variedad de dimensión $2n$, la forma ω^n tiene dimensión máxima y además resulta ser distinta de 0 en todo punto de la variedad, pues $\omega^n(m)$ es igual a $\omega(m)^n$ la cual por ser no degenerada cada uno de sus términos, es no nula si se alimenta con vectores linealmente independientes. Se define la forma de volumen en M como

$$\Omega_\omega = \omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega \tag{1.2.6}$$

Se mencionó anteriormente que los espacios vectoriales simplécticos de igual dimensión son simplectomorfos. En los casos de variedades se dieron dos ejemplos de variedades simplécticas de igual dimensión que tienen distinta topología: \mathbf{R}^2 y \mathbf{S}^2 y no pueden ser simplectomorfos. Enunciaremos ahora, sin demostración, un teorema que establece que todas las variedades simplécticas pueden escribirse localmente (en coordenadas canónicas) como $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$. Como corolario todas las variedades simplécticas de dimensión $2n$ son localmente simplectomorfas (es decir, localmente indistinguibles) a $(\mathbf{R}^{2n}, \omega)$. Para ver una demostración del teorema referimos a Abraham & Marsden [1], Puta [48], Woodhouse [64] o Moser [43].

Teorema 1.2.7 (Darboux) *Sea (M, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional y sea $m \in M$. Entonces existe un entorno U de m y un sistema de coordenadas $\{p_a, q^b\}$ ($a, b = 1, 2, \dots, n$) en U tal que $\omega|_U = dp_a \wedge dq^a$.*

En particular, todas las variedades simplécticas de igual dimensión tienen, localmente, la misma estructura simpléctica. Sin embargo existe otra estructura relacionada con la simpléctica que no es común a todas las variedades simplécticas.

Dado que la forma simpléctica es cerrada, por el lema de Poincaré, existe al menos localmente una 1-forma θ tal que $\omega = d\theta$. Esta 1-forma recibe el nombre de **potencial simpléctico**, en general existe solo localmente y no es único. En el caso de $(M = \mathbf{R}^{2n}, \omega = dp_a \wedge dq^a)$ el potencial simpléctico puede definirse en toda la variedad y vale² $\theta = p_a dq^a$. Es decir, en estas variedades simplécticas, ω además de ser cerrada, es exacta. Naturalmente esto no puede suceder en todas las variedades simplécticas. Si la misma es compacta (como el caso de \mathbf{S}^2) no puede existir un potencial simpléctico definido globalmente, pues si $\omega = d\theta$ valiera globalmente, entonces

$$0 \neq Vol(M) = \int_M \omega^n = \int_M \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega = \int_M d(\theta \wedge \omega^{n-1}) = \int_{\partial M = \emptyset} \theta \wedge \omega^{n-1} = 0$$

donde en la penúltima igualdad se utilizó el teorema de Stokes.

En la sección anterior se mencionó que todo espacio vectorial de dimensión par puede dotarse de una estructura simpléctica y convertirse en un espacio vectorial simpléctico, sin embargo no sucede lo mismo con las variedades. La cohomología de De Rham de grado 2 (ver apéndice C.2) para las esferas de dimensión n es 0 para todas las esferas salvo para la \mathbf{S}^2 (Lee [38, pg. 450]). Esto quiere decir que, salvo para \mathbf{S}^2 , todas 2-formas cerradas, son además globalmente exactas. Como son variedades compactas, entran en la contradicción que se mencionó mas arriba. En conclusión la única esfera simpléctica es la de dimensión 2. Como corolario, no toda variedad de dimensión par puede ser simpléctica.

1.3. Campos vectoriales Hamiltonianos

En mecánica clásica las ecuaciones de Hamilton sirven para encontrar el movimiento de un sistema físico, es decir, su trayectoria en el espacio de fases. Estos movimiento tienen la propiedad de conservar la energía (en el caso de que la función hamiltoniana sea efectivamente la energía del sistema).

En esta sección mostraremos cómo aparecen dichas ecuaciones en el contexto de variedades simplécticas, para eso introduciremos los conceptos de campos vectoriales hamiltonianos y de curvas integrales de un campo vectorial.

Definición 1.3.1 Sea (M, ω) una variedad simpléctica y sea $H : M \rightarrow \mathbf{R}$ una función $C^\infty(M, \mathbf{R})$ en M , entonces se define el **campo vectorial hamiltoniano** X_H , con función de energía H , como

$$\omega(X_H, \cdot) = -dH$$

al conjunto (M, ω, X_H) se lo llama **sistema hamiltoniano**.

La idea de la definición en la siguiente, dada una función $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ siempre se puede definir la 1-forma dH en M . Si dos funciones distintas tienen la misma 1-forma $dH = dH'$ entonces las funciones

²A menos de una 1-forma exacta.

difieren en una constante aditiva. La forma simpléctica define un isomorfismo entre campos vectoriales y 1-formas mediante el mapa ω^\flat . Se define el campo hamiltoniano de H aplicando el mapa inverso de ω^\flat a la 1-forma $-dH$. El signo menos en la definición es convencional y puede omitirse.

Naturalmente no todos los campos vectoriales son hamiltonianos. Los campos hamiltonianos tienen la propiedad de preservar la forma simpléctica en el siguiente sentido

Proposición 1.3.2 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, todos los campos hamiltonianos X_f para alguna función f sobre la variedad cumplen*

$$L_{X_f}\omega = 0$$

(Dem.) Calculemos la derivada de Lie de ω respecto del campo X_f

$$\begin{aligned} L_{X_f}\omega &= (d\omega)X_f + d(\omega(X_f)) && \text{(fórmula mágica de Cartán)} \\ &= 0 + d(\omega(X_f)) && (\omega \text{ es cerrada}) \\ &= -d(df) && \text{(definición 1.3.1)} \\ &= 0 && \text{(propiedad de } d) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Los sistemas hamiltonianos tienen propiedades de conservación interesantes, la propia función H resulta constante a lo largo de las curvas integrales de campo X_H . Una curva integral de un campo vectorial es una curva en la variedad que tiene por vectores tangentes en cada punto, a los vectores del campo vectorial. La definición precisa puede encontrarse en el apéndice C.1, con esto puede formularse la ley de conservación de energía

Proposición 1.3.3 (Conservación de energía) *Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano, entonces H es constante a lo largo de las curvas integrales del campo X_H . Además, si ϕ_t es el flujo (ver apéndice C.1) del campo X_H , entonces $H \circ \phi_t = H$ para cada t .*

(Dem.) Queremos ver que $H(c(t))$ no depende de t ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(c(t)) &= dH(c(t)) \cdot c'(t) && \text{(regla de la cadena)} \\ &= dH(c(t)) \cdot X_H(c(t)) && \text{(definición de curva integral)} \\ &= -\omega(X_H(c(t)), X_H(c(t))) && \text{(definición 1.3.1)} \\ &= 0 && \text{(antisimetría de } \omega) \end{aligned}$$

Luego H no depende de t . Para demostrar la segunda afirmación alcanza recordar que el flujo de un campo vectorial son sus curvas integrales, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
H \circ \phi_t(m) &= H(c(t)) && \text{(como } H(c(t)) \text{ es constante en } t) \\
&= H(c(0)) \\
&= H(m)
\end{aligned}$$

■

Si se piensa en el espacio de fases como variedad simpléctica, y como función H se toma a la energía del sistema, los movimientos en el espacio de configuraciones que mantienen la energía constante son justamente las curvas integrales del campo hamiltoniano asociado a la función energía.

Si pensamos en la evolución generada por H como el flujo de su campo hamiltoniano, esta evolución mantiene constante a la propia función H . Este flujo en particular es lo que se conoce como evolución temporal en mecánica clásica. Estas propiedades lucen mucho más familiares cuando se estudian en un ejemplo concreto

Ejemplo 1.3.4 (Ecuaciones de Hamilton en \mathbf{R}^2) Sea la variedad simpléctica $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$ y $H \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ una función en la variedad. Un campo vectorial cualquiera puede escribirse de la forma

$$X = \alpha \partial_q + \beta \partial_p$$

aplicando el campo en la primera entrada de la forma simpléctica se obtiene

$$\omega(X, \cdot) = dp \wedge dq(\alpha \partial_q + \beta \partial_p, \cdot) = \beta dq - \alpha dp$$

La derivada exterior de la función H es

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp$$

De la definición 1.3.1 se consigue para la función H

$$\omega(X_H, \cdot) = \beta dq - \alpha dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dq - \frac{\partial H}{\partial p} dp$$

lo cual dice que $\alpha = \frac{\partial H}{\partial p}$ y $\beta = -\frac{\partial H}{\partial q}$ y el campo vectorial hamiltoniano queda

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p} \partial_q - \frac{\partial H}{\partial q} \partial_p \tag{1.3.5}$$

Veamos qué sucede ahora si queremos encontrar las curvas integrales del campo vectorial hamiltoniano X_H . Es decir, busquemos curvas de la forma $c(t) \in \mathbf{R}^2$ que cumplan que sus vectores tangentes coincidan con el campo X_H . Los vectores tangentes a $c(t)$ son $X = \dot{q} \partial_q + \dot{p} \partial_p$. Pidiendo que coincidan con los vectores X_H se obtiene

$$\dot{q} \partial_q + \dot{p} \partial_p = \frac{\partial H}{\partial p} \partial_q - \frac{\partial H}{\partial q} \partial_p$$

de donde pueden leerse

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

que son las ecuaciones de Hamilton que se estudian en los cursos de mecánica. \blacktriangle

En cualquier variedad simpléctica, las ecuaciones que determinan las curvas integrales del campo X_H (es decir las ecuaciones de Hamilton) se expresan distinto en distintos sistemas de coordenadas, sin embargo adquieren la forma que se estudia en los cursos de mecánica cuando se escriben en el sistema de coordenadas canónicas

Proposición 1.3.7 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y sean $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ coordenadas canónicas en M , es decir $\omega = dp_i \wedge dq^i$. Sea $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ una función sobre la variedad. Entonces en esas coordenadas vale que*

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (\text{se sobreentiende la suma sobre } i)$$

Además, en coordenadas canónicas las curvas $c(t) = (q^1(t), \dots, q^n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ son curvas integrales del campo hamiltoniano X_H si y solo si se cumple

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, n)$$

(Dem.) La primera parte de la demostración consta de verificar que la fórmula anterior satisface 1.3.1.

$$\omega(X_H, \cdot) = dp_j \wedge dq^j \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q^j} dq^j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j = -dH$$

La segunda parte se desprende, al igual que en el ejemplo, de la definición de curvas integrales. \blacksquare

Mostraremos ahora el teorema conocido en mecánica clásica como teorema de Liouville que usualmente se enuncia diciendo que el volumen del espacio de fases se mantiene constante a lo largo del tiempo. En general vale no solo para la evolución generada por el hamiltoniano del sistema (evolución temporal), si no que vale para la evolución generada por cualquier campo vectorial hamiltoniano (en ese caso el parámetro que utilizamos como t no representará físicamente el tiempo).

Proposición 1.3.8 (Liouville) *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ una función en M y ϕ_t el flujo del campo vectorial hamiltoniano X_H (ver apéndice C.1). Entonces para cada t , $\phi_t^* \omega = \omega$. Es decir ϕ_t preserva el volumen Ω_ω .*

(Dem.) Calculemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_t^*\omega &= \phi_t^*L_{X_H}\omega && \text{(propiedad de la derivada de Lie)} \\ &= \phi_t^*(0) && \text{(por proposición 1.3.2)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces $\phi_t^*\omega$ es constante en t . Como $\phi_0 = Id$, resulta $\phi_t^*\omega = \omega$. ■

Como corolario de esta última proposición, resulta que los flujos de cualquier campo vectorial hamiltoniano son transformaciones canónicas.

Finalmente, enunciaremos una propiedad que cumplen todas las transformaciones canónicas, la misma será útil más adelante.

Proposición 1.3.9 *Sea una variedad simpléctica (M, ω) y $\rho : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Entonces ρ es una transformación canónica (o simpléctica) si y solo si para toda función $H \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ se cumple*

$$\rho^*(X_H) = X_{H \circ \rho} = X_{\rho^*H}$$

(Dem.) Supongamos primero que ρ es simpléctica entonces $\rho^*\omega = \omega$, vale que

$$\begin{aligned}\omega(X_{H \circ \rho}, Y) &= -d(H \circ \rho) \cdot Y && \text{(definición 1.3.1)} \\ &= -d(\rho^*H) \cdot Y && \text{(definición de pullback)} \\ &= -(\rho^*d(H)) \cdot Y && \text{(propiedad del pullback)} \\ &= -\rho^*(dH \cdot \rho_*Y) \\ &= \rho^*(\omega(X_H, \rho_*Y)) \\ &= (\rho^*\omega)(\rho^*X_H, \rho^*\rho_*Y) && \text{(propiedad del pullback)} \\ &= \omega(\rho^*X_H, Y) && \text{(por hipótesis)}\end{aligned}$$

como esto vale para cualquier campo vectorial Y y ω es no degenerada, vale que $X_{H \circ \rho} = \rho^*X_H$. Para la vuelta supongamos que $\rho^*X_H = X_{H \circ \rho}$, similar al desarrollo anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\omega(X_{H \circ \rho}, Y) &= (\rho^*\omega)(\rho^*X_H, Y) \\ &= (\rho^*\omega)(X_{H \circ \rho}, Y) && \text{(por hipótesis)}\end{aligned}$$

para todo campo vectorial Y y toda función H . Como ρ es un difeomorfismo, cualquier vector $V \in T_mM$ es de la forma $\rho^*X_H = X_{H \circ \rho}$ para alguna función H . En consecuencia $\omega = \rho^*\omega$. ■

1.4. Corchetes de Poisson

Los corchetes de Poisson juegan un papel fundamental en la mecánica hamiltoniana, siendo uno de sus principales roles definir la evolución temporal de un sistema dinámico. En esta sección definiremos

los corchetes de Poisson sobre variedades simplécticas demostrando algunas de sus propiedades más relevantes. Mostraremos que en coordenadas canónicas el corchete de Poisson entre dos funciones adopta la forma que uno recuerda de los cursos de mecánica.

Definición 1.4.1 Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. Se define el corchete de Poisson de f y g como la función $\{f, g\}_\omega \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ dada por

$$\{f, g\}_\omega = -\omega(X_f, X_g)$$

De la definición puede observarse que el corchete de Poisson es antisimétrico y lineal en sus dos entradas. Además resulta ser una derivación, pues por definición la derivada de Lie de la función f respecto el campo vectorial X_g , y utilizando 1.3.1 para f se sigue que

$$L_{X_g} f = df(X_g) = -\omega(X_f, X_g) = \{f, g\}_\omega \quad (1.4.2)$$

Nuevamente el corchete de Poisson entre dos funciones resulta más familiar si se escribe en coordenadas canónicas

Proposición 1.4.3 Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Sean $\{q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n\}$ coordenadas canónicas y $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, se obtiene

$$\{f, g\}_\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \quad \text{para todas } f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$$

(Dem.) Para la demostración usaremos la forma explícita de los campos vectoriales hamiltonianos en coordenadas canónicas que se consiguió en la proposición 1.3.7

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\omega &= -L_{X_f}(g) \\ &= -dg(X_f) \\ &= -\left(\frac{\partial g}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial g}{\partial p_i} dp_i \right) \left(\frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \end{aligned}$$

que es la forma usual de definir los corchetes de Poisson en los cursos de mecánica. ■

La propiedad que enunciaremos a continuación juega un papel fundamental en el contexto de cuantización geométrica

Proposición 1.4.4 Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces para cada $f, g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ vale:

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}_\omega}$$

(Dem.) Por la no degeneración de ω es suficiente probar que para todo campo vectorial Y se cumple

$$\omega(-X_{\{f,g\}_\omega}, Y) = \omega([X_f, X_g], Y)$$

Utilizando la proposición 1.3.2

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{X_f}\omega)(X_g, Y) \\ &= X_f(\omega(X_g, Y)) - \omega([X_f, X_g], Y) - \omega(X_g, [X_f, Y]) \end{aligned}$$

el primer y el último sumando pueden simplificarse, gracias a la definición de campo vectorial hamiltoniano, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X_f(\omega(X_g, Y)) &= X_f(-dg(Y)) = -X_f Y g \\ \omega(X_g, [X_f, Y]) &= -dg([X_f, Y]) = -[X_f, Y]g = Y X_f g - X_f Y g \end{aligned}$$

reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{X_f}\omega)(X_g, Y) \\ &= -\omega([X_f, X_g], Y) - Y X_f g && \text{(por ecuación 1.4.2)} \\ &= -\omega([X_f, X_g], Y) + Y(f, g_\omega) && \text{(por definición 1.3.1)} \\ &= -\omega([X_f, X_g], Y) - \omega(X_{\{f,g\}_\omega}) \end{aligned}$$

que es lo que se buscaba. ■

Esta propiedad muestra que el espacio vectorial de campos vectoriales hamiltonianos junto con el conmutador forman un álgebra de Lie, pues ahora el conmutador entre dos campos hamiltonianos X_f y X_g es un nuevo campo hamiltoniano con función de energía igual a $\{f, g\}_\omega$. Además, para el conmutador de campos vectoriales, vale la identidad de Jacobi.

Demostraremos ahora la identidad conocida como identidad de Jacobi para el corchete de Poisson

Proposición 1.4.5 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ funciones sobre M . Entonces el corchete de Poisson cumple la identidad de Jacobi, es decir*

$$\{f, \{g, h\}_\omega\}_\omega + \{g, \{h, f\}_\omega\}_\omega + \{h, \{f, g\}_\omega\}_\omega = 0$$

(Dem.) Dado que la forma simpléctica ω es cerrada

$$0 = d\omega(X_f, X_g, X_h) = \circlearrowleft X_f(\omega(X_g, X_h)) - \circlearrowleft \omega([X_g, X_h], X_f)$$

donde \circlearrowleft representa las permutaciones cíclicas de las funciones f, g, h . El primer término de la

ultima igualdad es la derivada de Lie de la función $\omega(X_g, X_h)$ respecto del campo X_f y vale que

$$\begin{aligned} X_f(\omega(X_h, X_g)) &= L_{X_f}(\omega(X_h, X_g)) \\ &= (L_{X_f}\omega)(X_g, X_h) + \omega(L_{X_f}X_g, X_h) + \omega(X_g, L_{X_f}X_h) \\ &= 0 + \omega([X_f, X_g], X_h) + \omega(X_g, [X_f, X_h]) \end{aligned}$$

en donde se utilizó que la derivada de Lie de ω respecto de un campo hamiltoniano es 0, como se mencionó en la proposición 1.3.2. Reemplazando esto se obtiene

$$0 = \circlearrowleft \omega([X_f, X_g], X_h) + \circlearrowleft \omega(X_g, [X_f, X_h]) - \circlearrowleft \omega([X_g, X_h], X_f)$$

Las permutaciones del primer término se cancelan con la del tercero y queda

$$0 = \circlearrowleft \omega(X_g, [X_f, X_h])$$

por la proposición 1.4.5, obtenemos finalmente

$$0 = - \circlearrowleft \omega(X_g, X_{\{f, h\}_\omega}) = \circlearrowleft \{g, \{f, h\}_\omega\}_\omega = - \circlearrowleft \{f, \{g, h\}_\omega\}_\omega \quad \blacksquare$$

Esta propiedad muestra que el espacio vectorial real de las funciones $C^\infty(M, \mathbf{R})$ sobre una variedad simpléctica (M, ω) junto con el corchete de Poisson forman un **álgebra de Lie** de dimensión infinita. La llamamos el **álgebra de observables clásicos sobre M** .

El mapa $f \mapsto X_f$ es un homomorfismo de álgebras de Lie entre el álgebra de observables sobre M y el álgebra de campos vectoriales hamiltonianos en M .

A continuación mostraremos la relación entre el corchete de Poisson, las evoluciones generadas por campos hamiltonianos y las transformaciones canónicas. Para ello requerimos una última propiedad que sirve para identificar a las transformaciones canónicas, la misma es la versión geométrica del criterio que se utiliza en los cursos de mecánica para identificar transformaciones canónicas: el corchete de Poisson de las funciones transformadas tiene que ser el mismo que el de las funciones sin transformar.

Proposición 1.4.6 *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $\rho : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Entonces ρ es simpléctico o transformación canónica si y solo si preserva los corchetes de Poisson, es decir para cualquier par de funciones f, g sobre la variedad vale que*

$$\rho^* \{f, g\}_\omega = \{\rho^* f, \rho^* g\}_\omega$$

o de manera equivalente

$$\{f, g\}_\omega \circ \rho = \{f \circ \rho, g \circ \rho\}_\omega$$

(Dem.) El lado izquierdo de la igualdad se desarrolla por la ecuación 1.4.2 y propiedades de la derivada de Lie junto con el pullback como

$$\rho^* \{f, g\}_\omega = \rho^* L_{X_g} f = L_{\rho^* X_g} \rho^* f$$

mientras que el lado derecho, por los mismo motivos queda

$$\{\rho^* f, \rho^* g\}_\omega = L_{X_{\rho^* g}} \rho^* f$$

entonces ρ preserva los corchetes de Poisson si y solo si

$$L_{\rho^* X_g} \rho^* f = L_{X_{\rho^* g}} \rho^* f$$

si y solo si

$$\rho^* X_g = X_{\rho^* g}$$

por la proposición 1.3.9 esto solo ocurre si y solo si ρ es simpléctico. ■

Por completitud mostraremos cómo se expresa la variación de una función f a lo largo de las curvas integrales de un campo hamiltoniano. En el caso en que el campo X_H sea el correspondiente a la energía del sistema, entonces la evolución será efectivamente la evolución temporal de la función f .

Proposición 1.4.7 (Evolución temporal) *Sea X_H un campo vectorial hamiltoniano con función de energía H y flujo ϕ_t , sea f una función en la variedad, entonces la evolución temporal de f está dada por*

$$\frac{d}{dt}(f \circ \phi_t) = \{f, H\}_\omega \circ \phi_t = \{f \circ \phi_t, H\}_\omega$$

(Dem.) Por regla de la cadena vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f \circ \phi_t) &= df(c(t)) \cdot \dot{\phi}_t && \text{(regla de la cadena)} \\ &= df \cdot X_H(c(t)) && \text{(definición de flujo)} \\ &= -\omega(X_f(c(t)), X_H(c(t))) && \text{(definición 1.3.1)} \\ &= \{f(c(t)), H(c(t))\}_\omega && \text{(definición 1.4.1)} \\ &= \{f \circ \phi_t, H \circ \phi_t\}_\omega \end{aligned}$$

por la proposición conservación de energía (proposición 1.3.3) tenemos para la última igualdad

$$\{f \circ \phi_t, H \circ \phi_t\}_\omega = \{f \circ \phi_t, H\}_\omega$$

por otro como el flujo de un campo vectorial hamiltoniano es simpléctico, por la proposición 1.4.6 se tiene

$$\{f \circ \phi_t, H \circ \phi_t\}_\omega = \{f, H\}_\omega \circ \phi_t \quad \blacksquare$$

Con esto se muestra que la evolución temporal de una función está dada por el corchete de Poisson con el hamiltoniano, en particular si $\{f, H\}_\omega = 0$ entonces la función es constante a lo largo del tiempo y se la llama constante de movimiento.

Capítulo 2

Cuantización Geométrica

Existen distintas formas de cuantizar una teoría clásica, por ejemplo la cuantización canónica, integral de camino de Feynman, cuantización de Weyl-Wigner. En la mayoría de los casos la cuantización canónica resulta ser el método más simple y directo.

La cuantización canónica se basa en las llamadas *reglas de cuantización de Dirac*, y su aplicación y discusión pueden encontrarse en su clásico libro de texto (Dirac [15]).

Al aplicarse la cuantización canónica a sistemas simples, devuelve resultados en excelente concordancia con las observaciones, y si bien por estos motivos parece ser la forma “correcta” de cuantizar una teoría, presenta varios problemas:

- El método es completamente dependiente del sistema de coordenadas que se utilice para describir al sistema clásico. Al contrario que la teoría clásica, no presenta invarianza frente a transformaciones canónicas. Además el resultado de la cuantización depende del orden en que las coordenadas aparecen en las expresiones clásicas.
- El procedimiento es fácil de aplicar a sistemas simples, pero surgen serias complicaciones cuando se quiere aplicar a sistemas más complejos, por ejemplo sistemas con vínculos, sistemas con grados internos de libertad, sistemas cuyo espacio de fases clásico no es “plano”, etc.
- Hay distintas maneras de obtener la cuantización de un sistema: la representación de Schrödinger, la representación de Bargmann-Fock, etc. La cuantización canónica no provee un marco unificado para ellas.

La cuantización geométrica fue desarrollada en los años 70 para tratar con estos (y otros) problemas. Su principal logro es establecer una relación entre mecánica clásica y cuántica desde un punto de vista geométrico (partiendo del espacio de fases de la teoría clásica, entendiéndolo como una variedad simpléctica), tomando como modelo al método de cuantización canónica. Algunas de sus ventajas son:

- Generaliza el procedimiento de cuantización a espacios de fase que no son necesariamente “planos” e incluso a espacios de fase que no son fibrados cotangente.
- Da un marco unificado para los distintos tipos de representaciones.

- Es un procedimiento completamente independiente de sistema de coordenadas.

Los primeros trabajos en cuantización geométrica se deben a Kostant [36], Souriau [54] y Segal [51], aunque muchas de sus ideas estuvieron basadas en trabajos previos de Kirillov [30], [31]. Hoy en día sus resultados forman parte de lo que se conoce como *precuantización* y es solamente el primer paso del procedimiento de cuantización geométrica, pues como veremos el resultado de precuantización no cumple todos los requerimientos que definen a la cuantización geométrica pero sirve como punto de partida. En pocas palabras los espacios de Hilbert que se obtienen son “muy grandes”.

Una vez realizada la precuantización de un sistema se introduce una nueva estructura en el programa de cuantización geométrica, las llamadas *polarizaciones*. Elegir distintas polarizaciones llevan a distintas representaciones del mismo sistema cuántico (en el espacio de posiciones, de momentos, la representación de Bargmann-Fock, por ejemplo), se demuestra luego que el proceso de cuantización geométrica es independiente de la polarización elegida, y solamente cambia la representación del sistema a la que se llega. Existe una forma de vincular estas distintas representaciones y de pasar de una a otra una vez realizada la cuantización, esta relación es conocida como *Blattner-Kostant-Sternberg kernels* (ver Blattner [9], [10], Guillemin & Sternberg [22], Rawnsley [49]).

Dependiendo de la variedad simpléctica con la que comienza, el procedimiento de cuantización geométrica puede terminar con la polarización o no. En la mayoría de los casos una vez elegida la polarización se requiere agregar otra estructura, pues el producto interno entre los estados cuánticos queda mal definido. Se introduce entonces el *fibrado de densidades y half-forms* para poder definir el producto interno. Finalmente en muchos casos, se requiere la llamada *corrección metapléctica* para obtener los niveles de energía correctos de la teoría cuántica [10], [22] [37].

Antes de entrar completamente en la cuantización geométrica daremos una breve discusión sobre qué es lo que se entiende por cuantizar un sistema clásico.

Clásicamente los sistemas están descriptos por su espacio de fases, los cuales son una variedad simpléctica (M, ω) . Los observables son funciones reales $C^\infty(M, \mathbf{R})$ sobre el espacio de fases. Se pueden multiplicar punto a punto y vale que esta multiplicación conmuta, es decir,

$$(fg)(m) = f(m)g(m) = (gf)(m)$$

Sin embargo, basándonos en los postulados de la mecánica cuántica, esta propiedad debe sacrificarse al moverse de la teoría clásica a la cuántica, pues la no conmutatividad entre operadores de observables juega un rol crucial a la hora de poder describir los fenómenos que se observan. Más precisamente “cuantización” refiere a algún mapa

$$\delta : f \longmapsto \delta_f$$

que a observables clásicos le asigna operadores autoadjuntos en un cierto espacio de Hilbert. El problema ahora es conocer a qué debe igualarse el conmutador entre dos operadores asignados a observables que clásicamente conmutaban, es decir

$$\begin{aligned} fg - gf &= 0 && \text{(como observables clásicos)} \\ \delta_f \delta_g - \delta_g \delta_f &=? && \text{(como operadores cuánticos)} \end{aligned}$$

A estas condiciones se las llama *condiciones cuánticas* o *relaciones de conmutación*. Por supuesto las relaciones de conmutación no son condiciones que uno pueda deducir directamente de la mecánica

clásica, sin embargo un método que probó funcionar en una gran variedad de sistemas dinámicos es obtenerlas por *analogía clásica*. Sobre el tema Dirac [15, pg. 84-85] dice:

“The value of classical analogy in the development of quantum mechanics depends on the fact that classical mechanics provides a valid description of dynamical systems under certain conditions, when the particles and bodies composing the system are sufficiently massive for the disturbance accompanying and observation to be negligible. Classical mechanics must therefore be a limiting case of quantum mechanics. We should thus expect to find that important concepts in classical mechanics correspond to important concepts in quantum mechanics, and, from an understanding of the general nature of the analogy between classical and quantum mechanics, we may hope to get laws and theorems in quantum mechanics appearing as simple generalizations of well-known results in classical mechanics; in particular we may hope to get the quantum conditions (or commutation relations) appearing as a simple generalization of the classical law that all dynamical variables commute.”

En las páginas que siguen a la cita, Dirac muestra, siguiendo estas ideas de analogía clásica, que el conmutador entre dos operadores debe ser la contraparte cuántica de los corchetes de Poisson, más precisamente

$$[\delta_f, \delta_g] = i\hbar\delta_{\{f,g\}}$$

Esta es una de las propiedades que se pedirá al programa de cuantización geométrica. Observar que de esta forma se cumple que $[\delta_p, \delta_q] = i\hbar$.

Otra propiedad que se le pide a la cuantización geométrica es una especie de condición de irreducibilidad. Para hablar de ella requerimos un par de definiciones

Definición 2.0.1 Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Un conjunto de funciones $\{f_i\} \subset C^\infty(M, \mathbf{R})$ es un **conjunto completo de observables** si y solo si cualquier otra función g en M tal que $\{f_i, g\}_\omega = 0$ para toda f_i , es constante.

Si $\{f_i\}$ es un conjunto completo y finito, entonces para cada punto $m \in M$, existe un abierto y un subconjunto $\{f'_i\} \subset \{f_i\}$ tal que es un sistema local de coordenadas¹. Entonces el conjunto $\{df'_i\}$ es un conjunto de 1-formas localmente independientes y finalmente el conjunto de campos vectoriales hamiltonianos $\{X_{f'_i}\}$ es una base local de vectores en M . El conjunto $\{\phi_{i,t}\}$ de flujos asociados a los campos vectoriales hamiltonianos $\{X_{f'_i}\}$ actúan sobre M de manera irreducible.

La contraparte cuántica a este concepto se puede establecer como sigue:

Definición 2.0.2 Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert. Un conjunto de operadores $\{O_j\}$ que actúan sobre \mathcal{H} es un **conjunto completo de operadores** si y solo si cualquier otro operador que conmute con todos ellos es un múltiplo de la identidad.

¹Esto se da para un subconjunto de $\{f_i\}$, pues por la definición, dentro de $\{f_i\}$ podría estar varias veces la misma función, se cumple que la dimensión de $\{f_i\}$ es igual a la dimensión de M

Observar que los operadores de esta definición no provienen necesariamente de algún observable clásico.

Si un conjunto de operadores autoadjuntos $\{O_j\}$ en \mathcal{H} son un conjunto completo entonces \mathcal{H} es irreducible bajo la acción de $\{O_j\}$.

De esta forma, viendo la analogía entre las dos definiciones, se le pide a la cuantización geométrica que si $\{f_i\}$ es un conjunto completo de observables clásicos de un sistema físico entonces sus operadores cuánticos asociados formen un conjunto completo de operadores (lo que implica que el espacio de Hilbert es irreducible bajo la acción de δ_{f_i}).

Esta condición puede expresarse en términos de simetrías tanto del sistema clásico como del cuántico. Echeverría-Enriquez *et al.* [16] dan una discusión detallada del tema y establecen que el postulado de irreducibilidad es equivalente, a groso modo, a pedir que si G es un grupo de simetría un sistema clásico, entonces G actúe de forma unitaria e irreducible en \mathcal{H} . Con todos estos elementos podemos ahora empezar con la descripción del método de cuantización geométrica.

Definición 2.0.3 Una *cuantización completa* de un sistema clásico (M, ω) es un par (\mathcal{H}, δ) donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert complejo y δ un mapa de funciones $f \in C^\infty(M, \mathbf{C})$ en la variedad a operadores lineales $\delta_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ en el espacio de Hilbert con las siguientes propiedades

$$(i) \quad \delta_{\lambda f + g} = \lambda \delta_f + \delta_g$$

$$(ii) \quad \delta_{f^*} = \delta_f^\dagger$$

$$(iii) \quad \delta_1 = Id_{\mathcal{H}}$$

$$(iv) \quad i\hbar \delta_{\{f, g\}_\omega} = [\delta_f, \delta_g]$$

(v) Si f_1, \dots, f_n es un conjunto completo de funciones en M , entonces $\delta_{f_1}, \dots, \delta_{f_n}$ es un conjunto completo de operadores. Es decir, \mathcal{H} es irreducible frente a la acción del conjunto $\{\delta_{f_i}\}$

La condición (i) establece la linealidad del mapa δ y si bien no tiene interpretación física, es una propiedad deseable desde el punto de vista matemático.

