Tesis de
Licenciatura en Ciencias Físicas

Cosmologías singulares y regulares en teorías de Gauss-Bonnet

Leonel José Gruñeiro

Dr. Claudio Simeone

Director

Dr. Osvaldo Santillán

Colaborador

Departamento de Física - FCEyN UBA

Buenos Aires, Marzo 2017

Quiero dedicarle esta tesis a mi petisa.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Mas de un siglo después de su surgimiento [1], [2], la Relatividad General (RG) continúa siendo una de las teorías más exitosas y con gran rango de comprobación empírica. Asimismo, se mantiene como la más sólida descripción de la gravedad y los fenómenos que la involucran. En su esencia, la RG deja de lado el antiguo concepto newtoniano de interacción gravitacional para hablar de deformación de la estructura espacio-temporal a causa de una distribución de masa-energía. La consistencia de esta teoría se ha visto fortalecida, desde casi su nacimiento, por numerosas pruebas empíricas: la deflexión de la luz, el estudio del perihelio de Mercurio, el corrimiento al rojo gravitatorio, así como otras mediciones en nuestro Sistema Solar. Más cerca en el tiempo, mediciones como la de LIGO han revolucionado nuestra concepción del Universo [3], [4] a partir de la comprobación de una predicción realizada por la RG.

La Relatividad General es la base a partir de la cual se entiende el Universo a grandes escalas y ha sido central (y continúa siéndolo) en la explicación de temas de vanguardia de la Astrofísica, las agujeros negros, estrellas de neutrones, el entendimiento de la dinámica de las galaxias, ondas gravitacionales y del estudio del Universo en su totalidad. En este último tópico, fue el mismísimo Einstein quien dió los primeros pasos [5], seguido por los importantes descubrimientos de Hubble [6], [7] acerca de la expansión del Universo, y los modelos teóricos propuestos por Friedmann y Lamaitre [8] para llegar finalmente a los modelos propuestos en las décadas posteriores [9], [10].

El modelo cosmológico estándar basado en la RG y en consideraciones de isotropía y homogeneidad a grandes escalas fue testeado por una abundante cantidad de observaciones: supernovas, fondo de microondas, consistencia de la edad del Universo con respecto a la edad de objetos astronómicos, abundancia de elementos químicos, crecimiento de perturbaciones cosmológicas, entre otras [11]. Aún así, este modelo no consigue explicar ciertas observaciones referentes a la dinámica cosmológica y astronómica sin la introducción de nuevas formas de materia-energía de las cuales actualmente no existe evidencia empírica. Mas precisamente, mediciones de supernovas tipo Ia [12], [13], estructura a gran escala [14], y radiación de fondo de microondas (CMB radiation) [15] dan cuenta de un Universo caracterizado por una expansión acelerada. Más aún, diferentes observaciones a escalas astronómicas [16]-[18] y cosmológicas [19]-[20] en el marco de la RG requieren que la mayoría de la materia en el Universo sea no bariónica (desconocida). El enfoque dentro del modelo cosmológico ΛCDM estándar [21], que asume la validez completa de la RG de Einstein, fue introducir la materia oscura fría y la energía oscura como contribuciones dominantes a la masa-energía del Universo para explicar la *"masa faltante"* y acelerada expansión del Universo. Uno de los grandes problemas no resueltos del modelo ΛCDM es que la constante cosmológica, la cual desempeña el papel de energía oscura, necesita tener un valor observado extremadamente pequeño para que no pueda atribuirse simplemente a la energía del vacío. Frente a todo esto, resulta claro que el entendimiento de la gravedad aún se encuentra incompleto. De esta forma, la RG ha resultado de sumo interés en la comunidad científica expandiéndose su estudio en todas las direcciones imaginables. Uno de los caminos más desarrollados es aquel que estudia generalizaciones de la RG de Einstein. Allí se han obtenido avances significativos pudiéndose contrastar con observaciones cosmológicas y habiendo cumplido con los requisitos que exige la RG *original*.

Por otro lado, una de las ramas más estudiadas han sido las que trabajan sobre los teoremas de singularidad. Estos teoremas son una consecuencia directa de la RG y sus desarrollos han sido ampliamente abordados y dado su caracter transversal, son objetos de estudio tanto en la Física Teórica como en la Matemática.

Como lo demuestran los teoremas de singularidad de Hawking, si la RG estándar es correcta y si se satisfacen algunas condiciones generales y usuales sobre el espacio-tiempo y la materia (condiciones energéticas), entonces el Universo necesita tener un comienzo en la singularidad inicial del *Big Bang* [22]-[24]. La idea de un comienzo del Universo no sólo lleva a ciertos problemas filosóficos[1], sino que además, ésta singularidad inicial significaría la ruptura de la RG, así como perder la posibilidad de una descripción física del Universo. Por otra parte, el paradigma del *Big Bang* conduce también a algunas dificultades físicas importantes tales como el problema de la planitud y el problema del horizonte, requiriendo algunos nuevos mecanismos para la solución de estos problemas. El intento más popular de resolverlos es la teoría inflacionaria [25]. Sin embargo, requiere aún más adiciones al modelo ΛCDM, tales como campos escalares específicos durante el período inflacionario. Además, todos los modelos inflacionarios tienen que ser afinados para que el espectro y la amplitud de las perturbaciones de la densidad primordial estén de acuerdo con las observaciones.

Ahora bien, como se verá más adelante, los teoremas de singularidad dependen fuertemente de la forma de las ecuaciones de la RG. Más aún, una simple generalización en la acción puede impedir la aparición de una singularidad inicial como lo

[1] *Creatio ex nihilo*, es decir, cómo a partir de la persistencia de la nada pura, una tendencia hacia la creación de algo puede surgir de repente.

es el Big Bang y permitir una transición desde la expansión del Universo a una fase anterior de contracción, es decir un *rebote* cosmológico.

¿Por qué correcciones de órdenes superiores en la curvatura?

Es sabido que la Relatividad General, aun con sus éxitos en la descripción de nuestro Universo a media y gran escala, necesita ser corregida en la pequeña escala. En particular, la (aparente) tensión existente entre la teoría de Einstein y la Teoría Cuántica de Campos (QFT), contribuye con la idea de que la Relatividad General no es más que una modelo efectivo el cual puede ser reemplazado, en el regimen UV, por una teoría más completa. Esta *nueva* teoría, sería el camino a seguir para la obtención de lo que se conoce como Gravedad Cuántica.

Estas correcciones sobre la Relatividad General se espera que sean apreciables sólo en determinados escenarios como el universo temprano (durante la etapa de Inflación) o cerca de un agujero negro, es decir, en regímenes cercanos a la escala de Planck, l_p[2].

El interés en los últimos años en la gravedad modificada surge en sintonía con el fortalecimiento de la Teoría de Cuerdas como candidato a una teoría cuántica de la gravedad. Aún así, en las teorías de gravedad en donde se introducen términos de orden superior, surgen fenómenos críticos a los que se les presta especial atención dado que en ocasiones, si bien pueden no representar teorías *realistas* de gravedad en 4 dimensiones, son estudiadas como modelos de juguete.

Dentro de las posibles modificaciones sobre la acción de Einstein-Hilbert, vía la introducción de una función general dependiente del escalar de Ricci, resulta casi intuitivo imaginar un Lagrangiano con todos los infinitos escalares posibles de construir a partir del tensor de Riemann y sus derivaciones. El inconveniente surge cuando estas teorías introducen nuevas partículas y algunas de estas acarrean pro-

[2] Determinada por la constante de acoplamiento de Newton $G = \frac{l_p^2}{16\pi}$

blemas físicos.

La motivación inicial de esta tesis fue estudiar el teorema c en teorías de gravedad modificada o en teorías con materia que viole las condiciones de energía fuerte. En ese tipo de teoremas, la ecuación de Raychaudhuri juega un rol fundamental para demostrar la positividad de la derivada temporal de esta cantidad. Sin embargo, cuando la teoría subyacente no es la RG sino una teoría de Gauss-Bonnet, y las condiciones iniciales del universo no son isótropas ni homogéneas, no se puede asegurar dicha positividad sin algunas condiciones extra bastante restrictivas. Cabe destacar que, a pesar de no haber podido realizar este proyecto, como consecuencia de estas investigaciones fallidas se logró describir toda una serie de soluciones regulares y singulares de los modelos de Gauss-Bonnet. Dichas soluciones son en absoluto no triviales.

La estructura de la presente tesis es la siguiente: Se comenzará con un repaso de Geometría Diferencial en donde se definen y se discuten conceptos importantes para el desarrollo de temas se tratan en capítulos posteriores. A continuación, se introducen los teoremas de singularidad y se presenta la ecuación de Raychaudhuri. Se estudian aspectos de dichos teoremas y se ensayan demostraciones sobre los mismos. Finalmente, se presentan los resultados para los modelos inflacionarios de Gauss-Bonnet sin potencial para el caso isótropo y homogéneo y se realiza un análisis detallado de las posibles soluciones teniendo en cuenta los distintos escenarios posibles y alcanzando soluciones generales.

Capítulo 2

Geometría Diferencial.

En este primera sección se repasan brevemente los conceptos utilizados sobre geometría diferencial, tomando como referencia [28] [29].

2.1. Variedades diferenciables.

Definición: Dado un conjunto M, una carta en M consiste de un par (U, ϕ), donde $U \subseteq M$, y $\phi : M \to \mathbb{R}^n$ es una bijección. Se suele notar $\phi(x) = (x^1, ..., x^n)$ y se llaman coordenadas locales del punto $x \in M$.

Definición: Un atlas es como una colección de cartas $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ con I un conjunto de índices arbitrario, que cubren a todo el espacio X.

Definición: M y $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ forman una variedad topológica de dimensión n si las funciones $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ son homeomorfismos entre $\phi_j(U_i \cap U_j)$ y $\phi_i(U_i \cap U_j)$. Si estas funciones (y sus inversas) son además de clase C^k, entonces M y $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ forman una variedad diferenciable.

Intuitivamente, una variedad es un objeto geométrico que se asemeja localmente a $\mathbb{R}^n$.

2.2. Vectores y Tensores.

Los campos tensoriales son objetos geométricos definidos de forma natural por la estructura de variedad. Primero, se comenzará definiendo el concepto de vector.

Definición: Sea $\lambda(t)$ una curva C^k, es decir, la imágen de una función (que se denotará también como λ), que va de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, a $\mathcal{M}$.

El vector tangente $(\partial/\partial t)_\lambda|_{t_0}$ a la curva $\lambda(t)$ en un punto $\lambda(t_0)$ se define como un operador que asigna a cada función f de tipo C^1 el valor $(\partial f/\partial t)_\lambda|_{t_0}$. Es decir, $(\partial/\partial t)_\lambda$ es la derivada direccional de f a lo largo de $\lambda(t)$. Explicitamente, esto es

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \bigg|_t = \lim_{s\to 0} \frac{f(\lambda(t+s)) - f(\lambda(t+s))}{s}$$

Si $(x^1, ..., x^n)$ son coordenadas locales en un entorno de $\lambda(t_0)$, entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda \bigg|_{t_0} = \frac{dx^a(\lambda(t))}{dt}\bigg|_{t=t_0} \frac{\partial f}{\partial x^a}\bigg|_{\lambda(t_0)} = \frac{dx^a}{dt}\frac{\partial f}{\partial x^a}\bigg|_{\lambda(t_0)}$$

Se observa que, cada vector tangente en un punto p, puede escribirse como una combinación lineal de operadores de la forma $(\partial/\partial x^a)|_p$.

Por otro lado, dado un vector tangente $V = V^a(\partial/\partial x^a)|_p$, es posible dar una curva $\lambda(t)$ tal que el vector tangente a la curva en p sea V; por ejemplo, la curva definida localmente por

$$x^a(\lambda(t)) = x^a(p) + tV^a$$

donde t pertenece a algún intervalo de la forma $[-\epsilon, \epsilon]$

Los vectores tangentes se pueden sumar y multiplicar por escalares para obtener otro vector tangente

$$(aX + bY)f = a(Xf) + b(Yf)$$

donde X,Y son vectores y a,b escalares en $\mathbb{R}$. Los vectores tangentes de $\mathcal{M}$ en un punto p constituyen entonces un espacio vectorial de dimensión n, llamado espacio vectorial tangente de $\mathcal{M}$, y notado $T_p(\mathcal{M})$. Puede probarse que las derivadas respecto a las funciones coordenadas $(\partial/\partial x^a)|_p$ forman una base del espacio tangente $T_p(\mathcal{M})$.

El espacio vectorial dual a $T_p(\mathcal{M})$ se llama espacio contangente, se nota $T^*_p(\mathcal{M})$. Los elementos de este espacio son denominados 1-formas. Las 1-formas duales a $(\partial/\partial x^a)|_p$ se denotan $(dx^a)|_p$, y forman una base de $T^*_p(\mathcal{M})$.

Ante un cambio de coordenadas $x^a \to y^a$, las coordenadas de un vector $V = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^a}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^a}$ transforman según la fórmula

$$V^a = \frac{dx^a}{d\lambda} = \frac{\partial x^a}{\partial y^b}\frac{dy^b}{d\lambda}$$

Un campo vectorial en $\mathcal{M}$ consiste de una función $X : \mathcal{M} \to T_p(\mathcal{M})$ que a cada punto en $p \in \mathcal{M}$ le asigna un vector tangente en $T_p(\mathcal{M})$.

Un tensor de tipo $\binom{r}{s}$ en p se define como una función multilineal

$$T : \underbrace{T^*_p(\mathcal{M}) \times ... \times T^*_p(\mathcal{M})}_{r} \times \underbrace{T_p(\mathcal{M}) \times ... \times T_p(\mathcal{M})}_{s} \to \mathbb{R}$$

Si se toma una base $(v_a)_{a=1}^n$ de $T_p(\mathcal{M})$ y $(v^{*b})_{b=1}^n$ su base dual, entonces es posible escribir a T como

$$T = \sum_{a_1 \dots b_s = 1}^{n} T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s} v_{a_1} \otimes \cdots \otimes v^{*b_s}$$

Si se consideran las bases coordenadas $(\partial/\partial x^a)|_p$ y $(dx^a)|_p$, sus componentes cumplen, ante cambio de coordenadas, la ley de transformación

$$T^{a'_1 \dots a'_r}{}_{b'_1 \dots b'_s} = T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s} \frac{\partial x'^{a'_1}}{\partial x'^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_s}}{\partial x'^{b'_s}}$$

El conjunto de los tensores de tipo $\binom{r}{s}$ también forma un espacio vectorial de dimensión n^{r+s}.

