



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis de Licenciatura

Dinámica del Campo Escalar en el Agujero Negro BTZ No Rotante

Joan Manuel La Madrid

Director: Dr. Alan Garbarz
Codirector: Dr. Mauricio Leston

Fecha de Presentación: Abril 2017

Tema: Dinámica del Campo Escalar en el Agujero Negro BTZ No Rotante

Alumno: Joan Manuel La Madrid

L.U.: 16/12

Lugar de trabajo: Departamento de Física - Universidad de Buenos Aires

Director del trabajo: Dr. Alan Garbarz

Codirector del trabajo: Dr. Mauricio Leston

Fecha de iniciación: Septiembre 2016

Fecha de finalización: Abril 2017

Fecha de examen: Viernes 21 de Abril de 2017

Informe final aprobado por:

Autor

Director

Jurado

Codirector

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En los últimos años ha sido de gran interés el estudio de teorías de campos en Anti-de Sitter debido al desarrollo de la correspondencia Ads/CFT, entre otras razones. Sin embargo, Ads en todas sus dimensiones carece de hiperbolicidad global y el problema de condiciones iniciales para determinar una solución única del campo escalar libre en todo el espacio-tiempo a partir de data inicial apropiada puede no estar bien definido. De todas las dimensiones en las cuales puede definirse Anti-de Sitter, el caso tridimensional es de gran relevancia porque todas las soluciones de la gravedad de Einstein en $2 + 1$ dimensiones con constante cosmológica negativa son localmente diffeomorfas a Ads(3) y difieren en propiedades globales únicamente. Más aún, dentro de estas soluciones existe la del agujero negro BTZ que presenta una singularidad en su estructura causal.

En el presente trabajo se estudió un formalismo desarrollado por Robert Wald basado en la teoría de extensiones autoadjuntas de operadores para definir correctamente el problema de condiciones iniciales de la ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos. Este resulta ser un método sistemático en el cual se relacionan las posibles extensiones autoadjuntas de los operadores diferenciales con posibles condiciones de contorno en infinito. Se analizaron los resultados obtenidos por Wald e Ishibashi al aplicar este método al caso particular de Anti-de Sitter y luego se aplicó este formalismo para estudiar la dinámica del campo escalar libre en la región exterior del agujero negro BTZ no rotante. También se compararon los resultados del campo en Anti-de Sitter y en el agujero negro no rotante y se determinó que el campo presenta el mismo comportamiento en el infinito de ambos espacio-tiempos.

En el último capítulo se cuantizó el campo escalar masivo y con acople conforme en la región exterior del agujero negro BTZ. Considerando que esa región es estacionaria y habiendo determinado unívocamente la evolución temporal de un paquete de ondas a partir del formalismo de Wald, se pudo definir en ambos casos un espacio de Hilbert privilegiado para la teoría cuántica del campo escalar libre para cualquier condición de contorno.

Agradecimientos

Comienzo agradeciendo a mi familia por el apoyo incondicional y la infinita paciencia que me han tenido durante los 6 años de carrera. En particular agradezco a mi mamá por ser la persona que me enseñó, me enseña y continuará enseñándome lo más importante en la vida: los valores de ser buena persona, a ser trabajador, a disfrutar de lo bueno y lo malo y a jamás darse por vencido.

Agradezco a todos los miembros de la *terapia de grupo* por dejarme participar de una de las cosas que más disfruto: *charlar de física "sin tener que caretearla"*. Estos últimos años siento que aprendí más que nunca y no solo por leer libros... sino por haber conocido gente que me inspira. En particular agradezco a Alan y Mauricio por su infinita paciencia, por ayudarme con cada cosa que necesité y por compartirme un poquito de todo su conocimiento. Estoy convencido que no pude haber elegido mejores personas para que me guíen en mi primera experiencia en la investigación. A todos los miembros del grupo les digo: gracias amigos.

Agradezco desde lo profundo de mi corazón a todos mis amigos. A los de la facultad y a los llamados *amigos de la primaria* (por más que con algunos jamás compartí ni una sola clase). Todos ellos saben que para mí la amistad, la risa, las anécdotas y la confianza son mi motor de vida. A todos los quiero muchísimo y si hoy estoy donde estoy, gran parte se los debo a ellos.

Por último, quiero agradecer a mi papá. Hace más de dos años que no puedo verlo pero no hay día que no me enorgullezca de ser su hijo y no siga aprendiendo de él.

No se que será de mí en el futuro pero espero poder honrar una frase de otro Joan Manuel, *caminante no hay camino, se hace camino al andar*, y espero que sea de la mano de la física porque hasta el día de hoy me tiene profundamente enamorado.

Índice general

Resumen	I
Índice general	v
1. Introducción	1
2. Espacios Globalmente Hiperbólicos	5
2.1. Dominios de Dependencia	5
2.2. Espacios Globalmente Hiperbólicos	6
2.2.1. Propiedades	6
2.2.2. Teoría de Campos en Espacios No-Globalmente Hiperbólicos: Interrogantes	7
3. Espacio tiempo de Anti-de Sitter	9
3.1. Anti de-Sitter(3)	9
3.1.1. Universal Covering Space de Anti-de Sitter: CAdS	10
3.2. Estructura Causal de AdS(3): Diagrama de Penrose	12
3.3. Grupo de Isometrías de AdS(3): SO(2,2)	15
4. Geometría del Agujero Negro en 2+1 dimensiones.	17
4.1. Agujero Negro BTZ	17
4.1.1. Construcción del Agujero Negro	17
4.1.2. Parametrización del Agujero Negro	18
4.2. Estructura causal del Agujero Negro BTZ	21
4.2.1. Región Exterior: $r > r_+$	23
4.2.2. Región Interior: $r < r_+$	25
4.3. Diagrama de Penrose del agujero negro BTZ	27
4.3.1. Diagrama Conforme	28

5. Campo Escalar en Espacio-Tiempos Estáticos No Globalmente Hiperbólicos	31
5.1. Operadores Autoadjuntos	32
5.1.1. Operadores no acotados	32
5.1.2. Índices de deficiencia y extensiones autoadjuntas	36
5.1.3. Ejemplo: Operador impulso en un intervalo finito	39
5.2. Extensiones autoadjuntas en teoría de campos.	42
5.2.1. Operador diferencial A	44
5.2.2. Estrategia para analizar la dinámica del campo escalar:	46
6. Campo Escalar Libre en Anti-de Sitter	47
6.1. Ecuación de Klein-Gordon en $\text{Ads}(2+n)$	47
6.1.1. Propiedades del operador A en $\text{Ads}(2+n)$	51
6.2. Soluciones del campo escalar libre en $\text{Ads}(2+n)$	54
6.2.1. Campo masivo con acople mínimo a la curvatura	60
6.2.2. Campo no masivo con acople conforme a la curvatura	63
6.2.3. Resumen de los resultados de Wald e Ishibashi para el Campo Escalar en Anti-de Sitter	69
7. Campo Escalar Libre en el agujero negro BTZ	71
7.1. Ecuación de Klein-Gordon en el agujero negro BTZ con $J=0$	71
7.1.1. Propiedades del operador A en el agujero negro BTZ	74
7.2. Soluciones del campo escalar libre en el agujero negro BTZ	77
7.2.1. Campo masivo con acople mínimo a la curvatura	82
7.2.2. Campo no masivo con acople conforme a la curvatura	86
7.2.3. Resumen de los resultados del trabajo para el campo escalar en el agujero BTZ no rotante	93
8. Cuantización del Campo Escalar libre en el Agujero Negro BTZ.	95
8.1. Cuantización del Campo Escalar en Espacio-Tiempos Globalmente Hiperbólicos y Estacionarios	96
8.1.1. Cuantización del Campo Libre	97
8.2. Teoría Cúantica del Campo Escalar en el Agujero Negro BTZ	98
8.2.1. Espacio de Hilbert de una partícula del campo escalar masivo	99
8.2.2. Espacio de Hilbert de una partícula del campo escalar con acople conforme	99

9. Conclusiones	101
Bibliografía	103

Introducción

La Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos son dos de los más grandes logros de la física. Por un lado, la Relatividad General describe las interacciones entre el campo gravitatorio cuya dinámica es tratada clásicamente y la materia. La gravedad se interpreta como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo y el régimen de aplicabilidad de la teoría se cree válido hasta la escala de Planck. La reciente detección de ondas gravitacionales por la colisión de agujeros negros nos recuerda que la teoría de Einstein no es solamente elegante, sino realmente formidable. Por otro lado, la Teoría Cuántica de Campos describe las interacciones fundamentales entre la materia a altas energías, pero muy por debajo de la escala de Planck. El éxito de esta teoría se corona con el de desarrollo del Modelo Standard de partículas, cuyo último gran logro fue el reciente descubrimiento del bosón de Higgs. Pero sin embargo, por más que haya habido grandes avances en ambas ramas de la física, la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos permanecen desunidas: a pesar de muchos esfuerzos, no hay una teoría unificada de la mecánica cuántica con la gravedad.

En el intento de amalgamar las dos teorías más exitosas de la física de altas energías, surge la Teoría de Campos en Espacios Curvos la cual no tiene el ambicioso objetivo de formular una teoría cuántica de la gravedad. La idea es estudiar el comportamiento de los campos cuánticos (campos de materia y/o de gauge) propagándose en un espacio-tiempo clásico. Dado que al espacio-tiempo descrito por una métrica g se lo trata clásicamente, la Teoría de Campos en Espacios Curvos no es una teoría fundamental de la naturaleza. Sin embargo, se espera que esta teoría provea una precisa descripción de fenómenos cuánticos en un régimen donde los efectos de la curvatura del espacio-tiempo sean significativos y la back-reaction de los campos no afecten de forma significativa la métrica de background, pero puedan despreciarse los efectos cuánticos de la gravedad misma. En particular, se espera que la Teoría de Campos en Espacios Curvos sea aplicable para fenómenos que ocurrieron en el universo temprano y en la vecindad de los agujeros negros. Uno de los descubrimientos más famosos de la teoría es sin duda *El Efecto Hawking* [1] en 1974. Un campo que en principio está en su estado de vacío, luego del proceso de colapso gravitatorio en el que una estrella forma un agujero negro, en la región exterior al horizonte de eventos el campo culmina en un estado termal. Este resultado es fascinante, Hawking mostró en su paper que los agujeros negros emiten radiación con temperatura proporcional a la *surface gravity* del horizonte de eventos; y este resultado indica una profunda conexión entre la gravedad, la mecánica cuántica y la termodinámica. Por último, comentamos que los agujeros negros tienen entropía proporcional al área del horizonte de eventos [2] y este interesante resultado parece ser una de las llaves para conjeturar la existencia de *micro estados de gravedad* cuyo estudio es tema de punta hoy en día pues puede iluminar el camino hacia la comprensión de la descripción cuántica de la gravedad.

Esta breve descripción de los logros mas significativos de la Teoría de Campos en Espacios Curvos es razón suficiente para abordar una tesis de licenciatura en el tema. Nuestro trabajo tiene por objetivo la cuantización del campo escalar masivo y con acople conforme en el agujero negro BTZ no rotante [3], [4]. Esta geometría es solución de las ecuaciones de Einstein en $2 + 1$ dimensiones con constante cosmológica negativa y surge de la identificación de puntos de Anti-de Sitter en tres dimensiones mediante un grupo uniparamétrico de isometrías discretas. Al igual que los espacios Ads en todas las dimensiones, este agujero negro no es globalmente hiperbólico. Como no admite superficies de Cauchy, el problema de condiciones iniciales para la obtención de una solución ϕ de la Ecuación de Klein-Gordon única y definida globalmente en toda la variedad a partir de data inicial $(\phi_0; \dot{\phi}_0)$ puede no estar bien definido. Para solucionar este problema estudiamos un formalismo propuesto por Robert Wald [5] que permite definir el problema de condiciones iniciales en espacio-tiempos estáticos no globalmente hiperbólicos a partir de la determinación de las posibles extensiones autoadjuntas de un operador diferencial. Las posibles extensiones autoadjuntas están en correspondencia con posibles condiciones de contorno del campo en infinito, con lo cual el formalismo de Wald se basa en determinar la posible evolución temporal de un paquete de ondas a partir de condiciones de contorno apropiadas. En la tesis se resumieron los resultados obtenidos por Wald e Ishibashi al aplicar este formalismo al caso de Anti-de Sitter en todas las dimensiones [6] y luego se lo aplicó al caso del agujero negro BTZ sin momento angular. Este es el resultado original del presente trabajo. Finalmente, una vez garantizada la correcta evolución temporal de un paquete de ondas en el agujero negro se cuantizó el campo escalar masivo y también el no masivo con acople conforme a partir de la definición de un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , privilegiado correspondiente al vacío de Boulware.

En síntesis, la tesis se estructura de la siguiente forma:

En el capítulo (2) damos definiciones básicas sobre variedades globalmente hiperbólicas.

En el capítulo (3) estudiamos el espacio-tiempo de Anti-de Sitter y construimos su diagrama de Penrose. Este capítulo es introductorio y el objetivo es familiarizarnos con una de las variedades en las cuales definiremos el campo escalar.

En el capítulo (4) estudiamos el agujero negro BTZ con particular interés al caso no rotante ($J = 0$) para el cual construimos el diagrama de Penrose. Este capítulo también es introductorio pero es útil para familiarizarnos con las propiedades globales del agujero negro ya que serán de utilidad para interpretar físicamente resultados de la teoría de campos definida sobre este background.

En el capítulo (5) introducimos definiciones sobre operadores no acotados que actúan en espacios de Hilbert. Arribamos a la necesidad de estudiar el teorema de von Neumann de extensiones autoadjuntas, y luego introducimos el formalismo de Wald que hace uso de este teorema para definir el problema de condiciones iniciales del campo escalar en espacio-tiempos estáticos no globalmente hiperbólicos.

En el capítulo (6) resumimos en lujo de detalle los resultados de Wald e Ishibashi del análisis del campo escalar con acople mínimo y conforme en Anti-de Sitter en todas las dimensiones.

En el capítulo (7) aplicamos el formalismo de Wald al caso del agujero negro BTZ no rotante. Las cuentas se describen en lujo de detalle y determinamos el comportamiento del campo masivo y el del campo con acople conforme. Además, comparamos nuestros resultados con los de Wald e Ishibashi para el caso de Ads y arribamos a conclusiones físicas que esclarecen el compartamiento del campo en ambas variedades. Resaltamos que los resultados de este capítulo son originales

Finalmente, en el capítulo (8) se realiza la cuantización del campo escalar masivo y con acople conforme en el agujero negro BTZ no rotante. Destacamos que haber sido rigurosos a la hora de estudiar el formalismo de Wald nos permite considerar cualquier condición de contorno posible. Como la región exterior del agujero negro es una geometría estacionaria, definimos un espacio de Hilbert privilegiado que representa los posibles estados de una partícula, asociados al vacío de Boulware, en los cuales puede

encontrarse el campo.

En las conclusiones resumiremos lo investigado y compararemos los resultados con aquellos de la literatura. También comentamos sobre posibles extensiones de lo aquí hecho.

Espacios Globalmente Hiperbólicos

En este primer capítulo intentaremos caracterizar ciertos aspectos de la estructura causal de los espacio-tiempos estudiados en Relatividad General y Teoría de Campos en espacios curvos. La idea es proveer definiciones básicas para luego arribar al concepto de *espacios globalmente hiperbólicos*.

2.1. Dominios de Dependencia

Definición 1:

Un espacio-tiempo M se dice *orientable temporalmente* si existe un vector timelike ζ definido en toda la variedad. Sea $\zeta \in T_M$ entonces $g(\zeta, \zeta) = g_{ab}\zeta^a\zeta^b < 0$. De ahora en más supondremos que M es *orientable temporalmente*.

Definición 2:

Sea K un subconjunto de puntos de M , definimos $I^{+/-}(K)$ como *el futuro/pasado cronológico* de K . Son los puntos $p \in M$ que pueden ser alcanzados por curvas timelike que comienzan en los puntos de K .

Definición 3:

Sea la variedad M , un subconjunto $S \subset M$ se dice *acronal* si no existen puntos p y q pertenecientes a S tales que $q \in I^+(p)$ (No existen curvas temporales que unan puntos en S). Entonces, $I^+(S) \cap S = \emptyset$. Esto significa que un conjunto acronal es aquel para los cuales ningún punto $p \in S$ se encuentra dentro del cono de luz futuro o pasado de cualquier otro punto $q \in S$. A modo de ejemplo, una superficie spacelike en el espacio tiempo de Minkowski es acronal.

Definición 4:

Definimos el **dominio de dependencia futuro** de $S \subset M$ como

$$D^+(S) = \{p \in M / \text{Toda curva causal inextensible orientada al pasado que pasa por } p, \text{ interseca a } S\}$$

En otras palabras, $p \in D^+(S)$ si todas las curvas dentro de o en su cono de luz pasado atraviesan una sola vez la superficie S . Lo conceptualmente importante es que si damos información (condiciones

¹Definimos p como un *extremo futuro (pasado)* de una curva causal $\gamma(t)$ si para todo entorno O de p existe $t > t_0$ ($t_0 < t$) tal que $\gamma(t_0) \in O$. Una curva causal es inextensible al futuro (pasado) si no existe un extremo futuro (pasado). A grosso modo, una curva inextensible puede extenderse al futuro (pasado) sin que termine (comience) en un punto fijo p de la variedad.

iniciales) apropiada en S , es posible predecir que ocurrirá en todo los puntos $p \in D^+(S)$.

Definición 5:

De forma análoga, definimos el **dominio de dependencia pasado** de $S \subset M$ como

$$D^-(S) = \{q \in M / \text{Toda curva causal inextensible orientada al futuro que pasa por } p, \text{ interseca a } S \}.$$

Esta definición es equivalente a decir que $q \in D^-(S)$ si todas las curvas dentro de o en su cono de luz futuro atraviesan la superficie S una sola vez. Sabiendo condiciones finales (futuras) en S podemos *retroceder en el tiempo esta información* hasta $q \in D^-(S)$.

Definición 6:

Sean $D^+(S)$ y $D^-(S)$ los dominios de dependencia futuro y pasado de la superficie acronal S . Definimos el **dominio de dependencia total** de S como

$$D(S) = D^+(S) \cup D^-(S).$$

2.2. Espacios Globalmente Hiperbólicos

Sea Σ un set acronal de puntos, si $D(\Sigma) = M$ entonces Σ es una **superficie de Cauchy**. Consecuentemente, a un espacio-tiempo que admita una superficie de Cauchy se lo llama **globalmente hiperbólico**.

2.2.1. Propiedades

Las propiedades fundamentales de los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos vienen enunciadas en forma de teoremas cuya demostración puede encontrarse en libros de Relatividad General. Ver [7], [8]

Teorema 1:

Si M es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico con superficies de Cauchy Σ , entonces M tiene la topología $\mathbb{R} \times \Sigma$. Esto implica que M puede ser foliada por una familia uniparamétrica de superficies Σ_t . Matemáticamente implica la existencia de un campo vectorial ortogonal a las Σ_t . En otras palabras, puede definirse una coordenada t en M de modo que cada superficie de Cauchy sea una hipersuperficie t constante. A modo de ejemplo, el espacio de Minkowski es globalmente hiperbólico y las hipersuperficies de tiempo constante son superficies de Cauchy.

Teorema 2:

Una ecuación diferencial que pueda escribirse de la forma

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi + A^a \nabla_a \phi + B\phi + C = 0, \tag{2.2.1}$$

donde ∇_a es el operador diferencial *derivada covariante*, A^a es un campo vectorial suave arbitrario, B y C funciones suaves; se la llama *hiperbólica*. Una observación importante es que la ecuación de Klein-Gordon, $[g^{ab} \nabla_a \nabla_b - m^2] \phi = 0$, es hiperbólica.

Lo relevante es que cualquier ecuación diferencial hiperbólica (2.2.1) tiene bien definido el problema de condiciones iniciales. Dada la data inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$, existe una única solución ϕ definida globalmente en todo M , tal que en una superficie de Cauchy Σ tengamos $\phi|_{\Sigma} = \phi_0$ y $n^{\mu}\nabla_{\mu}\phi|_{\Sigma} = \dot{\phi}_0$ con n^{μ} el campo vectorial unitario normal a Σ . Además, para cada conjunto cerrado $S \subset \Sigma$, la solución ϕ restringida a $D(S)$ depende únicamente de la data inicial definida en S .

En síntesis, podemos decir que la estructura causal de los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos es tal que al definir condiciones iniciales sobre una superficie de Cauchy es posible propagar causalmente esa información a cada punto de la variedad.

2.2.2. Teoría de Campos en Espacios No-Globalmente Hiperbólicos: Interrogantes

Habiendo definido qué es una variedad globalmente hiperbólica y habiendo dicho que la ecuación de Klein-Gordon tiene bien definido el problema de condiciones iniciales en ese tipo de espacio-tiempos, surgen naturalmente las preguntas:

(i) *Si la variedad NO es globalmente hiperbólica, ¿existe un formalismo más general que permita abordar el problema de condiciones iniciales en teoría de campos?*

(ii) *En el caso que exista un formalismo más general, ¿qué propiedades deben tener esos espacio-tiempos?*

(iii) *Si estamos interesados en la evolución temporal de un paquete de ondas del campo escalar ϕ ¿qué otra información además de $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ debemos brindar? ¿Esa información extra tiene interpretación Física?*

Estos interrogantes fueron respondidos por Robert Wald en su trabajo [5]. Wald aborda el problema de condiciones iniciales para el campo escalar libre. En su trabajo muestra que imponiendo ciertos requisitos sobre los espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos y estudiando la teoría de extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales, puede definirse una prescripción general que permite definir unívocamente el campo escalar ϕ en toda la variedad. El punto crucial del análisis es el agregado de condiciones de contorno adecuadas. Este formalismo fue aplicado por Robert Wald y Akihiro Ishibashi en [6] para el caso particular de Anti-de Sitter. En nuestro trabajo, aplicaremos el formalismo general de Wald al caso del campo escalar en el agujero negro BTZ sin momento angular.