La condición (ii) garantiza que los operadores que corresponden a observables clásicos (es decir funciones reales en la variedad) sean autoadjuntos.²

La condición (iii) dice que si el resultado de una medición da 1 en cualquier estado de la descripción clásica de un sistema físico, entonces se espera el mismo resultado para su descripción cuántica. Es decir, sus autovalores tienen que ser todos 1.

La condición (iv) son las relaciones de conmutación de Dirac. Matemáticamente impone que el mapa δ sea un morfismo de álgebras de Lie entre el algebra de funciones en la variedad y un subálgebra de operadores en el espacio de Hilbert.

²No vamos a entrar en la teoría de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. Si bien es cierto que debería tratarse con cuidado el dominio de los operadores, luego para $SU(2)$ veremos que los operadores de momento angular son de hecho operadores autoadjuntos ya que la dimensión del espacio de Hilbert es finita.

Finalmente la condición (v) es el postulado de irreducibilidad y en el fondo establece el deseo de que las simetrías clásicas se reflejen en simetrías cuánticas. Resulta válido preguntarse si toda simetría de un sistema clásico puede trasladarse a una simetría del sistema cuántico. La respuesta en general es no, y es este el motivo por el cual es imposible realizar una cuantización completa de un sistema clásico. Este hecho lleva a encarar el problema de forma más “relajada”, como veremos más adelante.

El motivo por el cual es imposible realizar el procedimiento en general puede verse en Abraham & Marsden [1, pg- 435-438], Gotay [18] o Groenewold [21], en donde se demuestra que no puede existir, para cualquier variedad simpléctica (M, ω) , una cuantización completa en el sentido de la definición 2.0.3.

La demostración consta de probar que no es posible ni siquiera hacerlo en el caso de una partícula en una dimensión. El sistema clásico es en este caso $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$ y, por el teorema de Stone-Von Newman, la propiedad (v) implica que los operadores asignados a q y p serán unitariamente equivalentes a los asignados mediante la cuantización canónica (Hall [23, sec. 14])

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L^2(\mathbf{R}) \\ \delta_q f(q) &= qf(q) && \text{(para cualquier función } f \in L^2(\mathbf{R})) \\ \delta_p f(q) &= -i \frac{d}{dq} f(q) && \text{(para cualquier función } f \in L^2(\mathbf{R})) \end{aligned}$$

Con esta asignación, construyendo operadores cubicos en la posición y en el momento δ_{q^3} δ_{p^3} , se puede demostrar que no pueden satisfacerse simultaneamente (iv) y que a cada polinomio distinto de 0 se le asigne un operador no nulo.

La razón de esta negativa a la hora de querer construir una cuantización completa de un sistema clásico (M, ω) es que la condición (v) es muy restrictiva. Para poder continuar se deja de lado por un segundo esta condición y se establece lo que se llama la prequantización del sistema, luego se busca la forma de imponer la condición (v), pero esta vez no para todos los conjuntos completos de observables, sino para algunos pocos observables de interés.

La imposibilidad de obtener una cuantización completa significa que en algunos casos, durante el procedimiento de cuantización, solamente alguna simetrías de la descripción clásica del sistema podrán trasladarse a su descripción cuántica. Estas situaciones se llaman en la literatura *anomalías cuánticas*.

2.1. Precuantización

Como ya se mencionó es imposible construir una cuantización completa de un sistema clásico, por ese motivo el primer paso del procedimiento de cuantización geométrica es construir la prequantización del sistema y utilizarla como punto de partida.

Definición 2.1.1 Una *prequantization* de un sistema clásico (M, ω) es un par (\mathcal{H}, δ) donde \mathcal{H} es un espacio de Hilbert complejo y δ un mapa de funciones $f \in C^\infty(M, \mathbf{C})$ en la variedad a operadores $\delta_f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ en el espacio de Hilbert que cumple las propiedades (i)-(iv) de la definición 2.0.3

Dado un sistema clásico (M, ω) , la forma más simple de construir el espacio de Hilbert asociado con él es considerar el conjunto de funciones complejas en M y el producto interno definido por

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_M \phi^* \psi \Omega_\omega \quad (2.1.2)$$

Donde la integración está bien definida en M , pues Ω_ω es la forma de volumen definida por la forma simpléctica (ver proposición 1.2.6). Luego uno se restringe y utiliza el conjunto de funciones de cuadrado integrable respecto de este producto interno, es decir

$$\mathcal{H} = \left\{ \phi \in C^\infty(M, \mathbf{C}) \mid \int_M \phi^* \phi \Omega_\omega < \infty \right\}$$

Lo siguiente es definir el mapa de funciones a operadores en este espacio de Hilbert. La condición (iv) es satisfecha automáticamente por los campos vectoriales hamiltonianos (proposición 1.4.4), por lo que el primer intento para construir δ_f podría ser

$$f \mapsto \delta_f = -i\hbar X_f$$

donde X_f actúa como una derivación en $C^\infty(M, \mathbf{C})$, sin embargo esta asignación no cumple la propiedad (iii) pues mapea las funciones constantes al operador nulo. La forma más simple de corregir esto es agregando un término extra en la definición del δ_f

$$f \mapsto \delta_f = -i\hbar X_f + f$$

donde f actúa como $fId_{\mathcal{H}}$ en el espacio de Hilbert. Esta asignación cumple las condiciones (i)-(iii) pero no cumple (iv), se requiere una nueva corrección. Supongamos que vale $\omega = d\theta$ para alguna 1-forma θ y definamos el mapa δ_f como

$$f \mapsto \delta_f = -i\hbar X_f - \theta(X_f) + f \quad (2.1.3)$$

y así, para cada función $\phi \in \mathcal{H}$

$$\delta_f^\theta \phi = -i\hbar X_f \phi + (-\theta(X_f) + f)\phi$$

Ahora δ_f cumple (i)-(iv) (ver la demostración del teorema 2.1.15 más adelante) y es la forma final que adquiere, en el proceso de precuantización, el operador asignado a cada observable f . Veamos cómo funciona este mapa en el siguiente ejemplo de una partícula en una dimensión.

Ejemplo 2.1.4 Sea la variedad simpléctica $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$, entonces $\theta = p dq$. Como se vió en el ejemplo 1.3.4 el campo vectorial hamiltoniano asignado a f es $X_f = f_p \partial_q - f_q \partial_p$. Veamos qué operadores quedan para las funciones q y p sabiendo que sus campos vectoriales hamiltonianos son $X_q = -\partial_p$ y $X_p = \partial_q$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \delta_q \phi &= (+i\hbar \partial_p - p dq(-\partial_p) + q) \phi = (i\hbar \partial_p + q) \phi \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar \partial_q - p dq(\partial_q) + p) \phi = (-i\hbar \partial_q) \phi \end{aligned}$$

A este nivel, esto no coincide con la cuantización de Schrödinger. Por supuesto, esto no es una cuantización completa, pues no cumple la propiedad (v), para ver eso alcanza observar que el operador ∂_p conmuta con los dos anteriores, y que estos últimos vienen de un conjunto completo

de funciones clásicas.

Observar que este resultado se reduce a la cuantización de Schrödinger en la representación de posiciones si restringimos nuestro espacio de Hilbert a funciones ϕ que dependen solo de la posición. A muy grandes rasgos ese es el siguiente paso en el programa de cuantización geométrica, como se verá más adelante.

Para el caso anterior se eligió un potencial simpléctico particular, es decir elegimos $\theta = p dq$, sin embargo podríamos haber elegido $\theta = -q dp$ como potencial simpléctico (más en general, se podría haber elegido $\theta = p dq + du$ con u cualquier función de \mathbf{R}^2) y el resultado habría sido

$$\begin{aligned}\delta_q \phi &= (+i\hbar \partial_p + q dp(\partial_p) + q) \phi = (+i\hbar \partial_p) \phi \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar \partial_q + q dp(\partial_q) + p) \phi = (-i\hbar \partial_q + p) \phi\end{aligned}$$

Observar que en este caso si restringimos nuestro espacio de Hilbert a funciones que solo dependen de p obtenemos la cuantización de Schrödinger en la representación de impulsos en donde p actúa multiplicando y q derivando.

Para lidiar con esta ambigüedad en la elección del potencial simpléctico se termina cambiando el espacio de Hilbert como veremos a continuación. ▲

El mapa δ definido en 2.1.3 satisface las condiciones (i)-(iv), el precio a pagar es que su definición es de carácter local, pues en general el potencial simpléctico θ no puede definirse globalmente³. Además, hay una arbitrariedad a la hora de elegir el potencial simpléctico, pues dado un θ , también serviría utilizar el potencial simpléctico $\theta + du$ con u una función en la variedad. Esto lleva a una nueva complicación que obligará a modificar el espacio de Hilbert que se había utilizado, como mostraremos a continuación.

Supongamos que la variedad puede cubrirse con dos abiertos U y \tilde{U} en los cuales localmente ω puede escribirse como $d\theta$ y $d\tilde{\theta}$ respectivamente (para ejemplificar lo que se quiere mostrar alcanza con esto). En la intersección de los dos abiertos $U \cap \tilde{U}$ los dos potencial simplécticos son válidos y vale que

$$d(\tilde{\theta} - \theta) = \omega - \omega = 0$$

entonces $\tilde{\theta} - \theta$ es una forma cerrada en $U \cap \tilde{U}$. Luego por el lema de Poincaré, es una forma localmente exacta y vale que

$$\tilde{\theta} - \theta = du \implies \tilde{\theta} = \theta + du \quad \text{en el abierto } U \cap \tilde{U}$$

para alguna función u .

Si localmente el operador δ_f se escribe como muestra 2.1.3, a priori no hay forma de saber qué potencial simpléctico utilizar en $U \cap \tilde{U}$. De hecho, utilizar distintos potenciales lleva expresiones no

³Dado que ω es cerrada, el lema de Poncaré nos garantiza que es localmente exacta, es decir que no importa cual sea la variedad simpléctica, localmente siempre vale que $\omega = d\theta$

equivalentes, pues

$$\begin{aligned}
\delta_f^{\tilde{\theta}} &= -i\hbar X_f - \tilde{\theta}(X_f) + f \\
&= -i\hbar X_f - \theta(X_f) - du(X_f) + f \\
&= \delta_f^\theta - du(X_f) \\
&= \delta_f^\theta - L_{X_f}(u) \\
&= \delta_f^\theta - X_f(u) \\
&\neq \delta_f^\theta
\end{aligned}$$

Entonces, si queremos que la acción del operador δ_f sobre los estados del espacio de Hilbert sea independiente de la elección de θ , debemos dejar cierta libertad sobre las funciones, que resultará ser una libertad de gauge. Esto se logra estableciendo que las funciones ψ y $\tilde{\psi} = e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi$ representen el mismo estado en el espacio de Hilbert al cambiar θ por $\theta + du$. De esta manera se cumple que

$$\begin{aligned}
\delta_f^{\tilde{\theta}}\tilde{\psi} &= \delta_f^\theta e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi - X_f(u)e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi \\
&= -i\hbar X_f(e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi) - e^{\frac{iu}{\hbar}}\theta(X_f)\psi + e^{\frac{iu}{\hbar}}f\psi - X_f(u)e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi \\
&= X_f(u)e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi - e^{\frac{iu}{\hbar}}i\hbar X_f\psi - e^{\frac{iu}{\hbar}}\theta(X_f)\psi + e^{\frac{iu}{\hbar}}f\psi - X_f(u)e^{\frac{iu}{\hbar}}\psi \\
&= e^{\frac{iu}{\hbar}}(-i\hbar X_f - \theta(X_f) + f)\psi \\
&= e^{\frac{iu}{\hbar}}\delta_f^\theta\psi
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

es decir que $\delta_f^{\tilde{\theta}}\tilde{\psi}$ y $\delta_f^\theta\psi$ representan el mismo estado en el espacio de Hilbert y δ_f es independiente de la elección del potencial simpléctico.

El significado geométrico de esta invarianza es que los estados del espacio de Hilbert no pueden ser simplemente funciones en M , pues al comparar como se escriben las funciones al pasar de un abierto a otro, ellas se transforman simplemente componiendo con el cambio de coordenadas adecuado y no se multiplican por ningún factor. Las estructuras matemáticas que sí cumplen esto son las secciones de fibrados de línea complejos sobre M . Dicho conjunto de secciones $\Gamma(L)$ forma un espacio vectorial. Es importante mencionar que cada fibrado de línea complejo puede ser dotado de una métrica hermitica h , que nos permite definir un producto interno hermitico en el espacio de secciones $\Gamma(L)$ y convertir a dicho espacio en un espacio de Hilbert. En el apéndice A se muestran las características más relevantes sobre los fibrados de línea y sus secciones. Para un estudio más profundo referimos a Husemoller [26] o a Kobayashi & Nomizu [34]. De todas formas, muy intuitivamente, los dos conceptos que necesitamos son: las secciones de un fibrado de línea pueden representarse localmente con funciones $C^\infty(M, \mathbf{C})$ que al cambiar de coordenadas se multiplica por una transformación de gauge local y, el conjunto de secciones de un fibrado de línea es un espacio vectorial.

Si uno acepta que los estados del espacio de Hilbert estén descritos por secciones de un fibrado de línea (L, π, M) lo siguiente es definir la acción del operador δ_f en dichas secciones, pues los campos hamiltonianos X_f actúan naturalmente sobre funciones, no sobre secciones. Para hacer esto se requiere un poco más de estructura matemática.

Definición 2.1.6 (conexión) *Sea (L, π, M) un fibrado de línea con espacio base M . Una*

conexión o derivada covariante en el fibrado de línea es un mapa

$$\nabla : \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(M) \longrightarrow \text{End}_{\mathbf{C}}(\Gamma(L))$$

que *satisface*^a

- $\nabla_{fX+Y} = f\nabla_X + \nabla_Y$ (es lineal en $C^\infty(M, \mathbf{C})$)
- $\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s$ (regla de Leibniz)
- $\nabla_X(s + s') = \nabla_X s + \nabla_X s'$ (es lineal en las secciones)

para todas función $f \in C^\infty(M, \mathbf{C})$, campos vectoriales complejos $X, Y \in \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(M)$, y secciones $s, s' \in C^\infty(M, L)$

^aAquí $\mathcal{X}_{\mathbf{C}}$ son campos vectoriales complejos sobre M . Más adelante se harán comentarios sobre la posibilidad de definir campos vectoriales complejos sobre distintas variedades.

Lo más natural sería entonces definir una conexión ∇ en (L, π, M) y usarla para asociar operadores diferenciales lineales, que actúen en secciones de L , a cada campo vectorial hamiltoniano en la variedad M . En el apéndice A se dan algunos detalles de los fibrados de línea con conexión. Si se observa la expresión A.0.6, se puede considerar que 2.1.3 es simplemente la expresión local de la conexión con θ su 1-forma local. De esta forma se define la conexión

$$\nabla_{X_f} = X_f - \frac{i}{\hbar}\theta(X_f)$$

que puede entenderse de la siguiente manera: la conexión ∇_X asigna a la sección representada localmente por la función ψ , la sección localmente representada por la función $X(\psi) + \frac{i}{\hbar}\theta(X)\psi$. El operador δ_f puede escribirse como

$$\delta_f s = (-i\hbar\nabla_{X_f} + f)s \quad (2.1.7)$$

Observar que de esta forma, por todo lo que se muestra en el apéndice A, cuando se pide que los resultados sean independientes del potencial simpléctico, en el fondo se está pidiendo que sean independientes de la elección del sistema de coordenadas. La expresión 2.1.7 es entonces la definición libre de coordenadas (o de la 1-forma θ) del operador δ_f .

Una vez establecido la acción del operador δ_f sobre secciones del fibrado, hay que definir nuevamente el espacio de Hilbert. El conjunto de secciones de L forman un espacio vectorial, falta dotar a este espacio vectorial de un producto interno. Para eso requerimos otra definición

Definición 2.1.8 (Estructura hermítica y Conexión hermítica) *Sea (L, π, M) un fibrado de línea con espacio base M . Una **estructura hermítica** h en L es una familia $\{h_m\}_{m \in M}$ de productos internos hermíticos h_m en cada una de las fibras $\pi^{-1}(m)$, es suave en el sentido de que para cualquier par de secciones $s, s' \in C^\infty(M, L)$ la función sobre M definida por $m \mapsto h_m(s(m), s'(m))$ es suave. Una conexión en L y una estructura hermítica en L*

se dicen **compatibles** si

$$X(h(s, s')) = h(\nabla_{\bar{X}}s, s') + h(s, \nabla_X s')$$

para todo $X \in \mathcal{X}_C(M)$. Si esto ocurre se llama a ∇ **conexión hermítica**.

La idea es que si se puede definir una estructura hermítica en L , luego se podrá reemplazar el producto interno que se definió en 2.1.2 para el espacio de funciones por

$$\langle s_1 | s_2 \rangle = \int_M h(s_1, s_2) \Omega_\omega \quad (2.1.9)$$

que es un producto interno en el espacio de secciones. Este producto interno toma dos secciones s_1 y s_2 , en cada fibra $\pi^{-1}(m)$ evalúa $h_m(s_1(m), s_2(m))$ y luego integra ese resultado en toda la variedad.

En el proceso de cuantización geométrica nos interesa no solo tener una conexión en un fibrado de línea y una estructura hermítica, si no también que las mismas sean compatibles. En Woodhouse & Simms [65], por ejemplo, dicha propiedad se requiere para que el operador δ_f cumpla las condiciones de precuantización (2.1.15). La condición necesaria y suficiente para la existencia de una conexión hermítica se conoce como condición de integrabilidad. Aquí daremos la versión más simple de la misma ([64]), para una formulación más precisa ver Echeverría-Enríquez *et al.* [16].

Teorema 2.1.10 (Condición de integrabilidad) *Sea M una variedad. La condición necesaria y suficiente para que exista un fibrado de línea (L, π, M) con una estructura hermítica h y una conexión compatible ∇ es que la curvatura Ω de la conexión ∇ sea una forma cerrada y su integral sobre cualquier superficie cerrada y orientable en M sea un múltiplo entero de $2\pi i$*

Veamos en qué condiciones se traduce para nuestro caso. La curvatura de ∇ puede calcularse directamente por su definición (ver A.0.10). En este caso vale que

$$\text{cur}(\nabla) = -\frac{i}{\hbar} \omega \quad (2.1.11)$$

es decir, la curvatura de la conexión ∇ es proporcional a la forma simpléctica, la cual siempre es cerrada. Lo único que le falta cumplir a ω es que su integral sobre cualquier superficie cerrada en M sea múltiplo entero de, en este caso, $2\pi\hbar$.

Basado en esto se define cuándo un sistema es precuantizable.

Definición 2.1.12 *La variedad simpléctica (M, ω) se dice **precuantizable** si la integral de ω sobre cualquier superficie cerrada y orientable en M es un múltiplo entero de $2\pi\hbar$.*

Es importante mencionar que mientras se cumpla la condición de integrabilidad es irrelevante tomar distintas estructuras hermíticas sobre para un dado fibrado de línea (L, π, M) , pues se puede demostrar que son equivalentes ([16]). Además, se muestra que si la variedad es conexa solamente existe una clase (salvo difeomorfismos) de fibrados de línea hermíticos con conexión hermítica.

Esto quiere decir que alcanza con definir alguna estructura hermítica L que sea compatible con ∇ . Dadas dos secciones s_1 y $s_2 \in L$, en el punto m son de la forma⁴ $s_1(m) = z_1(m) \in \mathbf{C}$ y $s_2(m) = z_2(m) \in \mathbf{C}$. Definimos la estructura hermítica sobre L como el conjunto de productos internos hermíticos dados por

$$h_m(s_1(m), s_2(m)) = \overline{z_1(m)} z_2(m) \quad (2.1.13)$$

para cada una de las fibras. Notar que este producto no depende de la elección local de coordenadas (no se modifica si se cambia θ a $\theta + du$), pues las transformaciones de las secciones son unitarias

$$z_1 \mapsto z_1 e^{\frac{iu}{\hbar}}$$

e implican

$$\overline{z_1} z_2 \mapsto \overline{z_1 e^{\frac{iu}{\hbar}}} z_2 e^{\frac{iu}{\hbar}} = \overline{z_1} z_2$$

Es fácil ver que esta estructura hermítica es compatible con ∇ , pues

$$\begin{aligned} h(\nabla_{\overline{X}} s, s') &= \left(\overline{X} s - \frac{i}{\hbar} \theta(\overline{X}) s \right) s' \\ &= X(\overline{s}) s' + \frac{i}{\hbar} \theta(\overline{X}) \overline{s} s' \\ &= X(\overline{s} s') - \overline{s} X s' + \frac{i}{\hbar} \theta(\overline{X}) \overline{s} s' \quad (\text{regla de Leibniz}) \\ &= X(\overline{s} s') - \overline{s} X s' + i \theta(X) \overline{s} s' \quad (\theta \text{ es real}) \\ &= X h(s, s') - \overline{s} (X - \frac{i}{\hbar} \theta(X)) s \\ &= X h(s, s') - h(s, \nabla_X s') \end{aligned}$$

Hasta este punto, pareciera que no fue necesaria ninguna condición sobre ω para definir la conexión o la estructura hermítica. En el apéndice A se muestra una idea intuitiva de la necesidad de la condición de integrabilidad. Si no se cumpliera dicha condición, la única sección en el fibrado sería la sección nula. Con todos los elementos que ya se mencionaron se puede definir el espacio de Hilbert de la precuantización de un sistema clásico.

Definición 2.1.14 Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Sea (L, π, M) un fibrado de línea complejo sobre M . Sea h la estructura hermítica sobre L definida en 2.1.13. Se define al **espacio de Hilbert de precuantización** \mathcal{H}_P como al espacio de secciones de $\phi \in C^\infty(M, L)$ de “cuadrado integrable” respecto del producto interno definido por h , es decir

$$\mathcal{H}_P = \left\{ \phi \in \Gamma(L) \mid \langle \phi \mid \phi \rangle < \infty \right\}$$

respecto del producto interno

$$\langle \phi \mid \psi \rangle = \int_M h(\phi, \psi) \Omega_\omega$$

Continuaremos por demostrar que el operador δ_f definido por 2.1.7 satisface los requisitos de la precuantización.

⁴Estrictamente hablando cada sección en el punto m es de la forma (m, z) omitimos la referencia al punto m como es usual en la mayoría de la bibliografía.

Teorema 2.1.15 (Kostant) *Dada una variedad simpléctica (M, ω) precuantizable. Sea \mathcal{H}_P el espacio de Hilbert de precuantización de (M, ω) . El operador de precuantización $\delta_f : \mathcal{H}_P \rightarrow \mathcal{H}_P$ definido por*

$$\delta_f = -i\hbar X_f - \theta(X_f) + f = i\hbar \nabla_{X_f} + f$$

satisface las propiedades (i)-(iv) de la defecinición 2.0.3 para cada función $f \in C^\infty(M, \mathbf{C})$

(Dem.) (i) y (iii) se cumplen trivialmente.

(ii) Supongamos

$$\begin{aligned} \langle \delta_f(\psi) | \psi' \rangle &= \int_M h(\delta_f(\psi), \psi') \Omega_\omega \\ &= \int_M h(-i\hbar \nabla_{X_f}(\psi), \psi') \Omega_\omega + \int_M h(f\psi, \psi') \Omega_\omega \\ &= +i\hbar \int_M h(\nabla_{X_f} \psi, \psi') \Omega_\omega + \int_M h(\psi, f^* \psi') \Omega_\omega \\ &= +i\hbar \int_M \overline{X_f}(h(\psi, \psi')) \Omega_\omega - i\hbar \int_M h(\psi, \nabla_{\overline{X_f}} \psi') \Omega_\omega + \int_M h(\psi, f^* \psi') \Omega_\omega \\ &= +i\hbar \int_M X_{f^*}(h(\psi, \psi')) \Omega_\omega - i\hbar \int_M h(\psi, \nabla_{X_{f^*}} \psi') \Omega_\omega + \int_M h(\psi, f^* \psi') \Omega_\omega \\ &= +i\hbar \int_M X_{f^*}(h(\psi, \psi')) \Omega_\omega + \int_M h(\psi, \delta_{f^*} \psi') \Omega_\omega \\ &= +i\hbar \int_M X_{f^*}(h(\psi, \psi')) \Omega_\omega + \langle \psi | \delta_{f^*} \psi' \rangle \end{aligned}$$

donde en la quinta igualdad se uso el hecho de que $\overline{X_f} = X_{f^*}$, lo cual puede demostrarse facilmente. La propiedad (ii) queda demostrada si se muestra que la última integral es nula. El integrando de la misma es de la forma (omitimos de aquí en adelante el símbolo * de f) $X_f(g)\Omega_\omega$ con $g = h(\psi, \psi')$ una función en M , entonces se obtiene

$$\begin{aligned} X_f(g)\Omega_\omega &= (L_{X_f} g)\Omega_\omega \\ &= L_{X_f}(g\Omega_\omega) - gL_{X_f}\Omega_\omega && \text{(regla de Leibniz)} \\ &= L_{X_f}(g\Omega_\omega) - 0 && \text{(por proposición 1.3.2)} \\ &= d(g\Omega_\omega(X_f)) + d(g\Omega_\omega)(X_f) && \text{(regla mágica de Cartán)} \\ &= d(g\Omega_\omega(X_f)) + 0 && \text{(pues } g\Omega_\omega \text{ es una forma máxima)} \\ &= d(g\Omega_\omega(X_f)) \end{aligned}$$

Utilizando ahora el teorema de Stokes la integral queda

$$\int_M X_f(h(\psi, \psi')) \Omega_\omega = \int_M d(g\Omega_\omega(X_f)) = \int_{\partial M} g\Omega_\omega(X_f)$$

Si M es compacta la integral es automáticamente nula, si M no es compacta, como las funciones $\psi, \psi' \in \mathcal{H}_{\mathcal{P}}$ son de cuadrado integrable la propia función g se desvanece (más precisamente, la función g se desvanece si se restringe a funciones ψ y ψ' de soporte compacto, las cuales forman un denso en el espacio de funciones de cuadrado integrable).

(iv) Calculemos explícitamente el conmutador

$$\begin{aligned} [\delta_f, \delta_g]\psi &= [-i\hbar X_f - \theta(X_f) + f, -i\hbar X_g - \theta(X_g) + g]\psi \\ &= i\hbar (i\hbar[X_f, X_g] + [X_f, \theta(X_g) - g] - [X_g, \theta(X_f) - f])\psi \end{aligned}$$

el primer término de la última igualdad es igual a $-i\hbar X_{\{f,g\}\omega}$. Los otros dos términos pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} [X_f, \theta(X_g) - g]\psi &= X_f((\theta(X_g) - g)\psi) - (\theta(X_g) - g)X_f\psi \\ &= (X_f(\theta(X_g) - g))\psi \\ &= (X_f\theta(X_g))\psi - (X_f g)\psi \\ &= (X_f\theta(X_g))\psi + \{f, g\}_{\omega}\psi \end{aligned} \quad (\text{por ecuación 1.4.2})$$

reemplazando se obtiene

$$[\delta_f, \delta_g]\psi = i\hbar (-i\hbar X_{\{f,g\}\omega} + X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f) + 2\{f, g\}_{\omega})\psi$$

Los términos con X_f y X_g se reescriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -\{f, g\}_{\omega} &= \omega(X_f, X_g) && (\text{por definición 1.4.1}) \\ &= d\theta(X_f, X_g) \\ &= X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f) - \theta([X_f, X_g]) \\ &= X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f) + \theta(X_{\{f,g\}\omega}) \end{aligned}$$

de esta manera

$$X_f\theta(X_g) - X_g\theta(X_f) = -\theta(X_{\{f,g\}\omega}) - \{f, g\}_{\omega}$$

y se obtiene, finalmente

$$[\delta_f, \delta_g]\psi = i\hbar(-i\hbar X_{\{f,g\}\omega} - \theta(X_{\{f,g\}\omega}) + \{f, g\}_{\omega})\psi = i\hbar\delta_{\{f,g\}\omega}\psi \quad \blacksquare$$

Por último, dos comentarios importantes: a diferencia de la cuantización canónica, el mapa δ_f no asigna a la función f^2 el operador $\delta_f \circ \delta_f$, pues vale que en general que⁵

$$\delta_{fg} = f\delta_g + g\delta_f - fg \quad (2.1.16)$$

de esta forma el operador asignado a f^2 es $\delta_{f^2} = 2\delta_f - f^2$.

Observar que no se presentan ambigüedades en la definición de operadores que provienen de productos de funciones cuyas versiones cuánticas no conmutan, es decir

$$\delta_{fg} = \delta_{gf} = \delta_{\frac{fg+gf}{2}} = f\delta_g + g\delta_f - fg$$

⁵Para demostrar esto hay que usar el hecho de que el mapa $f \mapsto x_f$ es una derivación y la propia definición de δ_f

2.2. Polarización

Si comparamos los resultados de la precuantización de la variedad simpléctica $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$ del ejemplo 2.1.4 con los resultados clásicos de la cuantización de Schrödinger es claro que los operadores no coinciden, así como los espacios de Hilbert en cada uno de los casos. La manera obvia de derivar los resultados de Schrödinger desde la precuantización es restringirnos a funciones (secciones) de \mathbf{R}^2 que solamente dependan de una de las coordenadas. El proceso de “cortar” el espacio de Hilbert para quedarse solamente con funciones que dependan de la mitad de las coordenadas se logra eligiendo una polarización, sobre el tema Woodhouse [64, pg. 171] dice:

“It should be stressed, however, that the physical justification is not based on general mathematical result, but on the way in which the construction works in particular examples. It generalizes and unifies a number of quantization techniques that, in the past, have not appeared to have any obvious connection with each other and that have sometimes seemed overspecialized with applications only to a particular physical system.”

Como ya se dijo el problema es que el espacio de Hilbert de precuantización es muy grande, contiene funciones que dependen tanto de q como de p . Una forma de eliminar la mitad de ellas es pedir que los estados del espacio de Hilbert sean constantes a lo largo de n campos vectoriales (recordad que $2n$ es la dimensión de la variedad simpléctica). Como la derivación ordinaria no tiene un significado invariante lo que se va a pedir a los estados es que sean covariantemente constantes a lo largo de n campos vectoriales. La idea se puede entender de la siguiente manera.

Sea P un conjunto de n campos vectoriales independientes (a P se lo llama polarización), se pide que los estados sean constantes a lo largo de estos, es decir

$$\nabla_X \phi = 0 \quad \text{para todo } X \in P \quad (2.2.1)$$

Esto a su vez implica que $[\nabla_X, \nabla_Y] \phi = 0$ para todo $X, Y \in P$. Utilizando que la curvatura de esta conexión es proporcional a la forma simpléctica obtenemos

$$[\nabla_X, \nabla_Y] \phi - \nabla_{[X, Y]} \phi - \frac{i}{\hbar} \omega(X, Y) \phi = 0$$

Donde el primer término es nulo. Esta igualdad se satisface si, por ejemplo, vale que

$$(a) \quad [X, Y] \in P \quad \text{para todo } X, Y \in P$$

$$(b) \quad \omega(X, Y) = 0 \quad \text{para todo } X, Y \in P$$

La condición (a) significa que P es una distribución involutiva⁶, mientras que la segunda implica que P es lagrangiana. Pasaremos a definir estos dos conceptos, primero la idea de foliaciones (para una descripción detallada ver Lee [38, pg. 491-507] o Candel & Conlon [13]) y luego el de subvariedades lagrangianas (Abraham & Marsden [1, pg. 402-424]).

⁶Luego mencionaremos que por el teorema de Frobenius, una distribución involutiva es una distribución integrable.

Definición 2.2.2 Una **distribución suave** D en una variedad M es un mapa que asigna a cada punto $m \in M$ un subespacio lineal D_m del espacio tangente T_mM tal que:

- Independientemente del punto $m \in M$ la dimensión $\dim D_m = k$ es siempre la misma.
- Para cada $m_0 \in M$ tiene que existir un entorno U_{m_0} de m_0 y k campos vectoriales X_1, \dots, X_k definidos e independientes en U_{m_0} tal que $\{X_1(m), \dots, X_k(m)\}$ generan a D_m para cada $m \in U_{m_0}$

Definición 2.2.3 Una distribución D se llama **integrable** si para cada $m_0 \in M$ existe una subvariedad $N \subseteq M$ tal que:

- m_0 pertenece a la subvariedad N .
- La dimensión de la subvariedad N es exactamente k ,
- Para cada punto m de la subvariedad N su espacio tangente T_mN es exactamente D_m .

Una condición necesaria y suficiente para que una distribución sea integrable está dada por el teorema de Frobenius, el cual establece que D es integrable si y solo si es involutiva. Es decir, para cada $X, Y \in \mathcal{X}(M, D)$ sucede que $[X, Y] \in \mathcal{X}(M, D)$, donde $\mathcal{X}(M, D)$ es el espacio de campos vectoriales sobre M que pertenecen a la distribución D para cada punto $m \in M$, es decir

$$\mathcal{X}(M, D) = \{X \in \mathcal{X}(M) \mid X(m) \in D_m, \forall m \in M\}$$

Esta es precisamente la condición (a) que buscamos para la polarización P , queremos entonces que P sea una distribución integrable. Una distribución integrable se llama foliación, las subvariedades N se llaman hojas de la foliación. Se llama M/D al espacio de todas las hojas de la foliación D . Si M/D tiene estructura de variedad y existe un proyector $\pi : M \rightarrow M/D$ la foliación D se llama reducible.

Agregando a esto la condición (b) podemos definir la polarización⁷ P .