Un campo tensorial se define como una aplicación que asigna a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un tensor en p.

2.3. Tensor Métrico.

Definición: Una métrica Riemanniana g en una variedad diferenciable $\mathcal{M}$ es un campo tensorial simétrico de tipo $\binom{0}{2}$ y definido positivo, esto es, $g(X, X) > 0$ para todo $X \neq 0$. Si se relaja la condición de definido positivo por no degenerada, esto es, $g(X,X) \neq 0$ para todo $X \neq 0$, se dice que la métrica es pseudo-Riemanniana. El caso de interés es el de la métrica Lorentziana, en el que la métrica tiene signatura $(-,+,+,+)$.

La métrica Lorentziana más simple es la métrica de Lorentz η_{ab}, la cuál es la métrica del espacio-tiempo en relatividad especial. La métrica permite dar una noción de longitud sobre la variedad, definiendo el intervalo infinitesimal como

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

Por ejemplo, si se toma una curva con tangente $V = \frac{d}{d\lambda}$,

$$dl^2 = g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} d\lambda^2 = g_{ab} V^a V^b d\lambda^2$$

entonces la longitud está dada por

$$L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\left| g_{ab} \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{dx^b}{d\lambda} \right|} d\lambda$$

La métrica introduce además una noción de ortogonalidad entre vectores. Dos vectores X,$Y \in T_p(\mathcal{M})$ se dicen ortogonales si $g_{ab} X^a X^b = 0$. Por otro lado, la métrica da un isomorfismo entre el espacio de vectores tangentes y el de vectores cotangentes; en otras palabras, es posible relacionar ambos mediante la siguiente relación entre sus componentes

$$V_a = g_{ab} V^b$$

A esta operación se la llama bajar índices, y la operación inversa se llama subir índices.

Por último, se define la contracción (métrica) de un tensor de la siguiente forma. Dado un tensor de componentes $T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}$ la contracción de los índices a_i y a_j está dada por el tensor de componentes $g_{pq} T^{a_1 \ldots p \ldots q \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}$, donde p y q están en la posición i-ésima y j-ésima, respectivamente. Una definición análoga vale para la contracción de dos índices inferiores.

2.4. Conexión afín. Derivada covariante.

Una conexión afín es un operador ∇ que toma dos vectores tangentes V, W, y devuleve otro $\nabla_V W$, tal que se cumplen las siguientes condiciones:

1) $\nabla_{fV} W = f\nabla_V W$, para toda función diferenciable f;

2) $\nabla_V(\lambda W) = \lambda\nabla_V W$, para todo escalar λ;

3) $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\nabla_V W$, para toda función diferenciable f.

Al vector $\nabla_V W$ se lo llama derivada covariante de W con respecto a V.

La conexión afín permite dar una nocíon de transporte paralelo sobre la variedad, tal y como se enuncia a continuación.

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una curva con vector tangente U. Un vector tangente V se dice que es transportado paralelamente a lo largo de $\mathcal{C}$ si $\nabla_U V = 0$.

En una base $(e_a)_{a=1}^n$ de $T_p(\mathcal{M})$, se pueden calcular las componentes de $\nabla_U V$:

$$\nabla_U V = U^a(\nabla_{e_a} V^b e_b) = U^a[(\nabla_{e_a} V^b)e_b + V^b\nabla_{e_a} e_b] = U^a[e_a(V^c) + V^b\Gamma^c_{ba}]e_c$$

donde $\Gamma^c_{ba} e_c = \nabla_{e_a} e_b$, siendo Γ^c_{ab} los símbolos de Christoffel. Si $(e_a)_{a=1}^n$ es una base coordenada, esto es $e_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$, entonces se tiene

$$\nabla_U V = U^b[V^c_{\ ,a} + V^a\Gamma^c_{ab}]\frac{\partial}{\partial x^c}$$

Es usual notar de la siguiente manera a las componentes

$$\nabla_a V^c = V^c_{\ ;a} = V^c_{\ ,i} + \Gamma^c_{ba} V^b$$

Asimismo, la derivada covariante se puede extender a tensores. Vale la siguiente propiedad:

$$T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s;m} = T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s,m} + \Gamma^{a_1}_{nm} T^{n a_2 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} + \ldots - \Gamma^n_{b_1 m} T^{a_1 \ldots a_r}{}_{n b_2 \ldots b_s} - \ldots$$

2.5. Tensor de Curvatura.

El tensor de curvatura, o tensor de Riemann, se define, en términos de ∇, como un tensor de tipo $\binom{1}{3}$ que dados vectores u, v, w, cumple

$$R(-,w,u,v) = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_u \nabla_v w - \nabla_{[u,v]} w$$

y en una base coordenada se puede escribir sus componentes como

$$\left(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a\right) v^c = R_{ab}{}^c{}_d v^d$$

El tensor de Riemann da una noción de la medida en que un tensor métrico no es localmente isométrico respecto del espacio euclídeo. En ese sentido, se dice que el espacio es plano si el tensor de Riemann es nulo en todo punto de la variedad.

El tensor de curvatura está relacionado con la diferencia entre un vector tangente, y su transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada pequeña. Si se considera una superficie 2-dimensional de coordenadas s y t, y un vector V, la diferencia entre el vector y su transporte paralelo alrededor de un cuadrilátero infinitesimal de lados Δs, Δt está dado por

$$\delta V^a = \Delta s \Delta t \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^c \Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)^b R_{cbd}{}^a V^d.$$

Usando la definición de los símbolos de Christoffel en una base coordenada[1], se puede probar que se cumple la siguiente relación

$$R_{ab}{}^c{}_d = \partial_a \Gamma^c_{bd} - \partial_b \Gamma^c_{ad} + \Gamma^c_{am}\Gamma^m_{bd} - \Gamma^c_{bm}\Gamma^m_{ad}.$$

Es posible definir las contracciones del tensor de curvatura, siendo el tensor de Ricci la contracción

$$R_{ab} = R_{ma}{}^m{}_b$$

y el escalar de curvatura R la contracción

$$R = g^{ab} R_{ab}$$

[1] Schutz, Capítulo 5.

El tensor de torsión se define como un tensor de tipo $\binom{1}{2}$, que en términos de ∇, toma vectores u, v y devuelve

$$T(-,u,v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u,v]$$

En una base coordenada tiene componentes

$$T^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{cb}$$

El teorema fundamental de geometría Riemanniana (que vale en variedades pseudo-Riemannianas) prueba que existe una única conexión sin torsión tal que preserva la métrica, es decir, tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$. A esta conexión se la llama conexión de Levi-Civita. En este caso, los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d} \right)$$

Finalmente, se enuncian algunas propiedades relevantes sobre el tensor de Riemann:

El tensor de Riemann cumple:

(i) ${R_{abc}}^d = -{R_{bac}}^d$

(ii) ${R_{[abc]}}^d = 0$

(iii) $Si \nabla_a g_{bc} = 0$, entonces $R_{abcd} = -R_{abdc}$

(iv) Identidad de Bianchi: $\nabla_{[a} {R_{bc]d}}^e = 0$

El tensor simétrico de rango 2 más general, construído con R_{abcd}, g_{ab}, y lineal en R_{abcd} es de la forma $aR_{ab} + bRg_{ab} + \Lambda g_{ab}$. Tiene divergencia nula si $b = -1/2a$, y se anula en un espacio plano si $\Lambda = 0$.

No se puede construír tensor con las componentes g_{ab} y $g_{ab,c}$, a excepción de g y productos tensoriales de g.

R_{abcd}, g_{ab}, y los tensores construídos con R_{abcd} y g_{ab} pero líneales en R_{abcd} (por ejemplo, el tensor de Ricci R_{ab}), son los únicos tensores que se pueden construir con las componentes de g_{ab} , $g_{ab,c}$, $g_{ab,cd}$ y que a su vez sean lineales en $g_{ab,cd}$.

El tensor $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ es el único tensor símetrico de rango 2 que cumple las siguientes propiedades:

(i) Se puede construir con las componentes de g_{ab}, $g_{ab,c}$, $g_{ab,cd}$;

(ii) Sus componentes son lineales en $g_{ab,cd}$;

(iii) Tiene divergencia nula.

(iv) Se anula si el espacio es plano.

Además, si se quita la condición (iv), la forma más general es $G_{ab} + \Lambda g_{ab}$. En el marco de la Relatividad General, el tensor G_{ab} recibe el nombre de Tensor de Einstein y describe la curvatura del espacio-tiempo de una manera consistente con la conservación de la energía y el momento.

2.6. Geodésicas.

Definición: Una curva diferenciable con vector tangente V^a se dice geodésica si su vector tangente cumple, para algún escalar α

$$\nabla_V V = \alpha V.$$

Es posible reparametrizar la curva para que la expresión quede igual a la ecuación de transporte paralelo

$$\nabla_U U = 0$$

Esta parametrización de la curva recibe el nombre de parametrización afín. De aquí en adelante, al considerar geodésicas, se considerará esta parametrización.

En una base coordenada, la ecuación geodésica toma la forma

$$\frac{dU^a}{d\lambda} + \Gamma^a_{bc} U^b U^c = 0,$$

donde λ es el parámetro afín de la curva. Si se toma $U^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$,

$$\frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0$$

La ecuación en base coordenada es una ecuación diferencial de segundo orden. Si se pide que la conexión sea C^1, entonces, dados un punto p, y un vector X_p

los teoremas de ecuaciones diferenciales garantizan la existencia local de una única geodésica maximal que pase por p, y tenga como vector tangente en p a X_p.

2.7. Coordenadas normales.

Sea un punto $p \in \mathcal{M}$, se define el mapa exponencial como una función $exp_p : T_p(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ que manda un vector tangente X a un punto $\lambda_X(1) \in \mathcal{M}$, donde λ_X es la geodésica de parámetro afín que tiene tangente X en p, y $\lambda_X(0) = p$. Es posible que exp_p no esté definido para todo $X \in T_p(\mathcal{M})$. Aún así, es posible demostrar que para todo punto $p \in \mathcal{M}$, existe un entorno abierto N_0 del origen de $T_p(\mathcal{M})$ y un entorno $\mathcal{N}_p$ de p tal que $exp_p : N_0 \to \mathcal{N}_p$ es un C^r difeomorfismo, donde r es el orden de diferenciabilidad de la conexión. A tal entorno $\mathcal{N}_p$ se lo llama normal. Más aún, es posible escoger $\mathcal{N}_p$ tal que sea convexo, esto es, geodésicas distintas no se intersecan dentro del entorno.

Usando entornos normales convexos, es posible definir las coordenadas normales de Riemann como se enuncia a continuación.

Definición: Sea $q \in \mathcal{N}_p$, $\{E_a\}$ una base de $T_p(\mathcal{M})$. A un punto $q \in \mathcal{N}_p$ se le asignan las coordenadas $(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $q = exp_p(x^a E_a)$. En otras palabras, si $E : \mathbb{R}^n \to T_p(\mathcal{M})$ es el isomorfismo asociado a la base ortonormal $\{E_a\}$, entonces $\phi = E^{-1} \circ exp_p^{-1} : \mathcal{N}_p \to \mathbb{R}^n$ es la función de coordenadas normales.

En estas coordenadas, las derivadas primeras de g_{ab} y los símbolos de Christoffel se anulan en p.

Capítulo 3

Teoremas de Singularidad

De manera simple (y casi informal) se puede definir a una singularidad, desde el punto de vista físico, como una zona del espacio-tiempo donde no se puede definir cierta magnitud, como por ejemplo, la curvatura. Desde un punto de vista matemático, adoptar una definición de singularidad puede ser más complejo. Nuevamente, de manera simple, es posible definir una singularidad como un punto (o conjunto de puntos) donde cierta función diverge o está mal definida. Numerosas teorías de la física poseen singularidades matemáticas. Esto puede interpretarse como una señal de falla en la teoría. En el marco de la Relatividad General, surgen casos de singularidades en las soluciones a las Ecuaciones de Einstein, como por ejemplo en la métrica de Schwarschild, lo que predice la existencia de agujeros negros. Asimismo, según el modelo más firme en la actualidad respecto del origen del Universo, en el comienzo del *Big Bang*, existió una singularidad.

En este capítulo, se presentarán los teoremas de singularidad relevantes en el presente trabajo. Previo a esto, se discutirán ciertos aspectos necesarios para la presentación de los mismos

3.1. Completitud geodésica

Definición: Se dice que una variedad (pseudo)riemanniana es geodésicamente completa si es posible definir una geodésica maximal para todo $t \in \mathbb{R}$.

Es posible demostrar que toda variedad riemanniana es geodésicamente completa[1]. El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, la esfera $\mathbb{S}^n$ (con sus métricas riemannianas) son casos de variedades completas en donde vale la completitud geodésica. Asímismo, es posible demostrar la existencia de casos de incompletitud geodésica en variedades pseudo-riemannianas.

3.2. Curvas temporales completas e incompletas.

Para muchos propósitos prácticos basta con considerar solo curvas diferenciables (o incluso C^∞). Sin embargo, cuando se tiene que tomar límite es esencial extender la atención a curvas continuas no diferenciables. Las definiciones de curvas temporales o causales pueden extenderse a los casos continuos exigiendo que, localmente, pares de puntos en la curva puedan unirse por una curva temporal diferenciable o una curva causal respectivamente. Más precisamente, una curva continua λ se dice que es una curva temporal con dirección futuro (o causal) si para cada $p \in \lambda$ existe una vecindad normal convexa U de p tal que si $\lambda(t_1), \lambda(t_2) \in U$ con $t_1 < t_2$, luego existe una curva temporal diferenciable direccionada a futuro (o respectivamente causal) en U desde $\lambda(t_1)$ a $\lambda(t_2)$. La naturaleza temporal o causal de una curva continua claramente no se modifica por una reparemetrización uno a uno. Se considerará que dos curvas son equivalentes si difieren en una reparametrización.

Asimismo, es necesario distinguir claramente entre las posibilidades de que una curva diverja, que se mueva sobre sí misma indefinidamente, o se corte ante una singularidad, frente a la posibilidad que una curva termine en algún punto por

[1] Ver teorema de Hopf-Rinow.

definición. Luego, se define la noción de extensibilidad de una curva continua.