Espacio tiempo de Anti-de Sitter

El espacio tiempo de Anti-de Sitter (AdS) es la solución máximamente simétrica de las ecuaciones de Einstein de vacío con constante cosmológica negativa. En los últimos años Anti-de Sitter ha tomado un rol preponderante en la física teórica de altas energías, principalmente en el marco de la correspondencia AdS/CFT [9]. AdS es máximamente simétrico, presenta $\frac{n(n-1)}{2}$ isometrías (donde n es la dimensión del espacio-tiempo), es geodésicamente completo ¹ pero no es globalmente hiperbólico (no admite superficies de Cauchy).

Es de particular interés el caso tridimensional debido a que todas las soluciones de la ecuación de Einstein con constante cosmológica negativa son localmente diffeomorfas a AdS(3). Esto significa que para todas las métricas existe una carta localmente definida tal que el elemento de línea luce como el de Anti-de Sitter. Esta interesante característica de la gravedad de Einstein en 2 + 1 dimensiones con constante cosmológica negativa será fundamental cuando se estudie la geometría del agujero negro de 3 dimensiones en el siguiente capítulo.

3.1. Anti de-Sitter(3)

El espacio tiempo de Anti-de Sitter en 3 dimensiones se define como la inmersión de un hiperboloide 3-dimensional ²

$$-(u)^2 - (v)^2 + (x)^2 + (y)^2 = -l^2, \quad (3.1.1)$$

en un espacio-tiempo plano de 4 dimensiones con métrica

$$ds^2 = -du^2 + dx^2 + dy^2 - dv^2. \quad (3.1.2)$$

¹Geodésicamente completo significa que los parámetros afines de la geodésicas de la variedad pueden extenderse en un rango infinito. Ejemplos: Minkowski lo es. El agujero negro de Schwarzschild no lo es dado que las geodésicas que arriban a la singularidad lo hacen con parámetro afin finito (tiempo propio finito). Las curvas no pueden extenderse más allá de esta región ya que no está definido el espacio-tiempo mismo en la singularidad.

²Puede generalizarse esta definición de forma natural a AdS(n) como el hiperboloide $-(\zeta^0)^2 + (\zeta^1)^2 + \dots + (\zeta^{n-1})^2 - (\zeta^n)^2 = -l^2$ inmerso en la métrica plana de n-dimensiones $ds^2 = -(d\zeta^0)^2 + (d\zeta^1)^2 + \dots + (d\zeta^{n-1})^2 - (d\zeta^n)^2$.

Una carta global que parametriza la superficie (3.1.1) es

$$\begin{aligned}
 u &= l \sin(\tau) \sec(\rho) \\
 v &= l \cos(\tau) \sec(\rho) \\
 x &= l \tan(\rho) \cos(\theta) \\
 y &= l \tan(\rho) \sin(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{3.1.3}$$

Dada la parametrización (3.1.3) podemos escribir el elemento de línea de AdS(3) en esa carta global.

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= l^2 \sec^2(\rho)[-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2(\rho)d\theta^2] \\
 0 \leq \rho &< \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad 0 < \tau < 2\pi
 \end{aligned}
 \tag{3.1.4}$$

La coordenada τ es temporal y periódica (los valores $\tau = 0$ y $\tau = 2\pi$ están identificados). Por lo tanto, AdS(3) presenta curvas temporales cerradas.

3.1.1. Universal Covering Space de Anti-de Sitter: CAdS

Dado que τ presenta la identificación $0 \sim 2\pi$ y deseamos trabajar con un espacio-tiempo sin curvas temporales cerradas, se define el Universal Covering Space de Anti-de Sitter, CAdS, deshaciendo la identificación de la variable τ . El nuevo dominio resulta $-\infty < \tau < +\infty$.

A partir de ahora llamaremos Anti-de Sitter a la variedad³

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= l^2 \sec^2(\rho)[-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2(\rho)d\theta^2] \\
 0 \leq \rho &< \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < \tau < +\infty
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5}$$

Es interesante destacar que que el espacio-tiempo (3.1.5) es conforme a la mitad del **Universo Estático de Einstein (ESU)** en 3 dimensiones. En ESU se tiene que $0 \leq \rho \leq \pi$ y las demás variables tienen el mismo dominio que en Anti-de Sitter.⁴

³En la literatura, el espacio-tiempo de Anti-de Sitter es lo que formalmente hemos llamado CAdS. Este abuso de lenguaje se debe a que el espacio-tiempo de interés físico es aquel que no presenta curvas temporales cerradas.

⁴Una variedad \tilde{M} con métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ se dice conforme a la variedad M con métrica $g_{\mu\nu}$ si existe un factor conforme Ω^2 tal que $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ para algún abierto de \tilde{M} y algún un abierto de M . Este tipo de transformaciones se caracteriza por preservar los ángulos entre dos campos vectoriales.

Esta particularidad no es única de Anti-de Sitter en 3 dimensiones. En el caso n-dimensional, siempre se tiene que AdS(n) es conforme a ESU(n).

Mostramos un último cambio de coordenadas para llevar la métrica (3.1.5) a su forma más usual. Tomando $\tan(\rho) = \frac{r}{l}$ y $t = l\tau$ arribamos a la forma usual de la métrica de AdS(3)

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$0 \leq r < +\infty; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < t < +\infty$$
(3.1.6)

La métrica de Anti-de Sitter escrita en la forma (3.1.6) nos será útil para compararla con la del agujero negro de 3 dimensiones y así entablar propiedades/comportamientos comunes en ambos espacio-tiempos.

Rayos de Luz Radiales

Una de las formas de comprender la estructura causal de un espacio-tiempo es estudiar el comportamiento de los rayos de luz. Partiendo de la métrica (3.1.5), los rayos de luz se caracterizan por $ds^2 = 0$. Si además consideramos rayos de luz radiales ($\theta = \theta_0 = cte$) arribamos a la ecuación diferencial

$$\left(\frac{d\tau}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 \Rightarrow \frac{d\tau}{d\lambda} = \pm \frac{d\rho}{d\lambda},$$
(3.1.7)

donde λ es el parámetro afín de las curvas nulas. La ecuación diferencial (3.1.7) muestra que a lo largo de rayos de luz radiales, el tiempo coordenado τ es lineal con la coordenada radial ρ .

Dado un vector de Killing, K , se conserva la proyección del impulso, P , de la partícula sobre el Killing a lo largo de la geodésica ($P \cdot K = g_{\mu\nu} P^\mu K^\nu$ es constante a lo largo de la línea de universo de la partícula libre). Como ∂_τ es un campo vectorial de Killing en AdS, P_τ es una magnitud conservada que se interpreta como "menos" la energía de la partícula libre. Esta magnitud conservada se relaciona con la energía ya que surgió de la invariancia de la métrica frente a traslaciones temporales (transformaciones generadas infinitesimalmente por ∂_τ). P_τ nos ayudará a entender una propiedad muy interesante de los rayos de luz radiales en AdS.

$$P_\tau = g_{\tau\tau} P^\tau = g_{\tau\tau} \frac{d\tau}{d\lambda}$$

$$P_\tau = -E = - \frac{l^2}{\cos^2(\rho)} \frac{d\tau}{d\lambda}$$

Usando el resultado de la ecuación (3.1.7) (el tiempo coordenado τ es lineal con la coordenada radial ρ a lo largo de trayectorias radiales nulas) podemos reemplazar $\frac{d\tau}{d\lambda}$ por $\frac{d\rho}{d\lambda}$.

$$P_\tau = -E = - \frac{l^2}{\cos^2(\rho)} \frac{d\rho}{d\lambda}$$

$$E = \frac{l^2}{\cos^2(\rho)} \frac{d\rho}{d\lambda} \Rightarrow d\lambda = \frac{E}{l^2} \frac{d\rho}{\cos^2(\rho)}$$

Podemos integrar la ecuación diferencial entre ρ_0 y $\rho_1 = \frac{\pi}{2}$, que representan un punto arbitrario y el infinito de AdS respectivamente, y arribamos a

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{E}{l^2} \tan(\rho) \Big|_{\rho_0}^{\frac{\pi}{2}} \tag{3.1.8}$$

Vemos de la expresión (3.1.8) que el parámetro afín λ es infinito independientemente de los valores iniciales λ_0 , E y ρ_0 si el rayo de luz se aproxima al infinito de AdS.

Hemos aprendido dos cosas para los rayos de luz radiales que se aproximan al infinito $\rho = \frac{\pi}{2}$ de Anti-de Sitter: por (3.1.7) necesariamente el tiempo coordenado τ es finito, mientras que el parámetro afín λ es infinito. Estos resultados son muy importantes ya que son la causa de que Anti-de Sitter no sea una espacio-tiempo globalmente hiperbólico. Podría suponerse que superficies $\tau = cte$ son superficies de Cauchy pero siempre pueden encontrarse curvas que arriben al infinito sin haber atravesado alguna de estas superficies space-like. En la siguiente sección cuando se estudie el diagrama de Penrose de Anti-de Sitter esta afirmación quedará un poco más clara. Ver [10].

3.2. Estructura Causal de AdS(3): Diagrama de Penrose

En la sección anterior hemos dicho que AdS(3) no es globalmente hiperbólico ya que los rayos de luz radiales arriban al infinito en tiempo coordenado finito. En esta sección comenzamos discutiendo una definición más precisa *del concepto de infinito de en una variedad* que nos llevará a la construcción del diagrama conforme de AdS(3). Será este diagrama el que finalmente nos permita afirmar que AdS(3) no es un espacio-tiempo globalmente hiperbólico.

Antes de comenzar con los cálculos notemos que el elemento de línea (3.1.5) presenta divergencias cuando $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ (esto equivale a $r \rightarrow +\infty$ en (3.1.6)). La manera de interpretar *el valor infinito de la métrica* es la siguiente: supongamos una curva con τ constante y $\rho_0 = cte \rightarrow \frac{\pi}{2}$, la longitud de la curva vendrá dada por la integral de la raíz cuadrada del elemento de línea $dl^2 = l^2 \tan^2(\rho_0) d\theta^2$. La integral debe hacerse entre los ángulos θ_1 y θ_2 , y el resultado será infinito sin importar cuáles sean estos ángulos ya que estamos calculando la longitud de un arco de circunferencia de radio infinito.

El comentario anterior puede sugerirnos que parece ser útil identificar *el infinito* del espacio-tiempo tomando límite en las coordenadas radiales (por ejemplo: $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ o $r \rightarrow +\infty$) pero el problema de adoptar esta definición es que resulta dependiente de la carta. Sabemos que Relatividad General es un teoría invariante frente a cambios generales de coordenadas, que el espacio-tiempo es un objeto geométrico (de modo que su noción de *infinito* también debe serlo) y por lo tanto no existe una carta privilegiada que nos indique cómo deben tomarse los límites para estudiar el *infinito de la variedad*.

La manera de abordar el estudio *del infinito de un espacio-tiempo* de forma independiente de las coordenadas es *intentando agregar puntos en la frontera de la variedad que representen el infinito*. Esta idea se visualiza en la construcción de los llamados **Diagramas de Penrose**. Para el estudio de dichos diagramas lo primero que debe hacerse es tomar cambios de coordenadas tales que los dominios de las nuevas variables sean intervalos finitos (estos intervalos en general son abiertos). Luego debe hacerse una *compactificación conforme* de la variedad original M que dá por resultado otra variedad (no física) \widetilde{M} pero que presenta la misma estructura causal que el espacio-tiempo original (ver footnote 4). La compactificación conforme consta de dos etapas: primero debe realizarse la transformación conforme

y luego debe extenderse el dominio de las coordenadas que parametrizan \widetilde{M} agregando puntos que representan *los infinitos de la variedad original*. El nombre compactificación hace alusión a que el nuevo dominio de las coordenadas en \widetilde{M} es cerrado y acotado (compacto).

El proceso de arribar a la variedad \widetilde{M} para estudiar propiedades del espacio-tiempo original se hace porque es más sencillo estudiar la estructura causal en el espacio conforme que en M . La idea subyacente de haber hecho una transformación conforme es que como se preservan ángulos, los rayos de luz en M también lo son en \widetilde{M} y por eso es que su estructura causal coincide. En la literatura se dice que el fin de los diagramas de Penrose es hacer una compactificación conforme que permita *llevar la variedad original M a una región compacta de modo que todo el espacio-tiempo pueda representarse en una hoja de papel*. Para mayor rigurosidad en la definición de diagramas de Penrose recomendamos el excelente material bibliográfico [7], [8], [10] y [11].

Ahora procedemos a construir el diagrama conforme de AdS(3) para poder estudiar su estructura causal. Tomamos el espacio tiempo (M, g) definido en (3.1.5) y multiplicamos por el factor $\Omega^2 = \cos^2(\rho)$. Arribamos a la variedad $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$.

$$d\widetilde{s}^2 = l^2[-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2(\rho)d\theta^2]$$

$$0 \leq \rho < \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < \tau < +\infty$$
(3.2.1)

La primer observación es que la métrica de la nueva variedad definida en (3.2.1) no presenta divergencias cuando $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Esto nos permite compactificar este espacio-tiempo agregando los puntos $\rho = \frac{\pi}{2}$ a la frontera de \widetilde{M} . Matemáticamente hemos hecho la *compactificación conforme* y físicamente podemos decir que hemos *agregado puntos en la frontera que representan el infinito de la variedad*. Aclaremos que la compactificación parece depender de la coordenada ρ elegida pero en realidad otra elección de coordenada tiene por resultado la misma estructura conforme (formalmente decimos que solo obtenemos otro representante de dicha estructura). Volviendo al diagrama de Penrose de AdS, el espacio-tiempo compactificado $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$

$$d\widetilde{s}^2 = l^2[-d\tau^2 + d\rho^2 + \sin^2(\rho)d\theta^2]$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < \tau < +\infty$$
(3.2.2)

resulta ser la mitad del Universo Estático de Einstein en tres dimensiones. Si solo consideramos las componentes temporal y radial (fijamos el ángulo θ) el elemento de línea resulta

$$d\widetilde{s}^2 = l^2[-d\tau^2 + d\rho^2]$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2}; \quad -\infty < \tau < +\infty$$
(3.2.3)

3. Espacio tiempo de Anti-de Sitter

Debido al nuevo espacio tiempo (3.2.2) es que Anti-de Sitter suele representarse como un cilindro extendido infinitamente en la coordenada temporal τ . Debemos aclarar que solo hemos compactificado la coordenada radial y no la temporal. Como el dominio de τ no es compacto ($\tau \in (-\infty, +\infty)$) y el dominio de ρ si lo es ($\rho \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), no podremos encontrar un cambio de coordenadas en la que los rayos de luz sean rectas a 45° y la coordenada temporal sea compacta.

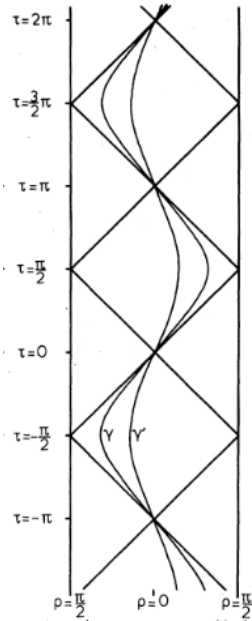


Figura 3.1: Diagrama de Penrose de Anti-de Sitter. Figura tomada de [12].

Debido a que los rayos de luz radiales arriban a la frontera del espacio-tiempo en tiempo coordenado finito es que en el diagrama de Penrose (3.1) se observa que para cualquier superficie espacial Σ de tiempo constante (por ejemplo cualquier recta horizontal en el diagrama) existen puntos en el futuro de Σ intersecados por curvas nulas orientadas al pasado que no intersecan Σ (arriban a la frontera antes de atravesar la superficie). Es por esto que Anti de-Sitter es un espacio tiempo que no presenta superficies de Cauchy y por lo tanto no es globalmente hiperbólico. Cabe destacar que Anti-de Sitter no es globalmente hiperbólico en ninguna dimensión. El diagrama de Penrose (3.1) es esencialmente el mismo para todos los espacios AdS(n).

Hemos dicho en el capítulo anterior que un espacio-tiempo no globalmente hiperbólico no tiene bien definido el problema de condiciones iniciales. Imponer como data inicial el valor del campo y su derivada normal en una superficie espacial en AdS puede no ser suficiente para determinar su evolución temporal. Remitimos al lector a los trabajos de Isham, Vishay y Stoery [12], y Lifschytz y Ortiz [13] para estudiar un formalismo que permite la cuantización del campo escalar con acople conforme en los espacio-tiempos no globalmente hiperbólicos AdS(4) y AdS(3) respectivamente. Ambos trabajos consideran esencial para su análisis el hecho que Anti-de Sitter es conforme a la mitad del Universo Estático de Einstein (que sí es globalmente hiperbólico). Para solventar la falta de hiperbolicidad global de Anti-de Sitter, resuelven la ecuación de Klein-Gordon en la mitad de ESU(4D) y ESU(3D) respectivamente, y consideran las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann en el infinito de estas regiones. Luego, multiplican las soluciones por el factor conforme apropiado para arribar a las soluciones en AdS y las condiciones de contorno impuestas en las regiones de ESU terminan siendo condiciones sobre las soluciones en Anti-de Sitter. En este trabajo generalizamos este análisis para poder determinar todas las condiciones de contorno adecuadas para el agujero negro BTZ no rotante.

3.3. Grupo de Isometrías de AdS(3): SO(2,2)

Haber definido AdS(3) como la inmersión del hiperboloide (3.1.1) en el espacio plano (3.1.2) pone de manifiesto que el grupo de isometrías es SO(2,2). Una variedad es máximamente simétrica si presenta $\frac{n(n-1)}{2}$ isometrías. En el caso $n = 3$ deben haber 6 vectores de Killing. SO(2,2) es un grupo de Lie no compacto con 6 generadores, por lo tanto, AdS(3) es un espacio de simetría maximal. Los vectores de Killing (generadores del álgebra SO(2,2)) son:

Una rotación en el plano (u, v)

$$\{ J_{01} = v\partial_u - u\partial_v$$

Dos boosts respecto a v en los planos (v, x) y (v, y)

$$\begin{cases} J_{02} = v\partial_x + x\partial_v \\ J_{03} = v\partial_y + y\partial_v \end{cases}$$

Dos boosts respecto a u en los planos (u, x) y (u, y)

$$\begin{cases} J_{12} = u\partial_x + x\partial_u \\ J_{13} = u\partial_y + y\partial_u \end{cases}$$

Una rotación en el plano (x, y)

$$\{ J_{23} = x\partial_y - y\partial_x$$

Adelantándonos un poco al capítulo siguiente, mencionamos que es sumamente relevante estudiar los vectores de Killing debido a que el agujero negro en 2+1 dimensiones surge de la identificación de puntos de AdS(3) a partir de un grupo de isometrías discreto.

Geometría del Agujero Negro en 2+1 dimensiones.

En este capítulo se estudiará en detalle el agujero negro de la teoría de Einstein en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa. Esta geometría recibió el nombre de agujero negro BTZ debido a que fue descubierto por los físicos chilenos Bañados, Teitelboim y Zanelli (BTZ); ver [3], [4]. Veremos que el agujero negro surge a partir de la identificación de puntos de Anti-de Sitter en tres dimensiones a partir de un subgrupo discreto de $SO(2,2)$. La superficie $r = 0$ no es una singularidad en la curvatura, sino que es una singularidad en la estructura causal del espacio-tiempo. Continuar curvas a través de esta superficie introduciría curvas temporales cerradas en la variedad. Se estudiará la métrica en la carta de Kruskal para luego construir el diagrama de Penrose donde se apreciará la estructura global del agujero negro.

4.1. Agujero Negro BTZ

4.1.1. Construcción del Agujero Negro

Cualquier campo vectorial de Killing ζ define un subgrupo uniparamétrico de isometrías. El agujero negro tridimensional se obtiene haciendo identificaciones respecto a un subgrupo discreto uniparamétrico de isometrías del espacio $AdS(3)$. La acción del subgrupo generado por ζ sobre la variedad, $\phi_\zeta : M \rightarrow M$, es asignarle a un punto p el punto $e^{t\zeta}p$. Este diffeomorfismo puede entenderse como *la traslación del punto p a la largo de la curva integral del campo ζ , con t el parámetro que caracteriza cada elemento de la curva*. Si ahora establecemos las clases de equivalencia

$$p \sim e^{t\zeta}p, \quad t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots, \quad (4.1.1)$$

lo que estamos haciendo es una identificación de todos los puntos en la órbita del campo vectorial ζ cuyos parámetros t difieran en un múltiplo entero de 2π ¹. Resaltamos que es importante que la identificación se haga con un campo vectorial de Killing para que el nuevo espacio-tiempo herede una métrica bien definida, la misma que $AdS(3)$. El nuevo espacio-tiempo resulta ser una solución de las ecuaciones de Einstein en tres dimensiones con constante cosmológica negativa.

¹Matemáticamente el agujero negro surge como la variedad cociente entre $AdS(3)$ y el grupo de isometrías discretas, G , generado por ζ : $BTZ \simeq AdS(3)/G$

Es importante entender qué consecuencias trajo haber hecho las identificaciones (4.1.1). En el nuevo espacio-tiempo las curvas integrales del campo ζ serán cerradas con período 2π . Para que esta nueva variedad tenga una estructura causal admisible, no podemos admitir que estas curvas sean tipo tiempo o tipo luz. Una condición necesaria y suficiente para que no haya curvas temporales cerradas es que el campo vectorial de Killing ζ sea spacelike.

$$\zeta \cdot \zeta > 0 \tag{4.1.2}$$

El campo vectorial de Killing que debe emplearse para construir el agujero negro BTZ es

$$\zeta = \frac{r_+}{l} J_{12} - \frac{r_-}{l} J_{03}, \tag{4.1.3}$$

donde r^+ y r^- corresponden al horizonte externo e interno respectivamente del agujero negro, y J_{12} y J_{03} son campos vectoriales de Killing de AdS(3) definidos en el capítulo anterior.