Definición 2.2.4 Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una **polarización real** es una foliación P en M que además es maximalmente isotrópica con respecto a ω , es decir $\omega(m)(P_m, P_m) = 0$ para cada $m \in M$ y no existe ningún otro subespacio de T_mM que contenga a P_m y tenga esta propiedad. En particular la dimensión de P_m es exactamente n . Una distribución maximalmente isotrópica se dice **lagrangiana**.

Como observación, las hojas de la polarización resultan ser subvariedades lagrangianas, estas juegan un papel fundamental en la geometría simpléctica como remarca Weinstein [58].

La siguiente proposición ayuda a caracterizar localmente las polarizaciones reales.

⁷Abusando del lenguaje llamaremos P tanto a la distribución como a los conjuntos de campos vectoriales que la generan.

Proposición 2.2.5 Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Entonces una distribución suave P en M es una polarización real si y solo si para cada $m_0 \in M$ existe un entorno U_{m_0} de m_0 y n funciones independientes f_1, \dots, f_n tal que

- (i) para cada $m \in U_{m_0}$, P_m está generado por $\{X_{f_1}, \dots, X_{f_n}\}$.
(ii) en U_{m_0} se cumpla $\{f_i, f_j\}_\omega = 0$ para cada $i, j = 1, \dots, n$.

(Dem.) Para la primera implicación si P es una polarización real entonces es una distribución integrable. Por el teorema de Frobenius, existen localmente n funciones reales e independientes $\{f_1, \dots, f_n\}$ (es decir $\{df_1, \dots, df_n\}$ son independientes) tal que las hojas de P están definidas localmente por:

$$f_1 = \text{constante}, \dots, f_n = \text{constante}$$

Ahora, por este motivo, para cada campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M, P)$ se cumple que

$$X(f_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

de esta manera se cumple que

$$\begin{aligned} \omega(X, X_{f_i}) &= -df_i(X) \\ &= X(f_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como P es maximalmente simétrico tiene que incluir a X_{f_i} . De esta forma todos los campos X_{f_i} pertenecen a $\mathcal{X}(M, P)$. Que las funciones $\{f_i\}$ sean independientes quiere decir que sus diferenciales $\{df_i\}$ sean linealmente independientes, entonces los campos vectoriales hamiltonianos son todos linealmente independientes (pues el mapa entre diferenciales de funciones y campos vectoriales hamiltonianos es un isomorfismo). Como $\{X_{f_1}, \dots, X_{f_n}\}$ son n campos localmente independientes y todos pertenecen a P , generan a P . Finalmente por la isotropía de P se cumple que

$$\{f_i, f_j\}_\omega = -\omega(X_{f_i}, X_{f_j}) = 0 \quad \text{para todo } i, j = 1, \dots, n$$

Para la segunda implicación se tiene, primero por (i) P_m es una distribución y está generado localmente por $\{X_{f_i}(m)\}$ $i = 1, \dots, n$, por otra parte

$$0 = \{f_i, f_j\}_\omega = -\omega(X_{f_i}, X_{f_j})$$

es decir P_m es isotrópico. Como los campos $\{X_i\}$ son linealmente independientes, P_m tiene dimensión n , entonces es maximalmente isotrópico. Falta ver que P es integrable para eso usamos nuevamente el teorema de Frobenius, P es integrable si y solo si

$$[X_{f_i}, X_{f_j}] \in \mathcal{X}(M, P)$$

pero por (ii) se tiene

$$\omega([X_{f_i}, X_{f_j}], X_{f_k}) = -\omega\left(X_{\{f_i, f_j\}_\omega}, X_{f_k}\right) = 0 \text{ para todo } i, j, k$$

Como P es maximalmente isotrópico entonces $[X_{f_i}, X_{f_j}]$ pertenecen a $\mathcal{X}(M, P)$ para todo $X_{f_i}, X_{f_j} \in \mathcal{X}(M, P)$. Luego P es una distribución integrable y maximalmente isotrópica. ■

Veamos que el proceso de elegir una polarización y pedir que los estados del espacio de Hilbert se encuentren “polarizados” en el fondo es equivalente a quedarse con funciones de onda que dependan de la mitad de las coordenadas. Continuaremos usando el ejemplo de $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$.

Ejemplo 2.2.6 Sea $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$. Ya se mencionó que el resultado de precuantización no coincide con el de Schrödinger. La proposición 2.2.5 dice que para elegir una polarización, alcanza con elegir funciones tal que su corchete de Poisson entre ellas sea 0. En este caso alcanza con elegir una sola. Elegimos para generar la polarización la función $f_1 = q$. La polarización estará generada entonces por el campo vectorial hamiltoniano X_q

$$P_{X_q} = \{X_q\} = \{-\partial_p\} = P_{\partial_p}$$

Los estados polarizados serán de la forma $\nabla_{\partial_p} \phi = 0$, utilizando $\theta = p dq$

$$(i\hbar\partial_p - pdq(\partial_p)) \phi = 0$$

es decir

$$i\hbar\partial_p \phi = 0 \implies \phi = f(q) \quad (2.2.7)$$

Los operadores δ_q y δ_p actúan sobre ϕ de la siguiente forma

$$\begin{cases} \delta_q \phi &= (+i\hbar\partial_p + q)f(q) &= qf(q) \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar\partial_q f(q)) &= -i\hbar\partial_q f(q) \end{cases} \quad (2.2.8)$$

que es el resultado de la cuantización de Schrödinger en el espacio de coordenadas. Si por otro lado, se usa $\theta = pdq - d(pq) = -qdp$ se obtiene que los estados polarizados cumplen

$$(i\hbar\partial_p + qdp(\partial_p)) \phi = 0$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene

$$(i\hbar\partial_p + q)\phi = 0 \implies \phi = e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(q) \quad (2.2.9)$$

sin embargo este resultado es equivalente al que se obtuvo en 2.2.7, pues las dos funciones representan el mismo estado físico. Veamos ahora que la aplicación de los operadores a los estados no depende del potencial simpléctico que se utiliza, con $\theta = -qdp$ se obtiene

$$\begin{cases} \delta_q \phi &= i\hbar\partial_p e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(q) &= e^{\frac{ipq}{\hbar}} (qf(q)) \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar\partial_q + p)e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(q) &= e^{\frac{ipq}{\hbar}} (i\hbar\partial_q f(q)) \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Por el mismo motivo que antes, las funciones que se encuentran al final de 2.2.8 representan los mismo estados que las que se encuentran al final de 2.2.10. El operador δ_f se encuentra bien definido, independientemente de la elección del potencial simpléctico, es decir de la elección de coordenadas.

Veamos qué sucede si se elige otra polarización posible, generada por la función p . El campo vectorial hamiltoniano que genera a P_{X_p} es ∂_q , el procedimiento es completamente análogo al que ya se realizó. Daremos solamente los resultados.

Para $\theta = pdq$ se obtiene para los estados polarizados $\phi = e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(p)$ y los operadores actúan como

$$\begin{cases} \delta_q \phi &= (i\hbar \partial_p + q) e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(p) &= e^{\frac{ipq}{\hbar}} (i\hbar \partial_p f(p)) \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar \partial_q) e^{\frac{ipq}{\hbar}} f(p) &= e^{\frac{ipq}{\hbar}} (pf(p)) \end{cases}$$

mientras que para $\theta = -qdp$ se obtiene que los estados se representan por $\phi = f(p)$ y los operadores actúan como

$$\begin{cases} \delta_q \phi &= +i\hbar \partial_p f(p) &= +i\hbar \partial_p f(p) \\ \delta_p \phi &= (-i\hbar \partial_q + p) f(p) &= pf(p) \end{cases}$$

que es la conocida cuantización de Schrödinger en el espacio de los momentos. Ambas representaciones son unitariamente equivalentes por el teorema de Stone-Von Newman. Observar que ambas son irreducibles en el sentido de la propiedad (v) de la definición de cuantización completa sin embargo esto no es una cuantización completa del sistema, pues la propiedad (v) se establece para cualquier conjunto completo de funciones mientras que, una vez elegida una polarización, solamente cierto tipo de funciones podrán cuantizarse, como veremos más adelante. ▲

Del ejemplo anterior se entiende primero la utilidad de declarar que a las funciones que difieren en una transformación de gauge representen el mismo estados en el espacio de Hilbert. Luego, se ve cómo es que funciona elegir una polarización para restringir los estados del espacio de Hilbert. Lo interesante en el procedimiento de cuantización geométrica es que distintas representaciones surgen naturalmente como distintas elecciones de polarizaciones. En el ejemplo en particular, eligiendo las dos polarizaciones más simples (∂_p o ∂_q) se llega a la representación de la cuantización de Schrödinger en el espacio de coordenadas o de momentos. Otras elecciones de Polarizaciones llevan a otras representaciones, por ejemplo más adelante estudiaremos brevemente el caso $P = \partial_q + i\partial_p$ que lleva a la representación de Bargmann-Fock.

El objetivo de definir una polarización es poder quedarse con subespacios del espacio de Hilbert de la precuantización del sistema. Es decir, si \mathcal{H}_P es el espacio de Hilbert de la precuantización, se define \mathcal{H}_P^{Pol} al subespacio de estados polarizados respecto de alguna polarización. Una nueva complicación surge de esto: pues nada garantiza en principio que si ϕ es un estado polarizado, la acción de los operadores δ_f sobre él sea nuevamente un estado polarizado. Rápidamente hablando, solo algunos observables, al ser cuantizados, conservan a las secciones polarizadas. Para ver eso se prosigue de la siguiente forma.

Sea ϕ un estado polarizado respecto de la polarización P . Entonces

$$\nabla_X \phi = 0 \quad \text{para todo } X \in \mathcal{X}(M, P) \text{ y } \phi \in \mathcal{H}_P^{Pol}$$

Buscamos los operadores δ_f que manden estados polarizados en estados polarizados respecto de la

misma polarización, es decir si se cumple

$$\nabla_X(\delta_f\phi) = 0 \quad \text{para todo } X \in \mathcal{X}(M, P)$$

entonces queremos que se cumpla

$$\begin{aligned} \nabla_X(\delta_f\phi) &= \nabla_X((-i\hbar\nabla_{X_f} + f)\phi) \\ &= -i\hbar\nabla_X(\nabla_{X_f}\phi) + \nabla_X(f\phi) \\ &= -i\hbar\nabla_X(\nabla_{X_f}\phi) + f\nabla_X(\phi) + \phi X(f) && \text{(propiedad de la conexión } \nabla_X) \\ &= -i\hbar\nabla_X(\nabla_{X_f}\phi) + \phi X(f) && \text{(pues } \phi \text{ es polarizado)} \\ &= -i\hbar(\nabla_{X_f}\nabla_X + \nabla_{[X, X_f]} + \frac{-i}{\hbar}\omega(X, X_f))\phi + \phi X(f) && \text{(la curvatura de } \nabla \text{ es } -i\omega/\hbar) \end{aligned}$$

el primer término de la última expresión se anula, pues $\nabla_X\phi = 0$ por estar polarizado. El término con la forma simpléctica se puede escribir $\omega(X, X_f) = df(X) = X(f)$ y se anula con el último término. De esta forma resulta que

$$\nabla_X(\delta_f\phi) = i\hbar\nabla_{[X, X_f]}\phi = 0 \quad \text{para todo } X \in \mathcal{X}(M, P)$$

Lo cual se cumple si y solo si

$$[X_f, X] \in \mathcal{X}(M, P) \tag{2.2.11}$$

Es decir, una vez elegida una polarización, solamente se podrán cuantizar las funciones tal que el conmutador entre los campos de la polarización y su campo vectorial hamiltoniano pertenezca a la polarización. Esta condición es realmente muy restrictiva, para ver eso, utilicemos el ejemplo 2.2.6. En el caso que $P = \partial_p = X_q$ obtenemos que los estados polarizados están representados por secciones que solo dependen de q . Los observables f que se pueden cuantizar cumplen

$$[X_q, X_f] = \alpha X_q$$

El campo vectorial hamiltoniano de f es $X_f = f_q\partial_p - f_p\partial_q = f_qX_q + f_pX_p$, entonces

$$\begin{aligned} [X_q, f_qX_q + f_pX_p] &= L_{X_q}(f_qX_q + f_pX_p) \\ &= (L_{X_q}f_q)X_q + f_qL_{X_q}X_q + (L_{X_q}f_p)X_p + f_pL_{X_q}X_p \end{aligned}$$

el segundo término es nulo, pues $L_{X_q}X_q = [X_q, X_q] = 0$. El último término también es nulo, pues $L_{X_q}X_p = -X_{\{q,p\}} = -X_1 = 0$. Queda entonces,

$$[X_q, X_f] = (L_{X_q}(f_q))X_q + (L_{X_q}(f_p))X_p = \alpha X_q$$

que se cumple si y solo si

$$L_{X_q}f_p = X_q(f_p) = \partial_p f_p = \partial_p \partial_p f = 0$$

es decir, con esta polarización solo pueden cuantizarse operadores de la forma $f = f_1(q) + f_2(q)p$. No se podría, por ejemplo, cuantizar la función $H = \frac{p^2}{2m}$ o el oscilador armónico con $H = (p^2 + q^2)/2$.

El siguiente paso en polarización es permitir que las polarizaciones sean complejas, esto tiene la ventaja, desde el punto de vista físico, que permite “agrandar” la cantidad de observables que pueden

cuantizarse. Por supuesto la motivación matemática es completamente distinta: para que exista una polarización en una variedad, deben existir campos vectoriales definidos sobre toda la variedad, que en cada punto generen el subespacio P_m del espacio tangente T_mM , todos ellos con la misma dimensión. Claramente eso es imposible de lograr si alguno de los campos vectoriales se anula en algún punto $m \in M$. Esto ocurre, por ejemplo, en la esfera S^2 , donde no existen campos vectoriales continuos y tangentes a esfera que no se anulen en al menos un punto. En resumen, no existe ninguna polarización real sobre la esfera. Matemáticamente permitir que la polarización sea compleja permite aplicar el método a mayor cantidad de variedades. De todas formas, no todas las variedades simplécticas admiten polarización compleja como muestra Gotay & Maryland [19], los casos que no la admiten son patológicos.

Representaciones como el espacio de Fock para el oscilador armónico, en donde el espacio de Hilbert está representado por funciones holomorfas en $z = p + iq$, provienen de elegir polarizaciones complejas, que son generalizaciones naturales de las polarizaciones reales. Uno simplemente relaja la condición de que los vectores hamiltonianos que generan P sean reales. Si bien las polarizaciones complejas son un tema de central importancia en la cuantización geométrica (y fuera de ella), daremos solamente la definición. Para un estudio más detallado ver Woodhouse [63],[64] o Guillemin & Sternberg [22], además para un estudio detallado de subespacios lagrangianos complejos o variedades complejas ver Kobayashi & Nomizu [35, cap. IX]. El punto de partida al permitir polarizaciones complejas es ver a la variedad de dimensión $2n$ como una variedad compleja de dimensión n , en el apéndice B se muestran las bases de esta idea.

Definición 2.2.12 Sea (m, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$. Una **polarización compleja** en M es una distribución compleja P en M tal que:

- (i) para cada $m \in M$, P_m es un subespacio maximalmente isotrópico de $(T_mM)^{\mathbb{C}}$, donde $(T_mM)^{\mathbb{C}}$ es el espacio vectorial complejificado asociado a T_mM .
- (ii) para todo $m \in M$, el subespacio D_m definido por $D_m = P_m \cap \overline{P_m} \cap T_mM$ tiene la misma dimensión k .
- (iii) P y $P + \overline{P}$ son cerrados bajo el corchete de Lie de campos vectoriales.

Veamos que por ejemplo, elegir polarizaciones complejas permiten realizar la cuantización del oscilador armónico.

Ejemplo 2.2.13 Sea, nuevamente $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$ elijamos coordenadas $z = p + iq$ y $\bar{z} = p - iq$. En estas coordenadas $\omega = dp \wedge dq$ se escribe

$$\omega = dp \wedge dq = \frac{1}{2}d(z + \bar{z}) \wedge \frac{1}{2i}d(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}d\bar{z} \wedge dz$$

El potencial simpléctico es

$$\theta = \frac{\bar{z}}{2i}dz$$

El campo vectorial hamiltoniano para una función $f(z, \bar{z})$ es

$$X_f = 2i(f_{\bar{z}}\partial_z - f_z\partial_{\bar{z}})$$

Supongamos que elegimos la distribución generada por z , entonces

$$P_z = \{X_z\} = \{\partial_{\bar{z}}\}$$

Es facil convenserse de que es una polarización compleja, pues

- (i) $\omega(P, P) = 0$ y la dimensión de P es 1.
- (ii) $P \cap \bar{P} = \{0\}$
- (iii) P y $P + \bar{P}$ son cerrados bajo el corchete de Lie.

Los estados polarizados cumplen que son constantes a lo largo de $\partial_{\bar{z}}$, es decir

$$\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\phi = \left(\partial_{\bar{z}} - \frac{1}{2i\hbar}\bar{z}dz(\partial_{\bar{z}}) \right) \phi = 0$$

Que implica que ϕ es unicamente función de z .

Tratemos de cuantizar el hamiltoniano $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}z\bar{z}$, su campo vectorial hamiltoniano es

$$X_H = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$$

En este caso H es cuantizable, pues

$$[X_H, \partial_z] = -i\partial_z$$

De igual manera, las funciones z y \bar{z} son cuantizables. Se obtienen los operadores

$$\begin{aligned} \delta_H\phi(z) &= \left(\hbar(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) - \frac{i\bar{z}}{2i}dz(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}}) + \frac{z\bar{z}}{2} \right) \phi(z) = \hbar z\partial_z\phi(z) \\ \delta_z\phi(z) &= \left(-2\hbar\partial_{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{2i}dz(-2i\partial_{\bar{z}}) + z \right) \phi(z) = z\phi(z) \\ \delta_{\bar{z}}\phi(z) &= \left(2\hbar\partial_z - \frac{\bar{z}}{2i}dz(2i\partial_z) + \bar{z} \right) \phi(z) = 2\hbar\partial_z\phi(z) \end{aligned}$$

Si se buscan los autoestados del operador asignado al Hamiltoniano δ_H

$$\delta_H\phi(\bar{z}) = \hbar\bar{z}\partial_{\bar{z}}\phi(\bar{z}) = E_n\phi(\bar{z})$$

se encuentra que lo autoestados son de la forma $\phi_n(\bar{z}) = \bar{z}^n$ y la energías $E_n = \hbar n$ con n entero lo cual no coincide con los niveles de energía del oscilador armónico, pues falta el término de energía constante $\frac{\hbar}{2}$. El operador δ_z actúa sobre autoestados de δ_H con autovalor E_n llevándolo a un autoestado con autovalor E_{n+1} . Mientras que el operador $\delta_{\bar{z}}$ actúa sobre los autoestados de δ_H con energía E_n llevándolos a autoestados con energía E_{n-1} . Es decir, δ_z y $\delta_{\bar{z}}$ son los operadores de creación y destrucción que uno conoce de la cuantización canónica del oscilador armónico. ▲

Complexificar la variedad y darle la posibilidad de que la polarización sea compleja nos permite, primero, que el proceso de cuantización pueda aplicarse a más variedades, pues no todas admiten polarización real, segundo, aumenta la cantidad de observables que pueden cuantizarse. Si no se hubiera permitido la polarización compleja, no podría haberse cuantizado el oscilador armónico, por ejemplo. Sin embargo permitir esto trae un efecto indeseado que debe corregirse.

Al permitir que la variedad sea compleja, ahora el potencial simpléctico puede ser complejo y estar determinado a menos de una parte real y una imaginaria, es decir θ y $\theta + d(u + iv)$ con u y v funciones reales, llevan a la misma forma simpléctica real si la parte imaginaria de θ es cerrada. En dicho caso la transformación de gauge para las funciones trae un término extra que no tiene modulo 1

$$\phi \longmapsto e^{\left(\frac{-iu+v}{\hbar}\right)}\phi \quad \text{cuando} \quad \theta \longmapsto \theta + d(u + iv)$$

de esta forma este factor extra hace que el producto interno entre secciones no se encuentre bien definido y dependa del sistema de coordenadas (deja de ser invariante de gauge), pues

$$h(\phi, \psi) = \bar{\phi}\psi \longmapsto \bar{\phi}\psi e^{\frac{-2v}{\hbar}}$$

Adicionalmente, observar que para demostrar que la estructura hermítica y la conexión ∇ son compatibles se utilizó el hecho de que el potencial simpléctico θ era real. Para corregir este problema se redefine la estructura hermítica h de forma que cargue un nuevo término, o factor de peso, que pueda absorber esta exponencial extra que aparece. Se redefine entonces

$$h(\phi, \psi) = \rho \bar{\phi}\psi$$

donde ρ dependerá del potencial simpléctico que se elija y deberá valer 1 en el caso que θ no tenga parte imaginaria para coincidir con la estructura hermítica que se utilizaba en el caso de polarización real. Una forma para determinar ρ es pedir que siga valiendo la condición de compatibilidad entre la estructura hermítica y la conexión. Es fácil ver que esa condición se cumple si y solo si

$$d \ln \rho = \frac{2}{\hbar} \text{Im}(\theta) \tag{2.2.14}$$

de esta forma, cuando θ es real, se reduce a lo que ya conocíamos y $\rho = 1$, y cuando $\theta \longmapsto \theta + idv$ entonces,

$$d \ln \rho \longmapsto d \ln \tilde{\rho} = d \ln(\rho) \frac{2}{\hbar} dv$$

equivalente a

$$\ln \tilde{\rho} = \ln(\rho) \frac{2}{\hbar} v \iff \tilde{\rho} = \rho e^{\frac{2v}{\hbar}}$$

De esta forma aparece exactamente el factor que estábamos buscando para que el producto interno no dependa de la elección de θ . El nuevo producto interno entre estados se define como

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_M h(\phi, \psi) = \int_M \rho \bar{\phi}\psi \Omega_\omega \tag{2.2.15}$$

con ρ definida por la ecuación 2.2.14.

2.3. Más correcciones

Como ya se mencionó en la introducción de este capítulo, la elección de polarización es el primer paso, luego de la precuantización. Con ella se restringe el espacio de Hilbert de la precuantización, las

funciones pasan a depender de la mitad de las coordenadas, y además se restringen los observables que se pueden cuantizar. Ya sea que se utilice polarización real o compleja, surge un problema que todavía no se había mencionado con la definición del producto interno en el espacio de Hilbert. La idea intuitiva de esto puede entenderse de la siguiente manera. Si \mathcal{H}_P es el espacio de Hilbert de precuantización. Los estados están representados por secciones de un fibrado de línea $\Gamma(L)$. Supongamos elegimos una polarización \mathcal{D} , el espacio de Hilbert se restringe a

$$\mathcal{H}_P^{\mathcal{D}} = \left\{ \phi \in \mathcal{H}_P \mid \nabla_X \phi = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}(M, \mathcal{D}) \right\}$$

Sin embargo, en general este espacio solamente contiene a la sección nula dado que los estados polarizados no tienen norma finita. Pues el producto interno implica integrar sobre toda la variedad, pero los estados polarizados no dependen de la mitad de las coordenadas, por lo que si la variedad no es compacta, esta integración en las variables “que sobran” diverge. La idea más directa para salvar este problema es integrar solamente en la mitad de las coordenadas, es decir en M/D , en las hojas de la polarización. Desgraciadamente no hay una manera natural de definir una medida de integración en M/D consistentemente.

Este problema no se presenta en el caso de que la variedad sea compacta, se puede seguir manteniendo el producto interno definido anteriormente y el espacio de las secciones polarizadas tiene elementos no nulos. En esta tesis nos concentraremos en el caso de que la variedad simpléctica es la esfera⁸ \mathbf{S}^2 , por este motivo no se entrará en detalles sobre cual es la corrección que se realiza en el caso de variedades no compactas. De todas formas mencionaremos lo siguiente muy esquemáticamente (ver Tuynman [57], Rawnsley [49] o Śniatycki [66]). Para realizar la corrección se introducen las llamadas *half-form*, la idea es cambiar nuevamente el espacio de Hilbert, y permitir que cada estado cargue consigo la “mitad de la medida de integración”. Si por ejemplo se utiliza como variedad $(\mathbf{R}^2, dp \wedge dq)$ y la polarización tal que los estados solamente dependan de q , los nuevos estados serán de la forma

$$\phi = \phi(q) \otimes \sqrt{dq}$$

Por supuesto se demuestra que estos objetos pertenecen a un espacio vectorial (pues en el fondo son secciones de un nuevo fibrado) con producto interno definido por

$$\left\langle \phi(q) \otimes \sqrt{dq} \mid \psi(q) \otimes \sqrt{dq} \right\rangle = \int_{M/D=Q} h(\phi(q), \psi(q)) \sqrt{dq} \sqrt{dq} = \int_Q h(\phi(q), \psi(q)) dq$$

La ventaja de esto es que la integración queda bien definida, el producto interno queda bien definido y además permite vincular resultados obtenidos con distintas polarizaciones, como puede verse en las referencias.

Lo interesante es que esta corrección lleva a una modificación en la asignación de operadores a cada observable, evitando los detalles la regla que se cumple en general es que si la polarización es generada por los vectores X_i $i = 1, \dots, n$ y la función f preserva la polarización (es decir, es cuantizable) entonces el operador asignado a f es

$$\delta_f = i\hbar X_f - \theta(X_f) + f - \frac{i}{2}\hbar \text{tr}(\mathbf{a}(f))$$

⁸Por motivos que se mencionarán en los capítulos siguientes, la esfera es una variedad simpléctica invariante ante la acción del grupo $SU(2)$.

donde $\mathbf{a}(f) = (a_{kl})$ se define como la matriz cuyas componentes son

$$[X_f, X_k] = a_k^l X_l$$

Esta corrección lleva para el caso del oscilador armónico a las energías correctas, pues

$$[X_H, \partial_z] = i\partial_z$$

La matriz \mathbf{a} tiene un solo elemento y vale i . Luego

$$\delta_H = \hbar \left(\bar{z} \partial_z + \frac{1}{2} \right)$$

cuyos autovalores son $\hbar(n + \frac{1}{2})$. Los operadores de creación y aniquilación no reciben corrección, pues para ellos $\mathbf{a} = 0$ en los dos casos.

2.4. Observaciones

La precuantización de un sistema (M, ω) está bien entendida pero solo es el primero paso, la forma final que adopta la cuantización geométrica de un sistema depende realmente del tipo de variedad simpléctica con la que se comienza. No obstante, el procedimiento ha mostrado ser aplicable a muchos sistemas físicos como por ejemplo: el sistema de dos cuerpos (Putra [47]), el péndulo esférico (Cushman & Śniatycki [14]), las ecuaciones de Maxwell (Putra [46]), el problema de Kepler (Mladenov & Vassil [42] o Simms [53]), partículas relativistas en campos magnéticos (Śniatycki [66, cap. 10]), aplicaciones a teorías de campos (Kalinowski & Piechocki [28], Alekseev & Shatashvili [2]), etc.

Lo realmente interesante es que la condición de integrabilidad de ω es la que en la mayoría de los casos impone una condición de cuantización realmente profunda, por ejemplo, el espacio de fases de una partícula en tres dimensiones es $T^*\mathbf{R}^3 \simeq \mathbf{R}^6$, en coordenadas canónicas $\{q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3\}$ la forma simpléctica es $\omega = dp_i \wedge dq^i$. La condición de integrabilidad es que la integral de ω en cualquier superficie cerrada de dimensión 2 sea un múltiplo entero de $2\pi\hbar$. En este caso la forma simpléctica es exacta con $\theta = p_i dq^i$, se puede usar el teorema de Stokes lo que lleva a

$$\oint p_i dq^i = n 2\pi\hbar \quad \text{con } n \text{ entero}$$

que es la condición de cuantización de Bohr-Sommerfeld. En la cuantización geométrica de una partícula relativista en un campo magnético la condición de integrabilidad lleva a la cuantización de la carga de Dirac, mientras que en problema de Kepler establece cuáles son la órbitas que pueden cuantizarse y al calcular la energía de esas órbitas se obtiene el espectro de energías del átomo de hidrógeno, como puede verse en cada una de las referencias.

2.5. Cuantizando las simetrías

Un concepto muy relevante en física es la noción de simetría. Hasta aquí realizamos todo el proceso de cuantización geométrica sin hacer referencia a ningún tipo de simetría del sistema clásico. Como ya se

mencionó en la discusión de la condición de irreducibilidad que se pide a la cuantización geométrica, la misma puede formularse en términos de la simetría del sistema. Supongamos que G es un grupo de simetría de un sistema clásico (M, ω) . Si la acción de G es transitiva en (M, ω) entonces el espacio de Hilbert \mathcal{H} es una representación irreducible del correspondiente grupo de transformaciones unitarias. Con esta versión de la propiedad (v) es fácil entender por qué motivos la cuantización geométrica sirve para encontrar representaciones irreducibles de grupos (de hecho así comenzó el método de órbitas de Kirillov que luego dio lugar al proceso de cuantización geométrica), pues lo único que hay que hacer es encontrar una variedad simpléctica donde el grupo G actúe transitivamente, y, siguiendo el procedimiento de cuantización geométrica, se obtienen representaciones irreducibles de G . Encontrar estas variedades en general no resulta difícil, pues Kirillov demostró que las órbitas coadjuntas de cualquier grupo de Lie G siempre cargan una estructura simpléctica y además, por definición, G actúa transitivamente en las propias órbitas. Este tema es el objeto de estudio del próximo capítulo.

Capítulo 3

Órbitas Coadjuntas de grupos de Lie

En este capítulo se estudiarán algunas representaciones básicas de grupos de Lie empezando por la representación adjunta y luego la coadjunta, en cada caso definiremos las órbitas correspondientes. El resultado importante del capítulo es que toda órbita coadjunta es una variedad simpléctica. En palabras más precisas (Kirillov [32], Kostant [36]), toda órbita coadjunta de un grupo G es una variedad simpléctica G -homogénea y cada variedad simpléctica G -homogénea es localmente isomorfa a una órbita en la representación coadjunta de G o una extensión central de la misma. Esto sitúa a las órbitas coadjuntas como las candidatas ideales para realizar el procedimiento de cuantización geométrica explorada en el capítulo anterior, y así obtener representaciones irreducibles de grupos de simetría.

3.1. Grupos de Lie, representación adjunta y coadjunta

Definición 3.1.1 (Grupo de Lie) *Un grupo de Lie es un grupo G con una estructura de grupo tal que la multiplicación $G \times G \rightarrow G$ y la inversión $G \rightarrow G$ son mapas diferenciables^a*

^aSi bien en esta tesis entendemos diferenciable como infinitamente diferenciable, para los grupos de Lie alcanza con que la multiplicación y la inversión sean mapas continuos, pues los grupos continuos son automáticamente grupos infinitamente diferenciables. Este resultado forma parte de los problemas de Hilbert y fue demostrado en 1952.

Definición 3.1.2 (Acción de un grupo) *Dado un grupo de Lie G y una variedad M una acción de G sobre M es un mapa que a cada elemento del grupo $g \in G$ asigna un difeomorfismo $\varphi_g \in \text{Diff}(M)$ en la variedad M tal que $\varphi_e = \text{id}$, $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ para todo $g, h \in G$ y tal que*

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, m) &\longmapsto \varphi_g(m) \end{aligned}$$

sea un mapa diferenciable.

*Una acción se dice **transitiva** si para cada $m, m' \in M$ existe un $g \in G$ tal que $\varphi_g(m) =$*

m' , es decir, partiendo decualquier punto m de la variedad, se puede llegar a cualquier otro punto m' mediante la acción de G

Una acción se dice **efectiva** si $\varphi_g = id_M$ implica que $g = e$, es decir, el mapa $g \mapsto \varphi_g$ es uno a uno.

Una acción se dice **libre** si $\varphi_g(m) = m$ implica $g = e$, es decir, no tiene puntos fijos.