Está distinción puede hacerse precismente a tráves de la noción de punto final de la curva. Sea $\lambda(t)$ una curva causal orientada a futuro. Se dice que $p \in M$ es un punto final de la curva si para cada vecindad O de p existe un t_0 tal que $\lambda(t) \in O$ para todo $t > t_0$ (Entonces por la propiedad de Hausdorff de M, λ puede tener, como máximo, un punto final futuro). Notar que también el punto final no necesita pertenecer a la curva, es decir, no es necesario que exista un valor de t tal $\lambda(t) = p$. La curva λ se define como inextensible a futuro si no tiene un punto final futuro. La noción de inextensibilidad al pasado se define en forma análoga. Es importante remarcar que si λ es una curva causal diferenciable con un punto final futuro p, luego no puede ser posible extender λ más allá de p como una curva diferenciable causal, pero λ siempre podrá extenderse como una curva causal continua agregando a λ otra curva causal continua en p.

3.3. El sistema de referencia síncrono.

Es posible demostrar que para un espacio-tiempo arbitrario (M, g) siempre existe localmente un sistema de referencia síncrono[2].

Definición: El sistema de referencia síncrono es aquel para el cual la métrica toma localmente la siguiente forma

$$g = dt^2 - h_{ij}(t)dx^i dx^j.$$

Es decir, la métrica espacial $h_{ij}(t)$ depende del tiempo propio como un parámetro. Es posible construir un sistema con estas características si se considera una superficie espacial, es decir, una superficie cuyo vector normal es temporal y se toman las geodésicas normales a dicha superficie. Parametrizando dichas geodésicas mediante su longitud de arco, se obtiene un sistema de referencia síncrono con las propiedades

[2] Landau-Lifshitz. Física Teórica Vol. 2. Teoría clásica de los campos. Reverté. 1994.

deseadas. Cabe destacar que un cambio de coordenadas $x^i \to y^i$ independientes del tiempo propio conduce a otro sistema síncrono.

Claramente, la existencia local de un sistema síncrono es independiente del modelo. Sin embargo, el modelo gravitatorio en cuestión puede impedir que dicho sistema exista globalmente. Por ejemplo, si se considera la RG, definiendo la derivada temporal de la métrica espacial h_{ij}

$$\gamma_{ij} = \partial_t h_{ij},$$

la ecuación de Einstein temporal (la cual se denota con 0 en los índices) toma la siguiente forma

$$R_0^0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial_t \gamma_i^i}{\partial t} - \frac{1}{4}\gamma_i^j \gamma_j^i = 8\pi\kappa(T_0^0 - \frac{1}{2}T), \tag{3.1}$$

En aplicaciones físicas, un tensor energía momento razonable satisface la condición

$$T_0^0 - \frac{1}{2}T > 0.$$

Esto es lo que se conoce como condición de energía fuerte. En general, esta condición suele ser expresada como

$$2T_{ab}\xi^a\xi^b \geq T. \tag{3.2}$$

Para un tensor energía momento diagonalizable

$$T_{ab} = (\rho, p_i),$$

la condición de energía fuerte implica que

$$\rho + p_i \geq 0, \qquad \rho + \sum_i p_i \geq 0.$$

Si la densidad de energía ρ es positiva, entonces las presiones pueden ser negativas, pero acotadas inferiormente. Este tipo de condición se satisface para muchos sistemas físicos, como por ejemplo polvo y campo electromagnético. Sin embargo, se viola para campos escalares.

Ahora bien, la ecuación einstt junto con la condición de energía fuerte, 3.2 implican que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial_t\gamma_i^i}{\partial t}+\frac{1}{4}\gamma_i^j\gamma_j^i\leq 0.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad matricial

$$(\gamma_i^i)^2<3\gamma_i^j\gamma_j^i,$$

se obtiene de la última ecuación que

$$\frac{\partial_t\gamma_i^i}{\partial t}+\frac{1}{6}(\gamma_i^i)^2\leq 0,\qquad \frac{1}{6}\leq\partial_t(\frac{1}{\gamma_i^i}).$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{(\gamma_0)_i^i}+\frac{t}{6}\leq\frac{1}{\gamma_i^i}$$

En lo que sigue se asume que la condición inicial es tal que $(\gamma_0)_i^i\leq C<0$ en toda la superficie espacial $t=0$. No se asume que la condición sea isótropa y homogénea, sino que en todos lados sea negativa. Bajo esta hipótesis se sigue que $\gamma_i^i\to\infty$ en un tiempo futuro con longitud inferior a $\tau=6/C$. Teniendo en cuenta que

$$\gamma_i^i=\partial_t\log\det h$$

se sigue que el determinante de la métrica espacial $h\to 0$ dentro de ese intervalo de tiempo.

Al descubrirse este resultado existió una discusión acerca si esta es una singularidad real o que simplemente implica que el sistema síncrono no se halla definido globalmente. La respuesta correcta es que la singularidad es real, sin embargo, se necesita desarrollar un aparato matemático adecuado para probarlo. Las secciones siguientes se hallan dedicadas a este tema.

Capítulo 4

La ecuación de Raychaudhuri

Paralelamente a la aparición de este resultado y en forma independiente, en la década del 50, un físico y matemático indio desarrolló un formalismo matemático que permite interpretar este problema. Para ello es conveniente dar una definición intrínseca del sistema síncrono.

Si se considera una congruencia de geodésicas temporales parametrizadas por el tiempo propio τ, el campo vectorial V^a de vectores tangentes a cada geodésica de la congruencia satisface la normalización $g_{ab}V^aV^b = -1$. De manera análoga a lo discutido en la sección anterio, se define la métrica espacial como el tensor dado por

$$h_{ab} = g_{ab} + V_aV_b$$

Esta métrica h_{ab} cumple las siguientes propiedades

(i) $h^a{}_a = g^a{}_a + V^aV_a = 3$,

(ii) $h_{ab}V^a = g_{ab}V^a + V_aV^aV_b = V_b + (-1)V_b = 0$,

(iii) $h_{ab}h^a{}_c = (g_{ab} + V_aV_b)(g^a{}_c + V^aV_c) = g_{ac} + V_aV_c = h_{ac}$.

Es decir que $h^a{}_b$ es un operador de proyección al subespacio (del espacio tangente) perpendicular a V^a, en cada punto de la variedad. Considerando al campo de velocidades como un fluído, se pueden definir, trazando una analogía con hidrodinámica, los siguientes tensores:

- El tensor de vorticidad, dado por $\omega_{ab} = V_{[c;d]} h^c{}_a h^d{}_b$.
- El tensor de expansión, dado por $\theta_{ab} = V_{(c;d)} h^c{}_a h^d{}_b$.
- El escalar de expansión, dado por $\theta = \theta_{ab} g^{ab}$.
- El tensor de corte, dado por $\sigma_{ab} = \theta_{ab} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$.

Estos tensores pertenecen al espacio ortogonal a V^a dado que

$$\theta_{ab} V^a = \sigma_{ab} V^a = \omega_{ab} V^a = 0.$$

El escalar de expansión es igual a la divergencia de V^a como se puede ver a continuación

$$\theta = \theta_{ab} g^{ab} = \theta_{ab} h^{ab} = \frac{1}{2}(V_{(a;b)} + V_{(b;a)})(g^{ab} + V^a V^b) = V^c{}_{;c} + V_a V^b \nabla_b V^a = V^c{}_{;c}$$

Finalmente, se tiene la descomposición

$$V_{a;b} = V_{k;l} h^k{}_a h^l{}_b = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \omega_{ab}$$

esto es, las derivadas $V_{a;b}$ pueden expresarse como una suma de un tensor anti simétrico, uno simétrico sin traza, y uno diagonal que lleva la traza. Ahora bien, tomando la derivada ∇_V a $V_{a;b}$ se tiene la siguiente identidad

$$V^c \nabla_c \nabla_b V_a = V^c \nabla_b \nabla_c V_a + R^d{}_{abc} V_d V^c \tag{4.1}$$

$$= \nabla_b (V^c \nabla_c V_a) - (\nabla_b V^c)(\nabla_c V_a) + R^d{}_{abc} V_d V^c$$

$$= -V^c{}_{;b} V_{a;c} + R^d{}_{abc} V_d V^c$$

La traza de esta identidad resulta

$$V^c \nabla_c V^a{}_{;a} = -V^{c;a} V_{a;c} - R_{dc} V^d V^c$$

Finalmente, si se reemplaza $V_{a;c}$ por su descomposición en los tensores definidos previamente, y se hace uso de sus propiedades, se obtiene la identidad de Raychaudhuri

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -R_{ab}V^aV^b - \frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab} \tag{4.2}$$

donde τ es el parámetro afín asociado a la congruencia geodésica.

Por otro lado, trabajando con las parte antisimétrica de 4.1, se puede probar que

$$\nabla_V \omega_{ab} = V^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{3}\theta\omega_{ab} - 2\sigma^c{}_{[b}\omega_{a]c}$$

Esta última ecuación es de primer orden y se sigue que, cuando ω_{ab} es inicialmente 0, entonces es nulo a lo largo de toda la congruencia. En lo que sigue se asume esta condición inicial, es decir que la congruencia es ortogonal a la hipersuperficie.

La identidad de Raychaudhuri (4.2) es una relación puramente geométrica, es decir que no involucra física alguna. Sin embargo, si se asume que la curvatura viene descripta por alguna teoría de gravedad específica, entonces el término $R_{ab}V^aV^b$ depende de la distribución de materia y de las ecuaciones de Euler-Lagrange de dicha teoría. En particular, si se asume que el modelo subyacente es la RG ordinaria, entonces

$$R_{ab} = k\left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right]$$

En estos términos se tiene que

$$R_{ab}V^aV^b = k\left[T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right]V^aV^b,$$

y si se introduce la última expresión en la ecuación 4.2 dicha identidad pasa a convertirse en una ecuación concreta para la expansión escalar θ. Si se satisfacen las Ecuaciones de Einstein junto con la condición de energía fuerte planteada en el capítulo anterior

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab})\xi^a\xi^b \geq 0,$$

para todo ξ^a temporal. Teniendo en cuenta las ecuaciones de Einstein se sigue que

$$R_{ab}\xi^a\xi^b \geq 0.$$

Teniendo en cuenta estas hipótesis, y asumiendo que la congruencia es ortogonal a una hiperficie espacial $\omega_{ab} = 0$, se sigue que

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{3}\theta^2 \leq 0.$$

de donde se obtiene

$$\frac{d\left(\theta^{-1}\right)}{d\tau} = \frac{-1}{\theta^2}\frac{d\theta}{d\tau} \geq \frac{1}{3}.$$

La integración de esta última expresión conduce a

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{3}\tau \qquad \theta_0 = \theta(0). \tag{4.3}$$

Si $\theta_0 < 0$, entonces de 4.3 se deduce que θ^{-1} pasa por un cero en tiempo finito, es decir, θ diverge en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$. Un mismo razonamiento aplica si $\theta_0 > 0$, reemplazando futuro por pasado. Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente lema.

Lema: Sea V^a el campo tangente de una congruencia geodésica temporal orientada a futuro, con $\omega_{ab} = 0$. Si $R_{ab}V^aV^b \geq 0$, y el escalar de expansión alcanza un valor negativo θ_0 en algún punto de una geodésica en la congruencia, entonces $\theta \to -\infty$ a lo largo de esa geodésica, en un tiempo propio $\tau \leq 3/|\theta_0|$.

Es importante recalcar que una curva temporal γ que conecta dos puntos p y q maximiza el tiempo propio τ si es geodésica sin puntos conjugados en el medio. Cabe recordar que dos puntos a y b se dicen conjugados si existe un campo X^a que satisface la ecuación de Jacobi

$$\frac{D^2X^a}{Dt^2} = -R_{cbd}{}^{a}X^bT^cT^d,$$

siendo T^a el vector temporal tangente a la curva γ, tal que X^a no es idénticamente cero y

$$X(a) = X(0) = 0,$$

siendo a el parámetro afín correspondiente a q y 0 el correspondiente a p. También es posible demostrar que el punto q es conjugado a p si $\theta \to -\infty$ en q. Esta condición intuitivamente expresa que dos puntos son conjugados cuando un par de geodésicas que emanan en p se tocan en q. Ejemplos de puntos conjugados son el polo norte y el sur en la esfera S^2.

Además, se dice que un punto q es conjugado a una superficie de Cauchy Σ (superficie acronal cuya evolución cubre todo el espacio tiempo, ver definición más abajo) si, dada una congruencia de geodésicas que emanan de Σ vale que $\theta \to -\infty$ en q. Es decir que algunas geodésicas cercanas que emanan de dicha superficie convergen en q. Estas definiciones son algo vagas, para mayor precisión puede consultarse el apéndice. Pero en estos términos el lema anterior puede expresarse de la siguiente manera.

Teorema de Landau-Raychaudhuri: Dado un espacio tiempo (M, g) cuyo tensor de Ricci satisface la condición $R_{ab}V^aV^b \geq 0$ para todo vector temporal V^a y dada Σ una hipersuperficie espacial con $\theta = K < 0$ en un punto p pertenciente a Σ, entonces en un tiempo propio $\tau \leq 3/|K|$ existe un punto q conjugado a Σ a lo largo de la geodésica γ ortogonal a Σ y que conecta a q con p, asumiendo que dicha geodésica puede extenderse entre estos dos puntos.

Este teorema aún no puede considerarse un teorema de singularidades, sino de puntos conjugados. Pero sin embargo, a continuación veremos que los puntos conjugados, en un contexto globalmente hiperbólico, son un indicador de la presencia de singularidades.

Capítulo 5

Cuasi demostración del teorema de singularidades

5.1. Superficies ácronas

Un rol importante en la demostración de los teoremas de singularidad en RG es el concepto de superficie ácrona. Por definición, una superficie tridimensional es ácrona si dados dos puntos p y q arbitrarios en dicha superficie, no existe ninguna curva temporal conectando dichos puntos. Un ejemplo clásico de superficies ácronas es el siguiente.

Afirmación: Sea (M, g_{ab}) una espacio-tiempo orientable temporalmente y sea $S \subset M$. Luego el borde del futuro cronológico de S, $\dot{I}^{+}(S)$ es una subvariedad C^0 ácrona, 3 dimensional, embebida en M, si este conjunto no es vacío.