4.1.2. Parametrización del Agujero Negro

Enfatizamos nuevamente que todas las soluciones de la gravedad de Einstein en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa son localmente diffeomorfas a AdS(3). Todos los espacio-tiempos pueden describirse como abiertos del hiperboloide $-(u)^2 - (v)^2 + (x)^2 + (y)^2 = -l^2$ inmerso en el espacio plano de 4 dimensiones con métrica $ds^2 = -(du)^2 - (dv)^2 + (dx)^2 + (dy)^2$ (esta es la misma forma en la que se definió AdS(3) en el capítulo anterior). A continuación mostramos una forma de parametrizar esa superficie con coordenadas locales (t, r, ϕ) (aclaramos que la coordenada t de la carta no tiene relación con el t que usamos antes como párametro de las curvas integrales de ζ). Recordamos que es importante que $\zeta \cdot \zeta > 0$. En nuestro trabajo estamos interesados en la región exterior del agujero negro.

Región Exterior: $r_+ < r$

Una carta local que parametriza el hiperboloide (3.1.1) es

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{A(r)} \cosh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ x &= \sqrt{A(r)} \sinh \tilde{\phi}(t, \phi) \\ y &= \sqrt{B(r)} \cosh \tilde{t}(t, \phi) \\ v &= \sqrt{B(r)} \sinh \tilde{t}(t, \phi), \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

donde las funciones $A(r)$, $B(r)$, $\tilde{\phi}$ y \tilde{t} se definen como

$$\begin{aligned} A(r) &= l^2 \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right) & \tilde{\phi} &= \frac{1}{l} \left(-\frac{r_- t}{l} + r_+ \phi \right) \\ B(r) &= l^2 \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r_+^2 - r_-^2} \right) & \tilde{t} &= \frac{1}{l} \left(\frac{r_+ t}{l} - r_- \phi \right) \end{aligned}$$

Previo a continuar, si calculamos la norma del campo vectorial ζ haciendo uso que la métrica del espacio tiempo es $ds^2 = -(du)^2 - (dv)^2 + (dx)^2 + (dy)^2$, vemos que $\zeta \cdot \zeta = r^2$. Esto no es casualidad. Los físicos que descubrieron esta geometría sabían que a partir de este campo vectorial puede generarse un agujero negro y que su norma cuadrado representa *la distancia coordenada a la singularidad*. La condición para que el agujero negro BTZ presente una estructura causal admisible es que $\zeta \cdot \zeta > 0$ que equivale a $r^2 > 0$. En lenguajes físicos, podemos decir que el espacio-tiempo está bien definido fuera de la singularidad ($r > 0$), si atravesamos la superficie $r = 0$ el vector con el que hicimos las identificaciones será timelike y habrán curvas temporales cerradas.

Es importante aclarar que hasta que no se hagan las identificaciones con el campo vectorial de Killing, lo que estamos haciendo es parametrizar una región de AdS(3).

Métrica de AdS(3) en la carta (t, r, ϕ)

La región de la métrica de AdS(3) parametrizada por la carta local resulta

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_-^2)(r^2 - r_+^2)}{l^2 r^2} dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_- r_+}{l r^2} dt \right)^2 + \frac{(lr)^2}{(r^2 - r_-^2)(r^2 - r_+^2)} dr^2$$

$$0 < r; \quad -\infty < t < +\infty; \quad -\infty < \phi < +\infty$$
(4.1.5)

Es importante destacar que la coordenada ϕ en la métrica NO es una coordenada angular dado que los puntos $\phi = 0$ y $\phi = 2\pi$ no están identificados. Recordamos que estamos parametrizando una región del espacio-tiempo de Anti-de Sitter (no completamente) debido a que no estamos trabajando con una carta globalmente definida.

Métrica del agujero negro BTZ en la carta (t, r, ϕ)

La métrica definida en (4.1.5) es el elemento de línea de la región de Anti-de Sitter donde $\zeta \cdot \zeta > 0$. A simple vista, vemos que ∂_t es un campo vectorial de Killing asociado a traslaciones temporales (pues ∂_t es timelike) y ∂_ϕ también es un vector de Killing que salvo porque $-\infty < \phi < +\infty$, tiene el aspecto de ser el generador de rotaciones.

En el comienzo del capítulo hemos dicho que el agujero negro de la teoría de Einstein en 2+1 dimensiones con constante cosmológica negativa surge de la identificación de puntos a partir de una isometría discreta generada por ζ . Estudiar el campo ∂_ϕ será fundamental para arribar a la geometría BTZ. Usando la notación para los campos de Killing de AdS(3) escribimos ∂_ϕ como combinación lineal de estos vectores

$$\partial_\phi = \frac{r_+}{l} J_{12} - \frac{r_-}{l} J_{03} = \zeta$$
(4.1.6)

Este resultado es fundamental. ∂_ϕ es el generador de isometrías discretas. Tomando identificaciones respecto a este campo vectorial de Killing arribamos a la métrica del agujero negro tridimensional BTZ.

$$ds^2 = -\frac{(r^2 - r_-^2)(r^2 - r_+^2)}{l^2 r^2} dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_- r_+}{lr^2} dt \right)^2 + \frac{(lr)^2}{(r^2 - r_-^2)(r^2 - r_+^2)} dr^2$$

$$0 < r; \quad -\infty < t < +\infty; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$
(4.1.7)

Hemos dicho que r_+ y r_- corresponden al horizonte externo e interno respectivamente del agujero negro. Es sabido que los agujeros negros se caracterizan por su masa, M , y su momento angular, J . En el paper donde Bañadaos, Teitelboim y Zanelli discuten esta geometría, los valores del horizonte externo e interno se definen como

$$r_\pm = l \left\{ \frac{M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{Ml} \right)^2} \right] \right\}^{1/2}$$
(4.1.8)

Usando la definición para r_+ y r_- (4.1.8) podemos escribir los términos de la métrica del agujero negro (4.1.7) en función de su masa y su momento angular.

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{J}{2r^2} dt \right) + \left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2$$

$$0 < r; \quad -\infty < t < +\infty; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$
(4.1.9)

Simetrías del agujero negro BTZ

Luego de hacer la identificación de los puntos a partir de ∂_ϕ el espacio-tiempo resultante no presenta a todo $SO(2,2)$ como grupo de isometrías. Las únicas simetrías presentes son las generadas por ∂_t y ∂_ϕ . Físicamente significa que el agujero negro BTZ es un espacio-tiempo invariante frente a traslaciones temporales y axisimétrico (invariante frente a rotaciones en una sola dirección). Matemáticamente esto se debe a que en la variedad con puntos identificados, las únicas isometrías que sobreviven son aquellas que están generadas por campos vectoriales de Killing de $AdS(3)$ que conmuten con el campo vectorial $\zeta = \frac{r_+}{l} J_{12} - \frac{r_-}{l} J_{03}$. En el paper de la geometría del agujero negro en 2+1 dimensiones [4] se prueba que solo hay dos campos que conmutan con ζ ; el mismo $\zeta = \partial_\phi$ y ∂_t .²

²En el lenguaje de geometría diferencial, *conmutar* implica que la *derivada de Lie* de los campos sea nula. Las isometrías remanentes son generadas por todos los campos de Killing de $AdS(3)$, K , tales que $\mathcal{L}_\zeta K = 0$.

4.2. Estructura causal del Agujero Negro BTZ

Nos disponemos a estudiar la estructura causal de esta geometría. Estamos interesados en el caso del agujero negro estático (estacionario y no rotacional). Para el caso $J = 0$ los horizontes interno y externo son $r_- = 0$, $r_+ = l\sqrt{M}$. El elemento de línea del agujero negro sin momento angular resulta

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$r_+ < r; \quad -\infty < t < +\infty; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$
(4.2.1)

El primer comentario que debe hacerse es que la divergencia en la métrica (4.2.1) cuando $r = r_+$ no corresponde a una singularidad Física. Esta singularidad es un problema de la carta con que se ha decidido parametrizar el agujero negro BTZ. Matemáticamente esto se debe a que el sistema de coordenadas no está bien definido en todo el espacio-tiempo. En esta sección estudiaremos las coordenadas de Kruskal globalmente definidas en la variedad y veremos que no presentan divergencias cuando $r = r_+$. La única singularidad presente en el espacio-tiempo es en $r = 0$ y se trata de una singularidad en la estructura causal de la variedad. Habiendo hecho esta aclaración proseguimos con el estudio del agujero negro.

Para estudiar la estructura causal basta considerar la componente radial y temporal de la métrica.

$$ds^2 = \frac{r^2 - r_+^2}{l^2} \left[-dt^2 + \left(\frac{l^2}{r^2 - r_+^2} \right)^2 dr^2 \right]$$

$$r_+ < r; \quad -\infty < t < +\infty$$
(4.2.2)

Definimos la *coordenada tortuga* r^* como

$$dr^* = \frac{l^2}{r^2 - r_+^2} dr$$

Integrando la ecuación diferencial y considerando la región exterior ($r > r_+$)

$$r^* = -\frac{l^2}{r_+} \operatorname{arccoth} \left(\frac{r}{r_+} \right)$$
(4.2.3)

Es importante determinar los límites de la coordenada r^* .

$$r \rightarrow r_+ \Rightarrow r^* \rightarrow -\infty$$

$$r \rightarrow +\infty \Rightarrow r^* \rightarrow 0$$

El elemento de línea (4.2.2) usando la coordenada tortuga luce

$$ds^2 = \frac{r^2 - r_+^2}{l^2} [-dt^2 + (dr^*)^2]$$

$$-\infty < r^* < 0; \quad -\infty < t < +\infty$$
(4.2.4)

Destacamos que la importancia de haber definido la coordenada r^* es porque en esta carta los rayos de luz radiales se describen como rectas a 45° . Los rayos de luz orientados al futuro o pasado³ se describen por las curvas

$$t = \pm r^* = \pm \left[-\frac{l^2}{r_+} \operatorname{arccoth} \left(\frac{r}{r_+} \right) \right]$$
(4.2.5)

Podemos definir *coordenadas nulas* v y u en la variedad que representan rayos de luz dirigiéndose al pasado o futuro respectivamente.

$$u = t - r^*$$

$$v = t + r^*$$
(4.2.6)

$u = t - r^* \rightarrow u = cte$ son curvas nulas orientas al futuro.

$v = t + r^* \rightarrow v = cte$ son curvas nulas orientas al pasado.

La métrica (4.2.2) en coordenadas nulas (u, v) luce

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{l^2} dudv$$
(4.2.7)

Será útil definir coordenadas análogas a las de Kruskal para comprender mejor las propiedades del agujero negro.

³Aclaremos que cuando nos referimos al pasado o futuro, lo hacemos considerando que t es la noción de tiempo en el agujero negro.

4.2.1. Región Exterior: $r > r_+$

Sea $k = \frac{r_+}{l^2}$ la *surface gravity* del horizonte de eventos del agujero negro ⁴, definimos las coordenadas

$$\begin{aligned} V = e^{kv} &\rightarrow v = \frac{1}{k} \ln(V); & dv &= \frac{1}{kV} dV \\ U = -e^{-ku} &\rightarrow u = -\frac{1}{k} \ln(-U); & du &= \frac{-1}{kU} dU \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

En estas coordenadas la métrica luce

$$ds^2 = (r^2 - r_+^2) \frac{l^2}{r_+^2} \frac{1}{UV} dU dV \tag{4.2.9}$$

Es importante destacar que el sistema de coordenadas (U, V) está globalmente definido y por lo tanto el aspecto de la métrica en esa carta es el mismo en toda la variedad (tanto dentro como fuera del agujero negro).

Coordenadas de Kruskal en la región exterior $r > r_+$

Al igual que en la geometría de agujero negro de Schwarzschild, existen coordenadas definidas globalmente en el espacio-tiempo que permiten estudiar la naturaleza del horizonte de eventos y la singularidad.

$$\begin{aligned} V = T + X &\rightarrow dV = dT + dX \\ U = T - X &\rightarrow dU = dT - dX \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Usando la definición (4.2.8) para U y V la coordenadas (T, X) resultan

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{r - r_+}{r + r_+} \right)^{1/2} \sinh \left(\frac{r_+}{l^2} t \right) \\ X &= \left(\frac{r - r_+}{r + r_+} \right)^{1/2} \cosh \left(\frac{r_+}{l^2} t \right) \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

⁴La surface gravity de un horizonte de Killing (en particular un horizonte de eventos es un horizonte de Killing) se calcula tomando la contracción del pullback de la derivada covariante del campo de Killing con sigo mismo sobre el horizonte. Sea ζ el campo de Killing, ∇ la derivada covariante, x^μ un set de coordenadas en la variedad M , y^a un set de coordenadas en el horizonte Σ y h_{ab} la métrica inducida en Σ entonces $k^2 = -\frac{1}{2} h^{ab} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^a} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^b} \nabla_\mu \zeta^\nu \nabla_\sigma \zeta_\nu$. De forma equivalente $k^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_a \zeta_b) (\nabla^a \zeta^b)$ donde se entiende que hay que evaluar en Σ . Una propiedad importante es que k es constante en el horizonte.

Interpretación

Interpretar la información en las coordenadas de Kruskal es de gran valor para comprender la estructura causal del agujero negro. Estudiar la métrica en esta carta global nos dará una comprensión más profunda del horizonte de eventos.

Sea

$$\frac{r_+}{l^2}t = \operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{X}\right) \quad (4.2.12)$$

La igualdad (4.2.12) nos enseña que curvas de tiempo constante ($t = cte$) son rectas que pasan por el origen en el diagrama de Kruskal.

Sea

$$\frac{r - r_+}{r + r_+} = X^2 - T^2 \quad (4.2.13)$$

La igualdad (4.2.13) nos enseña que curvas $r = cte$ son hipérbolas en el diagrama de Kruskal. De aquí vemos que $r = +\infty$ corresponde a $X^2 - T^2 = 1$ y el horizonte de eventos corresponde a las curvas $X^2 = T^2$. Una observación importante es que el horizonte de eventos en la carta de Kruskal corresponde a rectas a 45° que pasan por el origen. Esto nos indica que el horizonte de eventos es una superficie nula.

La métrica en la carta de Kruskal luce

$$ds^2 = \frac{l^2}{r_+^2}(r + r_+)^2 (-dT^2 + dX^2) \quad (4.2.14)$$

Las curvas $r = cte$ y $\phi = cte$ tienen por vector tangente al campo ∂_t . Estudiar estas curvas será de utilidad para entender la naturaleza del horizonte de eventos. Podemos clasificar las curvas como lightlike, timelike o spacelike a partir de la norma de su vector tangente. Usando las coordenadas de Kruskal (4.2.11)

$$\|\partial_t\|^2 = \frac{1}{l^2}(r_+^2 - r^2) \quad (4.2.15)$$

Interpretar el resultado (4.2.15) es fundamental. En principio vemos que el vector de Killing ∂_t es en efecto el generador de traslaciones temporales fuera del agujero negro pues se trata de un vector timelike. Esto nos permite entender propiedades de las curvas fuera del horizonte de eventos.

Si $r > r_+ = cte$ entonces $\|\partial_t\|^2 < 0$. Físicamente significa que curvas de radio constante son timelike.

El caso límite $r = r_+$ corresponde al horizonte de eventos y resulta ser una superficie nula (lightlike). En esta superficie el vector de Killing ∂_t es un vector tipo luz. Este resultado es muy esperado pues el hecho que el horizonte de eventos sea una superficie nula es el motivo por el cual los rayos de luz no podrán escapar del agujero negro ⁵. Una mayor comprensión de la estructura interior del agujero negro se dará en la siguiente sección.

⁵Aclaremos que estas propiedades del horizonte de eventos del agujero negro BTZ son las mismas que las del agujero negro de Schwarzschild.

4.2.2. Región Interior: $r < r_+$

Para arribar a los coordenadas de Kruskal y poder entender la naturaleza de la singularidad es importante aclarar cómo se definen las coordenadas en la región interior al agujero negro. Los cálculos son muy similares a los hechos en el caso $r > r_+$.

Primero definimos las coordenadas nulas

$$\begin{aligned} V &= e^{kv} \rightarrow v = \frac{1}{k} \ln(V); \quad dv = \frac{1}{kV} dV \\ U &= e^{-ku} \rightarrow u = -\frac{1}{k} \ln(U); \quad du = \frac{-1}{kU} dU \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

Con u y v definidas igual que en (4.2.6). Aclaremos que como estamos en la región $r < r_+$ la coordenada tortuga es $r^* = -\frac{l^2}{r_+} \operatorname{arctanh}\left(\frac{r}{r_+}\right)$.

Análogamente a lo hecho en la región exterior, definimos las coordenadas de Kruskal (X, T) .

$$V = T + X \rightarrow dV = dT + dX$$

$$U = T - X \rightarrow dU = dT - dX$$

Adentro del agujero negro se tiene

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{r_+ - r}{r_+ + r}\right)^{1/2} \cosh\left(\frac{r_+}{l^2} t\right) \\ X &= \left(\frac{r_+ - r}{r_+ + r}\right)^{1/2} \sinh\left(\frac{r_+}{l^2} t\right) \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Interpretación

Sea

$$\frac{r_+}{l^2} t = \operatorname{arctanh}\left(\frac{X}{T}\right) \tag{4.2.18}$$

La igualdad (4.2.18) nos enseña que dentro del agujero negro, las curvas $t = cte$ son rectas que pasan por el origen en el diagrama de Kruskal.

Sea

$$\frac{r_+ - r}{r_+ + r} = T^2 - X^2 \quad (4.2.19)$$

La igualdad (4.2.19) nos enseña que dentro del agujero negro, las curvas $r = cte$ son hipérbolas en el diagrama de Kruskal. De aquí vemos que la singularidad $r = 0$ corresponde a $T^2 - X^2 = 1$ y el horizonte de eventos corresponde a las curvas tipo luz $X^2 = T^2$.

Para entender la naturaleza de la singularidad resulta útil estudiar nuevamente el campo vectorial ∂_t ya que sus órbitas corresponden a curvas $r = cte$ y $\phi = cte$. Al igual que para la región exterior, podemos calcular su norma cuadrado.

$$\|\partial_t\|^2 = \frac{1}{l^2} (r_+^2 - r^2)$$

Esta expresión es la misma que encontramos cuando se cálculo la norma cuadrado de ∂_t en la región exterior. La novedad es que en la región $r_+ > r$ el campo vectorial de Killing ∂_t resulta ser spacelike. Esto implica que dentro del agujero negro la coordenada t deja de ser temporal y se vuelve una coordenada espacial. La consecuencia es que en la región $r_+ > r$ superficies de radio constante son superficies espaciales. Por lo tanto, la singularidad $r = 0$ es spacelike.

Como último comentario recordamos que la singularidad en el agujero negro de BTZ no es un singularidad en la curvatura. Este espacio-tiempo es localmente diffeomorfo a $\text{AdS}(3)$, por lo tanto es de curvatura constante con $R = -\frac{6}{l^2}$. La singularidad es en la estructura causal. El agujero negro surge haciendo identificaciones de puntos en $\text{AdS}(3)$ a partir de un campo vectorial de Killing. La norma de este vector es positiva si $r > 0$ (spacelike) y negativa si $r < 0$ (timelike). Por lo tanto, atravesar la superficie $r = 0$ produciría curvas temporales cerradas.

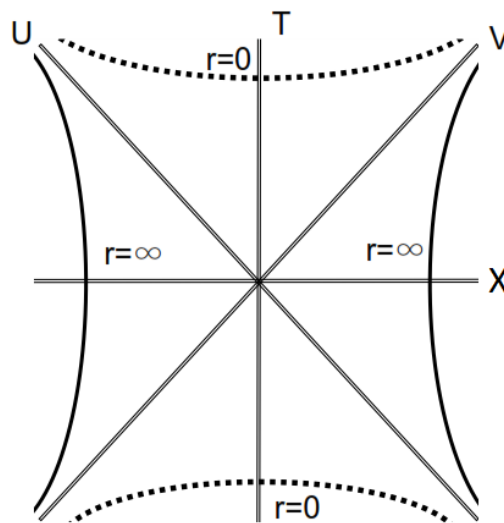


Figura 4.1: Diagrama de Kruskal del agujero negro BTZ. Figura tomada de [14].

4.3. Diagrama de Penrose del agujero negro BTZ

El objetivo será construir el diagrama conforme del agujero negro para poder estudiar su estructura causal. Veremos que la parte radial y temporal de la métrica del agujero negro BTZ coincide con la métrica de una región del espacio tiempo de Anti-de Sitter en dos dimensiones. Como AdS no es globalmente hiperbólico, esto nos llevará a la conclusión que el agujero negro BTZ tampoco lo es.

Definimos las coordenadas (τ, R)

$$\tau = \arctan(V) + \arctan(U)$$

$$R = \arctan(V) - \arctan(U)$$

$$\frac{-\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{-\pi}{2} < R < \frac{\pi}{2} \quad (4.3.1)$$

Sean $U = \tan\left(\frac{\tau-R}{2}\right)$ y $V = \tan\left(\frac{\tau+R}{2}\right)$, la métrica en las coordenadas (τ, R) luce

$$ds^2 = l^2 \sec^2(R) (-d\tau^2 + dR^2)$$

$$\frac{-\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{-\pi}{2} < R < \frac{\pi}{2}$$

(4.3.2)

El elemento de línea (4.3.2) escrito en la carta (τ, R) tiene toda la información relevante para analizar la estructura causal del agujero negro. Una observación importante es que esta métrica coincide con la de una región de Anti-de Sitter en dos dimensiones (no es la misma debido a que para BTZ la coordenada temporal τ tiene un dominio acotado mientras que para AdS(2) el dominio de la coordenada temporal son los reales). Recordamos que la estructura causal del espacio-tiempo queda determinada estudiando únicamente la parte radial y temporal de la métrica. Como los espacios Anti-de Sitter no son globalmente hiperbólicos en ninguna dimensión, AdS(2) tampoco admite superficies de Cauchy y como consecuencia tenemos que el agujero negro BTZ tampoco es globalmente hiperbólico.

4.3.1. Diagrama Conforme

Continuamos con la construcción del diagrama de Penrose.