Definición 3.1.3 (Representación de un grupo) Una representación de un grupo de Lie G es un espacio vectorial V junto con un mapa que a cada elemento del grupo $g \in G$ asigna un automorfismo $\varphi_g \in \text{End}(V)$ del espacio vectorial V tal que, $\varphi_e = \text{id}$, $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$ para todo $g, h \in G$ y tal que

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, x) &\longmapsto \varphi_g(x) \end{aligned}$$

Como los grupos de Lie son además variedades, existen acciones del grupo G sobre sí mismo. Se define la conjugación de un grupo de Lie por

$$\begin{aligned} \Phi : G \times G &\longrightarrow G \\ \Phi_g(h) &\longmapsto ghg^{-1} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

es decir, al elemento g del grupo le asigna el difeomorfismo Φ_g sobre G , el cual mueve el punto h del grupo al punto ghg^{-1} . Dado que G es un grupo de Lie, este producto tiene sentido. Por las propiedades del producto de grupo (elemento identidad único e inversa única), este mapa es un difeomorfismo y además cumple que mapea la identidad del grupo a la identidad y que mapea el producto de dos elementos a la composición, pues

$$\Phi_{gh}(x) = ghx(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} = g\Phi_h(x)g^{-1} = \Phi_g \circ \Phi_h(x)$$

Cada uno de estos difeomorfismos “rota” todos los puntos del grupo a otros. Naturalmente también mueve vectores tangente a cada punto de la variedad a vectores tangente a la variedad, pero esta vez en el punto rotado. Este mapa es el diferencial o *pushforward* del difeomorfismo Φ_g . Para calcular cuál es el vector trasladado se prosigue de la siguiente forma. Se construye una curva $\gamma_X : I \in \mathbf{R} \longrightarrow G$ parametrizada por t , tal que $\gamma_X(0) = h$ y que la curva tenga en ese punto a X como vector tangete, es decir

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= h \in G \\ \dot{\gamma}_X(0) &= X \in T_h G \end{aligned}$$

Luego construye una nueva curva en G que es el resultado de haber trasladado la γ_X por el difeomorfismo Φ_g , finalmente se deriva esa curva y se evalúa su vector tangente en $t = 0$, es decir en $\Phi_g(\dot{\gamma}_X(0)) = \Phi_g(X)$. El resultado es un nuevo vector en $T_{\Phi_g(h)}G$. Esta es una forma usual de calcular el diferencial del difeomorfismo

$$\begin{aligned} d\Phi_g : T_h G &\longrightarrow T_{\Phi_g(h)} G \\ d\Phi_g(X) &\longmapsto (\Phi_g \circ \gamma_X(t))' \Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

La familia de difeomorfismos Φ_g mueve todos los puntos de la variedad, sin embargo todos dejan invariante al punto $e \in G$, pues $\Phi_g(e) = geg^{-1} = e$ para todo $g \in G$. Cada uno de los diferenciales $d\Phi_g$, al tomar vectores del espacio tangente a la identidad¹ T_eG , devuelven vectores en el mismo espacio. En torno a este hecho se construyen varios mapas. Se define el mapa adjunto del grupo G en el espacio tangente a la identidad T_eG como

$$\begin{aligned} Ad : G \times T_eG &\longrightarrow T_eG \\ Ad_g(X) &\longmapsto d\Phi_g(X) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Calculemos explícitamente el mapa adjunto como se indica en 3.1.6. Dado $g \in G$ y $X \in T_eG$, primero debemos obtener la curva que en $t = 0$ valga e y su vector tangente sea X . En el caso de grupos de matrices es bastante fácil encontrar dicha curva, vale que $\gamma_X = \exp(tX)$, con \exp la exponencial usual para las matrices. Esto cumple que en $t = 0$ vale $e \in G$ y que su derivada en $t = 0$ vale X . Con esto podemos escribir

$$\begin{aligned} Ad_g(X) &= d\Phi_g(X) \\ &= (\Phi_g \circ \exp(tX))' \Big|_{t=0} \\ &= (g \exp(tX) g^{-1})' \Big|_{t=0} \\ &= (gX \exp(tX) g^{-1}) \Big|_{t=0} \\ &= gXg^{-1} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Esto define lo que se llama representación adjunta del grupo G en su espacio tangente a la identidad.

Podemos ahora definir la versión infinitesimal de la acción adjunta. Esto se consigue diferenciando respecto de la otra entrada, aprovechando la fórmula 3.1.5 se define

$$\begin{aligned} ad : T_eG \times T_eG &\longrightarrow T_eG \\ ad_X(Y) &\longmapsto \left(\frac{d}{dt} (Ad_{e^{tX}}) \Big|_{t=0} \right) (Y) \end{aligned}$$

Veamos qué forma adquiere la acción infinitesimal adjunta

$$\begin{aligned} ad_X(Y) &= (Ad_{\exp(tX)})' \Big|_{t=0} (Y) \\ &= (Ad_{\exp(tX)} Y)' \Big|_{t=0} \\ &= (\exp(tX) Y \exp(-tX))' \Big|_{t=0} \\ &= (X \exp(tX) Y \exp(-tX) - \exp(tX) Y X \exp(-tX)) \Big|_{t=0} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y] \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

La segunda igualdad, si bien no es sorprendente, puede justificarse correctamente como se menciona en Jean & Quintace [27, sec. 4.3].

La acción infinitesimal $ad : T_eG \times T_eG \longrightarrow T_eG$ resulta ser el conmutador entre las matrices, gracias a esto es fácil ver que es bilineal, antisimétrico, y cumple la identidad de Jacobi. Para un grupo de Lie cualquiera, el espacio tangente a la identidad T_eG junto con la acción adjunta ad forman un álgebra de Lie. Esto es lo que se conoce como el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo de Lie G .

¹Este espacio será luego el álgebra de Lie del grupo G .

Como propiedades a resaltar de estas dos acciones se puede mencionar que ambas son homomorfismos del álgebra de \mathfrak{g} , es decir, conservan el producto de Lie definido en \mathfrak{g} ,

$$\begin{aligned} Ad_g([X, Y]) &= [Ad_g X, Ad_g Y] && \text{para todo } g \in G \text{ y } X, Y \in \mathfrak{g} \\ ad_{[X, Y]} &= [ad_X, ad_Y] && \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned}$$

Esto se ve fácilmente para la acción adjunta del grupo utilizando la expresión obtenida en 3.1.7, mientras que para la acción adjunta del álgebra esa propiedad es equivalente a la identidad de Jacobi. Finalmente la relación que hay entre estos dos mapas, y que le da el nombre de acción infinitesimal es,

$$Ad_{e^X} = e^{ad_X}$$

El espacio tangente $T_e G$ (de ahora en más lo llamaremos \mathfrak{g}), como todo espacio vectorial, tiene su espacio vectorial dual \mathfrak{g}^* . Las acción adjunta y su versión infinitesimal pueden extenderse a \mathfrak{g}^* de la siguiente forma. Sea $b \in \mathfrak{g}^*$ y $v \in \mathfrak{g}$, entonces existe un apareo entre \mathfrak{g} y \mathfrak{g}^* :

$$b(v) = \langle b, v \rangle \in \mathbf{C}$$

Se define la acción coadjunta de tal manera que la aplicación de un elemento de \mathfrak{g}^* sobre un elemento de \mathfrak{g} sea Ad-invariante, esto quiere decir

$$Ad^* : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

tal que

$$\langle Ad_g^* b, Ad_g v \rangle = \langle b, v \rangle = b(v)$$

de donde se desprende que

$$Ad_g^*(b) = b \circ (Ad_g)^{-1} = b \circ Ad_{g^{-1}} \quad (3.1.9)$$

Siguiendo la misma idea que para la acción adjunta, se puede definir la acción infinitesimal coadjunta del álgebra \mathfrak{g} en su dual \mathfrak{g}^* . Sea $b \in \mathfrak{g}^*$

$$\begin{aligned} \langle ad_X^* b, Y \rangle &= \langle (Ad_{e^{tX}}^* b)'_{t=0}, Y \rangle \\ &= \frac{d}{dt} \langle Ad_{e^{tX}}^* b, Y \rangle_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle b, Ad_{e^{-tX}} Y \rangle_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle b, e^{-t ad_X} Y \rangle_{t=0} \\ &= \langle b, -ad_X Y \rangle \\ &= -b \circ ad_X(Y) \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Nuevamente, los pasos en donde se permuta la derivada se puede justificar correctamente, tal y como se mencionó para el caso de la acción adjunta. Las propiedades de la acción coadjunta del grupo y su acción infinitesimal son similares a las de la acción adjunta, en particular vale que

$$Ad_{e^{tX}}^* = e^{ad_X^*}$$

En resumen, dado un grupo de Lie G y su álgebra de Lie \mathfrak{g} siempre se pueden definir los siguientes mapas.

$$\begin{aligned}
\Phi & : G \times G \longrightarrow G & ; & \quad \Phi_g(h) = ghg^{-1} \\
Ad & : G \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} & ; & \quad Ad_g(X) = gXg^{-1} \\
ad & : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} & ; & \quad ad_x(Y) = [X, Y] \\
\langle \cdot, \cdot \rangle & : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{C} & ; & \quad \langle b, X \rangle = b(X) \\
Ad^* & : G \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* & ; & \quad Ad_g^*b = b \circ Ad_{g^{-1}} \\
ad^* & : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^* & ; & \quad ad_X^*b = -b \circ ad_X
\end{aligned}$$

Un resultado interesante es que dada una acción de un grupo G en una variedad, se puede definir, para cada elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} , un campo vectorial sobre la variedad como se muestra a continuación,

Definición 3.1.11 Sea $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ la acción de un grupo de Lie G sobre una variedad M . Se define el campo **vectorial fundamental** $X^\#$ en M generado por el elemento $X \in \mathfrak{g}$ como

$$X^\#(m) = \left. \frac{d}{dt} (\varphi(e^{tX}, m)) \right|_{t=0}$$

Una propiedad importante de los campos vectoriales fundamentales, que se usará en lo que sigue, es que para cada $X \in \mathfrak{g}$ la siguiente igualdad se mantiene (Rudolph & Schmidt [50, sec. 6.2])

$$(\varphi_g)_* X^\# = (Ad_g X)^\# \quad (3.1.12)$$

3.2. Estructura de las órbitas coadjuntas

Dado un grupo de Lie G con una acción sobre una variedad M , se define para cada punto $m \in M$, la llamada “órbita de m por G ” como todos los puntos en M que pueden ser alcanzados mediante la acción del grupo G partiendo del punto m . Es decir

$$\mathcal{O}_m = \{g \cdot m \mid g \in G\}$$

Observar que por definición, la acción del grupo G es transitiva en cada órbita, o de manera equivalente, las órbitas son variedades G -homogéneas. Se define, además, el estabilizador del punto $m \in M$ como el subgrupo Stab_m de elementos de G que dejan quieto al punto m , es decir

$$\text{Stab}_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\}$$

Resulta fácil entender que la órbita \mathcal{O}_m pueden verse como G/Stab . Es decir, cada elemento de la órbita puede identificarse con una clase de equivalencia $[g]$ de elementos de G , en donde dos elementos $g, x \in G$ se dicen equivalentes si y solo si $gh = x$ con $h \in \text{Stab}(m)$.

De forma similar se definen las órbitas coadjuntas del grupo G como las órbitas de la acción coadjunta de Ad^* sobre el espacio dual \mathfrak{g}^* , es decir

$$\mathcal{O}_b^* = \{Ad_g^*b \mid g \in G\}$$

En lo que sigue de la sección vamos a demostrar que todas las órbitas coadjuntas tiene una estructura simpléctica.

Lo primero es entender cómo son las funciones sobre las órbitas coadjuntas. Una función toma elementos de la órbita coadjunta y devuelve números (reales o complejos). Por ese motivo pueden identificarse las funciones en las órbitas con elementos del álgebra de Lie \mathfrak{g} , es decir, dado un elemento $X \in \mathfrak{g}$ se define la función lineal

$$\Phi_X : \mathcal{O}^* \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad b \longmapsto b(X)$$

Otras funciones (no lineales) se construyen como polinomios en Φ_X . Para definir una estructura simpléctica, lo siguiente es ver la forma que tienen los vectores tangentes a cada una de las órbitas coadjuntas. Para ello construyamos curvas $C_b(t)$ sobre la órbita coadjunta \mathcal{O}_b^* que en $t = 0$ pasen por el punto b , los vectores tangentes a \mathcal{O}_b^* en el punto b serán derivadas de estas curvas evaluadas en $t = 0$. Por la definición de órbita coadjunta, cualquiera de estas curvas puede escribirse como la acción coadjunta de una curva sobre G que en $t = 0$ pase por el elemento identidad, es decir

$$C_b(t) = Ad_{\gamma(t)}^* b$$

con $\gamma(t) \in G$ y $\gamma(0) = e$. Los vectores tangentes de la curva γ en $t = 0$ son elementos X del álgebra de Lie \mathfrak{g} asociada a G . Llamemos γ_X a la curva que tiene a X por vector tangente en $t = 0$. Los vectores tangentes a la órbita son,

$$\begin{aligned} c_b(t)' |_{t=0} &= \frac{d}{dt} (Ad_{\gamma_X}^* b) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (Ad_{e^{tX}}^* b) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (b \circ Ad_{e^{-tX}}) |_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (b \circ e^{ad_{-tX}}) |_{t=0} \\ &= -b \circ ad_X \\ &= ad_X^* b \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Observar que si las funciones en las órbitas se identifican con elementos $Y \in \mathfrak{g}$ del álgebra de Lie, tiene sentido que los los vectores tangente sean de la forma $ad_X^* b$: toman las funciones identificadas por Y y devuelvan el número $ad_X^* b(Y) = -b \circ [X, Y]$. Además, cumplen que son derivaciones lineales en las funciones, como ocurre con los vectores tangente. De esta forma, los vectores tangentes a la órbita coadjunta \mathcal{O}_b^* en el punto b pueden identificarse con vectores del álgebra de Lie \mathfrak{g} ,

$$T_b \mathcal{O}_b^* = \{ad_X^* b \mid X \in \mathfrak{g}\}$$

Sin embargo, esta identificación no es única, pues si existe un vector $X' \in \mathfrak{g}$ tal que su acción infinitesimal sobre b es nula entonces X y $X + X'$ identifican al mismo vector tangente a la órbita de b en el punto b :

$$ad_{X+X'}^* b = ad_X^* b + ad_{X'}^* b = ad_X^* b \quad \text{si} \quad ad_{X'}^* b = 0$$

En virtud de esto, se define la relación de equivalencia en \mathfrak{g}

$$X \sim Y \iff X - Y = X' \quad \text{con } ad_{X'}^* b = 0$$

De esta forma, para cada vector X en el álgebra, su clase $[X]$ define univocamente un vector tangente a la órbita coadjunta de b en el punto b . Dicho espacio tangente queda identificado por

$$T_b \mathcal{O}_b^* \simeq \mathfrak{g} / \text{stab}(b)$$

siendo $\text{stab}(b)$ el subespacio de los vectores en el álgebra cuya acción coadjunta² sobre b es nula:

$$\text{stab}(b) = \{X \in \mathfrak{g} \mid ad_X^* b = 0\}$$

Por definición, cada órbita es una variedad G -homogénea, es decir, la acción del grupo sobre la órbita es transitiva. En cada punto de la órbita coadjunta los vectores pueden identificarse con una clase de vectores del álgebra de Lie \mathfrak{g} como se muestra en 3.2.1, sin embargo estos son exactamente los campos vectoriales fundamentales de la definición 3.1.11, pues en este caso la acción es la coadjunta del grupo y vale,

$$X^\#(b) = \frac{d}{dt}(Ad_{e^{tX}}^* b)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e^{t ad_X^*} b)|_{t=0} = ad_X^* b$$

La propiedad 3.1.12 se escribe en este caso usando Ad^* como φ

$$(Ad_g)_* X^\# = (Ad_g X)^\# \quad (3.2.2)$$

Con esto bien definido podemos establecer cuál es la forma simpléctica en la órbitas coadjuntas. Se la define por como actúa en cada espacio tangente:

$$\omega_b(ad_X^* b, ad_Y^* b) = b \circ ([X, Y]) = b \circ (ad_X Y) = -ad_X^* b(Y)$$

Esto está definido sobre las clases de los elementos X e Y . Para mostrar que su definición es consistente, es decir, que no depende del representante de la clase, tomemos otro representante Z de la clase $[X]$ y veamos que

$$\omega_b(ad_Z^* b, ad_Y^* b) = -ad_Z^* b(Y) = -ad_X^* b(Y) \iff Z - X = X' \quad \text{y } ad_{X'}^* b = 0$$

Ocurre lo mismo para Y . Una vez aclarado esto, no se hará más mención sobre estas clases ni se arrastrará la notación de aquí en adelante.

Si bien en este trabajo se utilizan resultados y expresiones que solamente tienen sentido para grupos de matrices, el teorema que enunciaremos a continuación vale para cualquier grupo de Lie. Para la demostración completa de teorema referimos a Kirillov [31].

Teorema 3.2.3 (Kirillov) *En cada órbita coadjunta de un grupo de Lie G existe una 2-forma cerrada, no degenerada y G -invariante, es decir, cada órbita coadjunta de un grupo de Lie es una variedad simpléctica.*

²Además resulta ser el álgebra de Lie del subgrupo $\text{Stab}(m) \subseteq G$.

(Dem.) Sea la órbita coadjunta \mathcal{O}_b^* , los vectores tangentes en b pueden escribirse de la forma $X^\#(b) = ad_X^* b \in T_b \mathcal{O}_b^*$ con $X \in \mathfrak{g}$, identificados con $\mathfrak{g}/\text{stab}(b)$. La forma de Kirillov definida como

$$\omega(X^\#, Y^\#)(b) = \omega_b(ad_X^* b, ad_Y^* b) = b \circ ([X, Y]) = b \circ (ad_X Y) = -ad_X^* b(Y)$$

es trivialmente antisimétrica. Para ver que es no degenerada supongamos que vale $\omega_b(ad_X^* b, ad_Y^* b) = 0$ para todo $ad_Y^* b$, entonces para todo $Y \in \mathfrak{g}$ vale que,

$$\omega_b(ad_X^* b, ad_Y^* b) = -ad_X^* b(Y) = 0 \iff -ad_X^* b = 0$$

Como esto vale en cada uno de los espacio tangentes $T_b \mathcal{O}_b^*$ la forma es no degenerada. Para probar que es G -invariante hay que demostrar que $Ad_g^* \omega = \omega$ para todo $g \in G$,

$$\begin{aligned} (Ad_g^* \omega)_b(X^\#, Y^\#) &= \omega_{Ad_g^* b}((Ad_g^*)_* X^\#, (Ad_g^*)_* Y^\#) && \text{(por definición)} \\ &= \omega_{Ad_g^* b}((Ad_g X)^\#, (Ad_g Y)^\#) && \text{(por propiedad 3.2.2)} \\ &= \langle Ad_g^* b, [Ad_g X, Ad_g Y] \rangle && \text{(definición de } \omega) \\ &= \langle Ad_g^* b, Ad_g [X, Y] \rangle && \text{(propiedad de } Ad) \\ &= \langle b, [X, Y] \rangle && \text{(definición de } Ad_g^*) \\ &= \omega_b(X^\#, Y^\#) \end{aligned}$$

Queda demostrado que es G -invariante. Para mostrar que es cerrada se utiliza este resultado y se calcula explícitamente la derivada exterior de ω .

$$d\omega(ad_X^*, ad_Y^*, ad_Z^*) = \circlearrowleft ad_X^*(\omega(ad_Y^*, ad_Z^*)) - \circlearrowleft \omega([ad_X^*, ad_Y^*], ad_Z^*) \quad (3.2.4)$$

El primer término de esta expresión es con la derivada de Lie de la función $\omega(ad_Y^*, ad_Z^*)$ respecto del campo vectorial ad_X^* y vale

$$ad_X^*(\omega(ad_Y^*, ad_Z^*)) = (L_{ad_X^*} \omega)(ad_Y^*, ad_Z^*) + \omega([ad_X^*, ad_Y^*], ad_Z^*) + \omega(ad_Y^*, [ad_X^*, ad_Z^*]) \quad (3.2.5)$$

El primer término es nulo dado que ω es G -invariante, pues la definición de la derivada de Lie es

$$L_{ad_X^*} \omega = \frac{d}{dt}(\phi_t^* \omega)$$

donde ϕ_t es el flujo de ad_X^* que en este caso vale Ad_g^* con $g = e^{tX}$. Como ω es G -invariante es constante a lo largo de los difeomorfismos generados por el flujo y la expresión anterior es nula. La ecuación 3.2.5 queda

$$ad_X^*(\omega(ad_Y^*, ad_Z^*)) = \omega([ad_X^*, ad_Y^*], ad_Z^*) + \omega(ad_Y^*, [ad_X^*, ad_Z^*])$$

el primer término se anula con el último de la ecuación 3.2.4 y se obtiene

$$\begin{aligned}
 d\omega(ad_X^*, ad_Y^*, ad_Z^*) &= - \circlearrowleft \omega(ad_Y^*, [ad_X^*, ad_Z^*]) \\
 &= \circlearrowleft \omega(ad_Y^*, ad_{[Z, X]}^*) && \text{(propiedad de } ad^*) \\
 &= b \circ (\circlearrowleft [Y, [Z, X]]) && \text{(definición de } \omega) \\
 &= 0 && \text{(por identidad de Jacobi)}
 \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

3.3. Equivalencia entre órbitas adjuntas y coadjuntas

En muchos casos obtener las órbitas adjuntas de un grupo de Lie es bastante más simple que obtener las órbitas coadjuntas. En esta sección mostraremos cuál es la relación entre ellas y mencionaremos en qué casos son difeomorfas. Esto puede verse de la siguiente manera.

Dado un grupo de Lie G , para cada $X \in \mathfrak{g}$ se define la órbita adjunta \mathcal{O}_X de X como el conjunto de puntos en \mathfrak{g} que pueden ser alcanzados desde X mediante la acción adjunta, es decir

$$\mathcal{O}_X = \{Ad_g X \mid g \in G\}$$

Supongamos ahora que existe sobre \mathfrak{g} una forma $F : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}$ bilineal, no degenerada y Ad-invariante, entonces las representaciones adjuntas y coadjuntas son isomorfas, y además las órbitas adjuntas y coadjuntas coinciden.

Si F es no degenerada y bilineal, entonces el mapa $X \mapsto F(X, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$ es un isomorfismo entre el álgebra y su dual. Veamos que sucede con las órbitas de ambos. Llamemos $b = F(X, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$ y calculemos su órbita coadjunta, es decir

$$\begin{aligned}
 Ad_g^* b &= Ad_g^* F(X, \cdot) \\
 &= F(X, \cdot) \circ Ad_{g^{-1}} && \text{(por definición de } Ad^*) \\
 &= F(X, Ad_{g^{-1}} \cdot) \\
 &= F(Ad_g X, Ad_g Ad_{g^{-1}} \cdot) && \text{(si } F \text{ es } Ad\text{-invariante)} \\
 &= F(Ad_g X, \cdot)
 \end{aligned}$$

dado que el mapa F mapea uno a uno los elementos de \mathfrak{g} con los de \mathfrak{g}^* se obtiene que

$$\mathcal{O}_{F(X, \cdot)}^* = F(\mathcal{O}_X, \cdot)$$

es decir, elementos de la órbita coadjunta de $F(X, \cdot) \in \mathfrak{g}^*$ se identifican, uno a uno, con elementos de la órbita adjunta de $X \in \mathfrak{g}$. Si el grupo G es semisimple, entonces la forma de Killing da una forma bilineal, no degenerada y Ad-invariante y por lo tanto las órbitas adjuntas y coadjuntas son difeomorfas. Si además el grupo es compacto, la forma de Killing es definida negativa, y suele multiplicarse por -1 para construir un producto interno Ad-invariante.

Capítulo 4

Cuantización Geométrica de $SU(2)$

En esta sección mostraremos cómo es que se construye la cuantización geométrica del grupo de Lie $SU(2)$. Como ya se mencionó este proceso lleva a representaciones irreducibles del grupo si se parte de alguna variedad simpléctica $SU(2)$ -homogénea. Se vio en el capítulo anterior que para los grupos de Lie, sus órbitas coadjuntas siempre cargan una estructura simpléctica y son naturalmente homogéneas frente a la acción del grupo. Por esto, las órbitas coadjuntas de $SU(2)$ serán nuestro espacio de fase de partida para realizar la cuantización geométrica.

Comenzaremos por algunas nociones del grupo $SU(2)$ y su álgebra $\mathfrak{su}(2)$ para luego calcular sus órbitas coadjuntas. Mostraremos que, al igual que las órbitas adjuntas del grupo, éstas son esferas de dimensión 2, casualmente la única esfera que admite una estructura simpléctica, como se mencionó en §1.2. Veremos que la forma de Kirillov sobre las órbitas de $SU(2)$ es, en esencia, la forma simpléctica que se dio en el ejemplo 1.2.5.

Luego se construirá la cuantización geométrica sobre la esfera y se calcularán explícitamente los operadores para un grupo de funciones completas sobre la esfera, que serán en el fondo las 3 componentes de momento angular. Se arribará a las distintas representaciones irreducibles del grupo de rotaciones, caracterizadas cada una por su momento angular total. En el camino, a través de este ejemplo, veremos en práctica aquellos ingredientes necesarios para la cuantización geométrica de grupos más complicados, como $SL(2, \mathbf{R})$ que no es compacto, ni lo son sus órbitas.

4.1. El grupo y su álgebra

El grupo $SU(2)$ se define como el grupo de matrices de $\mathbf{C}^{2 \times 2}$ unitarias y con determinante igual a 1, siendo el producto de grupo el producto usual de matrices, es decir

$$SU(2) = \left\{ x \in \mathbf{C}^{2 \times 2} \mid x^\dagger = x^{-1} \text{ y } \det(x) = 1 \right\}. \quad (4.1.1)$$

Veamos qué estructura tiene el grupo como variedad diferenciable. Una matriz $x \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$ puede escribirse como

$$x = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{C}$$

la condición de unitariedad se escribe, para la matriz x

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

utilizando que x tiene determinante 1, se desprende que $\alpha = \delta^*$ y $\beta = -\gamma^*$. Por este motivo, el grupo $SU(2)$ puede parametrizarse por

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{C} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \quad (4.1.2)$$

es decir, el grupo $SU(2)$ como variedad diferenciable es la esfera S^3 .

El espacio de vectores tangentes a $SU(2)$ en la identidad es el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo, en este caso se la denomina $\mathfrak{su}(2)$. Para calcular el álgebra alcanza con construir una curva genérica $x(t)$ en la variedad que cumpla que $x(0) = 1$ y luego calcular su vector tangente en $t = 0$. Sea la curva,

$$x(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ -\beta(t)^* & \alpha(t)^* \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha(0) = \alpha^*(0) = 1 \text{ y } \beta(0) = \beta^*(0) = 0$$

la cual al evaluarla en $t = 0$ devuelve 1. Su derivada es evaluada en $t = 0$ es de la forma

$$\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(0) & \dot{\beta}(0) \\ -\dot{\beta}^*(0) & \dot{\alpha}^*(0) \end{pmatrix}$$

Para que la curva $x(t)$ pertenezca al grupo $SU(2)$ falta pedirle que su determinante sea 1. Escribiendo esa ecuación, derivándola respecto de t y evaluándola en $t = 0$ se encuentran las ecuaciones que tienen que cumplir las componentes de la matriz $\dot{x}(0)$:

$$1 = \alpha(t)\alpha^*(t) + \beta(t)\beta^*(t)$$

entonces

$$0 = \dot{\alpha}(0)\alpha^*(0) + \alpha(0)\dot{\alpha}^*(0) + \dot{\beta}(0)\beta^*(0) + \beta(0)\dot{\beta}^*(0)$$

Utilizando las condiciones iniciales se obtiene una única ecuación: $0 = \dot{\alpha}(0) + \dot{\alpha}^*(0)$, es decir que $\dot{\alpha}(0)$ sea imaginario puro. Escribiendo $\dot{\alpha}(0) = ia$ y $\dot{\beta}(0) = b + ic$ se obtiene que los vectores tangente son de la forma

$$\dot{x}(0) = \begin{pmatrix} ia & b + ic \\ -b + ic & -ia \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R}$$

todas estas matrices cumplen que su traza es nula y que son antihermíticas¹. Es fácil convencerse de que forman un espacio vectorial real de dimensión 3, como debía suceder para el espacio tangente a S^3 . Esto se convierte en un álgebra de Lie si se agrega el conmutador entre matrices, pues el mapa $X, Y \mapsto [X, Y]$ es cerrado en este espacio vectorial,

$$\text{Tr}([X, Y]) = \text{Tr}(XY) - \text{Tr}(YX) = \text{Tr}(XY) - \text{Tr}(XY) = 0$$

¹Antihermitica quiere decir que su traspuesta conjugada es menos ella misma: $x^\dagger = -x$.

y

$$[X, Y]^\dagger = (XY - YX)^\dagger = (XY)^\dagger - (YX)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger - X^\dagger Y^\dagger = YX - XY = -[X, Y]$$

Con todo esto se obtiene que el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$ del grupo de Lie $SU(2)$ es

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ X \in \mathbf{C}^{2 \times 2} \mid \text{Tr}(X) = 0 \text{ y } X^\dagger = -X \right\} \quad (4.1.3)$$

equivalente a

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\} \quad (4.1.4)$$

Otra forma para obtener esto, que usa el hecho de que la exponencial de $\mathfrak{su}(2)$ es $SU(2)$, es partir de la curva $c(t) = e^{tX}$ con $X \in \mathbf{C}^{2 \times 2}$. En $t = 0$ dicha curva pasa por el elemento identidad. Pidamos que la curva sea efectivamente una curva en $SU(2)$, esto quiere decir $c(t)^\dagger = c(t)^{-1}$ y $\det(c(t)) = 1$,

$$\begin{aligned} c(t)^\dagger = (e^{tX})^\dagger = e^{tX^\dagger} = c(t)^{-1} &\Leftrightarrow X^\dagger = -X \\ \det(c(t)) = \det(e^{tX}) = e^{t\text{Tr}(X)} = 1 &\Leftrightarrow \text{Tr}(X) = 0 \end{aligned}$$

Dado que $\mathfrak{su}(2)$ es un espacio vectorial de dimensión 3 es isomorfo a \mathbf{R}^3 . Ese isomorfismo se consigue mediante la siguiente identificación

$$\begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} \simeq (a, b, c)$$

es decir, tomando coordenadas en la siguiente base² de $\mathfrak{su}(2)$

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.1.5)$$

Esta base tiene como particularidad que

$$u_i u_j = \epsilon_{ijk} u_k - \delta_{ij} \text{Id} \quad (4.1.6)$$

Notaremos como $\vec{x} \in \mathbf{R}^3$ a la realización en \mathbf{R}^3 del elemento X del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Lo siguiente para ver es que el conmutador entre dos elementos de $\mathfrak{su}(2)$ se identifica con el producto vectorial de \mathbf{R}^3 , pues

$$[a^i u_i, b^j u_j] = a^i b^j (u_i u_j - u_j u_i) = a^i b^j (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik}) u_k = 2a^i b^j \epsilon_{ijk} u_k$$

al tomar componentes en la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ devuelve las componentes del producto vectorial entre (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) . Por ese motivo se obtiene,

$$\overrightarrow{[X, Y]} = 2\vec{X} \times \vec{Y}$$

Es fácil verificar que para esta base se cumplen la siguientes relaciones de conmutación

$$[u_i, u_j] = 2\epsilon_{ijk} u_k \quad (4.1.7)$$

²Relacionadas con las matrices la Pauli por $u_j = i\sigma_j$.

Como observación final, dada una matriz en $X \in \mathfrak{su}(2)$ como se muestra en 4.1.4, vale

$$\det(X) = \det \begin{pmatrix} ia & b+ic \\ -b+ic & -ia \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 = \|\vec{X}\|^2 \quad (4.1.8)$$

es decir, su determinante se relaciona con el modulo del vector en \mathbf{R}^3 que lo realiza.

4.2. Órbitas coadjuntas del grupo

Calculemos las órbitas adjuntas del grupo $SU(2)$, esto es las órbitas de la acción adjunta del grupo en su álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Para cada $X \in \mathfrak{su}(2)$ su órbita adjunta es el conjunto de elementos de $\mathfrak{su}(2)$ que se obtienen de aplicar $Ad_g X$ para todo elemento $g \in SU(2)$. Una forma simple de obtener la órbita es ver cómo es el elemento $Ad_g X$ realizado como vector en \mathbf{R}^3 . Se cumple que

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{Ad_g X}\|^2 &= \|\overrightarrow{gXg^{-1}}\|^2 && \text{(acción adjunta, 3.1.7)} \\ &= \det(gXg^{-1}) && \text{(propiedad 4.1.8)} \\ &= \det(X) \\ &= \|\vec{X}\|^2 \end{aligned}$$

Los elementos en la órbita adjunta del elemento X tienen el mismo determinante, es decir cada elemento de \mathcal{O}_X cumple que $a^2 + b^2 + c^2 = cte = \det(X)$. Se puede demostrar que la vuelta también vale, es decir, si dos elementos X e Y de tienen el mismo determinante, entonces pertenecen a la misma órbita adjunta. Por este motivo las órbitas adjuntas de $SU(2)$ son esferas de distintos radios. Esto se hace más evidente si se observa al álgebra $\mathfrak{su}(2)$ como \mathbf{R}^3 , en este caso la acción adjunta del grupo sobre \vec{X} mantiene su módulo constante, es decir actúa rotándolo y genera esferas en \mathbf{R}^3 .

Mostraremos a continuación que las órbitas coadjuntas de $SU(2)$ coinciden con las adjuntas. Para eso, como se mencionó al final de capítulo anterior, debe existir una forma bilineal Ad-invariante y no degenerada en $\mathfrak{su}(2)$. En este caso la que juega ese papel es la traza³,

$$F : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathbf{C} \quad ; \quad F(X, Y) = \text{Tr}(XY)$$

la cual es claramente bilineal. Para ver que es no degenerada supongamos que dado $X \in \mathfrak{su}(2)$, vale que $\text{Tr}(XY) = 0$ para todo Y en $\mathfrak{su}(2)$, entonces en particular $\text{Tr}(XX) = 0$ pero es fácil ver que $\text{Tr}(XX) = -2(a^2 + b^2 + c^2)$ que es nulo si y solo si $X = 0$. Por las propiedades de la traza, resulta que es Ad-invariante,

$$F(Ad_g X, Ad_g Y) = \text{Tr}(Ad_g X Ad_g Y) = \text{Tr}(gXg^{-1}gYg^{-1}) = \text{Tr}(XY) = F(X, Y)$$

De esta forma las órbitas adjuntas y las coadjuntas coinciden, es decir, las orbitas coadjuntas de $SU(2)$ también son esferas S^2 .