Demostración:
Sea $q \in \dot{I}^{+}(S)$. Si se piensa en términos del espacio tiempo de Minkowski, es intuitivo suponer que $I^{+}(q) \in I^{+}(S)$ y $I^{-}(q) \in M - I^{+}(S)$. Si esto fuera cierto, entonces es posible asumir que $\dot{I}^{+}(S)$ no es ácrono y se llegará a una contradicción. En efecto, si

fuera no ácrono entonces existirían puntos q y r conectados por una curva temporal, por lo cual $r \in I^+(q)$. Pero esto es claramente imposible dado que $I^+(S)$ es abierto y $\dot{I}^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset$. Es decir que la afirmación que S es ácrona sería cierta si pudiera probarse que $I^+(q) \in I^+(S)$ y $I^-(q) \in M - I^+(S)$. Pero esto no es difícil de probar. Para ello, considérese un punto p que se halla en el futuro de q, es decir, $p \in I^+(q)$. Entonces claramente q se halla en el pasado de p, es decir $q \in I^-(p)$. Como $I^-(p)$ es abierto, entonces existe un entorno O de q contenido en $I^-(p)$. Dado que por definición q se halla en el borde de $I^+(S)$, tenemos $O \cap I^+(S) \not\emptyset$ y entonces $p \in I^+[O \cap I^(S)] \subset I^+(S)$. Esto demuestra que $I^+(q) \subset I^+(S)$. De forma similar, se tiene $I^-(q) \subset M - I^+(S)$, como se quería demostrar. Se sigue entonces que S es ácrona. (Q. E. D)

En la discusión que sigue, la discusión se centrará en los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos, dado que estos están en armonía con el concepto de predictibilidad.

Definición: Dado un conjunto ácrono sin borde S en un espacio tiempo (M, g) se define el "dominio futuro de dependencia" $D^+(S)$ como el conjunto de todos los puntos de M tal que toda curva causal inextensible que pase por p intersecta S. De forma análoga se define el "dominio pasado de dependencia" $D^-(S)$.

Definición: Se dice que un conjunto ácrono sin borde Σ en (M, g) es una *superficie de Cauchy* cuando $M = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$.

Definición: Un espacio tiempo (M, g) se dice globalmente hiperbólico si existe una superficie de Cauchy Σ para el mismo.

Afirmación: Dado un espacio tiempo globalmente hiperbólico (M, g), una superficie de Cauchy Σ y un punto q no incluído en Σ, siempre existe una curva que maximiza el tiempo propio entre q y Σ.

Es necesario mencionar que, si bien estas hipótesis son razonables desde un punto de vista físico, existen soluciones que las violan. Dos ejemplos conocidos son el universo Anti-de Sitter y el de Godel. En particular, el universo Anti de Sitter contiene curvas temporalmente cerradas.

Teorema de singularidades cosmológicas: Dado un espacio tiempo (M, g) cuyo tensor de Ricci satisface la condición $R_{ab}V^aV^b \geq 0$ para todo vector temporal V^a y dada Σ una hipersuperficie espacial con $\theta = K < 0$ en cualquier punto p perteneciente a Σ, entonces ninguna geodésica temporal se extiende al pasado más allá de un tiempo $\tau \leq 3/|K|$. Es decir que el espacio es geodésicamente incompleto con respecto a las geodésicas temporales.

Cuasi-demostración: Supongamos que la afirmación es falsa. Es decir que existe una curva λ que conecta Σ con un punto r más allá de dicho tiempo. Entonces por la afirmación anterior existe una curva de longitud máxima que conecta Σ con r. Esta es entonces una geodésica sin puntos conjugados entre Σ y r. Pero el teorema de Landau-Raychaudhuri implica que dicho punto conjugado existe en ese intervalo de tiempo. Por lo tanto la curva λ no existe. (Q.E.D)

La demostración recién expuesta tiene una falencia. Como demostramos en los capítulos anteriores, las geodésicas temporales sin puntos conjugados son aquellas que maximizan el tiempo propio entre todas las curvas diferenciables (al menos C^2). Surge entonces la posibilidad que esta afirmación deje de ser válida si se consideran curvas solamente continuas y nunca diferenciables. Sin embargo, demostraremos a continuación que las geodésicas sin puntos conjugados son las maximales aún dentro de este conjunto ampliado.

Capítulo 6

El teorema de singularidades cosmológicas es verdadero

Ejemplos de curvas continuas y nunca diferenciables

Existen muchos ejemplos en la literatura matemática de curvas continuas no diferenciables. Un ejemplo es la función de Cellérier,

$$C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \sin(a^n x), \qquad a > 1.$$

Otro caso es la función de Riemann

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(n^2 x),$$

la cual sólo es diferenciable en el conjunto de puntos discretos

$$x = \pi \frac{2p+1}{2q+1}, \qquad p, q \in Z.$$

Para tratar con este tipo de curvas en un espacio-tiempo globalmente hiperbólico, es conveniente definir las siguientes nociones topológicas. Sea $C(p,q)$, el espacio de todas las curvas causales futuras que comienzan en p y terminan en q. Curvas que difieren en una reparametrización son consideradas la misma curva. Se puede dotar de una topología a $C(p,q)$ definiendo para cada abierto $U \in M$

$$O(U) = \{\lambda \in C(p,q) \ \lambda \subset U\}.$$

Claramente si U no contiene a p y q entonces $O(U) = \emptyset$. Un conjunto O se llama abierto si

$$O = \cup O(U)$$

Se puede demostrar que con estos ingredientes es posible construir una topología Haussdorf numerable. Pero el punto importante es el siguiente.

Proposición: Si (M, g_{ab}) es globalmente hiperbólico entonces $C(p,q)$ es compacto para todo par $p,\ q \in M$.

Esto equivale a decir que para toda sucesión infinita de curvas continuas λ_n en $C(p,q)$ se tiene una subsucesión convergente a una curva (punto) λ continua. Es decir que $C(p,q)$ como espacio topológico contiene a todos sus puntos de acumulación. Dicho de otra forma, una sucesión de curvas continuas causales futuras converge a una curva continua causal futura. Sea ahora $\widetilde{C}(p,q)$ el subconjunto de $C(p,q)$ cuyos elementos son suaves a trozos. Si se requiere trabajar con curvas nunca diferenciables entonces es necesario definir la noción de longitud o tiempo propio para dichas curvas. El primer problema que surge es que la función tiempo propio $\tau(\lambda)$

$$\tau(\lambda) = \int \sqrt{-T_a T^a} dt,$$

no es continua en $\widetilde{C}(p,q)$. Si dicha función fuese continua y nunca diferenciable, entonces la propiedad de compacidad recién mencionada implica que para una curva continua μ podría considerarse una sucesión de curvas diferenciables $\lambda_n \to \mu$, y a partir de ello, definir el tiempo propio de esta curva continua mediante la fórmula

$$\tau(\mu) = \lim_{n \to \infty} \tau(\lambda_n).$$

Sin embargo, esto no es posible. Esto se debe a que existen curvas zigzag con valor $\tau(\gamma) \sim 0$ en cualquier entorno infinitesimal alrededor de μ en $C(p,q)$.

Sin embargo $\tau(\lambda)$ es una función semi-continua superior. Eso quiere decir que dado cualquier ϵ tan chico como se desee se tiene que existe un $O \in \widetilde{C}(p,q)$ tal que para todo λ' in O vale

$$\tau(\lambda') < \tau(\lambda) + \epsilon$$

Este hecho es algo técnico y se demostrará al final de esta sección. Sin embargo, tomándo esta afirmación como cierta, la función tiempo propio puede extenderse a $C(p,q)$ mediante la definición

$$\overline{\tau}(c) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup\{\tau(\gamma) : \gamma \in B_\epsilon(c) \cap C(p,q)\}.$$

Esta norma es semi-continua superior también. Dada $c \in C(p,q)$ podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que

$$\tau(\gamma) < \overline{\tau}(c) + \delta$$

para toda $\gamma \in B_\epsilon(c) \cap C(p,q)$. Además si $c' \in B_\epsilon(c)$ con la definición se puede demostrar que

$$\overline{\tau}(c') < \tau(\gamma) + \delta, \qquad \gamma \in B_{\epsilon'}(c) \cap C(p,q)$$

por lo que

$$\tau(c') - \delta < \tau(\gamma) < \tau(c) + \delta, \qquad \tau(c') < \tau(c) + 2\delta,$$

lo que prueba que semi-continuidad superior. En estos términos puede probarse que las geodésicas temporales sin puntos conjugados maximizan el tiempo propio, de la siguiente manera. Las geodésicas son las que maximizan la distancia entre las curvas suaves a trozos. Sea esta geodésica γ. Ahora bien si se asume que λ es no diferenciable y estrictamente superior

$$\tau(\gamma) + \epsilon_d = \tau(\lambda), \qquad 0 < \epsilon_d.$$

Pero entonces achicando $\epsilon < \epsilon_d$ convenientemente pueden elegirse curvas diferenciales h en las inmediaciones topológicas de λ tales que

$$\tau(\lambda) < \tau(h) + \epsilon.$$

Entonces

$$\tau(\gamma) < \tau(h)$$

lo que contradice que γ sea geodésica.

Luego, se debe admitir que a lo sumo

$$\tau(\lambda) = \tau(\gamma).$$

Ahora bien, sea q no perteneciente a γ pero si a λ. Si se toma la geodésica γ_1 conectando r y q junto con γ_2 conectando q y s vale que

$$\tau(\gamma_1) + \tau(\gamma_2) \geq \tau(\lambda) = \tau(\gamma).$$

Pero γ es geodésica y esto es imposible.

Corolario: El teorema de singularidad cosmológica es cierto, dado que las geodésicas son maximales incluso dentro de $C(p,q)$.

Finalmente, se considera ahora la demostración de la hipótesis fundamental sobre semi continuidad superior.

Afirmación: La función tiempo propio $\tau(p,q)$ definida anteriormente, es semicontinua superior.

Demostración: Se toma una curva arbitraria λ, la cual se parametriza por su tiempo propio τ. Se denota su vector tangente por u_a. Al parametrizarla por el tiempo propio vale que

$$u_a u^a = -1.$$

Las geodésicas espaciales ortogonales a u^a constituyen una superficie tridimensional. En un abierto suficientemente chico $U \in M$ conteniendo a λ estas superficies van a constituir una foliación en U. Se define en cada superficie una función $F(p)$ como el valor del tiempo propio de λ en la intersección de la hipersuperficie con λ.

Entonces $u_a = \nabla_a F$ y en λ vale la condición de norma uno. En general

$$g^{a,b} F_{;b} = (\partial_\tau)^a.$$

Ahora bien, si se parametriza cualquier otra geodésica γ por F y se descompone su vector tangente v^a de la forma

$$v^a = g^{a,b} F_{;b} + k^a, \qquad k^a f_{;a} = 0,$$

siendo k^a espacial, se sigue que

$$g(v^a, v^a) = g^{ab} F_{;a} F_{;b} + g^{ab} k_a k_b,$$

y por lo tanto

$$\sqrt{-g(v^a, v^a)} \leq \sqrt{-g^{ab} F_{;a} F_{;b}}$$

Como en λ vale $g^{ab} F_{;a} F_{;b} = -1$, en un entorno podemos $M' \in M$ suficientemente chico vale que $\sqrt{-g^{ab} F_{;a} F_{;b}} < 1 + \epsilon / \tau(\lambda)$.

Por lo tanto se tiene que en ese entorno M'

$$\tau(\gamma) \leq \tau(\lambda) + \epsilon$$

lo que prueba que $\tau(c)$ es semi-continua por arriba. (Q. E. D.)

Capítulo 7

Gravedad de Gauss Bonnet

Desde el surgir de las teorías de gravedad modificada, se han estudiado numerosos modelos en donde la acción de Einstein-Hilbert se varía a partir de la introducción de una función del escalar de Ricci. Estos casos, en ocasiones, resultan modelos de interés pero no realistas, dado que al desarrollarlos, se arriba a estados no físicos (a partir de la violación de la conservación de energía o de la obtención de términos de energía cinética negativos), conocidos como *fantasmas*. La presencia de *fantasmas* en una teoría se asocia con una severa inestabilidad del sistema, tanto a nivel clásico como cuántico. Existen numerosos trabajos en los que la relevancia de los mismos es ampliamente estudiada [30][31].

Aún así, es posible tratar a estos modelos como teorías efectivas y considerar a los términos conflictivos como correcciones a energías inferiores respecto de una cierta escala fundamental. Una posible forma de tratar con estos inconvenientes es a partir de lo que se conoce como *escalares de Lovelock*. Estos no son más que una combinación/contracción del tensor de Riemann con una propiedad fundamental: si están presentes en el lagrangiano, sólo contribuyen en las ecuaciones de movimiento con derivadas de segundo orden. Existe un escalar $P \equiv R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$, cuadrático en en el tensor de Riemann, a partir del cual es posible definir la cantidad escalar

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{7.1}$$

el cual se conoce como el término de Gauss-Bonnet (GB). Si se utiliza este invariante en la acción D dimensional,

$$S = \int d^D x \sqrt{-g}\mathcal{G}. \tag{7.2}$$

donde la signatura empleada es $(-,+,...,+)$. La ecuación de movimiento se obtiene al tomar δS considerando la métrica $g_{\mu\nu}$ como grado de libertad relevante. Su forma es

$$-\frac{1}{2}R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma}g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha\nabla_\beta R - 2R_{\rho\beta\alpha\sigma}R^{\sigma\rho} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\Box R + \Box R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}R^2 g_{\alpha\beta} - 2RR_{\alpha\beta}$$
$$- 2\nabla_\beta\nabla_\alpha R + 2g_{\alpha\beta}\Box R - \frac{1}{2}R + R_{\alpha\beta} = 0. \tag{7.3}$$

Una de las particularidades del término de GB es que, a pesar de ser cuadrático en el tensor de Riemann (y el tensor de Ricci), los términos que contienen más de dos derivadas parciales de la métrica se anulan, haciendo que las ecuaciones de movimiento sean ecuaciones diferenciales de segundo orden en la métrica.

No obstante, resulta de interés remarcar que, como una propiedad topológica, es posible expresar $\sqrt{-g}\mathcal{G}$ como una derivada total, es decir

$$\sqrt{-g}\mathcal{G} = \partial_\alpha \mathcal{D}, \tag{7.4}$$

donde

$$\mathcal{D} = \sqrt{-g}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\Gamma^\rho_{\mu\beta}[\frac{R^\sigma_{\nu\gamma\delta}}{2} + \frac{\Gamma^\sigma_{\lambda\gamma}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma}}{3}] \tag{7.5}$$

Luego, las contribuciones a la ecuación de movimiento desaparecen para una variedad sin borde en 4 dimensiones. Esto es una consecuencia del teorema de Gauss-Bonnet que se detalla a continuación:

Teorema: Sea M una variedad riemanniana de dimensión 2, compacta y con borde δM, luego, la característica de Euler de M, $\chi(M)$, está dada por

$$\int_M K dA + \int_{\delta M} k_g ds = 2\pi\chi(M) \tag{7.6}$$

donde K es la curvatura gaussiana y k_g la curvatura geodésica.