Multiplicamos por $\Omega^2 = \cos^2(R)$ la métrica (4.3.2) y extendemos el dominio de las coordenadas. Esto es hacer la compactificación conforme del agujero negro BTZ. Arribamos a la métrica del espacio-tiempo conforme

$$d\tilde{s}^2 = l^2 (-d\tau^2 + dR^2)$$

$$\frac{-\pi}{2} \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}; \quad \frac{-\pi}{2} \leq R \leq \frac{\pi}{2}$$
(4.3.3)

Recordamos que las coordenadas en las diferentes cartas se relacionan por

$$VU = T^2 - X^2 = \tan\left(\frac{\tau + R}{2}\right) \tan\left(\frac{\tau - R}{2}\right) = \frac{r_+ - r}{r_+ + r}$$

Frontera del Agujero Negro: $r = +\infty$

$$VU = T^2 - X^2 = \tan\left(\frac{\tau + R}{2}\right) \tan\left(\frac{\tau - R}{2}\right) = -1$$

Esta condición es equivalente a

$$\cos(R) = 0 \Leftrightarrow R = \pm \frac{\pi}{2}$$
(4.3.4)

Por lo tanto, $R = \pm \frac{\pi}{2}$ corresponde al infinito del agujero negro y es una región tipo tiempo.

Horizonte de eventos: $r = r_+$

$$VU = T^2 - X^2 = \tan\left(\frac{\tau + R}{2}\right) \tan\left(\frac{\tau - R}{2}\right) = 0$$

De modo que

$$\tan\left(\frac{\tau + R}{2}\right) \tan\left(\frac{\tau - R}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \tau \pm R$$
(4.3.5)

El horizonte de eventos corresponde a las curvas nulas $\tau \pm R$.

Singularidad: $r = 0$

$$VU = T^2 - X^2 = \tan\left(\frac{\tau + R}{2}\right) \tan\left(\frac{\tau - R}{2}\right) = 1$$

Esta condición es equivalente a

$$\cos(\tau) = 0 \Leftrightarrow \tau = \pm \frac{\pi}{2} \tag{4.3.6}$$

Por lo tanto, $\tau = \pm \frac{\pi}{2}$ corresponde a la singularidad del agujero negro y es una superficie espacial.

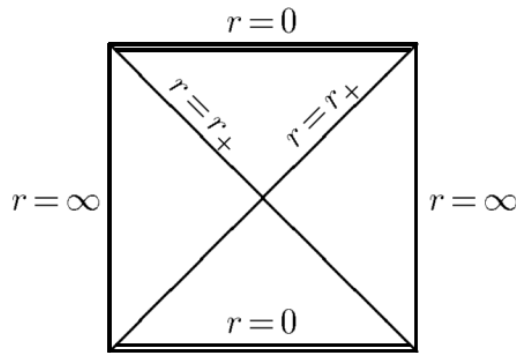


Figura 4.2: Diagrama de Penrose del agujero negro BTZ. Figura tomada de [14].

El Diagrama de Penrose nos permite determinar propiedades globales del agujero negro BTZ muy importantes. En primer lugar vemos que esta geometría presenta horizonte de eventos y la singularidad es spacelike. En segundo lugar vemos que *lejos del horizonte* este espacio-tiempo es asintóticamente Anti-de Sitter en tres dimensiones. Arribamos a esta conclusión porque *el infinito* de ambos espacio-tiempos se representa como dos rectas verticales en $R = \pm \frac{\pi}{2}$ en los diagramas de Penrose de Anti-de Sitter (3.1) y en el del agujero negro BTZ (4.2). Tener en cuenta estas propiedades globales será de ayuda para entender el comportamiento del campo escalar en el agujero negro.

Campo Escalar en Espacio-Tiempos Estáticos No Globalmente Hiperbólicos

El objetivo del trabajo es el estudio de la dinámica del campo escalar en Anti-de Sitter y en el agujero negro BTZ, ambos espacio-tiempos no son globalmente hiperbólicos (en [6] se estudia el campo escalar en AdS). Recordamos que las ecuaciones diferenciales hiperbólicas (la ecuación de Klein-Gordon es una de ellas) tienen bien definido el problema de condiciones iniciales en espacio-tiempos que admiten superficies de Cauchy. En un espacio-tiempo no globalmente hiperbólico, inclusive para campos que verifican una ecuación lineal e hiperbólica, si se deposita información en una superficie spacelike la evolución temporal es única solo localmente. La pregunta que dejamos abierta hasta este capítulo es *¿cómo definimos el problema de condiciones iniciales si el espacio-tiempo no admite superficies de Cauchy?* No daremos una respuesta a este interrogante para todas las variedades en general, pero para cierto tipo de espacio-tiempo que denominaremos *estáticos* será posible imponer una prescripción para garantizar que la evolución temporal de un paquete de ondas sea causal, única y esté definida globalmente. El problema de definir la dinámica de un campo escalar en un espacio-tiempo no globalmente hiperbólico se relaciona con la posibilidad de elegir una extensión autoadjunta de cierto operador diferencial A . Nuestro análisis se basa en un método sistemático debido a un teorema de von Neumann que relaciona las posibles extensiones autoadjuntas de A con condiciones de contorno, y un teorema de Robert Wald que aplica el teorema de von Neumann a la teoría de campos.

Antes de adentrarnos en el formalismo consideramos importante resaltar que el estudio de operadores y sus extensiones autoadjuntas no son temas interesantes para la Matemática únicamente, sino que también son de gran relevancia en la Física. Típicamente en Mecánica Cuántica, la teoría más exitosa en la historia de la Física, razonamientos físicos determinan la expresión *formal* para los operadores más relevantes: el Hamiltoniano, el impulso, el momento angular, entre otros. Decimos *formal* cuando el dominio del operador no ha sido especificado. Resulta sencillo encontrar un dominio en el cual los operadores resulten simétricos, pero determinar un dominio para el cual sean autoadjuntos es una tarea bastante más difícil. En este capítulo aprenderemos la diferencia entre un operador simétrico de uno autoadjunto. Esto tiene un impacto directo en Mecánica Cuántica pues uno de los axiomas fundamentales es que los observables de la naturaleza deben ser representados como operadores autoadjuntos (no solamente simétricos) que actúan sobre cierto espacio de Hilbert \mathcal{H} que describe los sistemas físicos. Además, las simetrías de la teoría vienen dadas por grupos unitarios cuyos generadores son operadores autoadjuntos que conmutan con el Hamiltoniano H .¹ Por último, resaltamos que para un operador A pueden existir infinitas extensiones

¹Estos resultados se enmarcan dentro del teorema de Stone que relaciona grupos unitarios uniparamétricos con operadores autoadjuntos. El teorema garantiza que sea U_t un grupo unitario uniparamétrico entonces existe un operador A autoadjunto tal que U^{-iAt} . A se dice que es el generador de las transformaciones infinitesimales del grupo U_t

posibles y la elección de una de ellas está íntimamente relacionada con la física del sistema que se intenta describir. En general distintas condiciones de contorno dan lugar a distintos operadores autoadjuntos. Estos comentarios son a modo de motivar la necesidad de estudiar con cierto grado de rigurosidad las propiedades de los operadores diferenciales que aparecen tanto en la Mecánica Cuántica como en cualquier otra teoría Física.

5.1. Operadores Autoadjuntos

En esta sección introduciremos definiciones y teoremas de operadores lineales actuando sobre espacios de Hilbert para luego utilizarlas cuando se estudie la ecuación del campo escalar libre en Anti-de Sitter y en el agujero negro BTZ.

Para la demostración de los teoremas recomendamos los tomos 1 y 2 de Análisis Funcional para la Física de Reed and Simon [15] y [16], el libro de Valter Moretti [17] que aborda con rigurosidad los fundamentos matemáticos de las teorías cuánticas y el libro de Horacio Falomir de Análisis Funcional para la Física [18].

Sea A un operador lineal definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, y $\phi \in \mathcal{H}$.

Definición 1:

A es un operador acotado si existe una constante $k \in \mathbb{R} > 0$ tal que

$$(A\phi, A\phi) \leq k(\phi, \phi) \quad \forall \phi \neq 0 \in \mathcal{H} \quad (5.1.1)$$

Definición 2: (tentativa)

El operador A^\dagger , llamado el adjunto de A , es el operador que a todo elemento del espacio de Hilbert $\psi \in \mathcal{H}$ le asigna el vector $A^\dagger\psi = \psi^\dagger$ tal que

$$(\psi, A\phi) = (\psi^\dagger, \phi) = (A^\dagger\psi, \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{H} \quad (5.1.2)$$

Debemos preguntarnos si tiene sentido la definición (5.1.2). Es decir, ¿siempre existe un vector ψ^\dagger que cumpla esta propiedad? y si existe, ¿es único? La respuesta es afirmativa a ambas preguntas bajo la condición que el operador A sea acotado. Puesto que la definición (5.1.2) sólo tiene sentido para operadores acotados, extender la noción de operador adjunto a operadores no acotados requiere imponer condiciones adicionales sobre los dominios de los operadores.

5.1.1. Operadores no acotados

La definición (5.1.2) no es aplicable a operadores no acotados, muy importantes y comunes en aplicaciones físicas. Por ejemplo, el operador momento en una dimensión, $\hat{P} = -i\frac{d}{dx}$, definido sobre todo el espacio de Hilbert de funciones complejas de cuadrado integrable $L^2(\mathbb{R})$, no es acotado, ya que su espectro se extiende desde valores negativos arbitrariamente grandes hasta valores positivos arbitrariamente grandes. En forma equivalente, el cociente en (5.1.1) diverge para funciones de cuadrado integrable, tales como $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \in [0, 1)$ y $f(x) = 0$ en otro caso contrario. En efecto, la norma de $g(x) = -i\frac{df}{dx}$

dada por $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df^*}{dx} \frac{df}{dx} dx = \int_0^1 \frac{1}{2x} dx$, diverge logarítmicamente. De modo que la derivada de $f(x)$ no es de cuadrado integrable. Este sencillo ejemplo muestra que para el operador \hat{P} la definición (5.1.2) carece de sentido salvo que se reduzca el dominio del operador a funciones ϕ tales que $\hat{P}\phi$ también sean de cuadrado integrable.

El teorema de Hellinger-Toeplitz afirma que un operador que satisfaga $(A^\dagger\phi, \psi) = (\phi, A\psi) \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ debe ser un operador acotado [15]. En consecuencia, para definir correctamente un operador y su adjunto debemos también determinar sus dominios. Es decir, debemos definir $(A, \mathcal{D}(A))$ y $(A^\dagger, \mathcal{D}(A^\dagger))$.

Definición 3:

Sea un operador A con dominio $\mathcal{D}(A)$, se dice que A es de dominio denso si $\forall \psi \in \mathcal{H}$ existe una sucesión de elementos $\{\phi_n\}$ de $\mathcal{D}(A)$ que converge en norma a ψ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\psi - \phi_n\|^2 = 0 \quad (5.1.3)$$

Esto significa que cualquier vector ψ del espacio de Hilbert \mathcal{H} puede aproximarse por una sucesión de elemento de $\mathcal{D}(A)$ tanto como uno desee. Como consecuencia, sea $\psi \in \mathcal{H}$ entonces

$$(\psi, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(A) \Leftrightarrow \psi = 0 \quad (5.1.4)$$

Definición 4:

Sean A y B operadores con dominio $\mathcal{D}(A)$ y $\mathcal{D}(B)$ respectivamente. B es una extensión de A y se nota $A \subset B$ si

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B) \quad y \quad B\phi = A\phi, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(A) \quad (5.1.5)$$

Definición 5:

Sea un operador A con dominio denso $\mathcal{D}(A)$. Consideramos una sucesión de elementos $\{\phi_n\}$ del dominio de A que converge a un elemento particular ϕ de \mathcal{H} que no pertenezca al dominio de A .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \phi \in \mathcal{H} \quad (5.1.6)$$

En general, se tiene más de una sucesión que converge al mismo elemento ϕ . Si para todas las sucesiones $\{\phi_n\}$ de elementos de $\mathcal{D}(A)$ convergentes a ϕ se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A\phi_n) = \psi \in \mathcal{H}, \quad \forall \{\phi_n\} \in \mathcal{D}(A) / \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \phi \quad (5.1.7)$$

Entonces, se puede **extender** la definición de A incorporando al vector ϕ de modo que

$$A\phi := \lim_{n \rightarrow +\infty} (A\phi_n) = \psi \quad (5.1.8)$$

Consideremos ahora todos los $\phi \in \mathcal{H}$ que no pertenezcan a $\mathcal{D}(A)$ tales que existen sucesiones $\{\phi_n\} \in \mathcal{D}(A)$ que convergen a ellos. Si se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A\phi_n) = A\phi, \quad \forall \{\phi_n\} \quad (5.1.9)$$

se dice que A **admite una extensión cerrada** incorporando a su dominio a todos los límites de las sucesiones convergentes $\{\phi_n\}$ de elementos de $\mathcal{D}(A)$. Este nuevo operador es **una extensión cerrada de A** y se lo denomina la clausura \overline{A} .

Como corolario, sea T un operador cerrado cualquiera y $\{\phi_n\}$ una sucesión convergente de elementos de su dominio entonces se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T\phi_n) = T \lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi_n) = T\phi, \quad \forall \{\phi_n\} \in \mathcal{D}(T) / \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_n = \phi \quad (5.1.10)$$

Definición 6:

La gráfica de un operador lineal A es el conjunto de pares de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ de la forma

$$\Gamma(A) = \{(\phi; A\phi) / \phi \in \mathcal{D}(A)\} \quad (5.1.11)$$

$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert con producto interno

$$((\phi_1; \psi_1), (\phi_2; \psi_2)) = (\phi_1, \phi_2) + (\psi_1, \psi_2) \quad (5.1.12)$$

Dada la linealidad de A , $\Gamma(A)$ es un subespacio de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Si A es un operador cerrado entonces su gráfica es un subespacio cerrado.

Una manera de determinar si A admite extensiones cerradas es estudiando su gráfica. Sean $\phi \in \mathcal{D}(A)$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$. Diremos que A es **clausurable (cerrable)** si la clausura de su gráfica, $\overline{\Gamma(A)}$, satisface

$$(\phi; \psi_1) \in \overline{\Gamma(A)}; \quad (\phi; \psi_2) \in \overline{\Gamma(A)} \quad \Rightarrow \quad \psi_1 = \psi_2 \quad (5.1.13)$$

Es importante destacar que la condición (5.1.13) es equivalente a

$$(0; \psi) \in \overline{\Gamma(A)} \Leftrightarrow \psi = 0 \quad (5.1.14)$$

Podemos entender la equivalencia entre (5.1.13) y (5.1.14) recordando que si T es un operador cerrado, entonces para cualquier sucesión $\{\phi_n\}$ de elementos del dominio de T que converge a un elemento ϕ de \mathcal{H} se satisface

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (T\phi_n) = T \lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi_n) = T\phi$$

Por lo tanto, sean dos sucesiones $\{\phi_n^1\}$ y $\{\phi_n^2\}$ cualesquiera cuyo límite es ϕ , si T es cerrado necesariamente debe ser que

$$T \lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi_n^1) = T \lim_{n \rightarrow +\infty} (\phi_n^2) \Leftrightarrow T \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\phi_n^1) - (\phi_n^2)] = 0 \quad (5.1.15)$$

Definición 7:

Sea un operador A cerrable con dominio $\mathcal{D}(A)$, la clausura \overline{A} es una extensión cerrada de A cuyo dominio es

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \left\{ \phi / (\phi; \psi) \in \overline{\Gamma(A)}; \psi \in \mathcal{H} \right\}, \quad (5.1.16)$$

y su acción corresponde a $\overline{A}\phi = \psi$, donde ψ es el único vector de \mathcal{H} tal que $(\phi; \psi) \in \overline{\Gamma(A)}$. Lo importante es que la clausura \overline{A} es el único operador cerrado cuya gráfica es $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.

Por último, sea A_1 otra extensión cerrada de A . Por definición, la clausura de la gráfica de A debe estar contenida en la gráfica de la extensión cerrada A_1 , $\overline{\Gamma(A)} \subset \Gamma(A_1)$. Sea $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$ tenemos que $\overline{A} \subset A_1$. Por lo tanto, el operador clausura \overline{A} es la extensión cerrada mínima de todo operador cerrable.

Definición 8:

Sea un operador con dominio denso $(A, \mathcal{D}(A))$, definimos el dominio del operador adjunto $(A^\dagger, \mathcal{D}(A^\dagger))$ como

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{ \psi \in \mathcal{H} / \exists \tau \in \mathcal{H}; (\psi, A\phi) = (\tau, \phi), \forall \phi \in \mathcal{D}(A) \} \quad (5.1.17)$$

Dado un elemento $\psi \in \mathcal{D}(A^\dagger)$, se define el operador adjunto como $A^\dagger\psi = \tau$.

La diferencia entre la definición (5.1.17) y la (5.1.2) es que ahora restringimos los vectores ϕ a estar contenidos en $\mathcal{D}(A)$. La unicidad de τ es garantizada porque el dominio de A es denso.

Definición 9:

Sea el operador con dominio denso $(A, \mathcal{D}(A))$, decimos que A es simétrico (*hermítico* es el nombre que se le dá en física) si

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A\psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(A) \quad (5.1.18)$$

Esto significa que A es simétrico si $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$ y A^\dagger restringido a $\mathcal{D}(A)$ coincide con A . Es decir, $A^\dagger\phi = A\phi, \forall\phi \in \mathcal{D}(A)$.

Definición 10:

Un operador A con dominio $\mathcal{D}(A)$ es **autoadjunto** si $A^\dagger = A$. En otras palabras, A es autoadjunto si $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^\dagger)$ y la acción de A^\dagger coincide con la de A en este dominio.

La diferencia esencial entre un operador hermítico y otro autoadjunto es que hermiticidad sólo requiere la condición $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^\dagger)$, mientras que ser autoadjunto requiere además que $\mathcal{D}(A^\dagger) \subseteq \mathcal{D}(A)$. Normalmente en física se supone que hermítico y autoadjunto son conceptos idénticos, lo cual es verdad para operadores acotados definidos sobre todo el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Cabe notar que si sólo se requiere que un operador tenga valores propios reales, sólo es necesario que el operador sea hermítico.

Teorema 1:

Sea A un operador densamente definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Entonces

- (i) A^\dagger es cerrado;
- (ii) A es clausurable $\Leftrightarrow \mathcal{D}(A^\dagger)$ es denso en \mathcal{H} , en cuyo caso $\overline{A} = A^{\dagger\dagger}$;
- (iii) si A es clausurable $\Rightarrow (\overline{A})^\dagger = A^\dagger$

5.1.2. Índices de deficiencia y extensiones autoadjuntas

Veremos en esta sección bajo qué condiciones se puede extender el dominio de un operador para obtener una extensión autoadjunta.

De acuerdo con las definiciones anteriores, dado un operador A simétrico y densamente definido, su adjunto A^\dagger es una extensión $A \subseteq A^\dagger$. Pero en general, el adjunto de un operador simétrico no es una extensión autoadjunta del operador.

Estos resultados dan lugar a las siguientes preguntas:

- (i) Dado un operador simétrico A , ¿bajo qué condiciones se puede encontrar una extensión autoadjunta?
- (ii) En el caso de que existan tales extensiones, ¿cómo se las clasifica?

Espacios de deficiencia

Sea A un operador simétrico, definimos los *subespacios de deficiencia*, \mathcal{D}_+ y \mathcal{D}_- como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+ &= Ker [i - A^\dagger] = \left\{ \phi_+ \in \mathcal{D}(A^\dagger) / A^\dagger\phi_+ = +i\phi_+ \right\} \\ \mathcal{D}_- &= Ker [i + A^\dagger] = \left\{ \phi_- \in \mathcal{D}(A^\dagger) / A^\dagger\phi_- = -i\phi_- \right\} \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

Las dimensiones de \mathcal{D}_+ y \mathcal{D}_- se conocen como *índices de deficiencia* n_+ y n_- respectivamente. Es posible que los índices de deficiencia n_+ o n_- (o ambos) sean infinito.

Introducimos dos formas sesquilineales en $\mathcal{D}(A^\dagger)$:

$$\begin{aligned}(\phi, \psi)_A &= (\phi, \psi) + (A^\dagger \phi, A^\dagger \psi) \\ [\phi, \psi]_A &= (A^\dagger \phi, \psi) - (\phi, A^\dagger \psi)\end{aligned}\tag{5.1.20}$$

Un subespacio de $\mathcal{D}(A^\dagger)$ tal que $[\phi, \psi]_A = 0$ para todo ϕ, ψ perteneciente a ese subespacio, es llamado **A -simétrico**. Cuando nos referimos a subespacios $\mathcal{D}(A^\dagger)$ como **A -cerrado** y **A -ortogonal** debe entenderse que es respecto a la forma sesquilineal $(\phi, \psi)_A$.

Lema 1:

Sea A un operador simétrico y cerrable, entonces

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{D}(\bar{A}) \oplus_A \mathcal{D}_+ \oplus_A \mathcal{D}_-\tag{5.1.21}$$

(i) Las extensiones simétricas y cerradas de A son restricciones de A^\dagger a subespacios A -cerrados y A -simétricos de $\mathcal{D}(A^\dagger)$.

(ii) $\mathcal{D}(\bar{A})$, \mathcal{D}_+ y \mathcal{D}_- son subespacios A -cerrados y mutuamente A -ortogonales.

(iii) Hay una correspondencia uno-a uno entre subespacios A -cerrados, A -simétricos $\mathcal{D}(A_E)$ de $\mathcal{D}(A^\dagger)$ que contienen a $\mathcal{D}(\bar{A})$ y los subespacios A -cerrados, A -simétricos S_E de $\mathcal{D}_+ \oplus_A \mathcal{D}_-$ dados por

$$\mathcal{D}(A_E) = \mathcal{D}(\bar{A}) \oplus_A S_E$$

Lo fundamental de este lema es entender que el subespacio S_E de $\mathcal{D}_+ \oplus_A \mathcal{D}_-$ son los elementos que le faltan al dominio $\mathcal{D}(\bar{A})$ para que el operador \bar{A} sea autoadjunto.

Teorema 2

Sea A un operador cerrable y simétrico con índices de deficiencia n_+ y n_- , entonces

(i) A es esencialmente autoadjunto si y solo si $n_+ = n_- = 0$. Existe una única extensión cerrada autoadjunta tomando la clausura del operador.