³Como $\mathfrak{su}(2)$ es semisimple, esta forma es simplemente un múltiplo de la forma de Killing

4.3. Forma de Kirillov para $SU(2)$

Calculemos ahora cuál es la forma simpléctica en las órbitas coadjuntas de $SU(2)$. Para ello primero, por comodidad, normalicemos el isomorfismo entre $\mathfrak{su}(2)$ y $\mathfrak{su}^*(2)$,

$$F : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{su}^*(2) \quad ; \quad X \longmapsto X^* = -\frac{1}{2\det(X)}\mathrm{Tr}(X \cdot)$$

De esta forma se cumple que $\langle X^*, X \rangle = 1$, en particular si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathfrak{su}(2)$, entonces se puede verificar muy fácilmente que

$$\langle u_i^*, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Como vimos en la sección anterior, los vectores tangentes a un elemento b de la órbita coadjunta son de la forma $ad_X^* b$ para algún elemento X en el álgebra. Sea Z^* un elemento de $\mathfrak{su}^*(2)$ y X un elemento de $\mathfrak{su}(2)$, entonces vale que

$$\begin{aligned} T_{Z^*} \mathcal{O}_{Z^*}^* &= \{ad_X^* Z^* \mid X \in \mathfrak{su}(2)\} \\ &= \{-Z^* \circ ad_X \mid X \in \mathfrak{su}(2)\} && \text{(por propiedad 3.1.10)} \\ &= \{Z^* \circ ([X, \cdot]) \mid X \in \mathfrak{su}(2)\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2\det(Z)} \mathrm{Tr}(Z [X, \cdot]) \mid X \in \mathfrak{su}(2) \right\} && \text{(pues } Z^* = F(Z)) \end{aligned}$$

Luego la forma simpléctica toma dos vectores tangentes a la órbita coadjunta asociados a $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ y devuelve

$$\omega_{Z^*}(ad_X^* Z^*, ad_Y^* Z^*) = Z^* \circ ([X, Y]) = -\frac{1}{2\det(Z)} \mathrm{Tr}(Z [X, Y])$$

Esto adquiere un carácter mucho más familiar si se realiza $\mathfrak{su}(2)$ como \mathbf{R}^3 . En ese caso se puede ver que, así como el conmutador de dos elementos de $\mathfrak{su}(2)$ está representado por el producto vectorial, la traza del producto de dos elementos está representado por el producto interno,

$$\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(x^i u_i x^j u_j) = x^i y^j \epsilon_{ijk} \mathrm{Tr}(u_k) - x^i y^j \delta_{ij} \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}) = -2x^i y_i = -2\vec{X} \cdot \vec{Y}$$

De esta forma utilizando que el determinante de X queda representado por el módulo, el mapa actúa como

$$F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow (\mathbf{R}^3)^* \quad ; \quad \vec{X} \longmapsto \vec{X}^* = \frac{1}{\|\vec{X}\|^2} \langle \vec{X}, \cdot \rangle$$

Los vectores tangentes quedan de la forma,

$$T_{Z^*} \mathcal{O}_{Z^*}^* = \left\{ \frac{1}{\|\vec{Z}\|^2} \vec{Z} \cdot (\vec{X} \times \cdot) \mid \vec{X} \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

Finalmente, para dos vectores tangentes a la órbita, la forma simpléctica se escribe como

$$\omega_{Z^*}(ad_X^* Z^*, ad_Y^* Z^*) = \frac{1}{\|\vec{Z}\|^2} \vec{Z} \cdot (\vec{X} \times \vec{Y})$$

que coincide, salvo un factor, con la forma simpléctica que se dio en el ejemplo 1.2.5.

4.4. La esfera como variedad simpléctica

En la esfera, la estructura simpléctica es la forma de volumen y puede escribirse en coordenadas polares como

$$\omega = \alpha \sin(\theta) d\theta \wedge d\varphi \quad \text{con } \alpha > 0$$

La esfera $S^2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ debe ser cubierta con al menos dos cartas para obtener un atlas. El abierto U^+ definido como la esfera sin el polo norte $x_3 = 1$ es difeomorfo, vía proyección estereográfica, al plano \mathbf{R}^2 . Explícitamente las coordenadas en el plano son $(x, y) = (\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3})$. Naturalmente se pueden definir coordenadas complejas⁴ como $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. El abierto U^- se define de forma similar, pero esta vez sacando el polo sur de la esfera $x_3 = -1$, las coordenadas son $(u, v) = (\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3})$. Nuevamente se definen coordenadas complejas $w = u - iv$, $\bar{w} = u + iv$. En cada abierto ocurre que,

$$\text{En } U^+ \quad \begin{cases} x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \\ x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})} \\ x_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \end{cases} \quad \text{En } U^- \quad \begin{cases} x_1 = \frac{w + \bar{w}}{1 + w\bar{w}} \\ x_2 = \frac{-\bar{w} + w}{i(1 + w\bar{w})} \\ x_3 = \frac{1 - w\bar{w}}{1 + w\bar{w}} \end{cases}$$

Observar que en la intersección $U^+ \cap U^-$ de los abiertos se cumple que

$$z \cdot w = (x + iy)(u - iv) = \frac{(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)}{(1 - x_3)(1 + x_3)} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - x_3^2} = 1$$

Esta propiedad sirve para cambiar entre las dos cartas, y entre otras cosas nos ayudará a demostrar que la forma simpléctica adquiere la misma forma local en ambas. Tomemos el abierto U^+ , haciendo el cambio de variables correspondiente, la forma simpléctica se escribe como

$$\omega = i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} \quad (4.4.1)$$

Notar que es una forma real, pues

$$2i\text{Im}(\omega) = \omega - \bar{\omega} = \frac{1}{(1 + |z|^2)^2} (idz \wedge d\bar{z} - \overline{idz \wedge d\bar{z}}) = \frac{-2i}{(1 + |z|^2)^2} (dz \wedge d\bar{z} + d\bar{z} \wedge dz) = 0$$

Para ver cómo se escribe la forma simpléctica en el abierto U^- alcanza con utilizar que en la intersección $U^+ \cap U^-$ vale que $z = \frac{1}{w}$, entonces

$$\omega|_{U^+ \cap U^-} = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} = \frac{i}{(1 + |\frac{1}{w}|^2)^2} d\left(\frac{1}{w}\right) \wedge d\left(\frac{1}{\bar{w}}\right) = \frac{i}{|w|^{-4}(1 + |w|^2)^2} w^{-2} \bar{w}^{-2} dw \wedge d\bar{w} = \frac{idw \wedge d\bar{w}}{(1 + |w|^2)^2}$$

⁴Para introducir estas coordenadas se requiere que la esfera posea una estructura compleja local. Es sabido que la esfera S^2 tiene una única estructura compleja, ver por ejemplo Hsiung [25]

lo que muestra que la expresión local de ω es la misma en las dos cartas. Gracias a que en los dos abiertos la forma simpléctica adopta la misma expresión, no será necesario realizar todo el procedimiento en dos sistemas de coordenadas distintos (uno para cada abierto). Alcanza con realizarlo en el abierto U^+ . Notar también que U^+ cubre toda la esfera salvo un punto, por lo que las expresiones que involucren integrales en toda la esfera, pueden realizarse como integrales en U^+

4.5. Condición de integrabilidad

Para que exista el fibrado de línea de precuantización se requiere que la integral de la forma simpléctica en cualquier superficie orientable, cerrada y de dimensión 2 en la órbita coadjunta sea un múltiplo entero de $2\pi\hbar$ (ver 2.1.10). En este caso la única superficie que cumple eso es la propia esfera. Se tiene que cumplir que

$$\int_{S^2} \omega = 2\pi N\hbar \quad \text{para } N \text{ entero}$$

Esta expresión puede integrarse directamente y se obtiene

$$\int_{\mathcal{C}} i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+|z|^2)^2} = \int_{\mathbf{R}^2} i \frac{d(x+iy) \wedge d(x-iy)}{(1+(x^2+y^2))^2} = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{2dx \wedge dy}{(1+(x^2+y^2))^2} = 2\pi \int \frac{2r}{(1+r^2)^2} dr = 2\pi$$

Lo cual indica que la esfera S^2 es precuantizable si y solo si la forma simpléctica es

$$\omega = N\hbar i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} \quad \text{con } N \text{ entero} \quad (4.5.1)$$

Distintas elecciones de N dan lugar a cuantizaciones no equivalentes. En el lenguaje de grupos, van a dar lugar a distintas representaciones no equivalentes de grupo $SU(2)$. De aquí en adelante mantendremos el N en las expresiones y veremos que parametriza el momento angular total de la representación.

4.6. Campos hamiltonianos y corchetes de Poisson

Para obtener los campos vectoriales hamiltonianos sobre S^2 se procede como en el ejemplo 1.3.4. Los campos sobre la esfera pueden escribirse localmente de la forma $X = \alpha\partial_z + \beta\partial_{\bar{z}}$. Las funciones son de la forma $f(z, \bar{z})$. Se obtiene,

$$-df = \omega(X_f, \cdot) = N\hbar i \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2} (\alpha\partial_z + \beta\partial_{\bar{z}}) = \frac{iN\hbar}{(1+z\bar{z})^2} (\alpha d\bar{z} - \beta dz) = -f_z dz - f_{\bar{z}} d\bar{z}$$

El campo vectorial hamiltoniano de la función f se expresa como

$$X_f = \frac{(1+z\bar{z})^2}{iN\hbar} (f_z \partial_{\bar{z}} - f_{\bar{z}} \partial_z) \quad (4.6.1)$$

El corchete de Poisson entre dos funciones f y g queda de la forma

$$\{f, g\}_\omega = -\omega(X_f, X_g) = df(X_g) = \frac{(1+z\bar{z})^2}{iN\hbar} (f_{\bar{z}} g_z - f_z g_{\bar{z}}) \quad (4.6.2)$$

4.7. Polarización y espacio de Hilbert

Para realizar la cuantización geométrica tomemos como polarización la generada por el campo vectorial $\partial_{\bar{z}}$, las secciones polarizadas ϕ son las que cumplen $\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\phi = 0$. Para realizar esta cuenta debemos elegir un potencial simpléctico para utilizar, utilicemos en este caso

$$\theta = \frac{i\hbar N}{1+z\bar{z}} \frac{(zd\bar{z} - \bar{z}dz)}{2} \quad (4.7.1)$$

Recordemos que si bien la elección del potencial simpléctico es arbitraria, el resultado es independiente de ella gracias a las transformaciones de gauge de las secciones y la definición del producto interno.

Las secciones polarizadas se representan localmente por funciones que cumplen,

$$\nabla_{\partial_{\bar{z}}}\phi = \left(\partial_{\bar{z}} - \frac{i}{\hbar} \theta(\partial_{\bar{z}}) \right) \phi = \left(\partial_{\bar{z}} + \frac{N}{2} \frac{z}{1+z\bar{z}} \right) \phi = 0$$

Esta es una ecuación diferencial para ϕ y se puede resolver por separación de variables proponiendo $\phi = f(z)e^{\alpha(z,\bar{z})}$. Se obtiene para α la siguiente ecuación diferencial,

$$\partial_{\bar{z}}\alpha = -\frac{N}{2} \frac{z}{1+z\bar{z}}$$

cuya solución es $\alpha = \ln((1+z\bar{z})^{-N/2})$. Con esto, las secciones polarizadas se identifican con funciones f holomorfas,

$$\phi = \frac{1}{(1+z\bar{z})^{N/2}} f(z) \quad (4.7.2)$$

Es necesario conocer ahora cuántas secciones globalmente holomorfas hay en la esfera. La respuesta depende de las funciones de transición entre los dos abiertos. La idea intuitiva es la siguiente: se quiere construir una sección que sea globalmente holomorfa. Es fácil construir secciones que sean holomorfas en los abiertos U^+ y U^- individualmente, por ejemplo una base de funciones holomorfas en U^+ está dada por los monomios z^n , mientras que una base de funciones holomorfas en U^- está dada por los monomios w^m . Lo que se requiere para que la sección sea globalmente holomorfa es que en la intersección $U^+ \cap U^-$ las secciones holomorfas de U^+ y U^- puedan “pegarse” correctamente utilizando las funciones de transición. Es decir, se tiene que cumplir que si $g(w)$ es una función holomorfa en U^- y $f(z)$ es una función holomorfa en U^+ , entonces en la intersección de los abiertos se cumple $g(w) = c(w)f(z(w))$ con c la función de transición correspondiente.

En el apéndice A se muestra que para el fibrado de línea de la prequantización, las funciones de transición están determinadas por los potenciales simplécticos. Es razonable pensar entonces que si la forma de “pegar” secciones de U^+ con secciones de U^- está dada y es fija, entonces no todas las secciones holomorfas de U^+ y U^- podrán pegarse para construir una sección globalmente holomorfa.

Las función de transición c entre los abiertos U^+ y U^- está determinada por como se escribe el potencial simpléctico en cada uno de los abiertos

$$d \ln c = \frac{1}{i\hbar} (\theta^+ - \theta^-)$$

Para realizar esta cuenta se puede utilizar cualquier potencial simpléctico, por comodidad utilizamos $\theta = -\frac{ihN}{1+z\bar{z}}\bar{z}dz$.

$$\begin{aligned} d \ln c &= N \left(\frac{\bar{w}dw}{1+|w|^2} - \frac{\bar{z}dz}{1+|z|^2} \right) = N \left(\frac{\bar{w}dw}{1+|w|^2} - \frac{1}{\bar{w} \left(1 + \frac{1}{|w|^2}\right)} d\left(\frac{1}{w}\right) \right) \quad (\text{pues } z = 1/w) \\ &= N \left(\frac{\bar{w}dw}{1+|w|^2} + \frac{1}{w^2} \frac{1}{\bar{w}} \frac{dw}{(1+|w|^2)\frac{1}{|w|^2}} \right) \\ &= N \frac{1}{1+|w|^2} \left(\bar{w} + \frac{1}{w} \right) dw \\ &= N \frac{dw}{w} \\ &= d \ln(w)^N \end{aligned}$$

Las funciones de transición son $c = w^N = z^{-N}$ y dependen entonces de N . Para entender cómo esta función de transición limita las posibles funciones holomorfas que podemos utilizar para construir las secciones globalmente holomorfas veamos por ejemplo el caso $N = 1$. En este caso las funciones holomorfas en U^+ están generadas por $1, z, z^2, \dots$ mientras que en U^- están generadas por $1, w, w^2, \dots$. Tomemos la función en U^+ $f(z) = z$ la cual es claramente holomorfa en U^+ . La función que se “pega” con ésta en la intersección $U^+ \cap U^-$ es

$$g(w) = c(w)f(z(w)) = w \frac{1}{w} = 1$$

que puede ser extendida a todo U^- como función holomorfa, entonces la función $f(z) = z$ puede representar localmente a una sección globalmente holomorfa. Sin embargo, manteniendo $N = 1$, es algo que no ocurre con la función $f(z) = z^2$, pues en el abierto U^- se escribe como

$$g(w) = w \left(\frac{1}{w} \right)^2 = \frac{1}{w}$$

la cual no es holomorfa en U^- . Para el caso $N = 1$ entonces tenemos que las secciones globalmente holomorfas están representadas en U^+ por funciones generadas por $\{1, z\}$. El espacio de Hilbert para este caso tiene dimensión dos. Es fácil convencerse de que para el caso en que $N \geq 0$, la dimensión del espacio de Hilbert va a ser $N + 1$. Sin embargo con $N < 0$ la dimensión del espacio de Hilbert es 0. Por ejemplo, tomemos $N = -1$. La función $f(z) = 1$ holomorfa en U^+ se escribe en U^- como

$$g = c(w)f(z(w)) = \frac{1}{w}$$

la cual no es holomorfa. Con la función $f(z) = z^n$ ocurre que $g(w) = \frac{1}{w^{n+1}}$. Entonces con $N = -1$ no existe ninguna sección globalmente holomorfa en la esfera. Lo mismo ocurre para cualquier otro N negativo. La misma discusión puede realizarse con las funciones antiholomorfas en el caso que se elija la polarización generada por $\partial_{\bar{z}}$. En conclusión, para el potencial simpléctico 4.7.1 y dado $N \geq 0$, el espacio de secciones globalmente holomorfas es generado se representa localmente como se muestra en 4.7.2, con $f(z)$ monomios en z de grado menor a igual a $N + 1$.

Volviendo al caso que estábamos estudiando, para definir el producto interno hay que calcular el factor de peso ρ como se muestra en 2.2.14. El potencial simpléctico que se eligió en 4.7.1 tiene parte imaginaria nula, como puede comprobarse de manera directa viendo que $\theta - \bar{\theta} = 0$. Con esta elección de potencial simpléctico resulta que $\rho = 1$. De esta forma utilizando la expresión 4.7.2, el producto interno puede escribirse como

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \rho \bar{\phi} \psi \omega = iN\hbar \int_{\mathcal{C}} \overline{f(z)}g(z) \frac{1}{(1 + |z|\bar{z})^{N+2}} dz \wedge d\bar{z} \quad (4.7.3)$$

donde f y g son polinomios generados por $\{1, z^1, \dots, z^N\}$ para cada N y son las representantes locales de las secciones globalmente holomorfas. Observar que para cada N las funciones $\{1, z^1, \dots, z^N\}$ son de cuadrado integrable.

Notar que el resultado no cambiaría si se hubiera elegido como potencial simpléctico

$$\theta = -\frac{i\hbar N}{1 + z\bar{z}} \bar{z} dz \quad (4.7.4)$$

pues las secciones polarizadas serían representadas por funciones tal que,

$$\left(\partial_{\bar{z}} - \frac{i}{\hbar} \theta(\partial_{\bar{z}}) \right) \phi = \partial_{\bar{z}} \phi = 0$$

es decir, simplemente por funciones de z . Para que representen localmente a secciones globalmente holomorfas se tiene que cumplir, igual que antes, que las funciones ϕ estén generadas por $\{1, z^1, \dots, z^N\}$ para cada N . En este caso el potencial simpléctico tiene parte imaginaria, pues

$$\text{Im}(\theta) = \frac{-N\hbar}{2i(1 + z\bar{z})} (i\bar{z}dz + i\bar{z}dz) = -\frac{N\hbar}{2} d\ln(1 + z\bar{z})$$

El factor de peso ρ está definido por 2.2.14,

$$d\ln \rho = \frac{2}{\hbar} \text{Im}(\theta) = -N d\ln(1 + z\bar{z}) \iff \rho = \frac{1}{(1 + z\bar{z})^N}$$

Juntando estos elementos se obtiene que el producto interno está definido como

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{\mathcal{C}} \rho \bar{\phi} \psi \omega = iN\hbar \int_{\mathcal{C}} \overline{\phi(z)}\psi(z) \frac{1}{(1 + |z|\bar{z})^{N+2}} dz \wedge d\bar{z}$$

que coincide con el que se obtuvo partiendo del potencial simpléctico 4.7.1. Los espacios de Hilbert de los dos casos coinciden, pues la única diferencia entre las funciones ϕ y f es el cambio de gauge producido por haber cambiado el potencial simpléctico

$$\theta \longrightarrow \theta + i\frac{N\hbar}{2} d\ln(1 + z\bar{z})$$

Por ese motivo $f(z)$ y $(1 + z\bar{z})^{-N/2} f(z)$ representan el mismo estado físico en el espacio de Hilbert⁵. Dentro del producto interno, el factor extra es reabsorbido por ρ .

⁵Notar que estrictamente hablando son espacios de Hilbert distintos, pues la definición del producto interno es distinta.

4.8. Operadores sobre el Hilbert

Hasta este punto, si bien no se requirió hacer mención a las órbitas coadjuntas, una vez que se estableció que eran esferas, resulta importante hacer la siguiente aclaración. Cuando se definió la esfera como el conjunto de puntos tal que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ se tenía en mente que estos puntos pertenecen al espacio $\mathfrak{su}^*(2)$. Para continuar con la cuantización se requiere establecer cuáles son las funciones sobre las órbitas coadjuntas que se pretende cuantizar. En la sección § 3.2 se mencionó que las funciones sobre las órbitas coadjuntas de G se identifican con elementos del álgebra de Lie \mathfrak{g} que en este caso es $\mathfrak{su}(2)$, es decir, si $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ es la base de elemento en $\mathfrak{su}^*(2)$, y \hat{x}_3 es, en particular, dual al elemento $Z \in \mathfrak{su}(2)$, la función definida por Z toma elementos de la forma $x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3$ en la esfera, y devuelve

$$\Phi_Z(x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3) = x_1\hat{x}_1(Z) + x_2\hat{x}_2(Z) + x_3\hat{x}_3(Z) = x_3$$

que es la “altura” del punto proyectado en el eje \hat{x}_3 . Si bien estas funciones son siempre lineales, se pueden utilizar para construir polinomios en las coordenadas y así, cualquier tipo de función analítica.

Para cada N vamos a cuantizar las funciones proporcionales a los generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$, que al evaluarlas en la esfera adoptan la forma

$$\begin{cases} L_z = \frac{N\hbar}{2}x_3 = \frac{N\hbar}{2} \left(\frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right) \\ L_y = \frac{N\hbar}{2}x_2 = \frac{N\hbar}{2} \left(\frac{z - \bar{z}}{i(1 + z\bar{z})} \right) \\ L_x = \frac{N\hbar}{2}x_1 = \frac{N\hbar}{2} \left(\frac{z + \bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \end{cases} \quad (4.8.1)$$

Las constantes $\frac{N\hbar}{2}$ esta puesta para que los corchetes de Poisson de los observables L_x, L_y, L_z sobre la esfera sean los que conocemos para las componentes del momento angular,

$$\{L_i, L_j\}_\omega = \epsilon_{ijk}L_k$$

Para verificarlo alcanza con utilizar la expresión 4.6.2. Además, cualquier función cuyo corchete de Poisson con todas estas sea nulo, tiene que ser una función constante, por lo que es un conjunto completo de observables. Gracias a las propiedades del mapa de cuantización, se obtiene que las relaciones de conmutación entre sus operadores es

$$[\delta_{L_i}, \delta_{L_j}] = i\hbar\epsilon_{ijk}\delta_{L_k} \quad (4.8.2)$$

Como se procede usualmente, resulta más interesante observar los operadores asignados a las funciones

$$\begin{cases} L_z = \frac{N\hbar}{2}x_3 = \frac{N\hbar}{2} \left(\frac{z\bar{z} - 1}{1 + z\bar{z}} \right) \\ L_+ = L_x + iL_y = N\hbar \left(\frac{z}{1 + z\bar{z}} \right) \\ L_- = L_x - iL_y = N\hbar \left(\frac{\bar{z}}{1 + z\bar{z}} \right) \end{cases} \quad (4.8.3)$$

Los campos vectoriales hamiltonianos para estas funciones se calculan mediante 4.6.1 y valen

$$\begin{cases} X_{L_z} &= \frac{1}{i}(\bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z) \\ X_{L_+} &= \frac{i}{i}(\partial_{\bar{z}} + z^2\partial_z) \\ X_{L_-} &= -\frac{i}{i}(\bar{z}^2\partial_{\bar{z}} + \partial_z) \end{cases}$$

Utilizaremos la polarización generada por $\partial_{\bar{z}}$. Para que estas funciones sean cuantizables con esta polarización, deben cumplir que la derivada de Lie de sus campos respecto de la polarización sea un nuevo campo vectorial dentro de la polarización, es decir $[X_f, \partial_{\bar{z}}] = \alpha\partial_{\bar{z}}$. En los tres casos esta condición se cumple, pues se tiene para X_{L_z}, X_{L_+} y X_{L_-} respectivamente

$$\begin{aligned} [\partial_{\bar{z}}, \bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z] &= \partial_{\bar{z}} + z[\partial_{\bar{z}}, \partial_z] - [\partial_{\bar{z}}, \partial_z] &= \partial_{\bar{z}} \\ [\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}} + z^2\partial_z] &= [\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}] + z^2[\partial_{\bar{z}}, \partial_z] &= 0 \\ [\partial_{\bar{z}}, \partial_z + \bar{z}^2\partial_{\bar{z}}] &= [\partial_{\bar{z}}, \partial_z] + 2\bar{z}\partial_{\bar{z}} + \bar{z}^2[\partial_{\bar{z}}, \partial_z] &= 2\bar{z}\partial_{\bar{z}} \end{aligned}$$

Esto garantiza que los operadores de estas funciones, al aplicar sobre estados polarizados van a devolver estados polarizados. Lo siguiente es calcular el operador que se asigna a cada una de estas funciones. Por comodidad utilizaremos el potencial simpléctico 4.7.4. El mapa de funciones a operadores es

$$\delta_f = -i\hbar X_f + \frac{i\hbar N}{1+z\bar{z}}\bar{z}dz(X_f) + f$$

Para L_z el operador resulta

$$\delta_{L_z} = -\hbar(\bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z) - \frac{N\hbar}{1+z\bar{z}}z\bar{z} + \frac{N\hbar}{2}\frac{z\bar{z}-1}{1+z\bar{z}} = -\hbar(\bar{z}\partial_{\bar{z}} - z\partial_z) - \frac{N\hbar}{2}$$

Para L_+

$$\delta_{L_+} = -\hbar(\partial_{\bar{z}} + z^2\partial_z) + \frac{N\hbar}{1+z\bar{z}}z^2\bar{z} + \frac{N\hbar}{1+z\bar{z}}z = -\hbar(\partial_{\bar{z}} + z^2\partial_z) + N\hbar z$$

Para L_-

$$\delta_{L_-} = \hbar(\partial_z + \bar{z}^2\partial_{\bar{z}}) - \frac{N\hbar}{1+z\bar{z}}\bar{z} + \frac{N\hbar}{1+z\bar{z}}\bar{z} = \hbar(\partial_z + \bar{z}^2\partial_{\bar{z}})$$

Recordando ahora que estos operadores actúan sobre funciones que solo dependen de z (como se vio anteriormente para este potencial simpléctico) los operadores se reducen a

$$\begin{cases} \delta_{L_z}f(z) &= \hbar\left(z\partial_z - \frac{N}{2}\right)f(z) \\ \delta_{L_+}f(z) &= \hbar\left(Nz - z^2\partial_z\right)f(z) \\ \delta_{L_-}f(z) &= \hbar\partial_z f(z) \end{cases} \quad (4.8.4)$$

Al diagonalizar el operador δ_{L_z} se obtiene que los autoestados son monomios de la forma z^n . Recordando que para cada N las secciones holomorfas están representadas localmente por monomios de z hasta grado N , se obtiene

$$\delta_{L_z}z^n = \hbar\left(n - \frac{N}{2}\right)z^n \quad \text{con } n \in 0, \dots, N$$

Su espectro de autovalores va entre $-\frac{N\hbar}{2}$ y $\frac{N\hbar}{2}$ sumando múltiplos enteros de \hbar . El operador δ_{L_+} actúa sobre los autoestados de δ_{L_z} como

$$\delta_{L_+} z^n = \hbar(Nz - z^2 \partial_z) z^n = \hbar(N - n) z^{n+1}$$

es decir, devuelve otro autoestado de δ_{L_z} cuyo autovalor corresponde a haber sumado \hbar . Notar que el estado con mayor autovalor de δ_{L_z} , es decir z^N , es aniquilado por el operador δ_{L_+} . El operador δ_{L_-} actúa derivando respecto de z . Sobre estados z^n devuelve estados con autovalores correspondientes a haber restado \hbar y además aniquila al autoestado con autovalor más bajo z^0 .

Como ejemplo ilustrativo tomemos $N = 1$. El espacio de Hilbert está generado por $z^0 = |\downarrow\rangle$ y $z^1 = |\uparrow\rangle$. Los operadores actúan como

$$\begin{aligned} \delta_{L_z} |\uparrow\rangle &= \frac{\hbar}{2} |\uparrow\rangle & \delta_{L_z} |\downarrow\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |\downarrow\rangle \\ \delta_{L_+} |\uparrow\rangle &= 0 & \delta_{L_+} |\downarrow\rangle &= \hbar |\uparrow\rangle \\ \delta_{L_-} |\uparrow\rangle &= \hbar |\downarrow\rangle & \delta_{L_-} |\downarrow\rangle &= 0 \end{aligned}$$

que es la representación usual de momento angular para spin $\frac{1}{2}$. Cambiando el N se obtienen representaciones distintas (con otro momento angular total). Con $N = 2$ se obtiene, llamando a $z^0 = |\downarrow\rangle$, $z^1 = |0\rangle$, $z^2 = |\uparrow\rangle$,

$$\begin{aligned} \delta_{L_z} |\uparrow\rangle &= \hbar |\uparrow\rangle & \delta_{L_z} |0\rangle &= 0 & \delta_{L_z} |\downarrow\rangle &= -\hbar |\downarrow\rangle \\ \delta_{L_+} |\uparrow\rangle &= 0 & \delta_{L_+} |0\rangle &= \hbar |\uparrow\rangle & \delta_{L_+} |\downarrow\rangle &= 2\hbar |0\rangle \\ \delta_{L_-} |\uparrow\rangle &= 2\hbar |0\rangle & \delta_{L_-} |0\rangle &= \hbar |\downarrow\rangle & \delta_{L_-} |\downarrow\rangle &= 0 \end{aligned}$$

que es la representación de momento angular para spin 1. Dado que N es entero, podemos redefinir $N = 2\ell$ con ℓ semi-entero, de esta forma el espacio de Hilbert está generado por polinomios hasta grado 2ℓ y tiene dimensión

$$\dim(\mathcal{H}) \begin{cases} 2\ell + 1 & \text{si } \ell \in 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El espectro de energías va de $-\ell\hbar$ hasta $\ell\hbar$ sumando múltiplos enteros de \hbar , algo que a la vista parece más familiar.

Nuevamente, puede realizarse el mismo procedimiento utilizando otro potencial simpléctico, por ejemplo el que se muestra en 4.7.1. En ese caso los estados estarán representados por 4.7.2, los operadores se escribirán distinto, pero en virtud de 2.1.5 se puede ver que el resultado final no se modificará.

Para cada ℓ se puede, fácilmente, cuantizar la función el momento angular total $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Pues en este caso

$$L^2 = \left(\frac{N\hbar}{2}\right)^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \hbar^2 \ell^2$$

Uno de los requisitos del mapa de cuantización es que asigne a la función 1 el operador identidad. Es decir, para cada ℓ los estados que se consiguen son autoestados de δ_{L^2} con autovalor $\hbar^2 \ell^2$, pues el operador asignado a L^2 es

$$\delta_{L^2} = \hbar^2 \ell^2 \text{Id}$$

que difiere del resultado $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$. Esto se puede entender de la siguiente manera. En cuantización canónica se asigna a las componentes del momento angular L_i el operador \hat{L}_i mientras que al momento angular total se asigna el operador que es la suma de operadores al cuadrado, es decir

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \mapsto \hat{L}_x \circ \hat{L}_x + \hat{L}_y \circ \hat{L}_y + \hat{L}_z \circ \hat{L}_z = \hat{L}_z^2 + \hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar \hat{L}_z$$

utilizando solamente las relaciones de conmutación entre estos operadores puede mostrarse que los autovalores de \hat{L}^2 son $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$. Naturalmente si se realiza la cuantización geométrica de L_z, L_+, L_- y luego se construye el operador

$$\delta_{L_x}^2 + \delta_{L_y}^2 + \delta_{L_z}^2 = \delta_{L_z}^2 + \delta_{L_+} \delta_{L_-} - \hbar \delta_{L_z} \quad (4.8.5)$$

se puede demostrar de la misma forma que para el caso canónico sus autovalores son $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$. Dado que se tiene la expresión de estos operadores se puede calcular esto explícitamente,

$$(\delta_{L_z}^2 + \delta_{L_+} \delta_{L_-} - \hbar \delta_{L_z}) z^n = \hbar^2 (n - \ell)^2 z^n + \hbar^2 n(2\ell - n + 1) z^n - \hbar^2 (n - \ell) z^n = \hbar^2 \ell(\ell + 1) z^n$$

Sin embargo este operador no es el operador que la cuantización geométrica asigna a la función $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, lo cual se entiende rápidamente recordando la propiedad 2.1.16. Más aún, el operador 4.8.5 ni siquiera puede provenir de ninguna función clásica, pues involucra derivadas segundas de los estados y como se ve en la propia definición del mapa δ en 2.1.3, dicho mapa solamente asigna operadores diferenciales de primer orden.

En virtud de la ecuación 2.0.3 se pueden definir los operadores

$$u_i = \frac{2i\delta_{L_i}}{\hbar} \quad (4.8.6)$$

los cuales cumplen las relaciones de conmutación del álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Exponenciándolos se obtiene el grupo $SU(2)$. El proceso de cuantización geométrica proporcionó las representaciones⁶ irreducibles de dicho grupo. Calculemos ahora el carácter de algún elemento del grupo, por ejemplo $e^{\theta u_z}$ en las representaciones que se obtuvieron. El carácter de una representación es un mapa que a cada elemento del grupo le asigna la traza del elemento actuando en el espacio vectorial de la representación, es decir

$$\chi(e^{\theta u_z}) = \chi\left(e^{\frac{i2\theta L_z}{\hbar}}\right) = \text{Tr}\left(e^{\frac{i2\theta L_z}{\hbar}}\right) = \sum_{n=0}^N e^{i\theta(2n-N)} = e^{-i\theta N} \frac{1 - e^{i2\theta(N+1)}}{1 - e^{i2\theta}} = \frac{e^{-i\theta(N+1)} - e^{i\theta(N+1)}}{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}$$

De esta forma se obtiene el conocido carácter de las representaciones irreducibles del grupo $SU(2)$.

$$\chi\left(e^{\frac{i2\theta L_z}{\hbar}}\right) = \frac{\sin((N+1)\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin((2\ell+1)\theta)}{\sin(\theta)} \quad (4.8.7)$$

⁶En la próxima sección se darán las nociones necesarias de teoría de representaciones.