En el caso puntual de variedades que no tienen bordes, la segunda integral de (7.6) puede ser omitida. Sin embargo, a pesar de que el teorema de Gauss-Bonnet sólo aplica en 2 dimensiones, posee una versión generalizada, la cual vale para cualquier variedad riemanniana compacta, orientable, de dimensión $2n$ y sin borde. Recibe el nombre de Teorema de Chern-Gauss-Bonnet y para el caso $n = 2$ se obtiene

$$\chi(M) = \frac{1}{32\pi^2}\int_M (R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}) = T \tag{7.7}$$

En este caso, T representa una cantidad invariante topológica, dado que $\chi(M)$ es un invariante topológico. Sin importar el valor de dicha constante, es posible reemplazar las derivadas de orden superior en el lagrangiano. Luego, los valores constantes no afectan en la ecuación de movimiento. Por ello consideremos la siguiente acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + f(\phi)G\right\} \ . \tag{7.8}$$

la cual es fisicamente no trivial dado que el término de Gauss-Bonnet se encuentra acoplado a un campo escalar ϕ a través de la función $f(\phi)$. Debido a este acoplamiento, existe contribución en las ecuaciones de movimiento dado que el lagrangiano no es más una derivada total.

Si se toma el caso de un modelo de Gauss-Bonnet con $V(\phi) = 0$, siguiendo las referencias [81]-[82], se obtiene la siguiente ecuacion de movimiento, a partir de la variación respecto de ϕ

$$0 = \nabla^2\phi + f'(\phi)G \ . \tag{7.9}$$

Asimismo, las ecuaciones de movimiento a partir de la variación de $g_{\mu\nu}$ resultan

$$\begin{gathered} 0 = \frac{1}{\kappa^2}\left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f(\phi)G - 2f(\phi)RR^{\mu\nu} \\ +8f(\phi)R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} - 4\nabla_\rho\nabla^\mu\left(f(\phi)R^{\nu\rho}\right) - 4\nabla_\rho\nabla^\nu\left(f(\phi)R^{\mu\rho}\right) \\ +4\nabla^2\left(f(\phi)R^{\mu\nu}\right) + 4g^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla_\sigma\left(f(\phi)R^{\rho\sigma}\right) - 2f(\phi)R^{\mu\rho\sigma\tau}R^\nu{}_{\rho\sigma\tau} + 4\nabla_\rho\nabla_\sigma\left(f(\phi)R^{\mu\rho\sigma\nu}\right). \end{gathered}$$

Teniendo en cuenta las siguientes relaciones que son consecuencias de las identidades de Bianchi

$$\nabla^\rho R_{\rho\tau\mu\nu} = \nabla_\mu R_{\nu\tau} - \nabla_\nu R_{\mu\tau},$$

$$
\begin{aligned}
\nabla^\rho R_{\rho\mu} &= \frac{1}{2}\nabla_\mu R,\\
\nabla_\rho\nabla_\sigma R^{\mu\rho\nu\sigma} &= \nabla^2 R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\nabla^\mu\nabla^\nu R + R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma} - R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho},\\
\nabla_\rho\nabla^\mu R^{\rho\nu} + \nabla_\rho\nabla^\nu R^{\rho\mu} &= \frac{1}{2}\left(\nabla^\mu\nabla^\nu R + \nabla^\nu\nabla^\mu R\right) - 2R^{\mu\rho\nu\sigma}R_{\rho\sigma} + 2R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho},\\
\nabla_\rho\nabla_\sigma R^{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\Box R,
\end{aligned}
$$

se sigue que puede escribirse la última expresión de la siguiente manera [61]

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{\kappa^2}\left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \gamma\left(\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi\right) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(-V(\phi) + f(\phi)G\right)\\
-2f(\phi)RR^{\mu\nu} + 4f(\phi)R^\mu{}_\rho R^{\nu\rho} - 2f(\phi)R^{\mu\rho\sigma\tau}R^\nu{}_{\rho\sigma\tau} + 4f(\phi)R^{\mu\rho\sigma\nu}R_{\rho\sigma}\\
+2\left(\nabla^\mu\nabla^\nu f(\phi)\right)R - 2g^{\mu\nu}\left(\nabla^2 f(\phi)\right)R - 4\left(\nabla_\rho\nabla^\mu f(\phi)\right)R^{\nu\rho} - 4\left(\nabla_\rho\nabla^\nu f(\phi)\right)R^{\mu\rho}\\
+4\left(\nabla^2 f(\phi)\right)R^{\mu\nu} + 4g^{\mu\nu}\left(\nabla_\rho\nabla_\sigma f(\phi)\right)R^{\rho\sigma} - 4\left(\nabla_\rho\nabla_\sigma f(\phi)\right)R^{\mu\rho\nu\sigma}\ .
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Las ecuaciones (7.9) y (7.10) representan el sistema completo con el que se describe la teoría. De aquí en más, la discusión se centrará en el caso con vacío isótropo y homogéneo con curvatura espacial nula. En este caso, la distancia entre los elementos viene dada por la siguiente expresión

$$
g_4 = -dt^2 + a^2(t)\sum_{i=1}^{3} dx_i^2.
$$

Las expresiones para la conexión de Levi-Civita y la curvatura en esta geometría resultan

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{ij} = a^2 H\delta_{ij}\ , \qquad \Gamma^i_{jt} = \Gamma^i_{tj} = H\delta^i{}_j\ , \qquad R_{itjt} = -\left(\dot H + H^2\right)\delta_{ij},\\
R_{ijkl} = a^4H^2\left(\delta_{ik}\delta_{lj} - \delta_{il}\delta_{kj}\right), \qquad R_{tt} = -3\left(\dot H + H^2\right)\ ,\\
R_{ij} = a^2\left(\dot H + 3H^2\right)\delta_{ij}, \qquad R = 6\dot H + 12H^2.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Las demás componentes resultan nulas. Haciendo uso de lo expuesto arriba, (7.9) puede escribirse como

$$
\ddot\phi + 3H\dot\phi - 3H^2 f'(\phi)(H^2 + \dot H) = 0. \tag{7.12}
$$

mientras que las otras dos expresiones que resultan de (7.10) son

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho_{eff}, \tag{7.13}$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p_{eff} \tag{7.14}$$

donde la densidad de energía ρ_{eff} y la densidad de presión p_{eff} vienen dadas por

$$\rho_{eff} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - 24H^3\dot{f}, \qquad p_{eff} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + 8H^2 f''(\phi)\dot{\phi}^2 + 8H^2 f'(\phi)\ddot{\phi} + 16H\dot{H}f'(\phi)\dot{\phi} + 16H^3 f'(\phi)\dot{\phi},$$

respectivamente. De esta forma, a partir de las ecuaciones (7.12) y (7.13), se obtienen expresiones que caracterizan el vacío isótropo y homogéneo de la teoría.

Capítulo 8

Resultados novedosos

8.1. Aspectos formales.

El siguiente paso es estudiar las posibles soluciones del sistema (7.12), (7.13) y (7.14). Se redefine la función $f(\phi)$ de manera tal que la constante de Newton κ pueda tomarse igual a uno. Asimismo, al tomar $f(\phi) \to 8f(\phi)$ se logran simplificar ciertos factores numéricos que emprolijan las cuentas. Luego, las ecuaciones de movimiento (7.12), (7.13) y (7.14) adquieren la siguiente forma

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = 3H^2(1 + \dot{f}(\phi)H) \tag{8.1}$$

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} = -2(H^2 + \dot{H})(1 + \dot{f}(\phi)H) - H^2(1 + \ddot{f}(\phi)) \tag{8.2}$$

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi} + 3H^2 f'(\phi)(H^2 + \dot{H}) \tag{8.3}$$

Es posible extraer varias conclusiones de este sistema de ecuaciones sin hacer ninguna elección particular del acoplamiento $f(\phi)$. En primer lugar, teniendo en cuenta que $\dot{f}(\phi) = f'(\phi)\dot{\phi}$, la ecuación (8.1) se convierte en una relación cuadrática para $\dot{\phi}$. Su solución es simplemente

$$\dot{\phi} = H\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]. \tag{8.4}$$

Al combinar esto último con (8.3), se obtiene la siguiente expresión para $\ddot{\phi}$

$$\ddot{\phi} = -3H^2\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right] + 3H^2 f'(\phi)(H^2 + \dot{H}) \tag{8.5}$$

Por otro lado, derivando con respecto al tiempo (8.4), se obtiene una nueva ecuación para $\ddot{\phi}$, la cual, igualándola con (8.5)

$$\begin{aligned}\left[15H^2 f'(\phi) \pm \frac{1}{\sqrt{36H^6 f'(\phi)^2 + 24H^2}}\right]\dot{H} &= -3H^2\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right] \\ + 3H^4 f'(\phi) + \left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]&\left[6H^4 f''(\phi) \pm \frac{72H^7 f'(\phi) f''(\phi)}{\sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}}\right],\end{aligned} \tag{8.6}$$

la cual es una ecuación que expresa la derivada respecto del tiempo del parámetro de Hubble $\dot{H}$ como una función de ϕ y H. Asimismo, otra expresión para $\dot{H}$ se puede deducir de la siguiente manera. En primer lugar, haciendo uso de la expresión $\ddot{f} = f''(\phi)\dot{\phi}^2 + f'(\phi)\ddot{\phi}$ junto con (8.1) y (8.4), es posible escribir (8.2) de la siguiente manera

$$\ddot{\phi} = \frac{H^2 + \left[1 + H^2 f'(\phi)\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]\right](5H^2 + 2\dot{H} + 6H^4 f''(\phi))}{H^2 f'(\phi)} \tag{8.7}$$

Luego, comparando este resultado con (8.5) se consigue (luego de un re-acomodamiento de algunos términos)

$$\begin{aligned}\left\{3H^4 f'(\phi)^2 - 2\left[1 + H^2 f'(\phi)\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]\right]\right\}\dot{H} = H^2 \\ +3H^4 f'(\phi)\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right] - 3H^6 f'(\phi)^2 + H^2 \\ + \left[1 + H^2 f'(\phi)\left[6H^2 f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]\right](5H^2 + 6H^4 f''(\phi)),\end{aligned} \tag{8.8}$$

lo cual es la expresión deseada para $\dot{H}$, dado que ambas ecuaciones, (8.8) y (8.6), resultan expresiones para $\dot{H}$ como funciones de ϕ y H. De hecho, se obtuvieron ecuaciones de la forma

$$A\dot{H} = B, \qquad C\dot{H} = D,$$

donde A,...,D son funciones que dependen de H y ϕ pero no de $\dot{H}$. La condición de compatibilidad para ambas ecuaciones resulta $AD = BC$. Dividiendo ambas ecuaciones, se obtiene dicha condición de compatibilidad cuya forma es

$$(aH^{10}f'(\phi)^4f''(\phi) + bH^8f'(\phi)^4 + cH^6f'(\phi)^2f''(\phi) + dH^4f'(\phi)^4 + eH^2f'(\phi) + f)H^\alpha$$
$$= \left[gH^8f'(\phi)^4 + hH^6f'(\phi)^2f''(\phi) + mH^4f'(\phi)^4 + nH^2f'(\phi) + q\right]H^\alpha\sqrt{36H^4f'(\phi)^2 + 24}. \tag{8.9}$$

Donde $a, .., q$ son números realesy $\alpha > 0$ un entero cuyos valores explícitos no son de importancia en la siguiente discusión. El factor H^α resulta importante puesto que demuestra que $H = 0$ es solución. De hecho, cuando $H \to 0$, (8.6) y (8.8) muestran que, si $f(\phi)$ y sus derivadas nunca divergen, luego $\dot{H} \to 0$. De esta forma, es posible asegurarse que el espacio plano es una solución incluida en el modelo.
Las soluciones de (8.9) arrojan una relación entre H y ϕ la cual no es biunívoca. Tomando raiz cuadrada de la expresión de arriba,

$$H^{2\alpha}\left[aH^{10}f'(\phi)^4f''(\phi) + bH^8f'(\phi)^4 + cH^6f'(\phi)^2f''(\phi) + dH^4f'(\phi)^4 + eH^2f'(\phi) + f\right]^2$$
$$-H^{2\alpha}\left[gH^8f'(\phi)^4 + hH^6f'(\phi)^2f''(\phi) + mH^4f'(\phi)^4 + nH^2f'(\phi) + q\right]^2(36H^4f'(\phi)^2 + 24) = 0. \tag{8.10}$$

se obtiene una ecuación de la forma $P(H^2, f(\phi), f'(\phi), f''(\phi)) = 0$, la cual es una expresión polinómica para H^2 de orden diez (o de orden veinte para H) a menos del factor $H^{2\alpha}$. La ecuación

$$P(H^2, f(\phi), f'(\phi), f''(\phi)) = 0 \tag{8.11}$$

describe una curva $\gamma = (H(\phi), \phi)$ en el espacio (H, ϕ) de posibles evoluciones del vacío. Por otro lado, de (8.4) se tiene

$$t - t_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{H\left[6H^2f'(\phi) \pm \sqrt{36H^4f'(\phi)^2 + 24}\right]} \tag{8.12}$$

Las ecuaciones (8.10)-(8.12) representan el sistema completo de soluciones del sistema en el caso isótropo y homogéneo. La primera da de manera implícita $H = H(\phi)$ y la segunda $\phi = \phi(t)$. Sin embargo, en el caso general, una expresión explícita resulta imposible a partir del teorema de Galois, el cual implica que no es posible hallar las raíces de un polinomio $P(H^2, f(\phi), f'(\phi), f''(\phi))$ de orden mayor a cinco, a excepción de casos muy específicos.

Aún teniendo en cuenta estos inconvenientes, es posible hallar consecuencias numéricas para estas ecuaciones, como se explicarán a continuación.