(ii) A admite infinitas extensiones autoadjuntas si y solo si $n_+ = n_- = n \geq 1$. Las extensiones autoadjuntas estarán parametrizadas por matrices unitarias de $n \times n$.

(iii) A no admite ninguna extensión autoadjunta si y solo si $n_+ \neq n_-$.

Teorema 3

Sea A un operador cerrable y simétrico con índices de deficiencia $n_+ = n_- = n$. Las extensiones cerradas y simétricas de A están en correspondencia uno a uno con el conjunto de isometrías parciales (en el producto interno usual) de \mathcal{D}_+ a \mathcal{D}_- . Sea U la isometría parcial, entonces la correspondiente extensión cerrada y simétrica A_E tiene por dominio

$$\mathcal{D}(A_E) = \{ \phi + \phi_+ + U(\phi_+) / \phi \in \mathcal{D}(\bar{A}); \phi_+ \in \mathcal{D}_+; U(\phi_+) \in \mathcal{D}_- \} \quad (5.1.22)$$

y la acción de A_E sobre los elementos de $\mathcal{D}(A_E)$ está definida como

$$A_E(\phi + \phi_+ + U(\phi_+)) = A^\dagger(\phi + \phi_+ + U(\phi_+)) = \bar{A}\phi + i\phi_+ - iU(\phi_+) \quad (5.1.23)$$

Es fundamental aclarar qué debe entenderse por isometría parcial, U , en la definición de las extensiones autoadjuntas. Para ello, vamos a hacer un simple cálculo. Hemos dicho que el dominio de la extensión es $\mathcal{D}(A_E) = \mathcal{D}(\bar{A}) \oplus_A S_E$ donde S_E es un subespacio A -cerrado y A -simétrico de $\mathcal{D}_+ \oplus_A \mathcal{D}_-$. Si $\phi \in S_E$, debe escribirse como $\phi = \phi_+ + \phi_-$. Dado que S_E es A -simétrico

$$\begin{aligned} 0 &= (A^\dagger\phi, \phi) - (\phi, A^\dagger\phi) \\ 0 &= (A^\dagger(\phi_+ + \phi_-), (\phi_+ + \phi_-)) - ((\phi_+ + \phi_-), A^\dagger(\phi_+ + \phi_-)) \\ 0 &= -i(\phi_+, \phi_+) - i(\phi_+, \phi_-) + i(\phi_-, \phi_+) + i(\phi_-, \phi_-) - i(\phi_+, \phi_+) + i(\phi_+, \phi_-) - i(\phi_-, \phi_+) + i(\phi_-, \phi_-) \\ 0 &= 2i(\phi_-, \phi_-) - 2i(\phi_+, \phi_+) \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

Lo que implica que

$$\|\phi_+\|^2 = \|\phi_-\|^2 \quad (5.1.25)$$

Entonces la acción de la isometría parcial $U : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathcal{D}_-$ es

$$U(\phi_+) \rightarrow \phi_- / \|\phi_+\|^2 = \|\phi_-\|^2 \quad (5.1.26)$$

Por lo tanto, el mapa U es una acción de un subespacio de deficiencia al otro que preserva la norma del vector respecto al producto interno del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Por eso es que se la llama isometría.

Por último, como cada subespacio S_E está en correspondencia con la isometría parcial $U : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathcal{D}_-$ que se elija, es la elección de U quien determina cada una de las posibles extensiones autoadjuntas.

Corolario:

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces αA es simétrico, autoadjunto, esencialmente autoadjunto $\Leftrightarrow A$ es simétrico, autoadjunto, esencialmente autoadjunto. Ver [17].

Este resultado es de suma importancia porque basta encontrar $Ker [\lambda i - A^\dagger]$ y $Ker [\lambda i + A^\dagger]$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ para determinar si A tiene o no extensiones autoadjuntas. Nosotros usaremos este corolario cuando estudiamos el campo escalar en el agujero negro BTZ, y en este caso será conveniente buscar los autovectores ϕ_+ y ϕ_- con autovalor $8i$ y $-8i$ respectivamente.

Resumen:

Lo que debemos hacer para estudiar la extensión autoadjunta del operador A es:

- (i) Encontrar un dominio $\mathcal{D}(A)$ para el cual el operador A sea simétrico.
- (ii) Encontrar la clausura \overline{A} del operador A .
- (iii) Estudiar su operador adjunto $(A^\dagger, \mathcal{D}(A^\dagger))$ y determinar los índices de deficiencia n_+ y n_- .
- (iv) En el caso que $n_+ = n_- = n$ se debe elegir una extensión autoadjunta.

5.1.3. Ejemplo: Operador impulso en un intervalo finito

Aplicaremos el formalismo anterior para analizar al operador impulso en una dimensión, $P = -i \frac{d}{dx}$, en un intervalo finito $[0, 1]$ (consideramos $\hbar = 1$). En este ejemplo, veremos que la única isometría parcial $U : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathcal{D}_-$ posible viene descrita por un elemento del grupo $U(1)$ (un número complejo de módulo 1).

Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$. Usualmente en Mecánica Cuántica el dominio cerrado del operador P es ²

$$\mathcal{D}(P) = \left\{ \phi \in AC[0, 1]; \phi' \in L^2[0, 1] / \phi(0) = \phi(1) = 0 \right\} \tag{5.1.27}$$

Sean $\psi, \phi \in \mathcal{D}(P)$, el hecho que se anule la forma sesquilineal

$$(\psi, P\phi) - (P\psi, \phi) = -i[\psi^*(1)\phi(1) - \psi^*(0)\phi(0)] = 0 \tag{5.1.28}$$

implica que P es un operador simétrico en $\mathcal{D}(P)$; pero no implica que P sea autoadjunto. Es necesario estudiar los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_+ y \mathcal{D}_- para determinar si debe hacerse una extensión autoadjunta o no. Debemos resolver

$$P^\dagger \phi_\pm = -i \frac{d\phi_\pm}{dx} = \pm i \phi_\pm, \tag{5.1.29}$$

²Cuando nos referimos al dominio (5.1.27) como cerrado, es porque estamos pensando en que este conjunto es el dominio de la clausura \overline{P} .

Una función f se dice absolutamente continua en el intervalo $x \in [a, b]$, $f \in AC[a, b]$, si existe una función g integrable en $[a, b]$ tal que $f(x) = \int_a^x g(t)dt$.

donde encontramos que las soluciones son de la forma $\mathcal{D}_+ = \{ce^{-x}/c \in \mathbb{C}\}$ y $\mathcal{D}_- = \{ce^x/c \in \mathbb{C}\}$. Los índices de deficiencia son $n_+ = n_- = 1$ de modo que debemos hacer una extensión autoadjunta del operador P . Las soluciones normalizadas son

$$\phi_+ = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{e^2 - 1}}e^{-x}, \quad \phi_- = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - 1}}e^x \quad (5.1.30)$$

La única isometría parcial $U : \mathcal{D}_+ \rightarrow \mathcal{D}_-$, son los mapas $\phi_+ \rightarrow \gamma\phi_-$ donde $|\gamma| = 1$.

$$U\phi_+ = \gamma\phi_- \quad (5.1.31)$$

Como dijimos al comienzo de la sección, las extensiones autoadjuntas se parametrizan por un elemento del grupo $U(1)$ (una fase). Por lo tanto, las extensiones autoadjuntas del operador impulso $P = -i\frac{d}{dx}$ vienen dadas por

$$\mathcal{D}(P_E) = \{\phi + \beta(\phi_+ + \gamma\phi_-) / \phi \in \mathcal{D}(P), \beta \in \mathbb{C}\} \quad (5.1.32)$$

Para interpretar mejor el proceso de la extensión del dominio del operador P , hagamos exactamente el mismo cálculo que en (5.1.28) pero esta vez considerando P^\dagger en vez de P . Sean $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ naturalmente obtendremos

$$\left(\psi, P^\dagger\phi\right) - \left(P^\dagger\psi, \phi\right) = -i[\psi^*(1)\phi(1) - \psi^*(0)\phi(0)], \quad (5.1.33)$$

y la condición más general para que se anule (5.1.33) es

$$\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0); \quad \phi(1) = e^{i\theta}\phi(0), \quad (5.1.34)$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ constante. Como los elementos del dominio del operador extendido deben anular la forma sesquilineal (5.1.33), determinamos que el dominio de P_E puede definirse como

$$\mathcal{D}(P_E) = \left\{ \phi \in AC[0, 1]; \phi' \in L^2[0, 1] / \phi(1) = e^{i\theta}\phi(0); \theta \in [0, 2\pi) \right\} \quad (5.1.35)$$

En este caso, las extensiones autoadjuntas también vienen descritas por un número complejo de módulo 1, $e^{i\theta}$.

Debemos entender la equivalencia entre las definiciones (5.1.32) y (5.1.35) del dominio del operador extendido P_E . Haciendo unos cálculos sencillos ambas definiciones para el dominio de P_E son equivalentes tomando

$$\frac{1 + \gamma e}{\gamma + e} = e^{i\theta} \quad (5.1.36)$$

Es de capital importancia entender que lo que hemos hecho con el método de extensiones autoadjuntas de von-Neumann es imponer condiciones de contorno apropiadas para las funciones del dominio del operador P_E . Por definición las funciones $\phi \in \mathcal{D}(P)$ se anulan en los extremos, el agregado de $\phi_+ + \gamma\phi_-$ extiende el dominio del operador a todas aquellas funciones que sean de cuadrado integrable y verifiquen $\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0)$.

Física de las extensiones autoadjuntas

Hemos visto que las extensiones autoadjuntas del operador impulso, $P = -i\frac{d}{dx}$, en el intervalo compacto $x \in [0, 1]$ están parametrizadas por una fase $e^{i\theta}$. Denotaremos estas extensiones como P_E .

$$\mathcal{D}(P_E) = \left\{ \phi \in AC[0, 1]; \phi' \in L^2[0, 1] / \phi(1) = e^{i\theta}\phi(0); \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

Usando estas condiciones de contorno, las autofunciones de P_E resultan

$$P_E\phi_n = 2\pi\nu\phi_n; \quad \nu = n + \frac{\theta}{2\pi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\phi_n = e^{i2\pi\nu x}; \quad (\phi_m, \phi_n) = \delta_{nm} \quad (5.1.37)$$

Como la fase θ aparece en los autovalores del operador impulso, la medición del impulso del sistema físico dependerá de la extensión autoadjunta que se haya elegido. Más aún, supongamos un estado que viene descrito por la función de onda normalizada

$$\psi = \sqrt{30}x(1-x), \quad (5.1.38)$$

cuya expansión en autofunciones es

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \phi_n, \quad (5.1.39)$$

con coeficientes

$$c_n = -\frac{\sqrt{30}}{2\pi^2\nu^2} \left[\cos(\theta/2) - \frac{\sin(\theta/2)}{\pi\nu} \right] e^{-i\theta/2} / \theta \neq 0$$

$$c_0 = \frac{\sqrt{30}}{6}, \quad c_n = -\frac{\sqrt{30}}{2\pi^2 n^2}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots / \theta = 0 \quad (5.1.40)$$

Si la partícula está en el estado ψ la probabilidad de medir el impulso $2\pi\nu$ es $|c_n|^2$ y depende de θ . Por lo tanto, elegir la extensión autoadjunta (elegir θ) no es una cuestión matemática sino que depende del sistema físico. Los resultados de las posibles mediciones del impulso serán los que determinen qué θ es el apropiado para el sistema físico.

Si bien este es el ejemplo más sencillo que puede plantearse, es sumamente útil para entender cuál es el procedimiento a seguir para determinar las posibles extensiones autoadjuntas.

5.2. Extensiones autoadjuntas en teoría de campos.

La evolución temporal de un paquete de ondas determina la solución del sistema de ecuaciones diferenciales únicamente en el dominio de dependencia de la superficie en la cual se impuso la data inicial. Por lo tanto, en un espacio-tiempo que no admita superficies de Cauchy (un espacio-tiempo no globalmente hiperbólico) no puede definirse la evolución del campo de forma única en toda la variedad. El propósito de esta sección es el estudio de la dinámica del campo escalar en un espacio-tiempo no globalmente hiperbólico y estático. El formalismo que se presenta fue desarrollado por Robert Wald en [5]. Para definir el problema de condiciones iniciales en una variedad que no admita superficies de Cauchy puede ser necesario imponer condiciones de contorno a las configuraciones de campo. Wald hace uso del teorema de von-Neumann para relacionar posibles extensiones autoadjuntas de un operador diferencial con posibles condiciones de contorno para el campo en infinito. Habiendo elegido una extensión en particular, la evolución temporal del campo resulta causal única y definida globalmente. Destacamos que este formalismo es el más general posible si se imponen ciertos requerimientos a la evolución temporal de las condiciones iniciales. Ver [19].

Un espacio-tiempo estático es aquel que admite hipersuperficies spacelike, Σ , ortogonales a un vector de Killing timelike, ∂_t , globalmente definido. Estas isometrías pueden entenderse como *traslaciones temporales en el espacio-tiempo*. Sea ϕ un campo escalar definido sobre M que satisface la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m_0^2 \phi = 0, \quad (5.2.1)$$

con ∇_μ la derivada covariante asociada a la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo. Dado que suponemos que M es un espacio-tiempo estático, la ecuación de movimiento (5.2.1) puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi, \quad (5.2.2)$$

donde t es el parámetro de Killing y

$$A = -VD^i(VD_i) + m_0^2 V^2 \quad (5.2.3)$$

con $V = (-\|\partial_t\|^2)^{1/2}$ y D_i el operador de derivación compatible con la métrica inducida definida sobre la hipersuperficie Σ ortogonal a las órbitas del campo ∂_t .

La idea es pensar a A como un operador cerrable y simétrico cuyo dominio es $\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$, funciones clase C^∞ de soporte compacto en Σ , contenido en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$, funciones de cuadrado integrable en Σ con medida $V^{-1}d\Sigma$ donde $d\Sigma$ denota el elemento de volumen usual en la hipersuperficie.

El objetivo es determinar una solución de la ecuación de Klein-Gordon ϕ_t definida globalmente de forma única dando la información inicial $(\phi|_\Sigma = \phi_0, \nabla_{\partial_t}\phi|_\Sigma = \dot{\phi}_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$. Para ello, debemos encontrar las extensiones autoadjuntas A_E del operador A cuyo dominio extendido se define como

$$\mathcal{D}(A_E) = \{\Phi_0 + \Phi_+ + U\Phi_+ / \Phi_0 \in \mathcal{D}(A); \Phi_+ \in \mathcal{D}_+; \} \quad (5.2.4)$$

Sea A_E una posible extensión autoadjunta de A definida unívocamente por la elección de la isometría parcial U y la data inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma) \times L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$, para cada $t \in \mathbb{R}$ la solución de la ecuación de Klein-Gordon ϕ_t se define como

$$\phi_t = \cos(A_E^{1/2}t) \phi_0 + A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t) \dot{\phi}_0, \quad (5.2.5)$$

donde $\cos(A_E^{1/2}t)$ y $A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t)$ son operadores acotados definidos vía el teorema espectral. Ver [15], [17], [20]. Acramos que dado que estos operadores son acotados es que su dominio es todo el espacio de Hilbert $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$.

Fue probado en [5] que para toda configuración inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$, la función ϕ_t define una solución suave de (5.2.1) en toda la variedad. Además, esta solución coincide con la solución determinada por la data inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ en el dominio de dependencia de la hipersuperficie Σ .³

Es importante aclarar la relación entre las condiciones de contorno que se impondrán sobre las soluciones ϕ_t y las posibles extensiones autoadjuntas A_E . Para data inicial arbitraria de soporte compacto en Σ , la ley de evolución temporal (5.2.5) determina que la solución $\phi_t \in \mathcal{D}(A_E)$. Este conjunto consiste del dominio de la clausura \bar{A} , funciones que tienden muy rápidamente a cero en la frontera del espacio tiempo, junto con funciones de la forma $\Phi_+ + U\Phi_+$. Por lo tanto, las condiciones de contorno impuestas en infinito sobre $\Phi_+ + U\Phi_+$ resultan ser las condiciones de contorno que verifican todas las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A_E)$. Físicamente significa que las soluciones ϕ_t que surgen de la evolución temporal de data inicial de $C_0^\infty(\Sigma)$ satisfacen las mismas condiciones de contorno en infinito que $\Phi_+ + U\Phi_+$ en todo instante de tiempo. Finalmente podemos relacionar las extensiones autoadjuntas con las condiciones de contorno: la elección de una isometría parcial U determina un posible comportamiento de $\Phi_+ + U\Phi_+$ en infinito, este comportamiento se traduce en condiciones de contorno satisfechas por ϕ_t en todo instante de tiempo.

³Ver capítulo 1 para la definición de dominio de dependencia de una hipersuperficie Σ .

5.2.1. Operador diferencial A

Mostraremos las propiedades más relevantes del operador A al cual hay que estudiarle las extensiones autoadjuntas. Consideramos un espacio tiempo que admite hipersuperficies spacelike ortogonales a un vector de Killing timelike, ∂_t , y un campo escalar que satisface la ecuación de Klein-Gordon.

Ecuación de Klein-Gordon

Veamos que podemos efectivamente escribir la ecuación de Klein-Gordon en al forma (5.2.2).

Sea

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi), \quad (5.2.6)$$

como suponemos un espacio-tiempo estático en el que existe un vector de Killing timelike ∂_t ortogonal a hipersuperficies spacelike Σ , siempre existe una carta en la cual el elemento de línea puede escribirse como

$$ds^2 = -g_{tt}dt^2 + \tilde{g}_{ij}didj \quad (5.2.7)$$

En esta carta el determinante de la métrica resulta $g = -g_{tt}\tilde{g}$. Luego,

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi) = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\partial_t(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}g^{tt}\partial_t\phi) + \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}}\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\partial_i(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}\tilde{g}^{ij}\partial_j\phi) \quad (5.2.8)$$

Como la geometría es estática y estamos tomando como coordenada temporal el parámetro de Killing t , resulta que $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$.

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\nabla_\nu\phi) = (g_{tt})^{-1}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}}\partial_i(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}\tilde{g}^{ij}\partial_j\phi) \quad (5.2.9)$$

Reemplazando (5.2.9) en la ecuación de Klein-Gordon $g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi - m_0^2\phi = 0$

$$(g_{tt})^{-1}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}}\partial_i(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}\tilde{g}^{ij}\partial_j\phi) = m_0^2\phi$$

La ecuación para el campo escalar libre masivo puede escribirse como

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \sqrt{-g_{tt}}\frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}}\partial_i(\sqrt{-g_{tt}}\sqrt{\tilde{g}}\tilde{g}^{ij}\partial_j\phi) + g_{tt}m_0^2\phi \quad (5.2.10)$$

Usando que $V = (-||\partial_t||^2)^{1/2} = \sqrt{-g_{tt}}$, finalmente podemos escribir la ecuación de Klein-Gordon en función del operador diferencial A

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi \Leftrightarrow A = -V \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_i \left(V \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j \right) + V^2 m_0^2 \quad (5.2.11)$$

Por lo tanto, lo que tendremos que hacer es estudiar el operador adjunto A^\dagger y clausura \bar{A} de

$$A = -V \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_i \left(V \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j \right) + V^2 m_0^2 \quad (5.2.12)$$

Para determinar cómo debe extenderse el dominio $\mathcal{D}(A)$, requerimos determinar el dominio de la clausura \bar{A} y encontrar las autofunciones de A^\dagger con autovalores $\pm i$ que pertenezcan a $\mathcal{D}(A^\dagger)$.

Producto Interno:

Veamos que el operador A definido en (5.2.3) es simétrico respecto al producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$. Sean ψ y $\phi \in \mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$

$$(\psi, A\phi) = \int_{\Sigma} \psi^* (A\phi) V^{-1} d\Sigma \quad / \quad A\phi = -VD^a (VD_a\phi) + V^2 m_0^2 \phi$$

$$(\psi, A\phi) = \int_{\Sigma} \psi^* [-VD^a [VD_a\phi]] V^{-1} d\Sigma + \int_{\Sigma} \psi^* (V^2 m_0^2 \phi) V^{-1} d\Sigma$$

$$(\psi, A\phi) = \int_{\Sigma} -\psi^* D^a [VD_a\phi] d\Sigma + \int_{\Sigma} \psi^* (V^2 m_0^2 \phi) V^{-1} d\Sigma$$

$$(\psi, A\phi) = - \int_{\Sigma} D^a [\psi^* VD_a\phi] d\Sigma + \int_{\Sigma} (D^a \psi^*) VD_a\phi d\Sigma + \int_{\Sigma} \psi^* (V^2 m_0^2 \phi) V^{-1} d\Sigma$$

$$\begin{aligned} (\psi, A\phi) &= - \int_{\Sigma} D^a [\psi^* VD_a\phi] d\Sigma + \int_{\Sigma} D_a [(VD^a \psi^*) \phi] d\Sigma \\ &\quad - \int_{\Sigma} D_a (VD^a \psi^*) \phi d\Sigma + \int_{\Sigma} \psi^* (V^2 m_0^2 \phi) V^{-1} d\Sigma \end{aligned}$$

$$(\psi, A\phi) = \int_{\Sigma} D_a [V (-\psi^* D^a \phi + \phi D^a \psi^*)] d\Sigma - \int_{\Sigma} V \{D^a [V (D_a \psi^*)]\} \phi V^{-1} d\Sigma + \int_{\Sigma} (V^2 m_0^2 \psi^*) \phi V^{-1} d\Sigma \quad (5.2.13)$$

La suma de los últimos dos términos de (5.2.13) corresponde a $(A\psi, \phi)$. Usando el teorema de Stokes podemos pasar de la integral de la divergencia $D_a [V (-\psi^* D^a \phi + \phi D^a \psi^*)]$ a una integral del flujo del campo $j^a = V (-\psi^* D^a \phi + \phi D^a \psi^*)$ sobre la frontera $\partial\Sigma$ de la hipersuperficie de tiempo constante. Este flujo podemos pensarlo que se calcula sobre una superficie en infinito y n_a es la 1-forma normal de esa superficie.

$$\begin{aligned}
 (\psi, A\phi) &= (A\psi, \phi) + \int_{\Sigma} D_a [V (-\psi^* D^a \phi + \phi D^a \psi^*)] d\Sigma \\
 (\psi, A\phi) &= (A\psi, \phi) + \int_{\partial\Sigma} j^a n_a d(\partial\Sigma) \\
 (\psi, A\phi) &= (A\psi, \phi) + \int_{\partial\Sigma} V (-\psi^* D^a \phi + \phi D^a \psi^*) n_a d(\partial\Sigma) \tag{5.2.14}
 \end{aligned}$$

Usando que $\psi, \phi \in \mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ entonces el último término se anula porque ninguna de las funciones tiene soporte en infinito. Por lo tanto, probamos que A con dominio $\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ es simétrico en el producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$

$$(\psi, A\phi) = (A\psi, \phi) \quad \forall \psi, \phi \in C_0^\infty(\Sigma) \tag{5.2.15}$$

Prescripción para la evolución temporal

Hemos probado que la ecuación de Klein-Gordon es equivalente a la ecuación diferencial (5.2.2). Como se trata de una ecuación diferencial de segundo orden, la solución queda unívocamente definida dando dos condiciones iniciales, $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$. Dado que el operador A_E no depende del tiempo, la estructura de esta ecuación diferencial es semejante a la *ecuación del oscilador armónico unidimensional*. Haciendo una analogía con esta ecuación y pensando en A_E como una constante que juega el rol de frecuencia al cuadrado, sabemos que $\phi_t = \cos(A_E^{1/2}t) \phi_0 + A_E^{-1/2} \sin(A_E^{1/2}t) \dot{\phi}_0$ es solución.