Capítulo 5

Teoremas de Punto fijo

Los teoremas de punto fijo son de gran importancia y pueden encontrarse en diversas ramas de la matemática como en álgebra, análisis, geometría, topología, etc. La idea de todas las fórmulas de punto fijo es relacionar cantidades que en general son invariantes globales, con cantidades locales, como sumas de contribuciones de algunos puntos en particular (los puntos fijos). En este capítulo mostraremos primero cómo surgen las fórmulas más simples de puntos fijos (Sternberg [55]) y finalmente enunciaremos el teorema de punto fijo de Lefschetz [39], y una generalización del mismo conocida como teorema de punto fijo de Atiyah & Bott [3]. Utilizaremos el teorema para calcular el carácter de una representación inducida de $SU(2)$ y veremos que coincide con el que se obtuvo en 4.8.7 mediante el método de cuantización geométrica.

Definición 5.0.1 Sea X un conjunto y $f : X \rightarrow X$ un mapa de X a él mismo. Un punto $x \in X$ se llama **punto fijo** de f si $f(x) = x$. Al conjunto de puntos fijos de f se lo denomina $\text{Fix}(f)$

Puede pensarse que un teorema de punto fijo establece condiciones específicas sobre X y f que garantizan la existencia de un punto de fijo de f sobre X . Muchas veces interesa considerar familias \mathcal{F} de mapas de X en X . En ese contexto en general \mathcal{F} tiene estructura de grupo. En estos casos un teorema de punto fijo especifica condiciones sobre X y \mathcal{F} que garantiza la existencia de un punto fijo $x \in X$ simultáneo a toda $f \in \mathcal{F}$.

En general se utilizan mapas f que provienen de la acción de algún grupo G sobre un conjunto X . En los primeros ejemplos, los más simples y con relevancia en la estructura molecular, se considerarán grupos G discretos actuando sobre un conjunto X , también discreto. Esta acción se extenderá luego a ciertos espacios vectoriales que pueden definirse sobre X y se mostrará que podrá inferirse la existencia de puntos fijos de la acción de G sobre X , evaluando ciertas cantidades definidas para la acción de G sobre los espacios vectoriales, lo que resulta siempre más fácil.

5.1. Fórmulas de punto fijo para grupos discretos

Primero se introducirán una serie de conceptos de teoría de representaciones de grupos y luego se mostrarán los ejemplos específicos. En toda esta sección, a menos que se aclare lo contrario, los grupos

son grupos discretos.

Si bien tanto la definición de la acción de un grupo como la de representación de un grupo se dieron en 3.1.3 y 3.1.2 respectivamente, se vuelve a dar aquí para adecuarla a la notación canónica en los libros de teoría de representaciones.

Definición 5.1.1 Una **representación** de un grupo G en un espacio vectorial V es una acción ρ de G en V que actúa de manera lineal

$$\begin{aligned} \rho(g) : V &\longrightarrow V \quad \text{para todo } g \in G \\ v &\longmapsto \rho(g)v \end{aligned}$$

Usualmente cuando se denota una representación con el símbolo ρ se sobrentiende que se especifica tanto el grupo como el espacio vectorial, como la acción del primero sobre el segundo.

Dos representaciones ρ y ρ' del grupo G en V y V' respectivamente se dicen **equivalentes** si existe un isomorfismo $T : V \rightarrow V'$ tal que

$$\rho'(T(v)) = T(\rho(v)) \quad \text{para todo } v \in V$$

En la teoría de representaciones, las llamadas representaciones irreducibles juegan un papel fundamental, pues son los “ladrillos fundamentales” de las representaciones. Dada una representación ρ de un grupo sobre un espacio vectorial V , un subespacio $V' \subseteq V$ se dice **invariante** si $\rho(G)V' \subseteq V'$, es decir, para todo $v \in V'$ y para todo $g \in G$ sucede que $\rho(g)v \in V'$. En particular, por la definición de acción del grupo, ocurre que un subespacio V' es invariante si y solo si $\rho(G)V' = V'$. La representación ρ restringida a un subespacio invariante es también una representación del grupo G , se la denomina **subrepresentación**. Con esto se puede definir el concepto de representación irreducible.

Definición 5.1.2 Una representación ρ de un grupo G en un espacio vectorial V se dice **irreducible** si los únicos subespacios invariantes que tiene son $\{0\}$ y $\{V\}$.

Una representación cualquiera, bajo ciertas condiciones, se puede escribir como suma de representaciones irreducibles. Para clarificar esto primero hay que definir qué significa sumar dos representaciones. Sean dos representaciones ρ^1 y ρ^2 de un grupo G en espacios vectoriales V^1 y V^2 respectivamente. Se puede definir “la suma de representaciones” como una nueva representación ρ de G en $V^1 \oplus V^2$ de la siguiente manera

$$\rho(g)(v_1 + v_2) = \rho^1(g)v_1 + \rho^2(g)v_2 \quad \text{para todo } g \in G, v_1 \in V^1, v_2 \in V^2$$

Dada una base B de V , cada transformación lineal ρ puede representarse por una matriz $\hat{\rho}$ relativa a dicha base. Estas matrices heredan algunas propiedades de la misma definición de acción de un grupo:

- $\hat{\rho}(e) = \text{Id}_V$
- $\hat{\rho}(g^{-1}) = (\hat{\rho}(g))^{-1}$
- $\hat{\rho}(gh) = \hat{\rho}(g)\hat{\rho}(h)$

Es fácil ver que la matriz de la suma de dos representaciones ρ^1 y ρ^2 adquiere la forma

$$\hat{\rho}(g) = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^1(g) & 0 \\ 0 & \hat{\rho}^2(g) \end{pmatrix}$$

Dada una representación ρ de un grupo G en un espacio vectorial V , supongamos que existe un producto interno en V que es invariante ante la acción del grupo G , es decir que satisface $(\rho(g)v_1, \rho(g)v_2) = (v_1, v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in V$ y $g \in G$. Supongamos que existe un subespacio $V^1 \subset V$ invariante, entonces el subespacio V^2 ortogonal a V^1 con respecto a este producto interno es invariante ante la acción del grupo. Para ver esto se descompone a V como $V = V^1 \oplus V^2$, y luego para todo $v_2 \in V^2$, $v_1 \in V^1$ y $g \in G$ se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= (v_1, v_2) \\ &= (\rho(g)v_1, v_2) \quad (\text{pues } \rho(g)v_1 \in V^1) \\ &= (v_1, \rho(g)^{-1}v_2) \quad (\text{producto interno invariante}) \\ &= (v_1, \rho(g^{-1})v_2) \quad (\text{propiedad de la acción}) \end{aligned}$$

Como la última expresión vale para todo $v_1 \in V^1$ entonces $\rho(g^{-1})v_2$ pertenece al complemento ortogonal V^2 para todo g , en consecuencia es invariante. De esta forma, si existe un producto interno invariante resulta simple entender que toda representación puede escribirse como suma directa de representaciones irreducibles, pues si no fuera irreducible significa que hay al menos un subespacio invariante V^1 no trivial. Si hubiera más de uno se puede elegir V^1 como el de menor dimensión, entonces tiene que ser irreducible. Su complemento ortogonal o bien es irreducible o bien podemos identificar nuevamente dentro de él espacios irreducibles. El procedimiento continúa de esa manera y dado que la dimensión de V es finita el proceso se termina en algún momento habiendo expresado V como suma directa de subespacios irreducibles¹.

Para construir un producto interno invariante ante la acción del grupo se puede comenzar con un producto interno $(,)_0 : V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ que no lo sea, y luego usando el conocido truco de “promediar en el grupo” se puede definir

$$(v_1, v_2) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(g)v_1, \rho(g)v_2)_0$$

donde el factor de normalización $\#G$ es la cantidad de elementos del grupo. Es fácil ver que este nuevo producto interno es invariante ante la acción del grupo, pues para todo $h \in G$

$$\begin{aligned} (\rho(h)v_1, \rho(h)v_2) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(g)\rho(h)v_1, \rho(g)\rho(h)v_2)_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\rho(gh)v_1, \rho(gh)v_2)_0 \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{c \in G} (\rho(c)v_1, \rho(c)v_2)_0 \\ &= (v_1, v_2) \end{aligned}$$

¹En dimensión infinita se puede realizar un análisis similar.

Si V es un espacio vectorial con producto interno, una representación de G en V se dice **unitaria** si el producto interno es invariante ante la acción de G . Con lo visto anteriormente se puede decir que cualquier representación de un grupo finito en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno siempre se puede descomponer en suma directa de representaciones irreducibles y unitarias. Este resultado se puede extender a cualquier tipo de grupos. Cualquier representación unitaria de un grupo G (sea discreto o no) en un espacio de Hilbert de dimensión finita se puede descomponer en suma directa de representaciones irreducibles y unitarias.

Un elemento central en la teoría de representaciones es conocido como el carácter de la representación.

Definición 5.1.3 Sea ρ una representación de un grupo G en un espacio vectorial V . El carácter de una representación es la función $\chi^\rho : G \rightarrow \mathbf{C}$ definida como

$$\chi^\rho(g) = \text{Tr}(\hat{\rho}(g))$$

Observar que la función χ^ρ es constante en la clase de conjugaciones de g , es decir

$$\chi^\rho(hgh^{-1}) = \text{Tr}(\hat{\rho}(hgh^{-1})) = \text{Tr}(\hat{\rho}(h)\hat{\rho}(g)\hat{\rho}^{-1}(h)) = \chi^\rho(g)$$

A las funciones que tienen esta propiedad se las llama **funciones centrales**. Otra observación es que estas funciones aplicadas al elemento identidad devuelven la dimensión del espacio vectorial, pues

$$\chi^\rho(e) = \text{Tr}(\hat{\rho}(e)) = \text{Tr}(\text{Id}) = \dim(V) \quad (5.1.4)$$

Si la representación ρ se escribe como suma directa de dos subrepresentaciones ρ^1 y ρ^2 , por la forma que adquiere la matriz es fácil ver que

$$\chi^{\rho^1 \oplus \rho^2} = \chi^{\rho^1} + \chi^{\rho^2}$$

5.2. Acción en el espacio de funciones

Supongamos que tenemos una acción φ de un grupo G en un conjunto discreto M . Denotamos $C(M)$ como el espacio vectorial de funciones complejas en M . Siempre se puede definir una acción ρ (que será una representación) de G en $C(M)$ como

$$(\rho(g)f)(x) = f(\varphi(g^{-1})x)$$

para todo $x \in M$, $g \in G$ y $f \in C(M)$. Cuando no da lugar a confusiones, es común notar esto como

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x)$$

Escrito de otra forma, se define $g \cdot f$ como

$$g \cdot f = f \circ g^{-1}$$

donde en la derecha se considera al elemento g^{-1} como una transformación de M en él mismo. Para verificar que esto define una acción, observar que $e \cdot f = f$ para e el elemento identidad y que

$$h \cdot (g \cdot f) = (g \cdot f) \circ h^{-1} = f \circ g^{-1} \circ h^{-1} = f \circ (g^{-1} \circ h^{-1}) = (hg) \cdot f$$

Esta representación no es irreducible, pues las funciones constantes en M siempre forman un espacio vectorial de dimensión 1 que es invariante ante la acción del grupo.

Calculemos ahora el carácter de esta representación, para eso introduzcamos una base conveniente para el espacio $C(M)$. Recordando que M es un conjunto discreto de puntos x_1, \dots, x_k , cualquier función sobre M puede escribirse como $f = f_1 + \dots + f_k$, donde cada f_j se anula salvo que se evalúe en $x_j \in M$, de esta forma $f(x_j) = f_j$. Una base natural de funciones es M está definida por,

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

con $x = x_1, \dots, x_k \in M$. El grupo actúa sobre estas funciones de la siguiente forma

$$g\delta_x(y) = \delta_x(g^{-1}y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = gx \\ 0 & \text{si } y \neq gx \end{cases}$$

Entonces

$$g\delta_x = \delta_{gx}$$

El carácter de esta representación vale

$$\chi^\rho(g) = \text{Tr}(\hat{\rho}(g)) = \sum_x \delta_x^*(g\delta_x)$$

donde δ_x^* es el elemento dual a δ_x y vale que $\delta_x^*\delta_y = 1$ si y solo si $x = y$. Con esto el carácter queda

$$\chi^\rho(g) = \sum_x \delta_x^*(g\delta_x) = \sum_x \delta_x^*\delta_{gx} = \sum_{x=gx} 1$$

Los puntos que cumplen que $gx = x$ se denominan puntos fijos y entonces el carácter de esta representación es igual a la cantidad de puntos fijos de cada elemento del grupo,

$$\boxed{\chi^\rho(g) = \#(\text{puntos fijos de } g)} \quad (5.2.1)$$

Esta es la fórmula prototípica de todos los teoremas de punto fijo, en las siguientes secciones se generalizará a casos cada vez más complicados hasta llegar a al teorema de Atiyah-Bott. La fórmula 5.2.1 establece que dada la acción de un grupo discreto G sobre una variedad discreta M , la condición necesaria y suficiente para que la función $g : M \rightarrow M$ tenga un punto fijo es que el carácter de la representación ρ de G en funciones sobre M sea distinto de 0.

5.3. Acción en el espacio de secciones

El ejemplo de la sección anterior puede generalizarse cambiando el espacio vectorial de funciones sobre M por el espacio vectorial de secciones $\Gamma(E)$ de fibrados vectoriales sobre (E, π, M) . Los fibrados vectoriales son similares a los fibrados de línea que se muestran en el apéndice A, salvo que las fibras son espacios vectoriales de dimensión n (constante), en lugar de ser de dimensión 1.

Si el grupo G actúa sobre M que es el espacio base del fibrado, decimos que G actúa como el grupo de morfismos de fibrado vectorial en E , o equivalentemente que E es un fibrado vectorial homogéneo bajo G , si:

- G actúa sobre E
- El mapa $\pi : E \rightarrow M$ cumple $g\pi(v) = \pi(gv)$ para todo $g \in G$ y $v \in E$. Esta condición es equivalente a decir que el grupo tome elementos de la fibra de x y los mapee a elementos de la fibra de gx , $g : E_x \rightarrow E_{gx}$.
- Adicionalmente se pide que el mapa $g : E_x \rightarrow E_{gx}$ sea lineal para cada $g \in G$ y $x \in M$

Con esta acción sobre E ahora puede definirse una acción sobre secciones del fibrado $f \in \Gamma(E)$ definiendo²

$$(g \cdot f)(x) = g(f(g^{-1}x)) \quad (5.3.1)$$

Notar que $f(g^{-1}x)$ pertenece a la fibra $E_{g^{-1}x}$, entonces el lado derecho de la ecuación 5.3.1 es un elemento de la fibra E_x y entonces $(g \cdot f)$ es de hecho una sección de E , pues para que sea una sección tiene que asignar a cada elemento $x \in M$ vectores de la fibra E_x .

La acción de G definida en 5.3.1 es de echo una representación de G en $\Gamma(E)$ la cual notaremos como ρ_E . Calculemos el carácter de esta representación, para eso nuevamente introduzcamos una base de secciones adecuada,

$$f_{V_i, x}(y) = \begin{cases} V_i^{(x)} & \text{si } y = x \\ 0 & \text{si } y \neq x \end{cases}$$

Donde $x = x_1, \dots, x_k \in M$ son los k puntos de M mientras que $V_i^{(x)}$ con $i = 1, \dots, n$ son las secciones que sirven como base de cada una de las fibras E_x , es decir los elementos de la base de cada espacio vectorial asociado al punto x . El espacio vectorial $\Gamma(E)$ tiene dimensión $k \cdot n$.

La acción del grupo sobre esta base de secciones es

$$(g \cdot f_{V_i, x})(y) = g(f_{V_i, x}(g^{-1}y)) = \begin{cases} gV_i^{(x)} & \text{si } y = gx \\ 0 & \text{si } y \neq gx \end{cases}$$

entonces $gf_{V_i, x} = f_{gV_i, gx}$. Nuevamente se define $f_{V_i, x}^*$ como el elemento del dual a cada uno de los elementos de la base, y al calcular el carácter se obtiene

$$\chi_E(g) = \sum_{x \in M} \sum_{V_i \in E_x} f_{V_i, x}^*(gf_{V_i, x}) = \sum_{x \in M} \sum_{V_i \in E_x} f_{V_i, x}^*(f_{gV_i, gx}) = \sum_{x=gx} \sum_{V_i \in E_x} V_i^{(x)*} (gV_i^{(x)})$$

²Recordar que ahora f es una sección del fibrado que al evaluarla en algún $x \in M$ devuelve un elemento de la fibra $\pi^{-1}(x)$

Notando que la última suma es la traza de g actuando sobre las fibras se obtiene de esta manera la conocida fórmula de punto fijo de Frobenius

$$\chi_E(g) = \sum_{gx=x} \text{Tr}(g : E_x \longrightarrow E_x) \quad (5.3.2)$$

Observar, por último, que la traza involucrada en la fórmula anterior solamente está bien definida en los puntos fijos, pues como ya se mencionó, la acción de g no mantiene las fibras de E y vale que $g : E_x \longrightarrow E_{gx}$.

5.4. Representaciones inducidas

La siguiente generalización de las fórmulas anteriores que mencionaremos es para el caso de representaciones inducidas. Las ideas de este caso sirven como punto de partida para comenzar a entender algunos de los elementos que aparecen en el teorema de punto fijo de Atiyah-Bott-Singer. Supongamos un grupo G con un subgrupo H . Se puede definir $M = G/H$, donde un punto de M es una clase de equivalencia $[g]$. Supongamos que ρ es una representación de H en un espacio vectorial V . En el espacio $G \times V$ se puede introducir la relación de equivalencia

$$(gh, v) \sim (g, \rho(h)v)$$

Denotamos por E al conjunto de todas las clases de equivalencia. A la clase de equivalencia del elemento $(g, v) \in G \times V$ inducida por la identificación anterior se la nota como $[(g, v)]$ y se suele escribir a E como

$$E = G \times_H V$$

El mapa $(g, v) \mapsto [g]$ es claramente constante en las clases de equivalencia, entonces define un mapa $\pi : E \longrightarrow M$, $\pi([(g, v)]) = [g]$.

Supongamos que $x = [g]$, sea E_x el conjunto de las clases de equivalencia $[(g, v)]$ con v cualquier elemento de V , es decir, $[(g, v)]$ denota todos los elementos $e \in E$ tal que $\pi(e) = [g]$. Se puede definir entonces una identificación entre E_x y el espacio vectorial V :

$$\phi_g : V \longrightarrow E_x \quad ; \quad \phi_g(v) = [(g, v)]$$

Si se cambia la elección de g por gh se obtiene que

$$\phi_{gh}(v) = [(gh, v)] = [g, \rho(h)v] = \phi_g(\rho(h)v)$$

de esta forma

$$\phi_{gh} = \phi_g \circ \rho(h) \quad (5.4.1)$$

Esta ecuación muestra que se puede dotar a E_x con la estructura de un espacio vectorial que es independiente de la elección de g . Si $e_i = \phi_g(v_i)$, definimos la suma de elementos como

$$e_1 + e_2 = \phi_g(v_1 + v_2)$$

Se define de manera similar para la multiplicación de un vector por un escalar en E_x . De esta forma (E, π, M) es un fibrado vectorial sobre M .

Se define la acción de G sobre este fibrado vectorial multiplicando por izquierda

$$a[(g, v)] = [(ag, v)]$$

para todo $a \in G$. Es simple ver que esa definición es independiente de la elección del representante. La acción define un mapa lineal $E_x \rightarrow E_{ax}$, entonces E es un fibrado G -homogéneo, y se obtuvo una representación de G en $\Gamma(E)$. Ésta se obtuvo a partir de la representación ρ de un subgrupo H de G . Se la llama representación de G inducida por la representación ρ , la notamos $\rho \uparrow G$. El carácter $\chi_{\rho \uparrow G}$ de esta representación de G está dado por la ecuación 5.3.2,

$$\chi_{\rho \uparrow G}(g) = \sum_{g[x]=[x]} \text{Tr}(g : E_{[x]} \rightarrow E_{[x]})$$

sin embargo es conveniente expresarlo de una manera ligeramente distinta. Para que la clase $[x]$ sea un punto fijo de la acción de $g \in G$ tiene que suceder que $gx = xH$, es decir que $x^{-1}gx = h \in H$. La acción de g en $E_{[x]}$ puede entenderse de la siguiente forma: si $[(x, v)] \in E_{[x]}$ está dado por $[(x, v)] = \phi_x(v)$ para algún $v \in V$, entonces

$$g[(x, v)] = [(gx, v)] = [(xh, v)] = [(x, \rho(x^{-1}gx)v)] = \phi_x \circ \rho(x^{-1}gx) \circ \phi_x^{-1}([(x, v)])$$

pues al aplicar ϕ_x^{-1} al elemento $[(x, v)]$ se obtiene v , luego se le aplica la representación ρ del elemento $x^{-1}gx = h \in H$ quedando $\rho(h)v$ y luego se lo envía al elemento $[(x, \rho(h)v)]$ que es igual a $[(xh, v)] = [(gx, v)]$. De esta forma el carácter puede expresarse como

$$\chi_{\rho \uparrow G}(g) = \sum_{g[x]=[x]} \text{Tr}(\rho(h) : V \rightarrow V) = \sum_{g[x]=[x]} \chi_{\rho}(h) \quad (5.4.2)$$

con $h = x^{-1}gx \in H$. Es decir, para obtener el carácter de la representación inducida basta con sumar sobre los puntos fijos el carácter de las subrepresentaciones originales.

5.5. Teorema de punto fijo de Lefschetz

En esta sección enunciaremos el teorema de punto fijo de Lefschetz, el cual generaliza las ideas de la sección anterior para casos más complejos, por ejemplo, los mapas actuarán sobre variedades no discretas. Así como antes se definió el carácter como trazas sobre espacios vectoriales donde actúa un cierto mapa, en estos casos esos espacios vectoriales son los grupos de cohomología de la variedad. En el apéndice C.2 se muestran los rudimentos de estos grupos. El análogo al carácter será lo que se conoce como número de Lefschetz y los teoremas vinculan este número con cantidades calculadas localmente sobre puntos fijos de los mapas. Para ver un estudio detallado del tema referimos a Griffiths & Harris [20] o Farmakis & Moskowitz [17].

Definición 5.5.1 Sea M una variedad compacta y $f : M \rightarrow M$ un mapa continuo, se define el número de Lefschetz $L(f)$ del mapa como

$$L(f) = \sum_p (-1)^p \text{Tr} (f^* : H_{dR}^p \rightarrow H_{dR}^p)$$

donde f^* es el mapa inducido por f en la cohomología de De Rham.

Algunos autores definen el número de Lefschetz en función del grupo de homología

$$L(f) = \sum_p (-1)^p \text{Tr} (f_* : H_p \rightarrow H_p)$$

sin embargo, estas dos definiciones son equivalentes. Veamos dos ejemplos simples, uno en \mathbf{R}^2 y otro en \mathbf{S}^2 .

Ejemplo 5.5.2 Sea M el plano \mathbf{R}^2 . Sus grupos de cohomología de grado 0, 1 y 2 son \mathbf{R} , 0 y 0 respectivamente. La cohomología de grado 0 está compuesta por las funciones constantes sobre el plano. Utilicemos como mapa $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una rotación rígida alrededor de cualquier punto. La acción inducida de f en las funciones constantes sobre el plano es la identidad, pues el pullback de f sobre las funciones es simplemente componer a la función con el mapa inverso; rotar una función constante sobre el plano la deja inalterada. Por ese motivo, vale

$$L(f) = 1 - 0 + 0 = 1 \quad \blacktriangle$$

Ejemplo 5.5.3 Sea M la esfera \mathbf{S}^2 . Sus grupos cohomología de grado 0, 1 y 2 son \mathbf{R} , 0 y \mathbf{R} respectivamente. La cohomología de grado 0 está compuesta por las funciones constates sobre la esfera, mientras que la cohomología de grado 2 está compuesta por las formas de volumen sobre la esfera. Que el grupo de cohomología de grado uno sea nulo dice que todas las 1-formas cerradas son además exactas. Tomemos como $f : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ una rotación rígida en algún ángulo alrededor de algún eje. La acción inducida a los grupos de cohomología de grado 0 y 2 es la identidad, pues al rotar las funciones constantes permanecen inalteradas, mientras que las formas de volumen también, pues el volumen de la esfera es invariante frente a rotaciones. Se obtiene, entonces

$$L(f) = 1 - 0 + 1 = 2 \quad \blacktriangle$$

El teorema de punto fijo de Lefschetz establece que la igualdad entre el número de Lefschetz de un mapa continuo $f : M \rightarrow M$ sobre una variedad compacta y orientable, con la cantidad de puntos fijos sumados éstos últimos de una forma apropiada. Parasemos a definir esto más precisamente.

Definición 5.5.4 Un punto fijo $m \in M$ de la función $f : M \rightarrow M$ se dice **no degenerado** si su diferencial $df_m : T_m M \rightarrow T_m M$ no tiene autovalor 1. Es decir,

$$\det(\text{Id} - df_m) \neq 0$$

Si el punto fijo es no degenerado se define el índice $\iota_f(m)$ del punto m como

$$\iota_f(m) = \text{sg}(\det(1 - df_m)) = \frac{\det(\text{Id} - df_m)}{|\det(\text{Id} - df_m)|}$$

Usando el teorema de la función inversa se puede ver que los puntos fijos no degenerados son aislados y finitos en número.

La idea intuitiva de la definición es la siguiente. Una función $f(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tiene puntos fijos cuando el gráfico de la función f coincide con la diagonal $y = x$. En esos casos se pueden dar dos situaciones, o el gráfico de f cruza a la diagonal o no lo hace. Para que se de lo segundo se tiene que cumplir que la derivada de f en el punto fijo sea igual 1. Entonces vale que $1 - df_x = 0$. Si el gráfico de la función cruza a la diagonal $y = x$ entonces $1 - df_x \neq 0$ y es positivo o negativo si el gráfico corta a la diagonal en un sentido o en el otro. El índice de la función busca contar la cantidad de puntos fijos aislados (el segundo tipo) teniendo en cuenta de qué manera cortan a la diagonal. La generalización de esta idea para mapas $f : M \rightarrow M$ en lugar de $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ es la definición anterior.

Con esto se puede formular el teorema de punto fijo de Lefschetz [39].

Teorema 5.5.5 *Sea M una variedad compacta y orientable y $f : M \rightarrow M$ un mapa diferenciable tal que todos sus puntos fijos son no degenerados, entonces el número de Lefschetz del mapa f es igual a la suma de los índices de sus puntos fijos,*

$$L(f) = \sum_{m \in \text{Fix}(f)} \frac{\det(1 - df_m)}{|\det(1 - df_m)|}$$

Observar que si el número de Lefschetz de un mapa es distinto de 0 se puede inferir que el mapa tiene al menos un punto fijo. Utilizaremos el teorema en los dos ejemplo dados anteriormente: una rotación sobre el plano \mathbf{R}^2 y sobre la esfera \mathbf{S}^2 .

Ejemplo 5.5.6 Sea $M = \mathbf{R}^2$ con coordenadas (x, y) . Sea $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una rotación rígida en un ángulo θ , sin perder generalidad la podemos tomar alrededor del origen, el cual es el único punto fijo del mapa. Entonces las coordenadas (x, y) se transforman de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El diferencial de este mapa evaluado en el punto fijo es simplemente la matriz que involucra las funciones trigonométricas, de esta forma el lado derecho del teorema resulta.

$$L(f) = \text{sg} \left(\det \begin{pmatrix} 1 - \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 - \cos(\theta) \end{pmatrix} \right) = \text{sg}(1 - \cos(\theta))$$

En el caso de $\theta \neq 2n\pi$ la expresión $1 - \cos(\theta)$ es mayor a 0, su signo es 1 y se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 5.5.2

$$L(f) = 1$$

En el caso de $\theta = 2n\pi$ lo que ocurre es que el mapa f es la identidad, para la cual todos el plano \mathbf{R}^2 es punto fijo, entonces los puntos fijo no son no degenerados, y el teorema deja de valer.

Observar que el resultado es independiente de si la rotación es en θ o en $-\theta$, o de las coordenadas puestas para \mathbf{R}^2 (en realidad solamente hay que dotar de coordenadas a un entorno del punto fijo para poder calcular el diferencial). Esto se debe al que el propio teorema vincula estas cantidades, que parecen ser locales, con el número de Lefschetz, el cual es una característica del propio mapa f . ▲

Ejemplo 5.5.7 Sea $M = \mathbf{S}^2$ y sea f una rotación rígida en un ángulo θ alrededor de algún eje. Sabemos que los puntos fijos de la transformación son el polo norte y el polo sur respecto del eje elegido. Como se mencionó en el ejemplo anterior, basta con poner coordenadas cerca de los puntos fijos para calcular la contribución a de cada uno de ellos al número de Lefschetz. Sin embargo localmente, cerca de los polos norte y sur, las rotaciones actúan de igual manera que para el caso del plano; cada uno de los puntos fijos contribuye con un $+1$, de esta forma se obtiene el mismo resultado que en el ejemplo 5.5.3

$$L(f) = 2 \quad \blacktriangle$$

5.6. Teorema de punto fijo de Atiyah-Bott-Singer

El operador derivada exterior d que define la cohomología de De Rham es un ejemplo de operador elíptico. El siguiente teorema es una generalización de la formula de punto fijo de Lefschetz para cualquier complejo elíptico. Las principales contribuciones se deben a Atiyah & Bott [3] y Atiyah & Singer [5] en donde puede encontrarse la demostración del teorema. Las definiciones necesarias para enunciarlo se encuentran en el apéndice C. Un estudio extenso de dichas estructuras puede encontrarse en Tarkhanov [56] y Nakahara [44].

Teorema 5.6.1 *Dado un complejo elíptico en una variedad compacta M . Si para cada i el mapa $f : M \rightarrow M$ tiene un lifting $\phi_i : f^{-1}E_i \rightarrow E_i$ tal que los mapas inducidos $T_i : \Gamma(E_i) \rightarrow \Gamma(E_i)$ dan un endomorfismo geométrico T del complejo elíptico, entonces el numero de Lefschetz de T esta dado por*

$$L(T) = \sum_{m \in \text{Fix}(f)} \frac{\sum (-1)^i \text{Tr}(\phi_{i,m})}{|\det(1 - df_m)|}$$

Donde $L(T)$ es el numero de Lefschetz de T dado por

$$L(T) = \sum (-1)^i \text{Tr}(T_i^* : H^i(E) \rightarrow H^i(E))$$

Puede demostrarse que cuando el complejo elíptico que se utiliza es el de De Rham el teorema se reduce a la teorema de punto fijo de Lefschetz que se muestra en 5.5.5(Farmakis & Moskowitz [17]).

Utilizaremos el teorema para calcular el carácter de una representación de un grupo G inducida por una representación de un subgrupo del mismo. En la sección §4.8 se encontró una representación del grupo $SU(2)$ en secciones de un fibrado de línea sobre las órbitas coadjuntas del grupo. Se construirá a continuación una representación de G en secciones sobre G/H . Cuando H es el grupo de isotropía de G , el espacio cociente es isomorfo a las órbitas, y si además se utiliza una representación de H en \mathbf{C} , la representación inducida de G actuará en secciones de un fibrado de línea sobre G/H al igual que lo hace la representación a la que se arribó en el capítulo anterior.

Si bien para construir la representación inducida se procede como se mostró para el caso discreto, es necesario hacer algunas aclaraciones. Sea G un grupo y H un subgrupo de G . Se define M como el cociente a derecha del grupo: $M = G/H$. Los elementos de M son clases de equivalencia $[g]$ de la forma gH para $g \in G$. Tomemos ρ como una representación de H sobre el espacio vectorial de los números complejos dada por,

$$\rho : H \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{C}) \quad (5.6.2)$$

Se puede definir el fibrado de línea $\iota_*\mathbf{C}$ sobre M cuyo espacio total es el espacio cociente de $G \times \mathbf{C}$ bajo la identificación

$$(g, z) \sim (gh, \rho(h)^{-1}z)$$

es decir, los elementos de $\iota_*\mathbf{C}$ son las clases de equivalencia de $[(g, z)]$ inducida por la representación ρ (de la misma manera que para el caso discreto). Junto con la proyección $[(g, z)] \xrightarrow{\sigma} [g]$ se define el fibrado vectorial $(G \times_H \mathbf{C}, \sigma, G/H)$.

Construiremos ahora la acción inducida de G en secciones $\Gamma(\iota_*\mathbf{C})$. Las secciones en $s \in \Gamma(\iota_*\mathbf{C})$ son, localmente, de la forma³ $s([g]) = [(g, z)]$. Denotemos para cada $x \in G$ como L_x y l_x las translaciones a izquierda del grupo sobre G y G/M respectivamente, es decir

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G & ; & \quad x \longmapsto gx \\ l_g : G/H &\longrightarrow G/H & ; & \quad [x] \longmapsto [gx] \end{aligned}$$

Una clase de equivalencia $[x] \in G/H$ es punto fijo del mapa l_g si para algún $x \in [x]$ se cumple que

$$gx = xh(g, x) \quad \text{con } h \in H$$

Además, si vale que $gx = xh$ para algún $h \in H$, entonces la clase de equivalencia de $[x]$ es un punto fijo del mapa l_g . De esta forma se demuestra que l_g tiene un punto fijo si y solo si g esta contenido en una órbita de H bajo la acción adjunta de G en G , es decir, si g puede escribirse como $g = xhx^{-1}$ para algún $x \in G$ y algún $h \in H$.