8.2. Aspectos numéricos.

En primer lugar, teniendo en cuenta (8.1), se observa que

$$\frac{\dot{\phi}^2}{6H^2} = 1 + \dot{f}H \geq 0. \tag{8.13}$$

Esto implica

$$Hf'(\phi)\dot{\phi} \geq -1$$

se satisface durante toda la evolución del universo. Por otro lado, la expresión (8.2) puede ser expresada utilizando (8.1) de la siguiente manera

$$\frac{5\dot{\phi}^2}{3} + H^2 = -2\frac{dH}{dt} - \frac{d(\dot{f}H^2)}{dt} \geq 0$$

Asimismo, a medida que t crece, la cantidad

$$H(2 + \dot{f}H) \leq C_0, \qquad t > 0, \tag{8.14}$$

con C_0 el valor inicial de la cantidad $H(2+\dot{f}H)$, es decir, para $t = 0$. Esta desigualdad tiene importantes consecuencias. Si se asume que la condición inicial cumple $C_0 < 0$, la expresión 8.13 determina que el término $2 + \dot{f}H \geq 1$, por lo tanto, este caso corresponde a $H \leq 0$. Luego, el Universo se contrae en $t = 0$. Luego, teniendo en cuenta 8.14 y la desigualdad $H < H(2 + \dot{f}H)$, se obtiene que

$$H \leq \frac{C_0}{2 + \dot{f}H} < 0, \qquad t \geq 0. \tag{8.15}$$

Es decir, si para $t = 0$ el Universo se está contrayendo, siempre se estará contrayendo en el futuro. Es importante remarcar que este resultado tiene carácter universal, no importa la forma funcional de $f(\phi)$. Asimismo, para el pasado, la ecuación 8.14 toma la forma

$$H \geq \frac{C_0}{2 + \dot{f}H} \geq C_0, \qquad t \leq 0, \tag{8.16}$$

donde, nuevamente, se tiene en cuenta que $2 + \dot{f}H \geq 1$.

Si ahora se considera que la condición inicial es $C_0 > 0$,

$$H \leq \frac{C_0}{2 + \dot{f}H} \leq C_0, \qquad t \geq 0. \tag{8.17}$$

Para el pasado, (8.14) se convierte en

$$H \geq \frac{C_0}{2 + \dot{f}H} \geq 0, \qquad t \leq 0, \tag{8.18}$$

Luego, si el Universo se expande a $t = 0$, siempre se estuvo expandiendo durante el pasado. Este resultado resulta, una vez mas, una conclusión universal y no hace ningún tipo de referencia a la forma de $f(\phi)$. Finalmente, los resultados obtenidos muestran que estos casos no contemplan el caso de un Universo gobernado por modelos cosmológicos cíclicos.

A continuación, se consideran los comportamientos de ϕ y $\dot{\phi}$. Tomando la rama negativa de (8.4),

$$\dot{\phi} = H\left[6H^2 f'(\phi) - \sqrt{36H^4 f'(\phi)^2 + 24}\right]. \tag{8.19}$$

la cual puede re-escribirse de la siguiente manera

$$\dot{\phi} = 6H^3 f'(\phi)\left[1 - \sqrt{1 + \frac{24}{36H^4 f'(\phi)^2}}\right]. \tag{8.20}$$

Es fácil ver a partir de (8.20) que si $f'(\phi) \to \pm\infty$, luego $\dot{\phi} \to 0$. Además, si $f'(\phi) \neq 0$ se sigue que $\dot{\phi} \to 0$ cuando $H \to \pm\infty$. Por otro lado, si $f'(\phi) = 0$ luego

$\dot{\phi} \rightarrow \pm\infty$ cuando $H \rightarrow \pm\infty$, como se puede observar a partir de (8.19). Es por ello que no se toman los casos para los cuales $f'(\phi)$ se anula. Un ejemplo al respecto puede considerarse al tomar $f'(\phi) > 0$ con un mínimo $f'_m > 0$. Si esta condición se satisface, $\dot{\phi}$ nunca diverge. Luego, $\dot{\phi} \rightarrow 0$ cuando $H \rightarrow 0$.

Ahora bien, si $\dot{\phi}$ es interpretado como una función de dos variables $(f'(\phi), H)$, dadas por (8.19), lo obtenido arriba muestra que desaparece en el punto $(f'_m, 0)$ y en cualquier punto en el infinito. Dado que $\dot{\phi}$ es una función continua, debe tener un mínimo y un máximo. De hecho, la restricción de esta función a cualquier línea recta en el espacio $(f'(\phi), H)$ que conecta el punto $(f'_m, 0)$ con un punto en el infinito interpola entre los dos ceros de manera continua. El teorema de Bolzano implica la presencia de un mínimo o máximo en cualquiera de estas direcciones, las cuales están parametrizadas con una coordenada *angular* ϑ y como la función $\dot{\phi}$ posee un buen comportamiento, estos extremos varían de manera continua con el ángulo. Como la coordenada angular $0 \leq \vartheta < 2\pi$ es compacta, se deduce que debería existir un mínimo global $\dot{\phi}_1$ y un máximo global $\dot{\phi}_2$. Por lo tanto,

$$\dot{\phi}_2 \leq \dot{\phi} \leq \dot{\phi}_1,$$

y, a partir de una simple integración de la última expresión,

$$\begin{aligned} \phi_0 + \dot{\phi}_1 t \leq \phi \leq \phi_0 + \dot{\phi}_2 t, \qquad t \geq 0, \\ \phi_0 + \dot{\phi}_2 t \leq \phi \leq \phi_0 + \dot{\phi}_1 t, \qquad t \leq 0. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Esto significa que el valor de ϕ se encuentra acotado entre dos funciones lineales del tiempo, por ende, estará acotado para cualquier tiempo finito t.

8.3. Caracterización de las soluciones singulares y regulares.

Con el objetivo de caracterizar las soluciones regulares y singulares de la teoría, es necesario remarcar que los invariantes de la curvatura pueden ser construidos por

(7.11) dependen de H y su derivada $\dot{H}$. Por ejemplo, los invariantes

$$R = 6\dot{H} + 12H^2, \qquad R_{ij}R^{ij} = 12\left(\dot{H} + 3H^2\right)^2, \tag{8.22}$$

dependen exclusivamente de las dos cantidades mencionadas.

A continuación, la discusión se centrará en las posibles singularidades de H y $\dot{H}$. Para ello, resultan de vital importancia los límites estudiados en la sección anterior. En primer lugar, es necesario tener en cuenta que (8.10) puede entenderse como una expresión algebraica con coeficientes determinados por las derivadas $f'(\phi)$ and $f''(\phi)$. Si estas funciones existen, son continuas para algún valor finito de ϕ y nunca se anulan, se obtiene a partir de (8.10) y (8.21), que dichos coeficientes poseen un buen comportamiento para todo valor finito de t. Es fácil ver que esta consideración implica que estas funciones no tengan asíntotas verticales. Por otro lado, la consideración de que los coeficientes no se anulen es por simplicidad, de otra forma, el comportamiento de las raíces de un polinomio pueden resultar singulares cuando alguno de los coeficientes desaparece[1]. Luego, teniendo en cuenta que los coeficientes son finitos y funciones simétricas de las raíces, resulta que las raíces $H(\phi)$ de (8.10) son finitas para todo tiempo finito t.

El siguiente paso es estudiar las posibles singularidades de $\dot{H}$. Previamente, conviene considerar un ejemplo. Sea una teoría (ficticia) cuyo vacío se describe a partir de $H^2 + \phi^2 = 1$. Resulta claro que, para el punto $(H, \phi) = (1, 0)$, el valor de $H'(\phi)$ diverge. Si la dinámica es tal que el punto $(H, \phi) = (1, 0)$ es alcanzado a un tiempo finito, luego $\dot{H} = H'(\phi)\dot{\phi}$ parece diverger debido a que $H'(\phi) \to \infty$ en este punto. Sin embargo, también resulta que $\dot{\phi}$ tiende a cero en $(H, \phi) = (1, 0)$ dado que éste es un punto de retorno para ϕ. De esta forma, surge una indeterminación del tipo $0.\infty$. Ahora bien, es posible tomar diferentes casos para los cuales los campos evo-

[1] Tome el caso de una función cuadrática cuyo coeficientes principal tiende a cero. Es fácil ver que, en este límite, una de las raíces diverge.

lucionan alrededor del círculo con velocidad finita, como por ejemplo, $H = \sin(t)$ y $\phi = \cos(t)$. En esos casos, la indeterminación $0.\infty$ arroja un resultado finito y $\dot{H}$ resulta finito en el punto de retorno

Para el presente modelo, la situación resulta mas compleja, puesto que la curva $\gamma = (H^2(\phi), \phi)$ es descripta por (8.10. Aún así, es posible obtener varias conclusiones. La ecuación (8.10) para H^2 posee la forma general

$$P_n(H^2) = \sum_{n=0}^{10} a_n H^{2n} = 0,$$

donde los coeficientes de esta ecuación son funciones de ϕ con buen comportamiento, por lo tanto, un cambio infinitesimal $d\phi$ inducirá un cambio suave en los coeficientes da_i. De esta forma, se incita un cambio dH^2 en alguna de las raíces del polinomio, lo cual está vinculado con las variaciones da_i a través de la siguiente fórmula

$$P_n'(H^2)dH^2 = -\sum_{n=0}^{9} H^{2n} da_n. \tag{8.23}$$

Si esta igualdad no se satisface, $H^2 + dH^2$, dejaría de ser una raíz. De la última relación, se deduce que

$$\frac{\partial H^2}{\partial a_i} = -\frac{H^{2n}}{P_n'(H^2)}. \tag{8.24}$$

De esta forma, la derivada (8.24) tiene un buen comportamiento cuando $P_n(H^2) = 0$ pero $P_n'(H^2) \neq 0$. Para una función polinomial, esta condición es la afirmación de que las raíces H^2 son simples. En otras palabras, si la evolución de ϕ es tal que dos raíces H_1^2 y H_2^2 se fusionan a un tiempo finito t_0, luego, en este punto la derivada (8.24) será divergente. Ahora bien, la derivada temporal de H^2 es

$$\frac{dH^2}{dt} = \frac{\partial H^2}{\partial a_i}\frac{da_i}{d\phi}\dot{\phi}. \tag{8.25}$$

Como fue argumentado anteriormente, la constante de Hubble H posee un valor finito para cualquier tiempo T. Luego, el posible comportamiento divergente de la derivada no se deberá a una asíntota vertical. En su lugar, será debido a la presencia de un punto de retorno en la curva $\gamma = (H^2(\phi), \phi)$, caracterizada por $\dot{\phi} \to 0$.

Resulta tentados concluir, en vista del ejemplo explicado anteriormente, que la indeterminación $0.\infty$ que aparece en (8.25) en un punto de retorno está genéricamente resuelta para dar un resultado finito. Por lo tanto, el valor resultante de $\dot{H}$ y consecuentemente, el valor de R, serán finitos en ese punto. Sin embargo, este no es el caso, y se puede dar una prueba rigurosa al respecto. Considere la identidad de Raychaudhuri [83]

$$\frac{d\theta}{dt} = -R_{tt} - \frac{\theta^2}{3}, \tag{8.26}$$

la cual, como se mencionó anteriormente, es una poderosa herramienta para estudiar singularidades. Aquí θ es el parámetro de expansión del Universo a un dado t, el cual en el caso isótropo y homogéneo se reduce a $\theta = 3H$. Para los espacio-tiempos en consideración, se tiene

$$R_{tt} = -3\left(\dot{H} + H^2\right).$$

Introduciendo esta expresión en (8.26) da como resultado una identidad trivial. Sin embargo, es posible hallar una relación no trivial usando (7.13)-(7.14). Teniendo en cuenta esta expresión y las redefiniciones $\kappa^2 = 1$ and $8f(\phi) \to f(\phi)$ la última fórmula se convierte en

$$R_{tt} = \frac{1}{2}(\rho_{eff} + 3p_{eff}) = \dot{\phi}^2 + \frac{3}{2}H^2 f''(\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{3}{2}H^2 f'(\phi)\ddot{\phi} + 3H\dot{H}f'(\phi)\dot{\phi} + \frac{3}{2}H^3 f'(\phi)\dot{\phi}.$$

Esto junto con la identificación $\theta = 3H$, transforma la ecuación de Raychaudhuri (8.26) en

$$3(1 + H\dot{f})\frac{dH}{dt} = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{3}{2}H^2(\ddot{f} + H\dot{f}) - 3H^2. \tag{8.27}$$

Mediante el uso de (8.13), la ecuación puede expresarse como

$$3\dot{\phi}^2\frac{dH}{dt} = -H^2\dot{\phi}^2 - \frac{3}{2}H^4(\ddot{f} + H\dot{f}) - 3H^4. \tag{8.28}$$

A partir de esta ecuación es posible extraer varias conclusiones indirectas. En primer lugar, si $H \neq 0$, entonces en un punto de retorno definido por $\dot{\phi} \to 0$, se sigue que $\dot{H} \to \pm\infty$. De esta forma, para el presente modelo, se obtiene un valor singular para $\dot{H}$ y consecuentemente para la curvatura R en los puntos de retorno.

En resumen, a partir del análisis anterior, se puede concluir que la curvatura R del Universo será regular si no existen puntos de retorno para ϕ. Si se combina esto con (8.25), se concluye que no existen puntos de retorno cuando la derivada $\partial_{a_i} H^2$ es finita. Esto implica que la curvatura R será regular siempre que las raíces del polinomio (8.10) no se fusionen a un tiempo finito apropiado. Luego, la tarea de construir Universos con curvatura R regular se reduce a encontrar una función $f(\phi) \in C^3$ tal que $f'(\phi) \neq 0$ y para la cual las raíces de (8.10) nunca se fusionen sin importar los valores ϕ tomados durante la evolución. Existe numerosas funciones de acoplamientos de este tipo. Sea el caso de una función tal que $f'(\phi)$ tiene un mínimo, $f_1' > 0$ y un máximo f_2' y cuyos extremos son alcanzados asintóticamente en $\phi \to \pm\infty$. Además, se supone que la derivada segunda $f''(\phi)$ nunca se anula a excepción de cuando $\phi \to \pm\infty$. Luego, tanto $f'(\phi)$ como $f''(\phi)$ toman valores acotados y también los coeficientes de (8.10). Ajustando el rango de los valores de $f'(\phi)$ y $f''(\phi)$ convenientemente, es posible construir un modelo para el cual las raíces jamás se fusionarán debido a los valores limitados de los coeficientes del polinomio.

Otra posibilidad sería que la evolución de ϕ, la cual está restringida por (8.21) está de hecho restringida a un conjunto compacto $\phi_1 \leq \phi(t) \leq \phi_2$ para la cual la imagen de los coeficientes del polinomio (8.10), determinados por $f'(\phi(t))$ and $f''(\phi(t))$ son tales que las raíces nunca se fusionan.