Es importante remarcar que la analogía con el oscilador armónico es puramente formal, A_E no es una constante (como lo es la frecuencia en el oscilador armónico) pero como este operador no depende de t (es invariante frente a transformaciones generadas por el campo vectorial ∂_t) y las derivadas parciales conmutan, podemos pensarlo como si fuese una constante para encontrar la expresión formal de la solución.

5.2.2. Estrategia para analizar la dinámica del campo escalar:

Para terminar con esta sección resumimos cuáles son los pasos para determinar la evolución temporal del campo escalar en un espacio-tiempo estático:

- (i) Escribir la ecuación de Klein-Gordon en la forma (5.2.2), identificando el operador A .
- (ii) Determinar todas las posibles extensiones autoadjuntas, A_E .
- (iii) Una vez elegida una posible extensión autoadjunta, debe interpretarse la dinámica del campo definida en (5.2.5) a partir de las posibles condiciones de contorno impuestas en infinito.

6

Campo Escalar Libre en Anti-de Sitter

En este capítulo resumiremos los resultados obtenidos por Robert Wald y Akihiro Ishibashi para el análisis del campo escalar libre en Anti-de Sitter en $2 + n$ dimensiones. Ver [6].

6.1. Ecuación de Klein-Gordon en Ads(2+n)

La métrica de Anti-de Sitter en $2 + n$ dimensiones es

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_n^2$$

$$0 \leq r < +\infty; \quad -\infty < t < +\infty$$
(6.1.1)

con $d\Omega_n^2$ el elemento de línea de la esfera S^n (los dominios de las coordenadas angulares son los usuales) y ∂_t el campo vectorial de Killing timelike generador de las isometrías temporales. Tomando

$$r = l \cot(x) \rightarrow dr = -\frac{l}{\sin^2(x)}, \quad \frac{r^2}{l^2} + 1 = \frac{1}{\sin^2(x)},$$
(6.1.2)

la métrica de Ads(2+n) resulta

$$ds^2 = \frac{l^2}{\sin^2(x)} (-dt^2 + dx^2 + \cos^2(x)d\Omega_n^2)$$

$$-\infty < t < +\infty; \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right]$$
(6.1.3)

En esta carta, el origen de coordenadas esféricas ($r = 0$) corresponde a $x = \frac{\pi}{2}$ y el infinito de Ads ($r = +\infty$) corresponde a $x = 0$.

La métrica inducida sobre las hipersuperficies spacelike ortogonales al campo vectorial ∂_t es

$$d\tilde{s}^2 = \frac{l^2}{\sin^2(x)} (dx^2 + \cos^2(x)d\Omega_n^2) \quad (6.1.4)$$

En el capítulo anterior hemos visto que la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo estático es equivalente a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi, \quad (6.1.5)$$

donde t es el parámetro de Killing y

$$A\phi = -\sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_i \left(\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j \phi \right) - g_{tt} m_0^2 \phi \quad (6.1.6)$$

Sea la métrica espacial de Ads(2+n) (6.1.4) entonces

$$\begin{aligned} A\phi = & -\sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n \sqrt{g_{\Omega_n}}} \partial_x \left[\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n \sqrt{g_{\Omega_n}} g^{xx} \partial_x \phi \right] \\ & -\sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n \sqrt{g_{\Omega_n}}} \partial_{\theta_i} \left[\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n \sqrt{g_{\Omega_n}} \tilde{g}^{\theta_i \theta_i} \partial_{\theta_i} \phi \right] \\ & - g_{tt} m_0^2 \phi, \end{aligned}$$

con $\sqrt{g_{\Omega_n}}$ el determinante de la parte angular de la métrica, $\tilde{g}^{\theta_i \theta_i} = \frac{1}{l^2} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} g^{\theta_i \theta_i}$ y $g^{\theta_i \theta_i}$ los elementos de la métrica inversa de la esfera S^n . Para ahorrar notación, hemos llamado θ_i a todas las coordenadas angulares.

$$\begin{aligned} A\phi = & -\sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n} \partial_x \left[\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g_{xx}} [l \cot(x)]^n g^{xx} \partial_x \phi \right] \\ & - (-g_{tt}) \frac{1}{l^2} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \frac{1}{\sqrt{g_{\Omega_n}}} \partial_{\theta_i} \left[\sqrt{g_{\Omega_n}} g^{\theta_i \theta_i} \partial_{\theta_i} \phi \right] \\ & - g_{tt}^2 m_0^2 \phi \quad (6.1.7) \end{aligned}$$

En la expresión (6.1.7) identificamos a

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\Omega_n}}} \partial_{\theta_i} \left[\sqrt{g_{\Omega_n}} g^{\theta_i \theta_i} \partial_{\theta_i} \right] = g^{\theta_i \theta_j} \nabla_i \nabla_j = -J^2 \quad (6.1.8)$$

como el operador de Laplace definido sobre la esfera S^n . Este es el operador de Casimir, J^2 , del álgebra de Lie del grupo $SO(n+1)$ (el grupo de rotaciones en el espacio plano \mathbb{R}^{n+1}) y clasifica las representaciones irreducibles del grupo cuyos autovalores son $\lambda = m(m+n-1)$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cuando resolvamos la ecuación de Klein-Gordon, el hecho que aparezca este operador en la ecuación diferencial será muy útil porque podremos proponer separación de variables.

Además,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g_{tt}} &= \sqrt{g_{xx}} = (g^{xx})^{-1/2} = \frac{l}{\sin(x)} \\ \Rightarrow \sqrt{-g_{tt}} \sqrt{g_{xx}} g^{xx} &= 1 \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Habiendo hecho estas observaciones la expresión (6.1.7) resulta

$$A\phi = -\frac{1}{[l \cot(x)]^n} \partial_x [(l \cot(x))^n \partial_x \phi] + \frac{1}{\cos^2(x)} [J^2(\phi)] - g_{tt}^2 m_0^2 \phi \quad (6.1.10)$$

Para resolver la ecuación diferencial (6.1.5) proponemos separación de variables

$$\phi(t, r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \tilde{\varphi}_{\bar{k}}(t, r) S_{\bar{k}}(\theta_i) \quad (6.1.11)$$

Las funciones $S_{\bar{k}}(\theta_i)$ forman una base ortonormal de las representaciones irreducibles del grupo $SO(n+1)$ en el espacio de funciones $L^2(S^n, d\Omega^n)$ (funciones de cuadrado integrables definidas sobre la esfera S^n). El sub-índice \bar{k} clasifica a cada uno de los elementos de las representaciones irreducibles y las $C_{\bar{k}}$ son constantes complejas que surgen de expandir la solución ϕ como suma de elementos $S_{\bar{k}}(\theta_i)$.

$$\int_{S^n} d\Omega_n (S_{\bar{k}'})^* S_{\bar{k}} = \delta_{\bar{k}', \bar{k}} \quad (6.1.12)$$

Los $S_{\bar{k}}(\theta_i)$ son autofunciones del Casimir J^2 con autovalor $\lambda = m(m+n-1)$

$$J_{\Omega_n}^2 (S_{\bar{k}}(\theta_i)) = m(m+n-1) S_{\bar{k}}(\theta_i) \quad (6.1.13)$$

Para aclarar ideas, supongamos que intentamos resolver la ecuación de Klein-Gordon en Anti-de Sitter en cuatro dimensiones. Las representaciones irreducibles de $SO(2+1) = SO(3)$ son los armónicos esféricos $Y_l^p(\theta, \phi)$. Entonces, el sub-índice \bar{k} representa a los números (l, p) de modo que

$$\phi(t, r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{\bar{k}} C_{\bar{k}} \tilde{\varphi}_{\bar{k}}(t, r) S_{\bar{k}}(\theta_i) = r^{-1} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{p=-l}^l C_{(l,p)} \tilde{\varphi}_{(l,p)}(t, r) Y_l^p(\theta, \phi)$$

Para concluir con esta breve observación, podemos decir que las funciones $S_{\bar{k}}(\theta_i)$ *juegan el rol de armónicos esféricos* en el grupo $SO(n+1)$.

Habiendo hecho este breve comentario continuamos con el caso general del campo escalar libre en Anti-de Sitter en $2+n$ dimensiones. Como la escritura en una base es única, si reemplazamos (6.1.11) en la ecuación diferencial (6.1.5) los términos izquierdo y derecho que vengán multiplicados por la misma función $S_{\bar{k}}$ deben ser iguales. El operador de Laplace (6.1.8) definido en la esfera S^n es invariante frente al grupo $SO(n+1)$ de modo que su acción sobre cada función $S_{\bar{k}}$ que pertenezca a la misma representación irreducible es multiplicarla por $-\lambda = -m(m+n-1)$ (si fuese $SO(3)$ estamos diciendo que $J^2 Y_l^p = l(l+1) Y_l^p \forall p \in \mathbb{Z} / -l < p < l$). Esto implica que la acción del operador de Klein-Gordon sobre cada uno de los elementos $r^{-n/2} C_{\bar{k}} \tilde{\varphi}_{\bar{k}} S_{\bar{k}}(\theta_i)$ de la expansión (6.1.11) es exactamente la misma cuando las funciones $S_{\bar{k}}$ tienen el mismo autovalor respecto al operador de Casimir (estén en la misma representación irreducible). Esto trae como consecuencia que las funciones radiales $\tilde{\varphi}_{\bar{k}}$ no dependen de todos los coeficientes \bar{k} (que caracterizan a cada elemento de cada representación irreducible) sino que solo dependen de m (el número que caracteriza a cada representación irreducible). Por lo tanto, de ahora en más escribiremos $\tilde{\varphi}_m$ en vez de $\tilde{\varphi}_{\bar{k}}$.

Luego de esta discusión y teniendo en cuenta que $r = l \cot(x) \Rightarrow r^{-n/2} = [l \cot(x)]^{-n/2}$, escribimos la ecuación (6.1.5) para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$r^{-n/2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_m}{\partial t^2} = \frac{1}{[l \cot(x)]^n} \partial_x \left[(l \cot(x))^n \partial_x \left(r^{-n/2} \tilde{\varphi}_m \right) \right] - \frac{m(m+n-1)}{\cos^2(x)} r^{-n/2} \tilde{\varphi}_m + g_{tt} m_0^2 r^{-n/2} \tilde{\varphi}_m \quad (6.1.14)$$

Por último, proponemos que $\tilde{\varphi}_m$ sean autofunciones de ∂_t (soluciones con frecuencia bien definida)

$$\tilde{\varphi}_m(x, t) = e^{i\omega t} \varphi_m(x) \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\varphi}_m}{\partial t} = i\omega \tilde{\varphi}_m \quad (6.1.15)$$

Lo que hemos hecho al proponer separación de variables fue llevar la ecuación de Klein-Gordon a una ecuación diferencial en la variable x solamente.

$$-\omega^2 \varphi_m = \frac{1}{[l \cot(x)]^{n/2}} \partial_x \left[(l \cot(x))^n \partial_x \left(r^{-n/2} \varphi_m \right) \right] - \frac{m(m+n-1)}{\cos^2(x)} \varphi_m + g_{tt} m_0^2 \varphi_m \quad (6.1.16)$$

Haciendo los pasos intermedios y usando que $g_{tt} = -\frac{l^2}{\sin^2(x)}$, la expresión (6.1.16) es equivalente a la ecuación diferencial

$$-\frac{d^2\varphi_m}{dx^2} + \frac{\varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n\frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n\frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = \omega^2 \varphi_m \quad (6.1.17)$$

6.1.1. Propiedades del operador A en $\text{Ads}(2+n)$

Este resultado es fundamental. Debemos entender qué hemos hecho hasta ahora para comprender la física del campo escalar en Ads y para usar correctamente el formalismo de extensiones autoadjuntas aplicado a la teoría de campos propuesto por Robert Wald.

Recapitulamos brevemente las cuentas hechas hasta ahora. Haciendo uso que el espacio-tiempo es estático y por lo tanto existe un campo vectorial de Killing ∂_t ortogonal a hipersuperficies Σ spacelike, hemos comenzado nuestro análisis estudiando la ecuación de Klein-Gordon escrita de la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi,$$

y la prescripción para la dinámica se basa en determinar las posibles extensiones autoadjuntas del operador A

$$A\phi = -\frac{1}{[l \cot(x)]^n} \partial_x [(l \cot(x))^n \partial_x \phi] + \frac{1}{\cos^2(x)} [J^2(\phi)] - g_{tt}^2 m_0^2 \phi$$

Proponiendo separación de variables para ϕ de la forma

$$\phi(t, r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{\bar{k}} \tilde{\varphi}_{\bar{k}}(t, r) S_{\bar{k}}(\theta_i)$$

siendo $S_m(\theta_i)$ bases de las representaciones irreducibles del grupo $SO(n+1)$ en el espacio de funciones $L^2(S^n, d\Omega^n)$ arribamos a una ecuación diferencial (6.1.17) en la variable x únicamente

Por lo tanto, el operador A_m

$$A_m = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sin^2(x)} \left[n\frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{1}{\cos^2(x)} \left[n\frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \quad (6.1.18)$$

podemos interpretarlo como la restricción del operador A en las representaciones irreducibles de $SO(n+1)$ clasificadas por el autovalor $m(m+n-1)$ del operador de Casimir (J^2) del álgebra del grupo. El dominio de este operador es $\mathcal{D}(A_m) = C_0^\infty(0, \frac{\pi}{2}]$ denso en el espacio de Hilbert $L^2((0, \frac{\pi}{2}], dx)$. Cuando nos propongamos encontrar las posibles extensiones autoadjuntas de A , lo haremos estudiando las extensiones de A_m . Para ello, debemos encontrar los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- que corresponden a las soluciones a la ecuación diferencial (6.1.17) con autovalor $\omega^2 = \pm i$ y pertenezcan al dominio de A_m^\dagger .

Producto Interno y Dominio de los Operador Adjunto A_m^\dagger y Clausura $\overline{A_m}$

En el capítulo anterior hemos definido el dominio del operador A como $\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ lo cual nos permitió probar que A es un operador simétrico en el producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$.

$$(\psi, \phi) = \int_{\Sigma} \psi^*(\phi) V^{-1} d\Sigma$$

Para determinar las extensiones autoadjuntas de A_m primero debemos encontrar el dominio del operador A_m^\dagger . Consideramos $\psi \in L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$ y $\phi \in \mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ expandidos de la forma (6.1.11). Si nos restringimos a la hipersuperficie Σ de $t = cte$, usando que $S_k^i(\theta_i)$ son bases ortonormales de las representaciones irreducibles de $SO(n+1)$ en $L^2(S^n, d\Omega_n)$ y considerando que

$$V^{-1} = \sqrt{-g^{tt}} = \left[\frac{l}{\sin(x)} \right]^{-1}; \quad d\Sigma = \frac{l}{\sin(x)} \left[l \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right]^n dx d\Omega_n = Vr^n dx d\Omega_n,$$

entonces para cada una de las componentes ψ_m y ϕ_m con mismo m (si tuviesen diferentes valores de m la integral es nula) tenemos que

$$(\psi_m, A\phi_m) = \int_{\Sigma} \psi_m^*(A\phi_m) V^{-1} d\Sigma = \int_0^{\pi/2} dx \Psi_m^* A_m \varphi_m = (\Psi_m, A_m \varphi_m) \quad (6.1.19)$$

Lo que hemos hecho es pasar a una integral en la *variable radial* x haciendo uso de la ortonormalidad de las funciones que dependen de las variables angulares solamente. Esta observación es importante porque permite pasar de una integral en una variedad $1+n$ dimensional Σ con medida $V^{-1}d\Sigma$ ¹ a una integral en el compacto unidimensional $[0, \pi/2]$ con la medida canónica dx . Además, esta expresión resulta útil para determinar el dominio del operador adjunto A_m^\dagger .

$$(\Psi_m, A_m \varphi_m) = \int_0^{\pi/2} dx \Psi_m^* \left\{ -\frac{d^2 \varphi_m}{dx^2} + \frac{\varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\}$$

$$(\Psi_m, A_m \varphi_m) = \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\Psi_m^* \frac{d^2 \varphi_m}{dx^2} + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} (\Psi_m, A_m \varphi_m) &= \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\Psi_m^* \frac{d\varphi_m}{dx} \right) + \frac{d\Psi_m^*}{dx} \frac{d\varphi_m}{dx} + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Psi_m, A_m \varphi_m) &= \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\Psi_m^* \frac{d\varphi_m}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi_m^*}{dx} \varphi_m \right) - \frac{d^2 \Psi_m^*}{dx^2} \varphi_m + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\} \quad (6.1.20) \end{aligned}$$

¹Recordamos que estamos trabajando en Anti-de Sitter en $2+n$ dimensiones

Como hemos supuesto $\phi \in \mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ y $\psi \in L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$, entonces $\varphi_m \in \mathcal{D}(A_m) = C_0^\infty(0, \frac{\pi}{2}]$ y $\Psi_m \in L^2((0, \frac{\pi}{2}], dx)$. Luego, los términos de superficie en (6.1.20) se anulan porque φ_m es de soporte compacto.

$$(\Psi_m, A_m \varphi_m) = \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\frac{d^2 \Psi_m^*}{dx^2} \varphi_m + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Psi_m^* \varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\}$$

$$(\Psi_m, A_m \varphi_m) = (A_m^\dagger \Psi_m, \varphi_m) \quad \forall \varphi_m \in C_0^\infty(0, \frac{\pi}{2}] \quad (6.1.21)$$

La expresión (6.1.21) nos muestra que Ψ_m pertenece al dominio de A_m^\dagger . Destacamos que no fue necesario imponer condiciones de borde sobre la función Ψ_m . Este conjunto se define como

$$\mathcal{D}(A_m^\dagger) = \left\{ \Psi \in L^2\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx\right) / \Psi' \in AC(0, \pi/2]; A_m^\dagger \Psi \in L^2\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx\right) \right\} \quad (6.1.22)$$

Dado que $\mathcal{D}(A_m) \subset \mathcal{D}(A_m^\dagger)$ el dominio del operador adjunto A_m^\dagger es denso en $L^2((0, \frac{\pi}{2}], dx)$. El **Teorema 1** del capítulo anterior garantiza que el operador A_m es clausurable y $\overline{A_m} = A_m^\dagger$. Usando este resultado calculamos $\mathcal{D}(\overline{A_m})$.

Sean $\Psi \in \mathcal{D}(A_m^\dagger)$ y $\Phi \in L^2((0, \frac{\pi}{2}], dx)$, haciendo los mismos cálculos que en (6.1.20) tenemos

$$(\Phi, A_m^\dagger \Psi) = \int_0^{\pi/2} dx \Phi^* \left\{ -\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{\Psi}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Psi}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\}$$

$$(\Phi, A_m^\dagger \Psi) = \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\frac{d}{dx} \left(\Phi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi^*}{dx} \Psi \right) - \frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} \Psi + \frac{\Phi^* \Psi}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi^* \Psi}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\} \quad (6.1.23)$$

Debe ser posible integrar por partes y eliminar los términos de superficie en (6.1.23). Por lo tanto, es necesario imponer condiciones sobre Φ

$$\Phi(0) = \Phi(\pi/2) = \Phi'(0) = \Phi'(\pi/2) = 0 \quad (6.1.24)$$

Reemplazando (6.1.24) en (6.1.23) arribamos a

$$(\Phi, A_m^\dagger \Psi) = \int_0^{\pi/2} dx \left\{ -\frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} \Psi + \frac{\Phi^* \Psi}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Phi^* \Psi}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right\}$$

$$(\Phi, A_m^\dagger \Psi) = (A_m^{\dagger\dagger} \Phi, \Psi) \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(A_m^\dagger) \quad (6.1.25)$$

La expresión (6.1.25) nos determina cuáles son las Φ que pertenecen a $\mathcal{D}(A_m^{\dagger\dagger})$. Como $\overline{A_m} = A_m^{\dagger\dagger}$, el dominio de la clausura $\overline{A_m}$ es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\overline{A_m}) &= \left\{ \Phi \in L^2 \left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx \right) / \Phi' \in AC(0, \pi/2]; \overline{A_m} \Phi \in L^2 \left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx \right); \right. \\ &\quad \left. \Phi(0) = \Phi(\pi/2) = \Phi'(0) = \Phi'(\pi/2) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

Haber determinado los dominios $\mathcal{D}(A_m^{\dagger})$ (6.1.22) y $\mathcal{D}(\overline{A_m})$ (6.1.26) es fundamental para encontrar las posibles extensiones autoadjuntas de A_m . Los subespacios de deficiencia del operador A_m^{\dagger} vendrán dados por todas las soluciones de la ecuación diferencial (6.1.17) con autovalor $\omega^2 = \pm i$ que pertenezcan a $\mathcal{D}(A_m^{\dagger})$.