El grupo G actúa naturalmente sobre secciones $s \in \Gamma(\iota_*\mathbf{C})$ mediante el pullback l_x^* definido por la composición,

$$l_x^*s = s \circ l_x$$

es decir,

$$(l_x^*s)([g]) = (s \circ l_x)([g]) = s(l_x[g]) = [xg, z]$$

³Recordar que estrictamente una sección de este fibrado es una función en las clases de equivalencia $[g]$ de la forma $s([g]) = [(g, [g, z])]$ y usualmente se omite la referencia al espacio base, pues puede reconocerse la fibra a la que pertenece utilizando el proyector $\sigma : [g, z] \longmapsto [g]$.

Observar que l_x^*s no es, estrictamente hablando, una nueva sección de $\Gamma(\iota_*\mathbf{C})$, pues al aplicar el proyector σ se obtiene que $\sigma((l_x^*s)([g])) = [xg]$, lo que indica que es un elemento de la fibra de $[xg]$. La forma correcta de entender el pullback l_x^* es pensarlo como un mapa entre secciones de nuestro fibrado original $\iota_*\mathbf{C}$ y un nuevo fibrado $l_x^*(\iota_*\mathbf{C})$ denominado pullback del fibrado $\iota_*\mathbf{C}$ por l_x . En el apéndice C se muestra la construcción precisa del último. De esta forma el pullback de l_x^* actúa como

$$l_x^* : \Gamma(\iota_*\mathbf{C}) \longrightarrow \Gamma(l_x^*(\iota_*\mathbf{C}))$$

Esto último no es una representación de G , pues el espacio vectorial de “salida” no es el mismo al de “llegada”. Para poder definir una representación de G en los elementos de $\Gamma(\iota_*\mathbf{C})$ se requiere hacer algo similar a lo realizado en 5.3.1. En donde para definir la acción de G sobre secciones se utilizaron dos elementos: la composición de f con la acción de G sobre el espacio base, y una nueva acción⁴ definida ad hoc la cual manda elementos de fibras a elementos de otras fibras; juntando esos dos elementos se obtuvo una representación de G . Realizaremos ahora el mismo procedimiento para l_x^* .

En el espacio $G \times \mathbf{C}$ se puede definir el mapa

$$L_x \times 1 : G \times \mathbf{C} \longrightarrow G \times \mathbf{C} \quad ; \quad (g, z) \longmapsto (xg, z)$$

el cual induce un mapa en el espacio cociente

$$\varphi_x = L_x \times_H 1 : \iota_*\mathbf{C} \longrightarrow \iota_*\mathbf{C} \quad ; \quad [g, z] \longmapsto [xg, z] \quad (5.6.3)$$

El cual manda elementos en la fibras de $l_x^{-1}[g]$ a elementos en la fibras de $[g]$. Notar que se puede interpretar al mapa φ_x como un lifting del mapa l_x^* . Se construye, finalmente, el mapa buscado de secciones en secciones del fibrado $\iota_*\mathbf{C}$

$$T_x = \varphi_x \circ l_{x^{-1}}^* : \Gamma(\iota_*\mathbf{C}) \longrightarrow \Gamma(\iota_*\mathbf{C})$$

En donde la acción queda definida por

$$(T_x s)[g] = \varphi_x(s(l_{x^{-1}}[g]))$$

la que no es otra cosa que la acción definida en 5.3.1, salvo que en este caso fuimos cuidadosos y notamos a las tres distintas acciones que intervienen, con T_x , φ_x y l_x .

El mapa $x \longmapsto T_x$ para cada $x \in G$ es una representación de G sobre el espacio de secciones $\Gamma(\iota_*\mathbf{C})$. Así logramos construir una representación de G inducida por una representación de un subgrupo de G . Sin embargo esta representación es de dimensión infinita y además reducible. Para obtener representaciones de tamaño manejable lo usual es restringirse, si es posible, a secciones holomorfas⁵. Esto es análogo a lo que sucede en cuantización geométrica: antes de elegir una polarización, se tiene la acción de los operadores en secciones de cierto fibrado de línea, para introducir la condición de irreducibilidad se utiliza la polarización y, en el ejemplo que se dió en el capítulo 4, se obtiene una representación sobre secciones holomorfas del fibrado.

⁴Este es el famoso **lifting** del cual habla el teorema de Atiyah-Bott-Singer.

⁵En G/H siempre puede definirse una estructura compleja, Sepanski [52, sec. 7.4.2].

Una forma de escribir las formas holomorfas de dicho fibrado, es considerar los elementos del primer grupo de cohomología de la siguiente cadena (en los apéndices B y C.3 se pueden ver las nociones necesarias de variedades complejas y cohomología de Dolbeault.)

$$0 \longrightarrow \Gamma \left(\iota_* \mathbf{C} \otimes \bigwedge^{0,0} T^* M \right) \xrightarrow{1 \otimes \bar{\partial}} \Gamma \left(\iota_* \mathbf{C} \otimes \bigwedge^{0,1} T^* M \right) \xrightarrow{1 \otimes \bar{\partial}} \dots \longrightarrow 0 \quad (5.6.4)$$

El producto tensorial entre dos fibrados vectoriales L y E sobre M se define como un nuevo fibrado sobre M cuyas fibras en cada punto $x \in M$ son el producto tensorial $L_x \otimes E_x$ entre las fibras de los fibrados originales. De esta forma las secciones del primer elemento de la cadena pueden representarse localmente⁶ por el producto

$$s \in \Gamma \left(\iota_* \mathbf{C} \otimes \bigwedge^{0,0} T^* M \right) \quad ; \quad s \simeq g(z, \bar{z}) \otimes_{\mathbf{C}} f(z, \bar{z}) \quad (5.6.5)$$

de un par de funciones $g(z, \bar{z}) \in \iota_* \mathbf{C}$ y $f(z, \bar{z}) \in \bigwedge^{0,0} T^* M$. El grupo de cohomología de grado 0 de esta cadena son secciones s de la forma 5.6.5 que al aplicar el operador $1 \otimes \bar{\partial}$ son nulas. Dado que s puede escribirse como

$$s \simeq g(z, \bar{z}) \otimes_{\mathbf{C}} f(z) = 1 \otimes_{\mathbf{C}} g(z, \bar{z}) f(z) \simeq g(z, \bar{z}) f(z, \bar{z})$$

la condición $(1 \otimes \bar{\partial})s = 0$ implica que $g(z, \bar{z}) = g(z)$ y $f(z, \bar{z}) = f(z)$. De esta forma puede identificarse al grupo de cohomología de grado 0 de la cadena 5.6.4 con las secciones localmente holomorfas del fibrado de línea $\iota_* \mathbf{C}$. Puede demostrarse que los elementos de dicho grupo de cohomología son exactamente las funciones globalmente holomorfas del fibrado $\iota_* \mathbf{C}$, además, la cadena 5.6.4 es un complejo elíptico, pues es en esencia el complejo de Dolbeault (ver apéndice C.3). Se obtiene, entonces

$$\Gamma_{hol}(\iota_* \mathbf{C}) = H^0(M, \iota_* \mathbf{C})$$

en donde H^0 refiere al grupo de cohomología mencionado anteriormente.

El teorema de Borel-Weil-Bott da una forma de describir los grupos de cohomología de esta cadena, el mismo puede encontrarse en Knapp [33], Sepanski [52], u originalmente en Bott [11]. En dichas referencias pueden encontrarse las definiciones necesarias para entender el teorema, nos limitaremos a enunciarlo y dar una idea intuitiva de qué es lo que dice.

Teorema 5.6.6 *Sea G un grupo de Lie conexo y compacto, $\lambda \in P$ un peso que caracteriza una representación de T toro maximal de G . Entonces*

$$H^i(G/T, L_\lambda) = \begin{cases} V_{w \cdot \lambda} & w \in W \text{ tal que } w \cdot \lambda \text{ es dominante, } i = \ell(w) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Donde L_λ es el fibrado de línea inducido en G/T por la representación de T . $\ell(w)$ es la longitud de $w \in W$, W es el grupo de Weyl, $w \cdot \lambda$ es la acción del W en P definida por

$$w \cdot \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho \quad ; \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$$

⁶Nuevamente no hacemos referencia al punto del espacio base al escribir la expresiones locales para las secciones.

con R_+ el espacio de raíces positivas. En el caso en el que λ sea dominante w actúa sobre él como la identidad y se obtiene que $\ell(w) = 0$, entonces cada grupo de cohomología distinto del primero es nulo y para cada λ el primero grupo de cohomología es igual a V_λ

Muy burdamente hablando, la idea del teorema es la siguiente. Un toro maximal T es el subgrupo G mas grande que es isomorfo a productos de grupos $U(1)$. Las representaciones ρ de T pueden identificarse con de acuerdo a su peso λ . Si la representación ρ_λ actúa sobre \mathbf{C} , se puede construir la representación de G inducida por la representación ρ_λ de T como se vió anteriormente. Si ocurre que λ cumple cierta condición, (es decir, es un peso dominante) sucede que todos los grupos de cohomología son nulos salvo el primero. Si λ no es dominante, lo que ocurre es que no existen secciones holomorfas (que no sean la sección nula) en el fibrado L_λ , pero puede suceder que existan representaciones irreducibles en cohomologías de mayor grado.

Como mencionan Atiyah & Bott [4], si los grupos de cohomología son todos nulos salvo el primero, el numero de Lefschetz de los endomorfismos geométricos T_x para $x \in G$ resulta ser igual al carácter del elemento del grupo en la representación obtenida de G actuando en secciones holomorfas del fibrado de línea L_λ

$$L(T_x) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(T_x^* : H^i \rightarrow H^i) = \text{Tr}(T_x^* : H^0 \rightarrow H^0) = \chi(x)$$

Además, dicha representación será irreducible. Tarkhanov [56, cap. 6] muestra que el lado derecho del teorema de Atiyah-Bott-Singer también se simplifica si se utiliza el complejo elíptico definido en 5.6.4, quedando

$$L(T_x) = \sum_{m \in \text{Fix}(l_x)} \frac{\text{Tr}(\varphi_{x,m})}{\det_{\mathbf{C}}(1 - dl_{x-1}(m))}$$

con φ el mismo lifting definido en 5.6.3. Notar que ahora el determinante es el determinante complejo. Además, notar que dado que el lifting φ_x mapea elementos de la fibra de $l_{x-1}[g]$ a elementos de la fibra de $[g]$, solamente cuando la clase $[g]$ es un punto fijo de l_{x-1} la traza de φ_x se encuentra bien definida.

Juntando todo lo anterior, el carácter de esta representación puede calcularse mediante la siguiente fórmula

$$\chi(x) = \sum_{m \in \text{Fix}(l_x)} \frac{\text{Tr}(\varphi_{x,m})}{\det_{\mathbf{C}}(1 - dl_{x-1}(m))} \quad (5.6.7)$$

5.7. Aplicación al grupo $SU(2)$

En esta sección utilizaremos la fórmula obtenida en 5.6.7 al caso en el que el grupo G es $SU(2)$. Por comodidad notemos a los elementos del grupo

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \mid \text{con } \alpha, \beta \in \mathbf{C} \mid |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} = \{(\alpha, \beta)\}$$

El producto de elementos de grupo queda

$$(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - \bar{\beta}b, a\beta + b\bar{\alpha})$$

El elemento inverso a (α, β) queda de la forma

$$(\alpha, \beta)^{-1} = (\bar{\alpha}, -\beta)$$

Tomemos H como el toro maximal de G , es decir $U(1)$, el cual se puede escribir como

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & \bar{q} \end{pmatrix} \text{ con } q = e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\} = \{(q, 0)\}$$

Utilicemos como representación⁷ de H sobre los complejos, la definida por

$$\rho_m : U(1) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbf{C}) \quad ; \quad \rho_m \left(e^{i\theta}, 0 \right) z = e^{im\theta} z = q^m z, \quad \text{con } m \text{ entero positivo} \quad (5.7.1)$$

En este caso el peso de cada representación ρ_m es precisamente m , y además, cada m es un peso dominante, entonces se está en las condiciones mencionadas anteriormente en el teorema 5.6.6.

Utilizando el mapa de Hopf, cada elemento de $SU(2)$ puede escribirse de la forma

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ con } \alpha = \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}(\psi+\phi)} \text{ y } \beta = \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)} \right\}$$

con $\eta \in [0, \pi]$, $\phi, \psi \in [0, 2\pi)$. Al cocientar por elementos de H se obtiene que las clases de equivalencia pueden identificarse por

$$SU(2)/U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ con } \alpha = \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\phi} \text{ y } \beta = \sin\left(\frac{\eta}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\phi} \right\} \quad (5.7.2)$$

Es fácil ver que $SU(2)/U(1)$ es difeomorfo a la esfera \mathbf{S}^2 viendo el mapa

$$\begin{cases} \alpha\beta + \bar{\alpha}\bar{\beta} & = & x_1 & = & \sin(\eta) \cos(\phi) \\ i(\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta}) & = & x_2 & = & \sin(\eta) \sin(\phi) \\ \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} & = & x_3 & = & \cos(\eta) \end{cases}$$

Los elementos de $SU(2)/U(1)$ son las clases de equivalencia $[(\alpha, \beta)]$ definidas por la identificación $(\alpha, \beta) \sim (\alpha q, \beta \bar{q})$ con $q = e^{i\theta}$. Los elementos de $SU(2) \times \mathbf{C}$ son de la forma $((\alpha, \beta), z)$ mientras que los elementos de $\iota_* \mathbf{C}$ son las clases de equivalencia $[(\alpha, \beta), z]$ definidas por la identificación $((\alpha, \beta), z) \sim ((\alpha q, \beta \bar{q}), \rho(q)^{-1} z)$.

Como ya mencionamos la acción del elemento $(a, b) \in G$ tiene puntos fijos en $SU(2)/U(1)$ si y solo si vale que (a, b) puede escribirse como

$$(a, b) = (\alpha, \beta)(q, 0)(\bar{\alpha}, -\beta) \quad \text{para algún } (\alpha, \beta) \in SU(2), (q, 0) \in U(1)$$

Esto último lleva al sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} a = |\alpha|^2 q + |\beta|^2 \bar{q} \\ b = \alpha\beta(\bar{q} - q) \end{cases} \quad (5.7.3)$$

⁷Es conocido que éstas son todas las representaciones irreducibles de $U(1)$

Supongamos que queremos calcular el carácter del elemento del grupo $x = e^{\theta u_3}$ con u_3 el elemento del álgebra definido en 4.1.5. En la representación inducida el elemento actúa como $T_x = \varphi_q \circ l_{\bar{q}}^*$ con $q = e^{i\theta}$. Si el elemento u_3 juega el papel del hamiltoniano de un sistema, el carácter de este elemento en dicha representación será la función de partición del hamiltoniano.

Los puntos fijos de la acción del elemento $(\bar{q}, 0)$ en $SU(2)/U(1)$ son las clases de equivalencia en $[(1, 0)]$ y $[(0, 1)]$, pues

$$\begin{aligned} (\bar{q}, 0)[(1, 0)] &= [(\bar{q}, 0)] = [(1, 0)] \\ (\bar{q}, 0)[(0, 1)] &= [(0, \bar{q})] = [(0, 1)] \end{aligned}$$

Otra forma de ver esto es observar de 5.7.2 que el mapa $l_{(\bar{q}, 0)}$ con $q = e^{i\theta}$ actúa sobre elementos de $SU(2)/U(1)$ cambiando $\phi \mapsto \phi + 2\theta$, es decir es una rotación en 2θ alrededor del eje x_3 . Los puntos fijos $[(1, 0)]$ y $[(0, 1)]$ representan el polo norte y el polo sur de la esfera, es decir $x_3 = 1$ y $x_3 = -1$ respectivamente y son los únicos puntos fijos que tiene el mapa.

El lifting φ_q manda elementos de la fibra de $(\bar{q}, 0)[(1, 0)]$ a elementos de la fibra de $[(1, 0)]$. Notar que estos dos puntos son en realidad el mismo pues son puntos fijos, la traza del lifting φ_q solamente está bien definida en los puntos fijos. Un elemento de la fibra de $[(\bar{q}, 0)]$ se escribe como $[(\bar{q}, 0), z]$, y se obtiene, al aplicar el lifting

$$\varphi_q[(\bar{q}, 0), z] = (L_{(q, 0)} \times_{U(1)} 1)[(\bar{q}, 0), z] = [(1, 0), z] = [(\bar{q}, 0), \rho(\bar{q})^{-1}z] = [(\bar{q}, 0), q^m z]$$

es decir que φ_q actúa en la fibra \mathbf{C} del polo norte mandando $z \mapsto q^m z$. La traza de esta transformación lineal es igual a q^m . Observar que esto no depende del representante elegido para calcularlo, pues por ejemplo $[(\bar{q}, 0), z] = [(1, 0), \bar{q}^m z]$, al realizar la misma cuenta con este representante se obtiene

$$\varphi_q[(1, 0), \bar{q}^m z] = (L_{(q, 0)} \times_{U(1)} 1)[(1, 0), \bar{q}^m z] = [(q, 0), \bar{q}^m z] = [(1, 0), \rho(q)(\bar{q}^m z)] = [(1, 0), q^m(\bar{q}^m z)]$$

y nuevamente φ_q actúa en \mathbf{C} mandando $f(z) \mapsto q^m f(z)$ con $f(z) = \bar{q}^m z$. Un cálculo análogo se puede realizar para el punto fijo $[(0, 1)]$

$$\varphi_q[(0, \bar{q}), z] = (L_{(q, 0)} \times_{U(1)} 1)[(0, \bar{q}), z] = [(0, 1), z] = [(0, \bar{q}), \rho^{-1}(q)z] = [(0, \bar{q}), \bar{q}^m z]$$

Se obtiene que la traza del mapa φ_q actuando en la fibra del polo sur es igual a \bar{q}^m .

Los ingredientes que faltan ahora son los determinantes de los diferenciales de los mapas $l_{(\bar{q}, 0)}$. Para eso vamos a poner un sistema de coordenadas sobre la esfera. Puede escribirse la proyección estereográfica de la esfera que se utilizó en § 4.4. En término de las coordenadas esféricas al abierto U^+ (la esfera sin el polo norte) se lo puede dotar de la coordenada compleja

$$z = \frac{\sin(\eta)}{1 - \cos(\eta)} e^{i\phi}$$

mientras que en el abierto U^- se define

$$w = \frac{\sin(\eta)}{1 + \cos(\eta)} e^{-i\phi}$$

En estas coordenadas el polo sur se representa por $z = 0$ en el abierto U^+ mientras que el polo norte se representa por $w = 0$ en el abierto U^- . El mapa $l_{(\bar{q},0)}$ actúa de manera simple, pues manda $\phi \mapsto \phi + 2\theta$, es decir

$$\begin{aligned} l_{(\bar{q},0)}z &= \frac{\sin(\eta)}{1 - \cos(\eta)} e^{i(\phi+2\theta)} = q^2 z \\ l_{(\bar{q},0)}w &= \frac{\sin(\eta)}{1 + \cos(\eta)} e^{-i(\phi+2\theta)} = \bar{q}^2 w \end{aligned}$$

De esta forma, los diferenciales de los mapas quedan \bar{q}^2 y q^2 para el polo norte y el polo sur respectivamente. Los determinantes quedan simplemente $(1 - \bar{q}^2)$ y $(1 - q^2)$

Se obtiene el carácter de la representación inducida, para el elemento $e^{\theta u_3}$

$$\chi(e^{\theta u_3}) = \frac{q^m}{1 - \bar{q}^2} + \frac{\bar{q}^m}{1 - q^2} = \frac{q^{m+1} - \bar{q}^{m+1}}{q - \bar{q}} = \frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Este es el mismo resultado que se obtuvo en 4.8.7 mediante el elaborado proceso de cuantización geométrica. Para calcular la dimensión de la representación obtenida, alcanza con evaluar la traza del elemento identidad como se mencionó en 5.1.4, es decir $\theta = 0$. En este caso vale que

$$\frac{\sin((m+1)\theta)}{\sin(\theta)} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} (m+1) \quad \text{con } m \text{ entero}$$

Nuevamente llamando $m = 2\ell$ se ve que utilizando este método se obtuvo, para cada ℓ semientero, el carácter de una representación del grupo $SU(2)$ actuando en secciones holomorfas sobre una esfera, en cada caso la representación tiene dimensión $2\ell + 1$. Es decir se calculó el carácter de la misma representación (salvo un isomorfismo) que se obtuvo para el grupo mediante el procedimiento de cuantización geométrica. Notar la simplicidad del uso de 5.6.7 frente a toda la construcción geométrica que se requirió para realizar la cuantización geométrica en el capítulo 4.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis se estudiaron dos métodos distintos para obtener caracteres de representaciones irreducibles de grupos. La motivación es que en muchos sistemas físicos, dichos caracteres pueden interpretarse como la función de partición canónica del sistema, en donde se condensa la degeneración de energías. Por un lado se utilizó el método de cuantización geométrica, con el cual posible obtener la función de partición únicamente luego de realizar la cuantización del sistema, tarea que en general puede ser realmente complicada. Por otro lado se introdujo y utilizó el teorema de Atiyah-Bott-Singer, el cual vimos que da una forma más “simple” de obtener los mismos resultados. En este último caso la simpleza radica en que no es necesario realizar la cuantización explícita del sistema, pudiendo obtenerse la función de partición como resultado previo y solamente realizando una serie de cálculos locales en torno a puntos fijos del espacio de fases clásico.

Primero se realizó la cuantización geométrica del grupo $SU(2)$, mas precisamente, se realizó la cuantización de un conjunto de funciones sobre las órbitas coadjuntas de $SU(2)$ que cumplen el álgebra de las componentes de momento angular. Se obtuvieron operadores que actúan en el espacio vectorial de secciones globalmente holomorfas de un fibrado de línea sobre las órbitas coadjunta de $SU(2)$, las cuales resultan ser esferas de radios constante.

La cuantización geométrica estableció una condición para la existencia de secciones no nulas en dichos fibrados, en nuestro caso existen secciones globalmente holomorfas solamente cuando el momento angular total es semientero, y estos son los únicos casos en los que puede realizarse el procedimiento. El espectro de energías obtenido para el operador asignado a la función clásica L_z para cada ℓ se corresponde con los resultados canónicos, es decir

$$\text{Spec}(\delta_{L_z}) = m\hbar \quad \text{con} \quad m \in \{\ell, \ell - 1, \dots, -\ell + 1, -\ell\}$$

Una vez realizada la cuantización geométrica, para cada ℓ se obtuvo una representación irreducible del grupo $SU(2)$, y se pudo computar explícitamente el carácter de una rotación en z obteniéndose el conocido resultado

$$\frac{\sin((2\ell + 1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

Luego se utilizó el teorema de Atiyah-Bott-Singer para calcular el carácter de mismo elemento del grupo en una representación muy particular, brindada por el teorema de Borel-Weil-Bott: el grupo

actuando sobre secciones holomorfas de $SU(2)/U(1)$, que resultan ser esferas, es decir, el mismo espacio vectorial que se obtuvo al realizar la cuantización geométrica. La ventaja del teorema radica en que solamente se necesitó realizar unas operaciones en torno a los puntos fijos de la acción del elemento del grupo. Se obtuvo el mismo carácter que en el caso de la cuantización geométrica. Pero de una manera notoriamente más sintética, y sin la necesidad de justificar la introducción de diversas estructuras geométricas.

Sobre la intervención del teorema de Borel-Weil-Bott y la cuantización geométrica de un sistema Witten [61] dice en 1989,

“A useful point of view is the following. A representation R_i of a group G should be seen as a quantum object. This representation should be obtained by quantizing a classical theory. The Borel-Weil-Bott theorem gives a canonical way to exhibit for every irreducible representation R of a compact group G a problem in classical physics, with G symmetry, such that the quantization of this classical problem gives back R as the quantum Hilbert space. One introduces the “flag manifold” G/T , with T being a maximal torus in G , and for each representation R one introduces a symplectic structure ω_R on G/T , such that the quantization of the classical phase space G/T , with the symplectic structure ω_R , gives back the representation R . Many aspects of representation theory find natural explanations by thus regarding representations of groups as quantum objects that are obtained by quantization of classical phase spaces.”

En esta tesis se siguieron estas ideas para el caso de $SU(2)$. Como ya se mencionó, para el caso de $SU(2)$ el teorema de Atiyah-Bott-Singer nos regala la función de partición. La importancia de esto reside en que el teorema de Atiyah-Bott-Singer podría brindar resultados completamente válidos, previos a la cuantización explícita de un sistema.

Es importante mencionar que el teorema de Atiyah-Bott-Singer vale únicamente en variedades compactas. En un trabajo anterior, Witten [60, 1988] utiliza estas ideas para calcular el carácter de Virasoro (relevante en gravedad AdS_3 y teorías de campos conformes bidimensionales), aún sabiendo que está fuera del rango de validez del teorema: sus órbitas coadjuntas son infinito dimensionales y no compactas, cualidades que también posee el mismo grupo.

En un trabajo muy reciente de Hochs & Wang [24, 2016] dan una generalización del teorema de Atiyah-Bott-Singer (en realidad, dan una generalización del teorema de Atiyah-Segal-Singer, que es una versión del teorema dada en [6]) a variedades no compactas que resulta un candidato ideal para la evaluación del carácter de Virasoro propuesta por Witten.

Continuando con las ideas de este trabajo, si se aspira a obtener la función de partición de Virasoro, el próximo pasos sería, primero estudiar la cuantización geométrica del grupo $SL(2, \mathbf{R})$. Dicho grupo presenta órbitas coadjuntas de dimensión dos pero en este caso no compactas, en ellas es necesaria introducir la corrección de *half-form*, es decir el espacio de Hilbert que se obtiene con cuantización geométrica no será simplemente el espacio de secciones polarizadas sobre las órbitas coadjuntas si no que cargará con una parte de la medida de integración.

Así mismo, dado que las órbitas de $SL(2, \mathbf{R})$ son no compactas resulta un buen candidato para entender la generalización del teorema de Atiyah-Bott-Singer dada por Hochs & Wang [24]. Para que

la misma devuelva el carácter de la representación, debería suceder nuevamente que todos los grupos de cohomología sean nulos salvo uno. Este hecho podría ser brindado nuevamente por el teorema de Borel-Weil-Bott, pues si bien en el caso de $SU(2)$ el único grupo de cohomología no nulo es el de grado 0 (secciones holomorfas del fibrado), el teorema contempla la posibilidad de que la representación sea en grupos de cohomología de grado mayor. Así, por ejemplo el grupo de cohomología de grado 1 está representado localmente por elementos de la forma

$$s \in H^1(M, \iota_* \mathbf{C}) \quad s \simeq f(z) \otimes_{\mathbf{C}} g(z) dz$$

con $f(z), g(z)$ holomorfas. Dichas expresiones locales resultan similares a las que se introducen en la corrección por *half-form* en la cuantización geométrica.

Finalmente, una vez entendido el caso de $SL(2, \mathbf{R})$ (el cual resulta ser un subgrupo de Virasoro) y habiéndose ganado experiencia con la aplicación del teorema al caso de variedades y grupos no compactos, debería poder enfrentarse el propio grupo de Virasoro. Lograr entender el uso del teorema de Borel-Weil-Bott y Atiyah-Bott-Singer tendría grandes implicancias en la cuantización rigurosa y no perturbativa de gravedad AdS_3 , así como también en el contexto de teorías conformes en dos dimensiones.

Apéndice A

Fibrados de línea con conexión y condición de integrabilidad

Definición A.0.1 Sea M una variedad, un **fibrado de línea complejo** L sobre M es una variedad L junto un mapa $\pi : L \rightarrow M$ tal que

(i) Para cada $m \in M$, la llamada **fibra** L_m del punto m , definida por $L_m = \pi^{-1}(m)$ es un espacio vectorial de dimensión 1 complejo.

(ii) Para cada $m \in M$ existe un abierto $U_m \subset M$ que contiene a m y un difeomorfismo φ de la forma

$$\varphi : \pi^{-1}(U_m) \rightarrow U_m \times \mathbf{C}, \quad \varphi(q) = (\pi(q), \phi(q))$$

tal que $\phi|_{L_p} : L_p \rightarrow \mathbf{C}$ es un isomorfismo entre cada una de las fibras y \mathbf{C} .

La idea de la definición puede entenderse intuitivamente de la siguiente manera. Dado un espacio vectorial V uno puede construir un nuevo espacio vectorial $V \times \mathbf{C}$ “pinchando” en cada punto de V con un espacio vectorial \mathbf{C} , los elementos del nuevo espacio vectorial se escriben como (v, z) con $v \in V$ y $z \in \mathbf{C}$. Así, como las variedades se ven para cada abierto como espacios vectoriales, los fibrados de línea complejo se ven para cada abierto de la variedad como $M \times \mathbf{C}$.

Al par (U, φ) se lo llama **trivialización local de L**. Si existe una trivialización local sobre toda la variedad, entonces se llama **trivialización global de L**. En ese caso L se llama **fibrado trivial** y es difeomorfo a $M \times \mathbf{C}$.

Una mapa $s : U \subseteq M \rightarrow L$ se llama **sección del fibrado** si $s(m) \in L_m$ para todo $m \in U$ (equivalente a decir $\pi \circ s = \text{Id}_M$), es decir, a cada punto m del abierto, le asigna un punto del espacio vectorial, que es la fibra del propio punto m . Una sección no nula en U es una sección tal que $s(m) \neq 0 \in L_m$ para todo $m \in U$. Se nota como $\Gamma(L)$ al espacio vectorial de todas las secciones de L , alternativamente puede notarse como $C^\infty(M, L)$ o $\Gamma(M, L)$. Dicho espacio es un espacio vectorial con la suma de secciones definida punto a punto sumando los elementos en las fibras y haciendo lo mismo para el producto por funciones.

Las secciones también pueden entenderse de una forma bastante intuitiva, en nuestro ejemplo de

$V \times \mathbf{C}$ se podría tomar cada punto v del espacio vectorial V y asignarle un elemento del espacio vectorial complejo que se asignó previamente a ese elemento v , $v \mapsto z(v)$ esto parecería ser una función $z : V \rightarrow \mathbf{C}$ pero cuando la miramos en $V \times \mathbf{C}$ resulta que es de la forma $(v, z(v))$. Nuevamente las secciones de un fibrado de línea, se ven localmente de esta manera.

Sea $\{U_j, \varphi_j\}$ conjunto de abiertos que cubren la variedad, con sus respectivas trivializaciones locales. Para cada abierto $U_j \subset M$, siempre se puede encontrar una sección s_j no nula en U_j , pues se puede definir mediante

$$s_j(m) = \phi_j^{-1}(1) \in L_m \quad (\text{A.0.2})$$

para todo $m \in U_j$. Al conjunto $\{U_j, s_j\}$ se lo llama **sistema local de L**. Cualquier sección t puede escribirse localmente en el abierto U_j multiplicando alguna función C^∞ $f_j : U_j \rightarrow \mathbf{C}$ por la sección en U_j ,

$$t_j(m) = f_j(m)s_j(m) \quad \text{para todo } m \in U_j$$

se dice que la sección t esta localmente representada por f_j en cada uno de los abiertos U_j , es usual utilizar la notación $\frac{t}{s_j}$ para referirse al representante local f_j . En particular en la intersección de dos abiertos $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ la sección no nula s_k puede expresarse como el producto de s_j por alguna función $c_{jk} : (U_j \cap U_k) \rightarrow \mathbf{C}$, es decir

$$s_k(m) = c_{jk}(m)s_j(m) \quad \text{para todo } m \in U_j \cap U_k$$

Las funciones c_{jk} se llaman **funciones de transición**, en virtud de la definición A.0.2 se observa que $c_{jk} = \phi_k^{-1} \circ \phi_j$. Las funciones de transición cumplen las siguientes condiciones

$$c_{jk}^{-1} = c_{kj} \quad c_{jk}c_{kl} = c_{jl}$$

en donde en el ultimo caso, j, k, l son tales que la triple intersección es no nula, $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$. Si una sección t está localmente representada por las funciones f_j y f_k en los abiertos U_j y U_k respectivamente, sus representantes locales estarán vinculadas por las funciones de transición, pues en la intersección $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ vale que

$$t = t_j = f_j s_j = f_j c_{kj} s_k = f_k s_k \Leftrightarrow f_j c_{kj} = c_k$$

es decir, los representantes locales de t se transforman al cambiar de abiertos multiplicado por las funciones de transición.

Veamos ahora que es lo que ocurre al introducir una conexión sobre el fibrado de línea.