Finalmente, más allá del carácter general de la solución, es importante remarcar que, sin el conocimiento preciso de la forma funcional de los acoplamientos, así como de la evolución de $\phi(t)$ no es posible hacer más comentarios acerca de la dinámica del Universo representado por estos modelos.

Capítulo 9

Conclusiones

En el presente trabajo, se realizó una caracterización matemática de modelos inflacionarios de Gauss-Bonnet sin potencial para el caso de un vacío isótropo y homogéneo.

Para el caso de un Universo espacialmente plano, la solución se describió en términos de la ecuación polinómica (8.10) a partir de la constante de Hubble H y con ϕ coeficientes dependientes. Asimismo, se demostró que H está limitada por la condición inicial para cualquier tiempo futuro, independientemente de la forma del acoplamiento $f(\phi)$. En particular, un Universo contrayéndose inicialmente, se contraerá para siempre en el futuro, nuevamente, sin importar la forma funcional de $f(\phi)$. De la misma forma, un Universo en expansión, es resultado de un Universo en expansión en el pasado. Dicho de otro modo, en el modelo hayado en el presente trabajo, no se permiten cosmologías cíclicas.

Por otro lado, en un punto de inflexión $\dot{\phi} \to 0$, el Universo es necesariamente singular, a menos que sea plano. Es importante que este resultado, al igual que el comentado en el párrafo anterior, resultan universales, es decir, independientes de la forma del acoplamiento y pueden ser interpretados como un *teorema negativo*.

Asimismo, se ha demostrado que cuando la derivada del acoplamiento, $f'(\phi)$, se encuentra acotada (superior e inferiormente), existen soluciones cosmológicas no triviales cuya curvatura es regular para cualquiero tiempo pasado y futuro. Sin embargo, si estos extremos no existen, no significa que la solución sea singular. De hecho, en [84] se describen soluciones libres de singularidad con $f(\phi) = a\phi^2$. Claramente, $f'(\phi)$ no tiene un valor mínimo, aún así, la solución resultante es regular.

Finalmente, es importante remarcar que a pesar de que la ausencia de un potencial pueda ser no realista desde un punto de vista cosmológico, los métodos implementados en la presente tesis pueden ser sumamente útiles en la caracterización de soluciones con $V(\phi)$ o para casos con curvatura $k = \pm 1$.

Parte I

Apéndice

Primera y segunda variación de arco.

Primera variación.

Dados dos puntos $p, q \in \mathcal{M}$, y un parámetro $\epsilon > 0$, se dice que la congruencia $\Gamma_s(t) : [-\epsilon, +\epsilon] \times [a, b] \to \mathcal{M}$ es una variación admisible uniparamétrica de curvas temporales si el parámetro de curva t es tal que $\Gamma_s(a) = p$ y $\Gamma_s(b) = q$, y existen finitos puntos $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1} < a_k = b$ para los cuales Γ restringida a $[-\epsilon, +\epsilon] \times [a_i, a_{i+1}]$ es una curva suave. Denotamos por $\gamma(t) = \Gamma_0(t)$ la curva que quiere estudiarse. Sus vectores tangentes vienen dados por $T^a = (\partial/\partial t)^a$ y los vectores de desviación por $S^a = (\partial/\partial s)^a$. Puede demostrarse la siguiente identidad

$$T^a \nabla_a S^b - S^a \nabla_a T^b = 0, \tag{9.1}$$

la cual es una simple consecuencia de la simetría de los símbolos de Christoffel. Para verla, basta parametrizar la curva en coordenadas locales x_i como $\Gamma(s,t) = (x_1(s,t), .., x_n(s,t))$. Entonces

$$\partial_t \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial t} \partial_k \Gamma = T^k \partial_k \Gamma, \qquad \partial_s \Gamma = \frac{\partial x^k}{\partial s} \partial_k \Gamma = S^k \partial_k \Gamma.$$

Luego, se sigue de aquí que

$$\nabla_S \partial_t \Gamma = S^a \nabla_a \partial_t \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma^k_{ij} \right) \partial_k \Gamma,$$

$$\nabla_T \partial_s \Gamma = T^a \nabla_a \partial_s \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial s} \Gamma^k_{ij} \right) \partial_k \Gamma.$$

De la simetría de los símbolos de Christoffel y de la última relación se deduce que

$$\nabla_S \partial_t \Gamma = \nabla_T \partial_s \Gamma,$$

que es la forma local de (9.1) y es lo que se quería afirmar. La relación (9.1) va a ser de fundamental importancia para las deducciones de este apéndice. Ahora bien, el tiempo propio en cada pedazo suave $[a_{i-1}, a_i]$ de cada curva está dada por

$$\tau(\Gamma_s) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (-T^a T_a)^{1/2} dt$$

La primera variación de esta funcional es

$$\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds} = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\partial(-T^aT_a)^{1/2}}{\partial s}dt = -\int_{a_{i-1}}^{a_i}(-T^aT_a)^{-1/2}(S^b\nabla_bT_c)T^cdt$$
$$= -\int_{a_{i-1}}^{a_i}(-T^aT_a)^{-1/2}(T^b\nabla_bS_c)T^cdt$$

en donde en el último paso se tuvo en cuenta (9.1). Al evaluar esta expresión en $s=0$, parametrizando el tiempo en $\gamma(t)$ tal que $(-\gamma'^a\gamma'_a)^{1/2}=1$ donde $\gamma'^a = T^a\mid_{s=0}$ es el tangente a γ, y definiendo $X^a = S^a\mid_{s=0}$, se obtiene el siguiente resultado

$$\left.\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = -\int_{a_{i-1}}^{a_i}(\gamma'^b\nabla_bX_c)\gamma'^cdt = -\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(\frac{d}{dt}(X^c\gamma'_c) - (X^c\gamma'^b\nabla_b\gamma'_c)\right)dt$$
$$= -X_a(a_i)\gamma'^a(a_i^-) + X_a(a_{i-1})\gamma'^a(a_{i-1}^+) + \int_{a_{i-1}}^{a_i}(X^c\gamma'^b\nabla_b\gamma'_c)dt$$

Sumando sobre todos los intervalos i, se deduce que

$$\left.\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = +\int_a^b X^c(T^b\nabla_bT_c)dt + \sum_{i=1}^{k-1}X^a(a_i)(\Delta_iT)_a$$

donde γ' fue denotada por T, y $\Delta_iT = T(a_i^+) - T(a_i^-)$. Es importante recalcar que esta variación se efectúa a extremos fijos. En estos términos se tiene la siguiente proposición bien conocida.

Toda curva temporal de tangente unitario que extremize el tiempo propio debe ser una geodésica completamente suave.

Demostración: Sea $\gamma : [a,b] \to \mathcal{M}$ una curva que extremiza la longitud, y suave a trozos. Parametrizemos esta curva por longitud de arco. Sea $\Gamma_s(t) : [-\epsilon,\epsilon]\times[a,b]\to \mathcal{M}$ una variación admisible a extremos fijos de γ, de la forma definida anteriormente. Claramente, la variación de γ debe satisfacer

$$\left.\frac{d\tau(\Gamma_s)}{ds}\right|_{s=0} = +\int_a^b X^c(T^b\nabla_bT_c)dt + \sum_{i=1}^{k-1}X^a(a_i)(\Delta_iT)_a = 0$$

No es difícil probar que $T^b\nabla_bT_c = 0$ en todo subintervalo $[a_{i-1},a_i]$. Para verlo basta considerar una función no nula $\phi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que vale 0 fuera del intervalo (a_{i-1},a_i).

En otras palabras, esta función tiene soporte solo en el intervalo (a_{i-1}, a_i) o en un subintervalo. Si consideramos una variación $X^c = \phi Y^c$, con Y^c arbitrario, entonces se tiene que

$$\int_a^b \phi Y_c(T^b \nabla_b T^c)dt = 0$$

Dado que esta igualdad debe valer para todo Y^c, la única posibilidad es que $T^b \nabla_b T_c = 0$. Aplicando este procedimiento a todos los subintervalos, se obtiene lo que se deseaba demostrar. Veamos ahora que $\Delta_i T = T(a_i^+) - T(a_i^-) = 0$. Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, tal que $\psi(a_i) \neq 0$, $\psi(a_j) = 0$ para $i \neq j$. Si consideramos la variación $X^c = \psi Y^c$, con Y^c arbitrario, entonces se tiene que

$$Y_a(a_i)(\Delta_i T)^a = 0$$

Es decir que $(\Delta_i T)^a = 0$ para cada i. Entonces esta curva no puede tener quiebre alguno. (Q.E.D)

Segunda variación

La demostración de la sección anterior implica que una curva que extremiza el tiempo propio es una geodésica sin quiebres, es decir completamente suave. Sin embargo, no queda claro que esta curva se corresponda con un máximo, mínimo o punto de ensilladura. Claramente, se necesita alguna condición extra para asegurar un máximo de tiempo propio. Esta condición viene descripta por la presencia de puntos conjugados. Para citar un ejemplo, el polo norte y el polo sur de la tierra son puntos conjugados, dado que dos geodésicas γ_1 y γ_2 cualquiera que emanan del polo se interceptan con el polo norte. Si una de ellas, por ejemplo γ_1, se extiende más allá del polo norte, entonces tenemos dos tramos $\gamma_1 = \gamma_{1p} + \delta\gamma$, siendo γ_p la parte que une ambos polos. Por otro lado es evidente que la curva $\gamma' = \gamma_{2p} + \delta\gamma$ es una curva de igual longitud que la anterior, pero no es suave en los polos. Por lo tanto no puede maximizar el tiempo propio, dado que una de las condiciones de la proposición anterior es la suavidad. Y por ende, tampoco γ_1 puede ser extremal. Es decir que la curva γ_1, al pasar por un punto conjugado, perdió su propiedad de ser extremal.

Toda curva temporal que extremize el tiempo propio debe ser una geodésica completamente suave sin puntos conjugados.

No vamos a demostrar este teorema, el cual es accesible pero bastante técnico. Pero enfatizaremos el rol que juegan los campos de Jacobi en este resultado. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathcal{M}$ una geodésica. Como en la sección anterior, una variación geodésica de γ es una aplicación suave $\Gamma : [-\epsilon, +\epsilon] \times [a, b] \to \mathcal{M}$ donde cada $\Gamma(s, -)$ es una geodésica y $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$. Notaremos $\Gamma(s, t) = \Gamma_s(t)$.

Sea $T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ el campo vectorial tangente a las geodésicas, y sea $S^a = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^a$ el campo vectorial de desviación, que representa el desplazamiento a una geodésica infinitesimalmente cercana. En el caso de una conexión de Levi Civita, es posible elegir el parámetro afín t, y reparametrizar las geodésicas de manera de que

$$S^a T_a = 0, \qquad T_a T^a = cte.$$

Se define $v^a = T^b \nabla_b S^a$ la velocidad entre geodésicas cercanas. Entonces la aceleración relativa viene dada por $a^a = T^b \nabla_b v^a$. Utilizando la definición del tensor de Riemann, y evaluando convenientemente en $s = 0$ se deriva la ecuación geodésica

$$\begin{aligned} a^a = T^c\nabla_c(T^b\nabla_b S^a) = T^c\nabla_c(S^b\nabla_b T^a) &= (T^c\nabla_c S^b)(\nabla_b T^a) + S^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (S^c\nabla_c T^b)(\nabla_b T^a) + S^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a S^b T^c T^d \\ &= S^c\nabla_c(T^b\nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a S^b T^c T^d = -R_{cbd}{}^a S^b T^c T^d, \end{aligned}$$

para la cual se tuvo en cuenta (9.1). Teniendo en cuenta la definición

$$\frac{DS}{Dt} = T^c \nabla_c S,$$

se sigue que la última expresión puede escribirse como

$$\frac{D^2 S^a}{Dt^2} = -R_{cbd}{}^a S^b T^c T^d \tag{9.2}$$

que es la llamada ecuación de Jacobi. Entonces, dada una geodésica γ con vector tangente T^a, se dice que S^a es un campo de Jacobi en γ si cumple (9.2). Se dice que dos puntos $p, q \in \gamma$, son puntos conjugados si existe un campo de Jacobi S^a en γ, tal que S^a no es idénticamente cero y

$$S(a) = S(0) = 0,$$

siendo a el parámetro afín correspondiente a q y 0 el correspondiente a p. Es posible demostrar que si existe dicho campo, entonces cualquier geodésica que una estos dos puntos deja de maximizar el tiempo propio. Este resultado fue utilizado frecuentemente en esta tesis.

El rol del parámetro de expansión θ

Los teoremas clásicos recién mencionados no hacen alusión al parámetro de expansión de Raychaudhuri θ que fué utilizado en esta tesis. Por este motivo, describiremos esta relación en el presente apéndice. Para ello consideremos la ecuación de Jacobi (9.2), la cual en una base coordenada toma la siguiente forma

$$\frac{d^2 S^a}{d\tau^2} = -R_{\gamma\alpha\beta}{}^a S^\gamma T^\alpha T^\beta.$$

El parámetro de Raychaudhuri de una geodésica de la congruencia viene dado por $\theta_{ab} = \nabla_a T_b$. Como mencionamos anteriormente, dos puntos p y q se dicen conjugados si existe una solución S^a de dicha ecuación tal que $S(0) = 0$ y $S(a) = 0$ con 0 y a los parámetros afines correspondientes a p y q. El valor de S^a a tiempo τ depende linealmente de las condiciones iniciales $S^a(0)$ y $\frac{dS^a}{d\tau}(0)$. Por construcción de la congruencia, $S^a(0) = 0$, por lo que

$$S^a(\tau) = A^a_b(\tau)\frac{dS^b}{d\tau}(0). \tag{9.3}$$

Al reemplazar esta relación da la siguiente ecuación para A^a_b

$$\frac{d^2 A^a_b}{d\tau^2} = -R_{cfd}{}^a A^f_b T^c T^d.$$

Dadas las condiciones iniciales para S^a, es claro que

$$A^a_b(0) = 0, \qquad \frac{A^a_b}{d\tau}(0) = \delta^a_b.$$

Un punto $q \in \gamma$ es conjugado a p si y sólo si el vector de desviación S^a es no trivial y se anula en q. Esto sólo ocurrirá si y sólo si $\det A = 0$ en q.