6.2. Soluciones del campo escalar libre en Ads $(2+n)$

En esta sección encontraremos las soluciones exactas a la ecuación diferencial

$$-\frac{d^2 \varphi_m}{dx^2} + \frac{\varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = \omega^2 \varphi_m$$

Proponemos $\varphi_m(x) = \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) f(x)$, simplificamos $\sin^\alpha(x) \cos^\beta(x)$ en todos los miembros y luego multiplicamos por $\sin^2(x) \cos^2(x)$

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sin^2 \cos^2 f &= \sin^2 \cos^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 [\alpha \sin \cos^3 - \beta \sin^3 \cos] \frac{df}{dx} \\ &\quad + [\alpha(\alpha-1) \cos^4 - \sin^2 \cos^2 (\alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1)) + \beta(\beta-1) \sin^4] f \\ &\quad - \cos^2 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] f - \sin^2 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] f \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Proponemos el cambio de variables $u = \cos^2(x)$. Antes de continuar, recordamos que

$$r = l \cot(x); \quad u = \cos^2(x)$$

$$r = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 \Leftrightarrow u = 0$$

$$r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$$

Es importante recordar los cambios de variables que hemos hecho para no perder de foco qué valor de coordenadas representa el origen y el infinito de Anti-de Sitter. Escribimos la ecuación diferencial (6.2.1) en función de la variable u

$$\begin{aligned}
 0 &= 4u^2(1-u)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 [-(2\alpha+1)(1-u)u^2 + (2\beta+1)(1-u)^2u] \frac{\partial f}{\partial u} \\
 &+ [\alpha(\alpha-1)u^2 - u(1-u)(\alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1)) + \beta(\beta-1)(1-u)^2] f \\
 &- u \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] f - (1-u) \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] f \\
 &+ \omega^2 u(1-u) f
 \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Estrategia para resolver la ecuación diferencial

El objetivo es llevar la ecuación diferencial (6.2.2) a la ecuación diferencial de las hipergeométricas

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dw}{dz} - abw = 0 \tag{6.2.3}$$

porque conocemos una forma de representar la solución w como una hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ a partir de un desarrollo en serie o en su forma integral.

Si comparamos las expresiones (6.2.2) y (6.2.3), vemos que es necesario poder sacar factor común $u(1-u)$ de todos los términos para que las ecuaciones se asemejen. Dado que α y β son parámetros arbitrarios que hemos introducido en la ecuación, ahora fijaremos sus valores para arribar a la ecuación de las hipergeométricas y así obtener una expresión exacta para la solución f .

Sea el término

$$\begin{aligned}
 &\alpha(\alpha-1)u^2 - u(1-u)(\alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1)) + \beta(\beta-1)(1-u)^2 - u \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] \\
 &- (1-u) \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = \\
 &= u^2 [\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1)] \\
 &+ u \left[-2\beta(\beta-1) - \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] \right] \\
 &+ \beta(\beta-1) - \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]
 \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Imponemos que el término constante en (6.2.4) se anule

$$\beta(\beta - 1) - \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = 0$$

$$\beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} \quad (6.2.5)$$

Mostramos el resultado para el caso particular de $AdS(3)$, $n = 1$, pues en el próximo capítulo estudiaremos la ecuación de Klein-Gordon en el agujero negro de 2+1 dimensiones y será interesante comparar los valores de las constantes α y β en los dos espacio-tiempos

$$AdS(3) \Rightarrow \beta_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{4m^2}}{2} = \frac{1}{2} \pm m \quad (6.2.6)$$

Reemplazando la restricción (6.2.5) en (6.2.4)

$$= u^2 [\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1)] - u \left[\left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \beta(\beta - 1) \right] \quad (6.2.7)$$

Ahora imponemos que

$$\alpha(\alpha - 1) = \frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2$$

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right]}}{2} \quad (6.2.8)$$

Para el caso particular de $AdS(3)$, $n = 1$

$$AdS(3) \Rightarrow \alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + m_0^2 l^2} \quad (6.2.9)$$

Por lo tanto, reemplazando (6.2.5) y (6.2.8) en (6.2.7) arribamos a que el término (6.2.4) que aparece en la ecuación diferencial es equivalente a

$$= -u(1 - u) [\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1)] \quad (6.2.10)$$

Lo que hemos hecho es fijar las constantes α y β de modo que la ecuación diferencial (6.2.2) pueda escribirse como la ecuación de las hipergeométricas (6.2.3). Reemplazamos (6.2.10) en (6.2.2)

$$\begin{aligned}
 0 &= 4u^2(1-u)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 [-(2\alpha+1)(1-u)u^2 + (2\beta+1)(1-u)^2u] \frac{\partial f}{\partial u} \\
 &+ u(1-u) [-\alpha(\alpha-1) - \beta(\beta-1) - \alpha(\beta+1) - \beta(\alpha+1) + \omega^2] f
 \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

Simplificamos $u(1-u)$ y dividimos por 4 en todos los términos

$$\begin{aligned}
 0 &= u(1-u) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) - u(\alpha + \beta + 1) \right] \frac{\partial f}{\partial u} \\
 &- \frac{1}{4} [\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + \alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) - \omega^2] f
 \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 &\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1) + \alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) + \omega^2 = \\
 &= (\alpha + \beta)^2 + \omega^2
 \end{aligned} \tag{6.2.13}$$

Reemplazando (6.2.13) en (6.2.12) llegamos a la ecuación diferencial

$$u(1-u) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) - u(\alpha + \beta + 1) \right] \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{4} [(\alpha + \beta)^2 - \omega^2] f = 0 \tag{6.2.14}$$

Sea la ecuación diferencial de las hipergeométricas

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dw}{dz} - abw = 0$$

Tomando

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\alpha + \beta + \omega}{2} \\
 b &= \frac{\alpha + \beta - \omega}{2} \\
 c &= \beta + \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{6.2.15}$$

con

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} > 0$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right]}}{2} > 0, \quad (6.2.16)$$

podemos obtener la solución exacta de la ecuación diferencial (6.2.14) en términos de funciones hipergeométricas. Aclaremos que haber tomado el signo + en las raíces cuadradas que definen a α y β no es perder generalidad ya que son constantes introducidas a propósito con el único fin de haber llevado la ecuación diferencial a la forma de las hipergeométricas.

Soluciones

Las soluciones a la ecuación diferencial

$$-\frac{d^2 \varphi_m}{dx^2} + \frac{\varphi_m}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = \omega^2 \varphi_m$$

vienen dadas por $\varphi_m(x) = \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) f(x)$ con $f(x)$ una combinación lineal de dos funciones hipergeométricas.

$$\varphi_m = \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) \left[B_1 {}_2F_1(a, b; c; \cos^2(x)) + B_2 (\cos^2(x))^{1-c} {}_2F_1(a-c+1, b-c+1; 2-c; \cos^2(x)) \right] \quad (6.2.17)$$

con a, b y c definidos en (6.2.15), α y β definidos en (6.2.16) y $B_1, B_2 \in \mathbb{C}$ dos constantes arbitrarias. Una función hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)_1$ genérica puede representarse a partir de un desarrollo en serie

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s s!} (z)^s = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} (z)^2 + \dots \quad (6.2.18)$$

si $c \notin \mathbb{Z} < 0$. Las sucesiones a_s, b_s y c_s se definen en forma general como

$$q_s = 1; \quad s = 0$$

$$q_s = q(q+1) \cdots q(q+s-1); \quad s > 0 \quad (6.2.19)$$

Nuestro objetivo es encontrar los subespacios de deficiencia del operador A_m^\dagger . Necesitamos determinar si las soluciones a la ecuación diferencial son de cuadrado integrables en $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Adelántandonos a los resultados, requerimos que $B_2 = 0$ para que $\varphi_m \in L^2 \left((0, \frac{\pi}{2}], dx \right)$

Dada la definición de las sucesiones q_s debemos verificar que $c \notin \mathbb{Z} < 0$ y $2 - c \notin \mathbb{Z} < 0$ (no sean números enteros negativos) para poder definir las funciones hipergeométricas de (6.2.17) a partir del desarrollo en serie.

$$c = \beta + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} + \frac{1}{2} > 0$$

$$2 - c = 1 - \frac{\sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} \quad (6.2.20)$$

En general se tiene que $\frac{\sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} \notin \mathbb{Z}$ y por lo tanto $2 - c \notin \mathbb{Z} < 0$ (en el caso que $2 - c$ sea un entero negativo existen otras formas de representar las funciones hipergeométricas pero igualmente hay que imponer $B_2 = 0$).

Estudiamos el comportamiento de la solución en el origen de Anti-de Sitter $r = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_m(x) \simeq B_2 \cos(x)^{\beta+2-2c} = B_2 \cos(x)^{-\beta+1} = B_2 \cos(x)^{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2}} \quad (6.2.21)$$

Si $\frac{\sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} \geq 1$ entonces φ_m no será de cuadrado integrable porque $|\varphi_m|^2 \simeq \cos^{-p}$ con $p \geq 1$ y la integral de $|\varphi_m|^2$ será divergente en $x = \pi/2$. Por lo tanto, requerimos $B_2 = 0$ para que φ_m sea de cuadrado integrable².

Habiendo hecho esta discusión, probamos que la solución bien definida en el origen de Anti-de Sitter $r = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2$ es

$$\varphi_m = \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) {}_2F_1(a, b; c; \cos^2(x)) \quad (6.2.22)$$

Para estudiar el comportamiento de la solución (6.2.22) en el infinito de Anti-de Sitter, $r = +\infty \Leftrightarrow x = 0$, hacemos uso de las llamadas *fórmulas de conexión de las funciones hipergeométricas*. Ver [21], [22].

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-z)$$

$$+ (1-z)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z) \quad (6.2.23)$$

²En el trabajo de Wald e Ishishabshi estudian el comportamiento de las soluciones del campo escalar en Anti-de Sitter en todas las dimensiones, para todos los posibles valores de m y muestran que el término que acompaña a B_2 nunca es de cuadrado integrable. Hemos decidido presentar nada más que uno de los casos y no todos pues no los vamos a usar nunca en lo que sigue del trabajo. Ver [6]

De modo que (6.2.22) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \varphi_m(x) &= \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) {}_2F_1(a, b; c; \cos^2(x)) \\
 &= \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; \sin^2(x)) \right] \\
 &+ (\sin(x))^{\alpha+2(c-a-b)} \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; \sin^2(x)) \right] \quad (6.2.24)
 \end{aligned}$$

La solución $\varphi_m(x)$ escrita de la forma (6.2.24) es la indicada para estudiar las posibles extensiones autoadjuntas del operador A_m . **Destacamos que haber resuelto la ecuación diferencial de forma genérica nos permitirá estudiar los casos de acople mínimo con la curvatura y acople conforme solamente con determinar cuanto vale m_0^2 .**

6.2.1. Campo masivo con acople mínimo a la curvatura

Nos disponemos a estudiar las propiedades de la solución de la ecuación diferencial cuando $m_0^2 \geq 0$. Sean a, b y c definidos en (6.2.15) y α definido en (6.2.16)

$$\alpha + 2(c-a-b) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right]}}{2} \leq -\frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1 \quad (6.2.25)$$

Este cálculo nos muestra que el comportamiento de la solución (6.2.24) en el infinito de Anti-de Sitter es de la forma

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow |\varphi_m(x)|^2 \simeq \left| \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \right|^2 \sin^{2p}(x) \quad / \quad p \leq -\frac{1}{2} \quad (6.2.26)$$

y las soluciones no son de cuadrado integrables excepto que a ó b sean cero o números enteros negativos pues la función $\Gamma(z)$ presenta polos si $z = 0, -1, -2, \dots$

La condición de que $\varphi_m \in L^2 \left((0, \frac{\pi}{2}] , dx \right)$ nos obliga a considerar que a ó $b \in \mathbb{Z} \leq 0$.

Una posibilidad es

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\alpha + \beta + \omega}{2} = -j \quad / \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\
 a = -j &\Leftrightarrow \omega = -2j - \alpha - \beta \in \mathbb{R} < 0 \quad (6.2.27)
 \end{aligned}$$

La otra posibilidad es

$$b = \frac{\alpha + \beta - \omega}{2} = -j \quad / \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$b = -j \Leftrightarrow \omega = 2j + \alpha + \beta \in \mathbb{R} > 0 \quad (6.2.28)$$

Finalmente, los valores de ω para que la solución (6.2.24) φ_m pertenezca a $L^2\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx\right)$ resultan

$$\omega = \pm \left[2j + \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right]}}{2} + \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} \right] \quad / \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (6.2.29)$$

Este resultado es de capital importancia. La primera observación es que $\omega \in \mathbb{R}$. No existen soluciones de la ecuación diferencial 6.1.17 con $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean de cuadrado integrables para el campo mínimamente acoplado con $m_0^2 \geq 0$ en Anti-de Sitter en $2+n$ dimensiones con $n \geq 1$. Por lo tanto, los índices de deficiencia del operador A_m son cero, $n_+ = n_- = 0$. Usando el teorema de von Neumann concluimos que A_m (y por ende A) son esencialmente autoadjuntos. Esto significa que existe una única extensión autoadjunta determinada por la clausura $\overline{A_m}$ (ver ecuación 6.1.26). Precisamente es esto lo que obtienen en [6].

Podemos intentar interpretar este resultado haciendo una analogía formal con la Ecuación de Schrödinger. El término

$$V_{eff} = \frac{1}{\sin^2(x)} \left[n \frac{(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{1}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right],$$

de la ecuación diferencial podemos pensarlo como un potencial efectivo introducido por la gravedad debido a que se está estudiando el campo ϕ en un espacio curvo. Como el potencial es divergente cuando nos aproximamos a infinito, $x \rightarrow 0 \Rightarrow V(x) \rightarrow +\infty$, resulta lo suficientemente repulsivo para reflejar completamente al campo sin que nunca llegue a la frontera de Anti-de Sitter. Matemáticamente esto corresponde a que las funciones f que pertenecen al dominio de $\overline{A_m}$ verifican que f y f' se anulan en infinito. Por lo tanto, no es necesario imponer ninguna condición de contorno extra en la frontera del espacio-tiempo. También podemos entender por qué fue necesario discretizar las frecuencias ω . Es sabido de Mecánica Cuántica que si el valor del potencial en infinito es mayor que el valor de las autoenergías entonces los estados son ligados con energías discretizadas (por ejemplo en el oscilador armónico, en el átomo de Hidrógeno, en el pozo infinito de potencial). En nuestro caso el potencial es divergente en infinito. Si insistimos con la analogía con la Ecuación de Schrödinger, como tenemos un potencial confinante, era de esperar que los posibles valores de ω^2 (juegan el rol de autoenergías) estén discretizados.

Dominio del operador extendido \overline{A}

Hemos resuelto la ecuación diferencial (6.1.17) para el campo mínimamente acoplado con $m_0^2 \geq 0$ y determinamos que no existen soluciones con $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean de cuadrado integrables para Anti-de Sitter en $2 + n$ dimensiones con $n \geq 1$.

Sean a, b y c definidos en (6.2.15), α y β definidos en (6.2.16), las soluciones de (6.1.17) son

$$\varphi_m(x) = \sin^\alpha(x) \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; \sin^2(x)) \right] \tag{6.2.30}$$

donde hemos impuesto que

$$a = \frac{\alpha + \beta + \omega}{2} = -j \ / \ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y

$$b = \frac{\alpha + \beta - \omega}{2} = -j \ / \ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

lo que implica que los posibles valores de ω para que $\varphi_m \in L^2((0, \frac{\pi}{2}], dx)$ son los de (6.2.29). Aclaremos que necesitamos que tanto a y b sean enteros negativos para poder obtener todos los valores de ω posibles. Una observación interesante es que estos valores de ω implican que la hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; \sin^2(x))$ resulta ser un polinomio de grado j en la variable $\sin^2(x)$.

Es importante destacar que las soluciones (6.2.30) pertenecen al dominio de la clausura $\overline{A_m}$ (6.1.26). Como los subespacios de deficiencia son nulos, A_m es un operador esencialmente autoadjunto y existe una única extensión determinada por la clausura. Como consecuencia, A también es esencialmente autoadjunto y su extensión también es única definida a partir del operador clausura \overline{A} .

El dominio de la extensión cerrada y autoadjunta \overline{A} es

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \left\{ \phi(r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{\bar{k}} f S_{\bar{k}}(\theta_i) \ / \ f \in \mathcal{D}(\overline{A_m}) \right\} \tag{6.2.31}$$

Las soluciones de la Ecuación de Klein-Gordon definidas globalmente

$$\phi_t = \cos(\overline{A}^{1/2} t) \phi_0 + (\overline{A})^{-1/2} \sin(\overline{A}^{1/2} t) \dot{\phi}_0 \tag{6.2.32}$$

con condiciones iniciales $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$ implican que $\phi_t \in \mathcal{D}(\overline{A})$. Como las funciones f que pertenecen al dominio de $\overline{A_m}$ verifican que $f = f' = 0$ en infinito, la solución ϕ_t y $\partial_x \phi_t$ se anulan en la frontera de Anti-de Sitter en todo instante de tiempo. La conclusión Física es que para el campo escalar masivo el potencial efectivo es confinante y las soluciones son reflejadas totalmente sin llegar a la frontera del espacio-tiempo.

6.2.2. Campo no masivo con acople conforme a la curvatura

Sea un espacio-tiempo de d dimensiones, la ecuación para el campo escalar libre con acople conforme es

$$\left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{d-2}{4(d-1)} R \right] \phi = 0 \quad (6.2.33)$$

En el caso de Anti-de Sitter en d dimensiones, el escalar de curvatura es

$$R = -(d)(d-1) \frac{1}{l^2} \quad (6.2.34)$$

Es importante notar que R es una constante negativa. Este es el motivo por el cual al espacio-tiempo de Anti-de Sitter se lo llama un espacio de curvatura negativa constante. En nuestro caso la dimensión de Ads es $d = n + 2$ de modo que el escalar de curvatura resulta

$$R = -(n+2)(n+1) \frac{1}{l^2} \quad (6.2.35)$$

Haciendo un paréntesis, en este capítulo nos propusimos hasta ahora resolver la ecuación de Klein-Gordon

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m_0^2 \phi = 0,$$

en Anti-de Sitter. Si consideramos que

$$m_0^2 = \frac{n}{4(n+1)} R = \frac{n}{4(n+1)} \left[-(n+2)(n+1) \frac{1}{l^2} \right] = -\frac{n(n+2)}{4l^2} \quad (6.2.36)$$

entonces podemos usar todos los cálculos de la sección anterior. Como caso particular vemos que si $n = 0$, lo cual implica estudiar el campo en Ads(2), el campo resulta no masivo $m_0^2 = 0$. Esto es lógico pues el campo escalar no masivo en dos dimensiones corresponde a una teoría con invariancia conforme. Ya tenemos las soluciones φ_m cuando el acople es conforme si imponemos que en la solución (6.2.24) m_0^2 adopte el valor (6.2.36). Además, esta elección implica que la ecuación diferencial (6.1.17) resulte

$$-\frac{d^2 \varphi_m}{dx^2} + \frac{\varphi_m}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right] = \omega^2 \varphi_m \quad (6.2.37)$$

Es importante destacar que el potencial efectivo

$$V_{eff} = \frac{1}{\cos^2(x)} \left[n \frac{(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right], \quad (6.2.38)$$

ya no es divergente en el infinito ($x = 0$) de Anti-de Sitter. Esta observación es relevante para entender el comportamiento de las soluciones cuando el acoplamiento es conforme. Como ahora el potencial no es confinante, ya no es lo suficientemente repulsivo como para reflejar al campo completamente sin que nunca llegue a la frontera de Anti-de Sitter. Por lo tanto, el campo puede alcanzar el infinito de Ads y será necesario imponer condiciones de contorno apropiadas. Esas condiciones de contorno las obtendremos haciendo las extensiones autoadjuntas del operador A_m . Además, dado que V_{eff} no es confinante veremos que para cualquier extensión autoadjunta las frecuencias ω forman un continuo, ya no estarán discretizadas como en el caso de campo con $m_0^2 \geq 0$ y acople mínimo a la curvatura.