Definición A.0.3 Sea L un fibrado de línea con conexión ∇ (ver definición 2.1.6). Sea $\{U_j, s_j\}$ un sistema local de L . Siempre se puede construir la 1-forma en U_j $\Theta_j : \mathcal{X}_{\mathbf{C}}(U_j) \rightarrow C^\infty(U_j, \mathbf{C})$ llamada **potencial de la conexión**, definida por

$$\Theta_j(X) = \frac{\nabla_X s_j}{s_j} \quad (\text{A.0.4})$$

donde la división refiere al representante local de la sección $\nabla_X s_j$ referida a s_j

Veamos que las funciones de transición quedan determinadas por las formas locales del potencial de la conexión. Pues en las intersecciones $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ se cumple que

$$\Theta_j(X) = \frac{\nabla_X s_j}{s_j} = \frac{\nabla_X(c_{kj}s_k)}{c_{kj}s_k} = \frac{X(c_{kj})}{c_{kj}} + \frac{\nabla_X s_k}{s_k} = (d \ln c_{kj} + \Theta_k)(X)$$

equivalente a

$$\Theta_j - \Theta_k = d \ln c_{kj} \quad (\text{A.0.5})$$

Se llama a la familia $\{U_j, s_j, \Theta_j\}$ **forma local** de la conexión ∇ . De esta forma, para alguna sección cualquiera t , representada localmente por f_j en U_j la sección $\nabla_X t$ se calcula localmente como

$$\nabla_X t = \nabla_X(f_j s_j) = (X(f_j) + \Theta_j(X)f_j)s_j \quad (\text{A.0.6})$$

La construcción local de la conexión ∇ que se dió es es única, como indica la siguiente proposición. Para la demostración se puede consultar Kostant [36, pg. 98-100]

Proposición A.0.7 *Sea L un fibrado de línea complejo sobre M , sea $\{U_j, s_j\}$ un sistema local de L y $\{\Theta_j\}$ una familia de 1-formas locales que satisfacen A.0.5. Entonces existe una única conexión ∇ en L cuya forma local es $\{U_j, s_j, \Theta_j\}$.*

La condición A.0.5 dice algo más sobre los potenciales Θ , pues en las intersecciones $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ se cumple que

$$d(\Theta_j - \Theta_k) = d(d \ln c_{kj}) = 0$$

entonces vale que $d\Theta_j = d\Theta_k$. De esta forma existe una única dos forma definida localmente por

$$\omega|_{U_j} = d\Theta_j$$

además, esta 2-forma es cerrada. Definida de esta forma, se puede demostrar que ω coincide con la curvatura de la conexión ∇ definida usualmente por

$$\text{curv}(\nabla)(X, Y)s = ([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})s$$

pues supongamos que t esta representada localmente en s_j por f_j , entonces

$$\begin{aligned} & \text{curv}(\nabla)(X, Y)s \\ &= \nabla_X(Y(f_j)s_j + \Theta(X)f_j s_j) - \nabla_Y(X(f_j)s_j + \Theta(Y)f_j s_j) - \nabla_{[X, Y]}t \\ &= X(Y(f_j))s_j + X(\Theta(Y))f_j s_j + \Theta(Y)X(f_j)s_j + \Theta(X)(Y(f_j)s_j + \Theta(Y)f_j s_j) \\ &\quad - Y(X(f_j))s_j - Y(\Theta(X))f_j s_j - \Theta(X)Y(f_j)s_j - \Theta(Y)(X(f_j)s_j + \Theta(X)f_j s_j) \\ &\quad - [X, Y](f_j)s_j - \Theta([X, Y])f_j s_j \end{aligned}$$

En la última expresión se anulan todos los términos salvo

$$\text{curv}(\nabla)(X, Y)s = (X(\Theta(Y)) - Y(\Theta(X)) - \Theta([X, Y]))f_j s_j = d\Theta(X, Y)s \quad (\text{A.0.8})$$

dado que esto vale para todos los abiertos U_j y todos los campos vectoriales X e Y , vale que globalmente $d\Theta = \omega$.

Veamos ahora de donde surge la condición de integrabilidad para la conexión ∇ . Elijamos un fibrado de línea (L, π, M) sobre una variedad M con conexión ∇ con forma local $\{U_j, s_j, \Theta_j\}$. Localmente la conexión esta caracterizada por

$$\nabla_X t = (X(f) + \Theta_j(X)f_j) s_j$$

donde t es una sección en L , s_j la sección no nula y $f_j : U_j \rightarrow \mathbf{C}$ la función que representa localmente a t . Consideremos ahora una curva cerrada $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_j \subset M$ parametrizada por $\tau \in [0, 1]$ con $\gamma(0) = m \in U$, y $\dot{\gamma}$ un campo de vectores tangente definidos sobre la imagen de γ . El transporte paralelo de t por $\dot{\gamma}$ es una nueva sección $\tilde{t}(\tau)$ que cumple $\nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{t} = 0$ y $\tilde{t}(\tau = 0) = t$. Localmente está caracterizada por una función \tilde{f}_j que cumple

$$\left(\frac{d\tilde{f}_j}{d\tau} + \Theta_j(\dot{\gamma})f \right) = 0$$

Esto es una ecuación diferencial ordinaria para \tilde{f}_j , junto con la condición inicial la solución es única y vale

$$\tilde{f}_j(\tau) = \exp\left(\tau \int_{\gamma} \Theta_j\right) f_j$$

Si la curva es cerrada, el transporte paralelo de una sección cumple

$$s(m) = \xi s(m) \quad \text{con} \quad \xi = \exp\left(\oint_{\gamma} \Theta_j\right)$$

Supongamos que γ es la frontera de una superficie Σ , y que Σ se encuentra en el dominio de $\Theta_j U_j$, entonces puede utilizarse el teorema de Stokes

$$\xi = \exp\left(\oint_{\gamma} \Theta\right) = \exp\left(\int_{\partial\Sigma} \Theta_j\right) = \exp\left(\int_{\Sigma} d\Theta_j\right) = \exp\left(\int_{\Sigma} \omega\right)$$

Supongamos ahora que γ es la frontera de una segunda superficie Σ' tal que $\Sigma \cup \Sigma'$ forma una superficie cerrada y orientable (teniendo en cuenta las orientaciones $\partial\Sigma = \gamma$ y $\partial\Sigma' = -\gamma$), entonces también vale

$$\xi = \exp\left(\oint_{\gamma} \Theta\right) = \exp\left(-\int_{\Sigma'} \omega\right)$$

juntado ambas cosas

$$1 = \exp\left(\oint_{\gamma} \Theta_j + \oint_{-\gamma} \Theta_j\right) = \exp\left(\int_{\Sigma} \omega + \int_{\Sigma'} \omega\right) = \exp\left(\oint_{\Sigma \cup \Sigma'} \omega\right)$$

lo cual se cumple si y solo si, la integral de ω en la superficie cerrada es multiplo entero de $2\pi i$. Esto es solo la condición necesaria para que exista el fibrado de línea. Weil demostró que la reciproca también es válida y es el punto de partida de la cuantización geométrica. En ese caso la conexión es

$$\nabla_X = X - \frac{i}{\hbar} \theta$$

con θ el potencial simpléctico. Es decir $\Theta = -\frac{i}{\hbar}\theta$, considerando eso las funciones de transición cumplen

$$d \ln c_{kj} = \frac{1}{i\hbar}(\theta_j - \theta_k) \quad (\text{A.0.9})$$

de esta forma, si por ejemplo $\theta_k = \theta_j + du$ para alguna función u , las funciones de transición son de la forma $e^{\frac{i}{\hbar}u}$ que es la transformación de Gauge que se pide.

La curvatura de la conexión queda proporcional a la forma simpléctica,

$$\text{cur}(\nabla) = -\frac{i}{\hbar}\omega \quad (\text{A.0.10})$$

y la condición de integrabilidad se traduce a pedir que la integral de la forma simpléctica en cualquier superficie sin bordes y orientable de dimensión dos sea múltiplo entero de $2\pi\hbar$

Apéndice B

Variedades complejas

Una variedad compleja M de dimensión n es una variedad diferenciable que puede ser cubierta por abiertos $\{U_\alpha\}$ que admiten mapas coordenados $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{C}^n$ tales que $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ es holomorfa en $\varphi(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbf{C}^n$ para todo α y β .

Una función en un abierto $U \subset M$ es holomorfa si, para todo α se cumple que $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es holomorfa en $\varphi(U \cap U_\alpha) \subset \mathbf{C}^n$. Una colección de funciones $z = (z_1, \dots, z_n)$ en $U \subset M$ se dice sistema de coordenadas holomorfo si $\varphi_\alpha \circ z^{-1}$ y $z \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son holomorfos en $z(U \cap U_\alpha)$ y $\varphi(U \cap U_\alpha)$ respectivamente, para cada α . Un mapa $f : M \rightarrow N$ entre variedades complejas se dice holomorfo si lleva funciones holomorfas en M a sistemas de coordenadas holomorfos en N .

Sea M una variedad compleja de dimensión n . Dado un punto $m \in M$ y un sistema de coordenadas holomorfo $z = (z_1, \dots, z_n)$ alrededor de m , hay diferentes nociones de espacios tangente a M en el punto m :

(1). $T_{\mathbf{R},m}M$ es el usual espacio tangente real a M en el punto m . En este caso se considera a M como una variedad real de dimensión $2n$. $T_{\mathbf{R},m}M$ puede construirse como el espacio \mathbf{R} -lineal de derivaciones de funciones reales C^∞ en un entorno de m . Si se escribe $z_i = x_i + ip_i$, entonces

$$T_{\mathbf{R},m}M = \mathbf{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right\}$$

(2). $T_{\mathbf{C},m}M = T_{\mathbf{R},m}M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ es el llamado espacio tangente complexificado a M en el punto m . Puede construirse como el espacio de las \mathbf{C} -lineales derivaciones de funciones complejas C^∞ en un entorno de m , se puede escribir

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{C},m}M &= \mathbf{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right\} \\ &= \mathbf{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\} \end{aligned}$$

(3). $T'_m M = \mathbf{C} \{ \partial_{z_i} \} \subset T_{\mathbf{C},m}M$ es el espacio tangente holomorfo a M en el punto m . Puede construirse como subespacio de $T_{\mathbf{C},m}M$ que consiste en las derivaciones que se anulan en funciones antiholomorfas, (es decir funciones f tal que \bar{f} es holomorfa) y por ese motivo independientes de sistema de

coordenadas holomorfo elegido (z_1, \dots, z_n) . El subespacio $T_m''M = C\{\partial_{\bar{z}_i}\}$ se llama espacio tangente antiholomorfo a M en el punto m . Claramente se cumple que,

$$T_{C,m}M = T_m'M \oplus T_m''M$$

Para variedades complejas M y N cualquier mapa $C^\infty f : M \rightarrow N$ induce un mapa lineal

$$f_* = df : T_{R,m}M \rightarrow T_{R,f(m)}N$$

y de esta forma, induce un mapa lineal

$$df : T_{C,m}M \rightarrow T_{C,f(m)}$$

pero en general, no induce un mapa de $T_m'M$ a $T_{f(m)}'N$. De hecho un mapa $f : M \rightarrow N$ es holomorfo si y solo si

$$df(T_m'M) \subset T_{f(m)}'N$$

para todo $m \in M$. En muchos casos si se tiene una variedad real de dimensión $2n$ resulta ventajoso verla como una variedad compleja, por ejemplo, dado \mathbf{R}^2 con coordenadas $\{q, p\}$. Una curva en la variedad es de la forma $c(t) = (q(t), p(t))$, sus vectores tangente son de la forma,

$$\dot{q}(t)\partial_x + \dot{p}(t)\partial_q \in T_{R}\mathbf{R}^2$$

que puede verse como

$$\dot{z}(t)\partial_z \in T_C\mathbf{R}^2$$

esto permite “hacer geometría” solamente en la componente holomorfa del espacio tangente.

Sean M y N variedades complejas, $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordenadas holomorfas centradas en $p \in M$ y $w = (w_1, \dots, w_m)$ coordenadas holomorfas centradas en $q \in N$. Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa holomorfo con $f(p) = q$. Hay distintas nociones del jacobiano de f :

(1). Si se escribe $z_i = x_i + iy_i$ y $w_i = u_i + v_i$, entonces en término de las bases $\{\partial_{x_i}, \partial_{y_i}\}$ y $\{\partial_{u_i}, \partial_{v_i}\}$ para $T_{R,p}M$ y $T_{R,q}M$ respectivamente, el mapa lineal $f_* = df$ está dado por la matriz de $2m \times 2n$,

$$\mathcal{J}_R(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_j} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_j} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_j} \end{pmatrix}$$

(2). En término de las bases $\{\partial_{z_i}, \partial_{\bar{z}_i}\}$ y $\{\partial_{w_i}, \partial_{\bar{w}_i}\}$ para $T_{C,p}M$ y $T_{C,q}N$, f_* está dada por

$$\mathcal{J}_C(f) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}(f) & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{J}(f)} \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathcal{J}(f) = \left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z_j} \right)$$

Observar que los mapas holomorfos preservan la orientación, pues

$$\det \mathcal{J}_R = \det \mathcal{J}(f) \cdot \det \overline{\mathcal{J}(f)} = |\det \mathcal{J}(f)|^2 \geq 0$$

Apéndice C

Definiciones varias

C.1. Definiciones del capítulo 1

Definición C.1.1 Sea una variedad M y un campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ sobre M . Una **curva integral de X** en M es una curva $c : I \subset \mathbf{R} \rightarrow M$ tal que sus vectores tangente en los puntos $m = c(t)$ coinciden con los vectores $X(m)$, es decir

$$c'(t) = X(c(t)) \quad \text{para todo } t \in I$$

Definición C.1.2 Sea M una variedad, $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo vectorial sobre M con $\phi^{(m)}$ su curva integral que empieza en el punto $m \in M$, es decir $\phi^m : \mathbf{R} \rightarrow M$. Se define el **flujo** de X como la familia de mapas de la variedad que a cada $t \in \mathbf{R}$ asigna el difeomorfismo

$$\phi_t : M \rightarrow M \quad ; \quad \phi_t(m) = \phi^m(t)$$

es decir, para cada t , traslada cada punto m de la variedad, a lo largo de las curvas integrales de X y lo lleva hasta el punto que de la curva integral en tiempo t .

C.2. Cohomología de De Rham

Sea M una variedad diferenciable. Sea $A^p(M, \mathbf{R})$ el espacio de todas las formas diferenciables de grado p en M y $Z^p(M, \mathbf{R})$ el subespacio de p -formas cerradas. Dado que $d^2 = 0$, claramente se cumple que $d(A^{p-1}(M, \mathbf{R})) \subset Z^p(M, \mathbf{R})$, es decir la derivada exterior de toda $(p-1)$ -forma es una forma cerrada. Al cociente de grupos¹

$$H_{dR}^p(M, \mathbf{R}) = \frac{Z^p(M, \mathbf{R})}{d(A^{p-1}(M, \mathbf{R}))}$$

se lo llama cohomología de De Rham de grado p , una p -forma ω cerrada en M define una clase de equivalencia en $H_{dR}^p(M, \mathbf{R})$ llamada cohomología de ω , dos formas cerradas ω y ω' se encuentran

¹Observar que por ser cada uno de ellos espacios vectoriales son grupos abelianos siendo la operación de grupo la operación de suma de los espacios vectoriales. En la literatura se refiere a ellos siempre como grupos.

en la misma clase de equivalencia si difieren en una forma exacta. Si ese es el caso ω y ω' se dicen cohomologas.

La cohomología de De Rham de grado p mide, de cierta manera, que tanto fallan las p -formas cerradas en ser exactas, por ejemplo si la cohomología de De Rham de grado p es nula, quiere decir que todas las p -formas cerradas son además exactas.

C.3. Cohomología de Dolbeault

Sea ahora M una variedad compleja. El espacio tangente a M se puede descomponer como

$$T_{\mathcal{C},m}^* = T_z^{*'} \oplus T_z^{*''}$$

en cada punto $z \in M$. De esta forma podemos escribir

$$\bigwedge^n T_{\mathcal{C},z}^* M = \bigoplus_{p+q=n} \left(\bigwedge^p T_z^{*'} M \otimes \bigwedge^q T_z^{*''} M \right)$$

Es decir, formas diferenciales de grado n pueden conseguirse como productos de p -formas holomorfas y q -formas antiholomorfas mientras que $p+q=n$. De esta forma se puede escribir al espacio de formas diferenciales de grado n en M como

$$A^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} A^{p,q}(M)$$

Donde $A^{p,q}$ son formas diferenciales que en cada punto $z \in M$ se expresan como productos de elementos de $T_z^{*'}(M)$ y $T_z^{*''}(M)$

$$A^{p,q}(M) = \left\{ \varphi \in A^n(M) : \varphi(z) \in \bigwedge^p T_z^{*'} M \otimes \bigwedge^q T_z^{*''} M \text{ para todo } z \in M \right\}$$

Una forma $\varphi \in A^{p,q}(M)$ se dice de tipo (p,q) . Se denota el proyector $\pi^{(p,q)}$ que toma una n -forma diferencial y la proyecta sobre el espacio $A^{p,q}(M)$, es decir

$$\pi^{(p,q)} : A^n(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)$$

Para toda forma en $\varphi \in A^n(M)$ se cumple que

$$\varphi = \sum \pi^{(p,q)} \varphi$$

Usualmente se escribe $\varphi^{(p,q)}$ como $\pi^{(p,q)} \varphi$. Para cualquier $\varphi \in A^{p,q}(M)$ y para cada $z \in M$ vale

$$d\varphi(z) = \left(\bigwedge^p T_z^{*'} M \otimes \bigwedge^q T_z^{*''} M \right) \wedge T_{\mathcal{C},z}^*(M)$$

es decir que,

$$d\varphi = A^{q+1,p}(M) \oplus A^{p,q+1}$$

Se definen los operadores $\bar{\partial}$ y ∂ como

$$\begin{aligned} \bar{\partial} : A^{p,q}(M) &\longrightarrow A^{p,q+1}(M) & ; & \quad \bar{\partial} = \pi^{p,q+1} \circ d \\ \partial : A^{p,q}(M) &\longrightarrow A^{p+1,q}(M) & ; & \quad \partial = \pi^{p+1,q} \circ d \end{aligned}$$

De la definición se desprende que

$$\partial + \bar{\partial} = d$$

Dado que la descomposición $T_{\mathcal{C},z}^* = T_z^{*'} \oplus T_z^{*''}$ se preserva bajo mapas holomorfos, también lo hace la descomposición $A^n = \oplus A^{p,q}$. Dado $f : M \rightarrow N$ un mapa holomorfo de variedades complejas,

$$f^*(A^{p,q}) \subset A^{p,q}$$

y además se cumple que el pull-back de mapas holomorfos conmuta con el operador $\bar{\partial}$

$$f^* \circ \bar{\partial} = \bar{\partial} \circ f^*$$

Se denota $Z_{\bar{\partial}}^{p,q}$ como el espacio de formas de tipo (p, q) que son cerradas respecto del operador $\bar{\partial}$. Dado que $\bar{\partial}^2 = 0$ se obtiene que

$$\bar{\partial}(A^{p,q-1}(M)) \subset Z_{\bar{\partial}}^{p,q}$$

Con todo esto, al cociente de grupos

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)}{\bar{\partial}(A^{p,q-1}(M))}$$

se lo llama cohomología de Dolbeault. Notar que si $f : M \rightarrow N$ es un mapa holomorfo de variedades complejas, entonces f induce un mapa en las cohomologías de Dolbeault

$$f^* : H_{\bar{\partial}}^{p,q}(N) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M)$$

C.4. Pullback de fibrados y lifting

Definición C.4.1 Sean (L, π_L, M) y (E, π_E, M) dos fibrados vectoriales sobre M con $\{U_j, \varphi_j\}$ y $\{V_k, \psi_k\}$ trivializaciones de L y E respectivamente. Un mapa diferenciable $F : E \rightarrow L$ se llama **morfismo de fibrados** si satisface

(i) $T \circ \pi_L = \pi_E$

(ii) T es lineal en cada una de las fibras, es decir, en cada intersección $U_j \cap V_k \neq \emptyset$ y para cada $m \in U_j \cap V_k \subset M$ la composición $\varphi_j \circ T \circ \psi_k^{-1}$ sea una transformación lineal.

Definición C.4.2 Sea (L, π, M) un fibrado vectorial, $f : N \rightarrow M$ un mapa diferenciable entre dos variedades. Se define el **fibrado inducido** f^*L o **pullback de L por f** tal que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} f^*L & \xrightarrow{f^*} & L \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Donde,

$$f^*L = \{(n, l) \in N \times L \mid f(n) = \pi(l)\}$$

y donde los proyectores se definen como $\tilde{\pi}(n, l) = n$ y $f^*L(n, l) = l$

A cada punto n del espacio base N , la fibra $\tilde{\pi}^{-1}(n)$ son los elementos (n, l) en el espacio total f^*L , es decir, los pares (n, l) con l cumpliendo que $\pi(l) = f(n) = m$, esto por definición es la fibra $\pi^{-1}(m)$. El pullback de L manda fibras de los puntos m a fibras en los puntos $f^{-1}(m)$, por este motivo es común notarlo también como $f^{-1}L$.

En el caso en el f sea un mapa de la variedad M en si misma, $f : M \rightarrow M$, hay una forma natural de mapear secciones de L a secciones de $f^{-1}L$, definida por

$$\Gamma_f : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(f^{-1}L) \quad ; \quad s \mapsto s \circ f$$

No existe una manera natural de inducir ,con f , un mapa de secciones $\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L)$ sin embargo, si existiera un mapa $\phi : \Gamma(f^{-1}L) \rightarrow \Gamma(L)$, la composición

$$\Gamma(L) \xrightarrow{\Gamma_f} \Gamma(f^{-1}L) \xrightarrow{\phi} \Gamma(L)$$

es un endomorfismo de $\Gamma(L)$. Cualquier mapa $\phi : f^{-1}\Gamma(L) \rightarrow \Gamma(L)$ se llama **lifting** de f a L . En cada punto $m \in M$, un lifting es simplemente un mapa lineal de la fibras , $\phi_x : L_f(m) \rightarrow L_m$

C.5. Complejos elípticos

Definición C.5.1 Sean dos fibrados vectoriales (L, π_L, M) y (E, π_E, M) , $\Gamma(L)$ y $\Gamma(E)$ los espacios de sus respectivas secciones. Un operador lineal $D : \Gamma(L) \rightarrow \Gamma(E)$ es un **operador diferencial de orden d** si está dado localmente por una matriz de operadores de derivadas parciales cuyos coeficientes son funciones diferenciables, es decir, en cualquier trivialización local de L y E sobre una carta coordenada $\{U, x_1, \dots, x_n\}$, se tiene

$$Du(x) = \sum_{|\alpha| \leq d} a^\alpha(x) \partial_\alpha u(x)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ es un multi-índice con cada $\alpha_i \in \{1, \dots, n\}$, $|\alpha| = m$, $\partial_\alpha = \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_m}$, y a^α es la representación matricial de algún elemento de $\text{Hom}_k(L_x, E_x)$, $x \in M$

Definición C.5.2 Dado un operador diferencial D , el símbolo $\sigma(D, \xi)$ se define para cada $m \in M$ y cada $\xi \in T^*M$ tomando los términos de orden d en D :

$$\sigma(D, \xi)(x) = \sum_{|\alpha|=d} a^\alpha(x) \xi_\alpha$$

donde $\xi = \xi_1 dx_1 + \dots + \xi_n dx_n$ y $\xi_\alpha = \xi_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \dots \xi_{\alpha_d}$. En otras palabras, el símbolo de D se obtiene primero descartando todos salvo el orden más alto en la expresión de D y luego

reemplazando $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ por ξ_α .

Definición C.5.3 Sean L_i fibrados vectoriales sobre una variedad compacta M , y $\{L_i, D_i\}$ un complejo, es decir

$$\dots \longrightarrow L_i \xrightarrow{D_i} L_{i+1} \xrightarrow{D_{i+1}} \dots$$

tal que $D_{i+1} \circ D_i = 0$ para todo i . Se dice que el complejo es elíptico si para todo vector no nulo $\xi \in T_x^*M$, la secuencia de símbolos asociada

$$\dots \longrightarrow E_{i,x} \xrightarrow{\sigma(D_i,\xi)} E_{i+1,x} \xrightarrow{\sigma(D_{i+1},\xi)} \dots$$

es una secuencia exacta de espacios vectoriales.

Definición C.5.4 Se define el i -ésimo grupo de cohomología de un complejo elíptico como

$$H^i(E, D) = \frac{\text{Ker}(D_i)}{\text{Im}(D_{i-1})}$$

Una consecuencia fundamental de los complejos elípticos es que todos sus grupos de cohomología son de dimensión finita.

Definición C.5.5 Un *endomorfismo geométrico de complejo* es una familia de mapas lineales $T_i : \Gamma(E_i) \longrightarrow \Gamma(E_i)$ tal que

$$T_{i+1} \circ D = D \circ T_i$$

para todo i .

Bibliografía

- [1] Abraham, Ralph, & Marsden, Jerrold. 1978. *Foundation of Mechanics*. second edn. Addison-Wesley.
- [2] Alekseev, Anton, & Shatashvili, Samson. 1990. From Geometric Quantization to Conformal Field Theory. *Pages 197–221 of: Communications in Mathematical Physics*, vol. 128. Springer.
- [3] Atiyah, Michael Francis, & Bott, Raoul. 1967. A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes: I. *The Annals of Mathematics*, **86**(2), 374–407.
- [4] Atiyah, Michael Francis, & Bott, Raoul. 1968. A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes: II. Applications. *The Annals of Mathematics*, **88**(2), 451–491.
- [5] Atiyah, Michael Francis, & Singer, Isadore. 1968a. A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes: II. *The Annals of Mathematics*, **87**(3), 531–545.
- [6] Atiyah, Michael Francis, & Singer, Isadore. 1968b. A Lefschetz Fixed Point Formula for Elliptic Complexes: III. *The Annals of Mathematics*, **87**(3), 546–604.
- [7] Bañados, Máximo, Teitelboim, Claudio, & Zanelli, Jorge. 1992. Black Hole in Three-Dimensional Spacetime. *Physical Review Letters*, **69**(13), 1849–1851.
- [8] Bañados, Máximo, Henneaux, Marc, Teitelboim, Claudio, & Zanelli, Jorge. 1993. Geometry Of The 2+1 Black Hole. *Physical Review D*, **48**(4), 1506–1525.
- [9] Blattner, Robert. The metalinear geometry of non-real polarization. *Pages 11–45 of: Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 570. Springer.
- [10] Blattner, Robert. 1973. Quantization and representation theory. *Pages 147–165 of: Harmonic Analysis on Homogeneous Space*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 26. American Mathematical Society.
- [11] Bott, Raoul. 1957. Homogeneous Vector Bundles. *The Annals of Mathematics*, **66**(2), 203–248.
- [12] Brown, David, & Henneaux, Marc. 1986. Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three Dimensional Gravity. *Communications in Mathematical Physics*, **104**, 207–226.

- [13] Candel, Alberto, & Conlon, Lawrence. 199. *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics, no. 23. American Mathematical Society.
- [14] Cushman, Richard, & Śniatycki, Jędrzej. 2016. *Classical an quantum spherical pendulum*. arXiv:1603.00966.
- [15] Dirac, Paul. 1958. *The Principles of Quantum Mechanics*. 4 edn. The International Series of Monographs on Physics, no. 27. Oxford University Press.
- [16] Echeverria-Enriquez, Arturo, Munoz-Lecanda, Miguel C., Roman-Roy, Narcisco, & Victoria-Monge, Carles. 1998. Mathematical foundations of geometric quantization. *Extracta Mathematica*, **13**, 135–238.
- [17] Farmakis, Ioannis, & Moskowitz, Martin. 2013. *Fixed point theorems and their applications*. World Scientific.
- [18] Gotay, Mark. 1980. Functorial Geomertic Quantization and Van Hove’s Theorem. *International Journal of Theoretical Physics*, **19**(2).
- [19] Gotay, Mark, & Maryland, Annapolis. 1987. a Class of Non-Polarizable Symplectic Manifolds. *Monatshefte für Mathematik*, 27–30.
- [20] Griffiths, Phillip, & Harris, Joseph. 1978. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley-Interscience.
- [21] Groenewold, Hilbrand. 1946. *On The Principles of Elementary Quantum Mechanics*. 1 edn. Springer.
- [22] Guillermin, Victor, & Sternberg, Shlomo. 1977. *Geometric Asymptotics*. Mathematical Surveys and Monograph, vol. 14. American Mathematical Society.
- [23] Hall, Brian. 2013. *Quantum Theory for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 267. Springer.
- [24] Hochs, Peter, & Wang, Hang. 2016. *A Fixed Point Theorem on Noncompact Manifolds*. arXiv:1512.07812v4.
- [25] Hsiung, Chien. 1995. *Almost Complex and Complex Structures*. Series in Pure Mathematics, vol. 20. World Scientificl.
- [26] Husemoller, Dale. 1993. *Fibre Bundle*. 3 edn. Graduate Text in Mathematics, vol. 20. Springer.
- [27] Jean, Gallier, & Quaintace, Jocelyn. 2016. *Notes on Differential Geometry and Lie Groups*. University of Pennsylvania.
- [28] Kalinowski, Marek, & Piechocki, Wojciech. 1997. Prequantization of field theory. *Reports on mathematical physics*, **40**, 305–311.
- [29] Kim, Jihum, & Porrati, Massimo. 2015. On a Canonical Quantization of 3D Anti-de Sitter Gravity. *JHEP*, **10**. arxiv:1508.03638.

- [30] Kirillov, Aleksandr. 1962. Unitary representation of nilpotent Lie Groups. *Russian Mathematics Surveys*, **17**(4).
- [31] Kirillov, Aleksandr. 1976. *Elements of the Theory of Representations*. Springer.
- [32] Kirillov, Aleksandr. 2004. *Lectures on the Orbit Method*. Graduate Studies in Mathematics, vol. 64. American Mathematical Society.
- [33] Knapp, Anthony. 1986. *Representation Theory of Semisimple Groups*. Princeton University Press.
- [34] Kobayashi, Shoshichi, & Nomizu, Katsumi. 1963. *Foundation of Differential Geometry*. Vol. 1. Interscience.
- [35] Kobayashi, Shoshichi, & Nomizu, Katsumi. 1969. *Foundation of Differential Geometry*. Vol. 2. Interscience.
- [36] Kostant, Bertram. 1970. Quantization and unitary representation. *Pages 87–208 of: Lectures Notes in Mathematics*, vol. 170. Springer.
- [37] Kostant, Bertram. 1974. Symplectic spinors. *Pages 139–152 of: Symposia Mathematica*, vol. 14.
- [38] Lee, John. 2012. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 218. Springer.
- [39] Lefschetz, Solomon. 1937. On The Fixed Point Formula. *Annals of Mathematics*, **38**(4), 819–822.
- [40] Lifschyts, Gilad, & Ortiz, Miguel. 1994. Scalar Fiel Quantization On The (2+1)-dimensional Black Hole Background. *Physical Review D*, **49**.
- [41] Maloney, Alexander, & Witten, Edward. 2010. Quantum Gravity Partition Functions In Three Dimmnsions. *Journal of High Energy Physics*, **12**.
- [42] Mladenov, Ivano, & Vassil, Tsanov. 1987. Geometric quantization of the MIC-Kepler problem. *Journal of Physics A Mathematical and General*, **20**.
- [43] Moser, Jürgen. 1965. On the volume element on a manifold. *Pages 286–294 of: Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 120. American Mathematical Society.
- [44] Nakahara, Mikio. 2003. *Geometry, Topology and Physics*. Graduate Student Series in Physics. Institute of Physics Publishing.
- [45] Pestun, Vasily. 2012. Localization of gauge theory on a four-sphere and supersymmetric wilson loops. *Communications on Mathematical Physics*, **313**, 71–129.
- [46] Puta, Mircea. 1987. Geometric prequantization of Maxwell equations. *Letters in Mathematical Physics*, **13**, 99–103.
- [47] Puta, Mircea. 1988. Geometric quantization of the two body problem. *In: Seminarul de mecanica*, vol. 9. Universitatea din Timisoara.

- [48] Puta, Mircea. 1993. *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Mathematics and its applications, vol. 260. Springer.
- [49] Rawnsley, John. 1978. On the Pairing of Polarization. *Pages 1–8 of: Communications in Mathematical Physics*, vol. 58. Springer.
- [50] Rudolph, Gerd, & Schmidt, Matthias. 2013. *Differential Geometry and Mathematical Physics*. Vol. 1. Springer.
- [51] Segal, Irving. 1960. Quantization of Nonlinear Systems. *Journal of Mathematical Physics*, 468–488.
- [52] Sepanski, Mark. 2007. *Compact Lie Groups*. Graduate Text in Mathematics, no. 235. Springer.
- [53] Simms, David. Bohr-Sommerfeld orbits and quantizable symplectic manifolds. *Pages 489–491 of: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 73.
- [54] Souriau, Jean-Marie. 1969. *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*. Progress in Mathematics, vol. 149. Springer.
- [55] Sternberg, Shlomo. 1994. *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press.
- [56] Tarkhanov, Nicolai. 1990. *Complexes of Differential Operators*. Mathematics and Its Applications. Springer.
- [57] Tuynman, Gijs. 2015. *The Metaplectic Correction in Geometric Quantization*.
- [58] Weinstein, Alan. 1977. Lectures on Symplectic Manifolds. *In: Regional Conference series in Mathematics*. American Mathematics Society.
- [59] Witten, Edward. 1988a. 2+1 Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. *Nuclear Physics B*, **311**, 46–78.
- [60] Witten, Edward. 1988b. Coadjoint Orbit of the Virasoro Group. *Communications in Mathematical Physics*, **114**(1).
- [61] Witten, Edward. 1989. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. *Communications in Mathematical Physics*, 351–399.
- [62] Witten, Edward. 2007. *Three-Dimensional Gravity Revised*. arXiv:0706.3359.
- [63] Woodhouse, Nicholas. 1982. Vector Bundles and complex polarizations. *In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 92.
- [64] Woodhouse, Nicholas. 1991. *Geometric Quantization*. second edn. Clarendon Press - Oxford.
- [65] Woodhouse, Nicholas, & Simms, David. 1976. *Lectures on Geometric Quantization*. 1 edn. Lectures Notes in Physics, no. 53. Springer.
- [66] Śniatycki, Jędrzej. 1980. *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*. Applied mathematical science. Springer.