La matriz A^a_b puede relacionarse con el tensor de Raychaudhuri $\theta_{ab} = \nabla_b T_a$ de la congruencia de la siguiente manera. En primer lugar, teniendo en cuenta la relación (9.1), se puede obtener fácilmente la siguiente relación

$$\frac{dS^a}{d\tau} = T^b\nabla_b S^a = S^b\nabla_b T^a = \theta^a_b S^b = \theta^a_c A^c_b \frac{dS^b}{d\tau}(0).$$

Por otro lado, la condición inicial (9.3) implica en particular que

$$\frac{dS^a}{d\tau} = \frac{dA^a_{\ b}}{d\tau}\frac{dS^b}{d\tau}(0)$$

Entonces, igualando los términos se obtiene

$$\frac{dA^a_{\ b}}{d\tau} = \theta^a_{\ c} A^c_{\ b},$$

la cual es la relación buscada. Una consecuencia directa de esta relación es la siguiente

$$\theta = Tr\ \theta_{ab} = Tr[\frac{dA^c_{\ a}}{d\tau}A^{-1}_{cb}] = \frac{d}{d\tau}(\log|\det A|)$$

De esta última ecuación se concluye que el determinante de A tiende a 0 en q si y sólo si $\theta \to -\infty$ en q. Dado que la anulación del determinante indica la presencia de puntos conjugados se sigue que $\theta \to \pm\infty$ en p y q respectivamente si dichos puntos son conjugados entre si. Este resultado también ha sido utilizado repetidas veces en esta tesis.

La vida es un vino amargo,

dulce en jarra compartida.

Volver en vino. Horacio Guarany

Agradecimientos.

Es muy difícil escribir esto porque hay muchísima gente a quien me gustaría agradecerle y seguramente me olvide de varios.

Quiero comenzar agradeciéndole a Claudio y a Osvaldo, sin quienes no podría estar acá. La ayuda que ambos me brindaron es inmensa y por eso les estaré eternamente agradecido.

A los docentes que tuve a lo largo de la carrera, a los que admiro y que hacen que me sienta orgulloso de haber compartido un aula, un café o un final: Fernando Lombardo, Esteban Calzetta, Juan Zanella, Sequi, Alberto Vasquez (con quien también tuve el privilegio de dar clases), Rafael Ferraro y Claudio Dorso.

A la gente del TANDAR, Andrés Arazi, y puntualmente a Dario Rodrigues, el mejor docente que conozco y con quien di clases... y aprendí más que nuestros alumnos.

A Jorge Alliende, Edgar Altszyler, Diego Alcoba y todos los compañeros con quien di clases en la facultad y de los cuales aprendí en mi rol como docente.

A Carlos Borches, una fuente inagotable de conocimiento. Cada charla, cafe, birra con el Comandante Borches fue, es (y estoy convencido que será) una oportunidad para reflexionar, aprender o simplemente ver de otra forma algo que nos rodea. A toda la gente del Programa de Historia de la FCEyN, especialmente a Eduardo.

A las autoridades del Instituto Libre de Segunda Enseñanza (ILSE) que siempre me bancaron y me dieron la posibilidad de laburar en un lugar muy lindo. Mas puntualmente, a Roald, a Vilma y a Betty, quienes confiaron en mi, me pusieron adelante de un curso y me facilitaron todas las herramientas para que día a día mejore en mi actividad docente.

Por otro lado, quiero agradecerle a mis amigos de la facultad, con quienes compartí infinidad de momentos invaluables y con quienes atravesé este camino que hoy está llegando a su fin. A Mati, una gran persona que tuve el privilegio de conocer, a quien admiro y que siento como un hermano. A El Mono, otra persona hermosa con quien compartí de todo y con quien siempre me divertí. A Marito, un loco lindo que me ayudó infinito y de quien aprendí no sólo un vagón de física. Al negro Villalba, con toda su mística de barrio, siempre en el camino de El Poder y en constante lucha contra El Merengue. A los otros dos negros de mierda, Passaglia y Nahuelandrés, personajes hermosos que lo único que desean es la movilidad social. A los Muzzarellos, los Juancarlos (y especialmente a J, El Hombre de la Técnica, El Maestro), a Belu, a Flor, a Igna...es increíble la cantidad de gente a quien quiero darle las gracias por estos años y cada uno de los momentos (no todos buenos, por supuesto) que viví en Exactas.

Quiero agradecerle a mi vieja, por supuesto, que siempre me apoyó en mis ataques de locura y que, aún con nuestras idas y vueltas, producto del caracter jodido de cada uno, siempre me dió total libertad para hacer lo que quise y me permitió, de esa forma, ir aprendiendo (o no) de mis errores. Al tío Luis, que con todas sus *limitaciones*, logró enseñarme muchísimo.

A mis amigos del club, mi familia, los hermanos que no tengo: Lucho, Tato, Terra, T, el Pola y Juli. Seis personajes a quienes amo con todo mi corazón y que cumplen un rol irremplazable en mi vida.

A la familia Adler: Igor, Mantu y Pantu, no sólo me abrieron las puertas de su casa y me soportaron (y sé que eso es mucho) sino que además siempre me apoyaron y me brindaron infinito amor. Mis agradecimientos y mi cariño eterno para cada uno de ellos.

A mi petisa, la cosa más hermosa y más importante que tengo. Aún con su pequeño tamaño tiene la capacidad de sostenerme, aguantarme y hacerme la persona más feliz del Universo y sus alrededores.

Parte II

Bibliografía

Bibliografía

[1] A. Einstein , ‘Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie’, Annalen der Physik. 49(7), 769- 822.[1916a], Reprinted as Vol. 6, Doc. 30 CPAE.

[2] A. Einstein, Albert, Die Feldgleichungen der Gravitation, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (November 25, 1915) 844847.

[3] E. Berti et al., Class. Quantum Grav. 32, 243001 (2015).

[4] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, Phys. Rev. Lett. 116, 221101 (2016).

[5] A. Einstein, [1917], ‘Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie’, Sitzungs-. berichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften. Reprinted as Document 43. (page 541) of Volume 6 CPAE.

[6] E. Hubble, Proc. Natl. Acad., Sci., 15:168-173, (1929).

[7] E. Hubble and M.L. Humason, Astrophys. J., 74:43,Äì80, (1931).

[8] A. Friedman, Uber die Krummung des Raumes, Zeitschrift fur Physik, 10, 377 (1922)

[9] H. P. Robertson, Reviews of Modern Physics, 5:62-90, 1933

[10] S. W. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, New York, 1972.

[11] Ellis, G. F. R., Maartens, R., and MacCallum, M. A. H. 2012. Relativistic cosmology. Cambridge: Cambridge University Press.

[12] S.Perlmutter, et al. Astrophys.J. 517, 565 (1999)

[13] Riess et al. (Supernova Search Team Collaboration), Astron. J. 116 (1998) 1009, astro-ph/9805201.

[14] D. J. Eisenstein et al. (SDSS Collaboration), Astrophys. J. 633 (2005), 560, astroph/0501171.

[15] D. N. Spergel et al. (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl. 148 (2003), 175, astroph/0302209

[16] J. P. Ostriker, P. J. E. Peebles, ApJ 186, 467-480 (1973).

[17] A. Refregier, Ann.Rev.Astron.Astrophys.41:645-668, (2003).

[18] R. Massey, J. Rhodes, R. Ellis, et al., Nature 445 286-290 (2007).

[19] K. A. Olive et al. (Particle Data Group), Chin. Phys. C, 38 090001 (2014)

[20] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, C. Armitage-Caplan, et al., Astron.Astrophys 571 A16 (2014).

[21] Bull, Philip et al. Phys.Dark Univ. 12 (2016) 56-99.

[22] S. W. Hawking. Roy. Soc. P c. A-Math Phy., 294(1439):511- 521. (1966).

[23] S. W. Hawking. Roy. Soc. II. P c. A-Math Phy., 295(1443):490-493. (1966).

[24] S. W. Hawking. Roy. Soc. III. P c. A-Math Phy., 300(1461):187-201. (1967).

[25] A. Linde, Lect.Notes Phys. 738: 1-54 (2008).

[26] D. Lovelock, ‚ÄúThe Einstein tensor and its generalization‚Äù, J. Math. Phys., 12 (1971) 498-501.

[27] K.S. Stelle, *Renormalization of higher derivative quantum gravity, Phys. Rev. D16, 953 (1977).*

[28] A first course in general relativity. Bernard F. Schutz. Cambridge University Press. 1985.

[29] Gravitation. C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler. San Francisco: W. H. Freeman, ISBN 978-0-7167-0344-0.

[30] F. Sbisa, Çlassical and quantum ghosts". 1406.4550v4.

[31] P. Creminelli, et al. "Ghosts in massive gravity".0505147.

[32] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D 11, 483 (2002).

[33] M. De Laurentis, M. Paolella, and S. Capozziello Phys. Rev. D 91, 083531(2015).

[34] N.D. Birrell, P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1982).

[35] C. Callan, D. Friedan, E. Martinec and M. Perry, Nucl. Phys. B262 (1985) 593; Nucl. Phys. B278 (1986) 78; E. Fradkin and A. Tseytlin, Phys. Lett. B158 (1985) 316; Nucl. Phys. B262 (1985) 1; A. Sen, Phys. Rev. D 32 (1985) 2102; Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1846.

[36] D. Gross and J. Sloan, Nucl. Phys. B291 (1987) 41.

[37] I. Antoniadis, E. Gava and K. S. Narain, Phys. Lett. B283 (1992) 209; Nucl. Phys. B393 (1992) 93.

[38] P. Brax and C. van de Bruck, Class. Quant. Grav. 20 R201 (2003).

[39] S.Nojiri and S. Odintsov Phys. Lett.B 631 1 (2005).

[40] S.Nojiri, S. Odintsov and O. Gorbunova J. Phys. A 39 6627 (2006).

[41] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. Odintsov and S. Zerbini Phys. Rev. D 73 084007 (2006).

[42] S. Nojiri, S.. Odintsov, A. Toporensky, P. Tretyakov Gen. Rel. Grav.42 1997 (2010).

[43] G. Cognola, E. Elizalde, S.Nojiri, S. Odintsov and S. Zerbini Eur. Phys. J. C 64, 483 (2009).

[44] S. Capozziello, E. Elizalde, S. Nojiri, S. Odintsov Phys. Lett. B 671, 193 (2009).

[45] K. Bamba, S.Nojiri and S. Odintsov JCAP 081, 045 (2008).

[46] J Sadeghi, M R Setare and A Banijamali Eur. Phys. J. C 64 433 (2009).

[47] S.Guo and D. Schwarz Phys.Rev. D 81 (2010) 123520.

[48] M. Satoh JCAP 1011 (2010) 024.

[49] K. Nozari and N. Rashidi Phys. Rev. D 88, 084040 (2013).

[50] S. Lahiri JCAP 1701, 022 (2017).

[51] S. Lahiri JCAP 1609 025 (2016).

[52] K. Nozari and N. Rashidi Phys.Rev. D 93, 124022 (2016).

[53] J. Mathew and S. Shankaranarayanan, Astropart.Phys. 84, 1 (2016).

[54] K. Nozari, R. Aghababarian and N. Rashidi Astrophys.Space Sci. 358, 24 (2015).

[55] M. Motaharfar and H. Sepangi Eur. Phys. J. C 76, 646 (2016).

[56] I. Neupane and B. Carter JCAP 0606, 004 (2006).

[57] M. Laurentis, M. Paolella and S.Capozziello Phys. Rev. D91, 083531 (2015).

[58] C. van de Bruck, K. Dimopoulos and C. Longden Phys. Rev. D 94, 023506 (2016).

[59] L. Granda and D. Jimenez Phys. Rev. D 90 (2014) 123512.

[60] L. Granda and E. Loaiza IJMPD 21, 1 (2012) 1250002.

[61] S. Nojiri, S. D. Odintsov, and M. Sasaki Phys.Rev. D71 (2005) 123509.

[62] G. Hikmawan, J. Soda, A. Suroso and F.. Zen, Phys. Rev. D 93 (2016) 068301.

[63] P. Kanti, J. Rizos and K. Tamvakis Phys. Rev. D 59 (1999) 083512.

[64] R. Easther and K. Maeda, Phys. Rev. D 54 (1996) 7252.

[65] J. Rizos and K. Tamvakis Phys. Lett. B 326 (1994) 57.

[66] A.A. Starobinsky, Phys. Lett. B 91 (1987) 41.

[67] R.H. Brandenberger and C. Vafa, Nucl. Phys. B 316 (1989) 391.

[68] A.A. Tseytlin and C. Vafa, Nucl. Phys. B 372 (1992) 443.

[69] V. Mukhanov and R. Brandenberger, Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 1969.

[70] R. Brandenberger, V. Mukhanov and A. Sornborger, Phys. Rev. D 48 (1993) 1629.

[71] J.D. Barrow, Phys. Rev. D 48 (1993) 3592.

[72] T. Damour and A.M. Polyakov, Nucl. Phys. B 423 (1994) 532.

[73] C. Angelantonj, L. Amendola, M. Litterio and F. Occhionero, Phys. Rev. D 51 (1995) 1607.

[74] N. Kaloper, R. Madden and K.A. Olive, Nucl. Phys. B 452 (1995) 677 ; Phys. Lett. B 371 (1996) 34.

[75] M. Gasperini and G. Veneziano, Phys. Lett. B 387 (1996) 715.

[76] S.-J. Rey, Phys. Rev. Lett. 77 (1996) 1929 ; Nucl. Phys. Proc. Suppl. A 52 (1997) 344.

[77] R. Easther, K. Maeda and D. Wands, Phys. Rev. D 53 (1996) 4247.

[78] S. Bose and S. Kar, Phys. Rev. D 56 (1997) 4444.

[79] S. Kalyana Rama, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 1620 ; Phys. Rev. D 56 (1997) 6230 ; Phys. Lett. B 408 (1997) 91.

[80] R. Brustein and R. Madden, Phys. Lett. B 410 (1997) 110 ; Phys. Rev. D 57 (1998) 712.

[81] P. Kanti, R. Gannouji and N. Dadhich Phys. Rev. D 92, 041302 (2015).

[82] P. Kanti, R. Gannouji and N. Dadhich Phys. Rev. D 92, 083524 (2015).

[83] S. Hawking and G. Ellis. The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge: Cambridge University Press (1973); S. Hawking and R. Penrose Proceedings of the Royal Society London A314, 529(1970).

[84] P. Kanti .Early-time cosmological solutions in scalar-Gauss-Bonnet theory.arXiv:1509.08610.

[85] C. Fewster and G. Galloway Class. Quantum Grav. 28 125009 (2011).