Las constantes α y β presentes en la solución φ_m adoptan los valores

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n-2)}{4} + m(m+n-1) \right]}}{2} > 0$$

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \left[\frac{n(n+2)}{4} + m_0^2 l^2 \right]}}{2} = 1, \tag{6.2.39}$$

Usando estos valores y a, b y c definidos en (6.2.15) tenemos que

$$c - a - b = \frac{1}{2} - \alpha = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \tag{6.2.40}$$

lo que implica que la solución general φ_m en (6.2.24) para acople conforme es

$$\varphi_m(x) = \sin(x) \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; \sin^2(x)) \right]$$

$$+ \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; \sin^2(x)) \right] \tag{6.2.41}$$

El comportamiento de la solución (6.2.40) en el infinito de Anti-de Sitter es

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow \varphi_m(x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}, \tag{6.2.42}$$

lo que determina que $\varphi_m(x) \in L^2(0, \pi/2, dx)$ para todo valor de $\omega \in \mathbb{C}$. En particular, también será de cuadrado integrable si $\omega^2 = \pm i$. Por lo tanto, las soluciones con $\omega^2 = \pm i$ pertenecen a $\mathcal{D}(A_m^\dagger)$. **Este resultado es fundamental, nos enseña que los índices de deficiencia n_+ y n_- del operador A_m^\dagger son iguales a 1, $n_+ = n_- = 1$ para el campo escalar con acople conforme en Anti-de Sitter en $2+n$ dimensiones con $n \geq 0$. Precisamente es esto lo que obtienen en [6].**

Los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- son generados por

$$\begin{aligned} \varphi_m^+(x) = \sin(x) \cos^\beta(x) & \left[\frac{\Gamma(c_+) \Gamma(c_+ - a_+ - b_+)}{\Gamma(c_+ - a_+) \Gamma(c_+ - b_+)} {}_2F_1(a_+, b_+; 1 + a_+ + b_+ - c_+; \sin^2(x)) \right] \\ & + \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c_+) \Gamma(a_+ + b_+ - c_+)}{\Gamma(a_+) \Gamma(b_+)} {}_2F_1(c_+ - a_+, c_+ - b_+; 1 + c_+ - a_+ - b_+; \sin^2(x)) \right] \end{aligned} \quad (6.2.43)$$

con a_+ , b_+ y c_+ son las constantes definidas en (6.2.15) usando $\omega^2 = i \Rightarrow \omega_+ = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$,

$$\begin{aligned} \varphi_m^-(x) = \sin(x) \cos^\beta(x) & \left[\frac{\Gamma(c_-) \Gamma(c_- - a_- - b_-)}{\Gamma(c_- - a_-) \Gamma(c_- - b_-)} {}_2F_1(a_-, b_-; 1 + a_- + b_- - c_-; \sin^2(x)) \right] \\ & + \cos^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(c_-) \Gamma(a_- + b_- - c_-)}{\Gamma(a_-) \Gamma(b_-)} {}_2F_1(c_- - a_-, c_- - b_-; 1 + c_- - a_- - b_-; \sin^2(x)) \right] \end{aligned} \quad (6.2.44)$$

con a_- , b_- y c_- definidos en (6.2.15) usando $\omega^2 = -i \Rightarrow \omega_- = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

En el capítulo anterior, hemos aprendido que las extensiones autoadjuntas del operador A_m vienen dadas por el agregado a su dominio del subespacio

$$S_m^E = \{ \varphi_m^+ + U(\varphi_m^+) / \varphi_m^+ \in \mathcal{D}_m^+; U(\varphi_m^+) \in \mathcal{D}_m^- \}$$

Como los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- son de dimensión igual a uno, la única isometría parcial $U : \mathcal{D}_m^+ \rightarrow \mathcal{D}_m^-$, son los mapas $\varphi_m^+ \rightarrow e^{i\theta} \varphi_m^-$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$U \varphi_m^+ = e^{i\theta} \varphi_m^- \quad (6.2.45)$$

Es importante entender qué representa el agregado del subespacio S_m^E al dominio del operador $\overline{A_m}$. Por definición, las funciones $f \in \mathcal{D}(\overline{A_m})$ tienden rápidamente a cero en la frontera $x = 0$. El agregado del subespacio S_m^E extiende el dominio a todas las funciones que en el infinito $x = 0$ se comporten como $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^-$. La elección de un valor de θ determina el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial (6.2.37) en la frontera, lo que equivale a la elección de una posible condición de contorno. Las condiciones de contorno más generales están determinadas por la razón $\left. \frac{\partial_x(\varphi_m^\theta)}{\varphi_m^\theta} \right|_{x=0}$ y para cada valor del cociente hay un θ asociado.

A modo de ejemplo, calculamos explícitamente los valores de θ para las condiciones de Dirichlet y Neumann.

Condición de Dirichlet

Hemos dicho que el comportamiento de $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+ + e^{i\theta}\varphi_m^-$ en la frontera $x = 0$ será la condición de contorno satisfecha por las soluciones. Para la condición de Dirichlet imponemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_m^\theta = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^- = 0 \quad (6.2.46)$$

Sean φ_m^+ y φ_m^- definidos en (6.2.43) y (6.2.44) respectivamente, la condición (6.2.46) es equivalente a

$$\frac{\Gamma(c_+)\Gamma(a_+ + b_+ - c_+)}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)} + e^{i\theta} \frac{\Gamma(c_-)\Gamma(a_- + b_- - c_-)}{\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} = 0, \quad (6.2.47)$$

con coeficientes

$$\begin{cases} a_+ = \frac{\alpha + \beta + \omega_+}{2} = \frac{\alpha + \beta + \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{2} \\ b_+ = \frac{\alpha + \beta - \omega_+}{2} = \frac{\alpha + \beta - \frac{1+i}{\sqrt{2}}}{2} \\ c_+ = \beta + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_- = \frac{\alpha + \beta + \omega_-}{2} = \frac{\alpha + \beta + \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{2} \\ b_- = \frac{\alpha + \beta - \omega_-}{2} = \frac{\alpha + \beta - \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{2} \\ c_- = \beta + \frac{1}{2} \end{cases}$$

con α y β dos números reales definidos en (6.2.37). Resulta que

$$a_- = a_+^*$$

$$b_- = b_+^*$$

$$c_- = c_+$$

$$a_+ + b_+ - c_+ = a_- + b_- - c_- \quad (6.2.48)$$

Usando (6.2.48) la condición (6.2.47) es equivalente a

$$e^{i\theta} = -\frac{\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)} = -\frac{\Gamma(a_+^*)\Gamma(b_+^*)}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)} \quad (6.2.49)$$

Usando la propiedad $\Gamma(z^*) = \Gamma(z)^*$. Ver [21]

$$e^{i\theta} = -\frac{\Gamma(a_+)^*\Gamma(b_+)^*}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)} \quad (6.2.50)$$

Escribiendo $\Gamma(z) = |\Gamma(z)|e^{i\arg[\Gamma(z)]}$, la condición de Dirichlet (6.2.49) luce

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= -\frac{e^{-i\arg[\Gamma(a_+)]}e^{-i\arg[\Gamma(b_+)]}}{e^{i\arg[\Gamma(a_+)]}e^{i\arg[\Gamma(b_+)]}} = e^{i\pi}e^{-i2\arg[\Gamma(a_+)]}e^{-i2\arg[\Gamma(b_+)]} \\ e^{i\theta} &= e^{i\pi}e^{-i2(\arg[\Gamma(a_+)]+\arg[\Gamma(b_+)])} = e^{i[\pi-2(\arg[\Gamma(a_+)]+\arg[\Gamma(b_+)])]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de θ que representa la condición de Dirichlet es

$$\theta = \pi - 2(\arg[\Gamma(a_+)] + \arg[\Gamma(b_+)]) \quad (6.2.51)$$

Es importante aclarar que este valor de θ depende de m (se vé explícitamente pues a_+ y b_+ dependen de m) porque al haber propuesto separación de variables, descompusimos ϕ en las representaciones irreducibles de $SO(n+1)$ que se catalogan con el autovalor $m(m+n-1)$.

Condición de Neumann

Para la condición de Neumann imponemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\varphi_m^\theta}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(\varphi_m^+ + e^{i\theta}\varphi_m^-)}{dx} = 0 \quad (6.2.52)$$

Sean φ_m^+ y φ_m^- definidos en (6.2.43) y (6.2.44) respectivamente, la condición (6.2.52) es equivalente a

$$\frac{\Gamma(c_+)\Gamma(c_+ - a_+ - b_+)}{\Gamma(c_+ - a_+)\Gamma(c_+ - b_+)} + e^{i\theta} \frac{\Gamma(c_-)\Gamma(c_- - a_- - b_-)}{\Gamma(c_- - a_-)\Gamma(c_- - b_-)} = 0, \quad (6.2.53)$$

Usando las mismas relaciones para a_\pm , b_\pm y c_\pm que en (6.2.48) y las mismas propiedades de la función $\Gamma(z)$ usadas en el caso de Dirichlet, la condición de Neumann (6.2.53) resulta

$$e^{i\theta} = e^{i\pi}e^{-i2(\arg[\Gamma(a_+-1/2)]+\arg[\Gamma(b_+-1/2)])} = e^{i[\pi-2(\arg[\Gamma(a_+-1/2)]+\arg[\Gamma(b_+-1/2)])]}$$

Finalmente arribamos al valor de θ que representa la condición de Neumann

$$\theta = \pi - 2(\arg[\Gamma(a_+ - 1/2)] + \arg[\Gamma(b_+ - 1/2)]) \quad (6.2.54)$$

Nuevamente aclaramos que este valor de θ depende de m pues se propuso separación de variables para la solución ϕ de la ecuación de Klein-Gordon.

Dominio del operador extendido A_E

Consideremos el dominio de $\overline{A_m}$ (6.1.26), $\varphi_m^+(x)$ y $\varphi_m^-(x)$ definidos en (6.2.43) y (6.2.44) respectivamente. El dominio de la extensión autoadjunta $\mathcal{D}(A_m^E)$ resulta

$$\mathcal{D}(A_m^E) = \left\{ \varphi_m^E = f + c \left(\varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^- \right) \mid f \in \mathcal{D}(\overline{A_m}), c \in \mathbb{C} \right\} \quad (6.2.55)$$

Cada extensión se determina unívocamente por el valor de la fase $e^{i\theta}$. Los valores (6.2.51) o (6.2.54) para θ corresponden a la extensión asociada a la condición de Dirichlet o Neumann respectivamente.

El dominio del operador extendido A_E resulta

$$\mathcal{D}(A_E) = \left\{ \phi(r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{\bar{k}} \varphi_m^E S_{\bar{k}}(\theta_i) \mid \varphi_m^E \in \mathcal{D}(A_m^E) \right\} \quad (6.2.56)$$

Las soluciones de la Ecuación de Klein-Gordon definidas globalmente son

$$\phi_t = \cos\left(A_E^{1/2} t\right) \phi_0 + A_E^{-1/2} \sin\left(A_E^{1/2} t\right) \dot{\phi}_0 \quad (6.2.57)$$

Recordamos que ϕ_t queda absolutamente determinada por las condiciones iniciales $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ de soporte compacto y la elección de la extensión autoadjunta A_E . Físicamente entendemos que fue necesario imponer condiciones de contorno sobre las soluciones dado que el potencial efectivo (6.2.38) no es confinante. Las soluciones φ_m^E no son de soporte compacto en $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ y requerimos especificar su comportamiento en infinito ($x = 0$).

Condición de Dirichlet

Tomando el valor (6.2.51) para θ la condición de contorno satisfecha por la solución (6.2.57) en todo instante de tiempo es

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{n/2} \phi_t = \lim_{x \rightarrow 0} (l \cot(x))^{n/2} \phi_t = 0, \quad (6.2.58)$$

que corresponde a haber elegido la condición de contorno de Dirichlet para todas las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A_m^E)$.

Condición de Neumann

Tomando el valor (6.2.54) para θ la condición de contorno satisfecha por la solución (6.2.57) en todo instante de tiempo es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial (r^{n/2} \phi_t)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \left((l \cot(x))^{n/2} \phi_t \right)}{\partial x} = 0, \quad (6.2.59)$$

que corresponde a haber elegido la condición de contorno de Neumann para todas las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A_m^E)$.

Observación general para todas las extensiones

Es importante destacar que en el caso de acople conforme las condiciones de contorno que determinan la dinámica del campo escalar no se imponen directamente sobre las soluciones ϕ_t de la Ecuación de Klein-Gordon. La forma apropiada para determinar la evolución temporal es proponer separación de variables de la forma $\phi(t, r, \theta_i) = r^{-n/2} \sum_{m=0} \tilde{\varphi}_m(t, r) S_m(\theta_i)$ e imponer condiciones sobre las funciones $\tilde{\varphi}_m(t, r)$ pertenecientes a los dominios extendidos $\mathcal{D}(A_m^E)$. Estos dominios se caracterizan por la elección de un valor para $\theta \in [0, 2\pi)$, y físicamente los interpretamos como subespacios cuyas funciones verifican una condición de contorno particular en el infinito.

6.2.3. Resumen de los resultados de Wald e Ishibashi para el Campo Escalar en Anti-de Sitter

Campo Escalar en AdS(2+n)		
	Acople Mínimo: $m_0^2 \geq 0, n \geq 1$	Acople Conforme: $n \geq 0$
ω^2	$\in \mathbb{R}$ discretos	$\in \mathbb{C}$
$\mathcal{D}(A_E)$	$f \in \mathcal{D}(\bar{A})$	$(f + \Phi_+ + U\Phi_+) / f \in \mathcal{D}(\bar{A}); \Phi_+ \in \mathcal{D}_+$

Terminamos el capítulo resaltando que la analogía de la ecuación (6.1.17) con la Ecuación de Schrödinger es puramente formal (las ecuaciones no describen lo mismo) pero dado que la estructura es la misma en ambas, hemos hecho uso de las propiedades de la Ecuación de Schrödinger para justificar que el comportamiento de V_{eff} en el infinito de Anti-de Sitter determina el comportamiento del campo en la frontera de AdS. Desde un punto de vista más general, podemos darle un significado más profundo a la aparición del potencial efectivo. Si bien estamos estudiando una teoría libre en la cual las partículas no interactúan entre sí, y tratamos a la gravedad como un background fijo sobre el cual se propagan las perturbaciones del campo escalar, la aparición del potencial puede representar la interacción de bajas energías de la gravedad cuántica con el campo ϕ .

Campo Escalar Libre en el agujero negro BTZ

De forma semejante al análisis del campo escalar en Anti-de Sitter hecho por Wald e Ishibashi descrito en el capítulo anterior, en este capítulo aplicaremos los resultados generales para la definición de la dinámica de un campo escalar libre en el agujero negro BTZ sin momento angular.

7.1. Ecuación de Klein-Gordon en al agujero negro BTZ con $J=0$

Sea la métrica del agujero negro BTZ

$$ds^2 = -\frac{r^2 - r_+^2}{l^2} dt^2 + \frac{l^2}{r^2 - r_+^2} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

$$r_+ < r; \quad -\infty < t < +\infty; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

(7.1.1)

donde $r = r_+$ corresponde al horizonte de eventos del agujero negro.

Definimos la *coordenada tortuga* r^* para la zona exterior al agujero negro $r > r_+$ como

$$r^* = \frac{l^2}{r_+} \operatorname{arccoth} \left(\frac{r}{r_+} \right) \Leftrightarrow r > r_+$$

(7.1.2)

Acramos que definimos esta coordenada con un signo menos global a como lo hicimos en (4.2.3) para que resulten más cómodos los cálculos. Recordamos los límites de la coordenada r^*

$$r \rightarrow r_+ \Rightarrow r^* \rightarrow +\infty$$

$$r \rightarrow +\infty \Rightarrow r^* \rightarrow 0$$

A lo largo del trabajo hemos visto que la ecuación de Klein-Gordon en un espacio-tiempo estático es equivalente a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi, \quad (7.1.3)$$

donde t es el parámetro de Killing y

$$A\phi = -\sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_i \left(\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{\tilde{g}} \tilde{g}^{ij} \partial_j \phi \right) - g_{tt} m_0^2 \phi \quad (7.1.4)$$

Sean

$$\begin{aligned} \sqrt{\tilde{g}} &= \left\{ \left[\frac{r_+^2}{\sinh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)} \right]^2 \left[\frac{1}{l^2} \cosh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) \right] \right\}^{1/2} \\ \sqrt{\tilde{g}} &= \frac{r_+^2}{\sinh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)} \frac{1}{l} \cosh \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

y

$$V = \sqrt{-g_{tt}} = \frac{r_+}{l} \frac{1}{\sinh \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)}, \quad (7.1.6)$$

entonces

$$\begin{aligned} V^{-1} \sqrt{\tilde{g}} &= \frac{l}{r_+} \sinh \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) \frac{r_+^2}{\sinh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)} \frac{1}{l} \cosh \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) \\ V^{-1} \sqrt{\tilde{g}} &= r_+ \coth \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) = r \\ \sqrt{-g_{tt}} \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} &= \left(V^{-1} \sqrt{\tilde{g}} \right)^{-1} = r^{-1} \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Sea la métrica espacial del agujero negro BTZ y reemplazando (7.1.7) en (7.1.4) obtenemos

$$A\phi = -r^{-1} \partial_{r^*} \left[\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{\tilde{g}} g^{r^* r^*} \partial_{r^*} \phi \right] - (-g_{tt}) r^{-2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} - g_{tt} m_0^2 \phi \quad (7.1.8)$$

Sean

$$g^{r^*r^*} = \left[\frac{l}{r_+} \sinh \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) \right]^2, \quad (7.1.9)$$

$\sqrt{\tilde{g}}$ y $\sqrt{-g_{tt}}$ definidos en (7.1.5) y (7.1.6) respectivamente, entonces

$$\sqrt{-g_{tt}} \sqrt{\tilde{g}} g^{r^*r^*} = r_+ \coth \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right) = r \quad (7.1.10)$$

Al igual que como hemos hecho en el capítulo anterior para resolver la ecuación de Klein-Gordon en Anti-de Sitter, proponemos separación de variables para resolver la ecuación diferencial (7.1.3)

$$\phi(t, r, \phi) = r^{-1/2} \sum_m C_m \tilde{\varphi}_m(t, r) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \quad / m \in \mathbb{Z} \quad (7.1.11)$$

Las funciones $\frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$ son bases ortonormales de las representaciones irreducibles del grupo $SO(2)$ en el espacio de funciones $L^2(S^1, d\phi)$ (funciones de cuadrado integrables definidas sobre la esfera S^1) y las C_m son constantes que surgen de expandir el campo como superposición de funciones $e^{im\phi}$. Como la escritura en una base es única, si reemplazamos (7.1.11) en la ecuación (7.1.3) los términos izquierdo y derecho que vengan multiplicados por la misma función $e^{im\phi}$ deben ser iguales. Proponiendo que $\tilde{\varphi}_m$ sean autofunciones de ∂_t (soluciones con frecuencia bien definida) llevamos la ecuación de Klein-Gordon a una ecuación diferencial en la variable r^* solamente. Haciendo los pasos intermedios y considerando que $g_{tt} = - \left(\frac{r_+}{l} \right)^2 \frac{1}{\sinh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)}$, arribamos a la ecuación diferencial

$$-\omega^2 \varphi_m = \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial r^{*2}} - \frac{\varphi_m}{\sinh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{r_+}{l^2} \right)^2 + m_0^2 \left(\frac{r_+}{l} \right)^2 \right] - \frac{\varphi_m}{\cosh^2 \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right)} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r_+}{l^2} \right)^2 + \frac{m^2}{l^2} \right] \quad (7.1.12)$$

Para adimensionalizar la ecuación diferencial (7.1.12) sacamos factor común $\left(\frac{r_+}{l}\right)^2$ y redefinimos ω^2

$$x = \frac{r_+}{l^2} r^*$$

$$\omega^2 \left(\frac{r_+}{l}\right)^2 \mapsto \omega^2 \quad (7.1.13)$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial (7.1.12) resulta

$$-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\varphi_m}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+}\right)^2 \right] = \omega^2 \varphi_m \quad (7.1.14)$$

7.1.1. Propiedades del operador A en el agujero negro BTZ

Al igual que como hemos hecho para el caso de Anti-de Sitter en $2 + n$ dimensiones, estudiaremos las propiedades del operador diferencial A en el agujero negro BTZ.

Identificamos el operador A_m

$$A_m - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{1}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+}\right)^2 \right] \quad (7.1.15)$$

y podemos interpretarlo como la restricción del operador A en las representaciones irreducibles de $SO(2)$ clasificadas por el autovalor m^2 del operador de Casimir del álgebra del grupo. El dominio de este operador es $\mathcal{D}(A_m) = C_0^\infty(0, +\infty)$ denso en el espacio de Hilbert $L^2((0, +\infty), dx)$. Notar que para AdS teníamos $L^2\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right], dx\right)$. Al igual que como hemos hecho en Anti-de Sitter, cuando nos propongamos encontrar las posibles extensiones autoadjuntas de A , lo haremos estudiando las extensiones de A_m . Para ello, debemos encontrar los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- que corresponden a las soluciones a la ecuación diferencial (7.1.14) con autovalor $\omega^2 = \pm 8i$ y pertenezcan al dominio de A_m^\dagger . Es importante aclarar que haber elegido ese valor particular de ω^2 y no cualquier otro de la forma $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ es únicamente para que los cálculos sean más sencillos. Los resultados que obtenemos (determinar si existen extensiones autoadjuntas o no) son independientes de λ .

Producto Interno y Dominio del Operador Adjunto A_m^\dagger y Clausura $\overline{A_m}$

Definiendo el dominio del operador A como $\mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ hemos probado que A es un operador simétrico en el producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$.

Para determinar las extensiones autoadjuntas de A_m primero debemos encontrar el dominio del operador A_m^\dagger . Consideramos $\psi \in L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$ y $\phi \in \mathcal{D}(A) = C_0^\infty(\Sigma)$ expandidos de la forma (7.1.11). Si nos restringimos a la hipersuperficie Σ de $t = cte$, usando que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$ forman bases ortonormales de las representaciones irreducibles de $SO(2)$ en $L^2(S^1, d\phi)$ y considerando que

$$V^{-1}\sqrt{g} = r \Rightarrow V^{-1}d\Sigma = r dx d\phi$$

entonces para cada una de las componentes ψ_m y ϕ_m con mismo m (si tuviesen diferentes valores de m la integral es nula) tenemos la misma situación que en AdS (pasamos de una integral en $V^{-1}d\Sigma$ a una integral en la medida cónica dx). Haciendo cálculos muy semejantes a los del capítulo anterior se tiene

$$\mathcal{D}(A_m^\dagger) = \left\{ \Psi \in L^2((0, +\infty), dx) / \Psi' \in AC(0, +\infty); A_m^\dagger \Psi \in L^2((0, +\infty), dx) \right\} \quad (7.1.16)$$

Al igual que en el caso de Anti-de Sitter, como $\mathcal{D}(A_m) \subset \mathcal{D}(A_m^\dagger)$ el dominio del operador adjunto A_m^\dagger es denso en $L^2((0, +\infty), dx)$. Apelando nuevamente al **Teorema 1** del capítulo (5), el operador A_m es clausurable y $\overline{A_m} = A_m^{\dagger\dagger}$. Usando este resultado calculamos $\mathcal{D}(\overline{A_m})$.

Sean $\Psi \in \mathcal{D}(A_m^\dagger)$ y $\Phi \in L^2((0, +\infty), dx)$

$$\begin{aligned} (\Phi, A_m^\dagger \Psi) &= \int_0^{+\infty} dx \Phi^* \left\{ -\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \frac{\Psi}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Psi}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] \right\} \\ (\Phi, A_m^\dagger \Psi) &= \int_0^{+\infty} dx -\frac{d}{dx} \left(\Phi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi^*}{dx} \Psi \right) - \frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} \Psi + \frac{\Phi^* \Psi}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] \\ &\quad + \frac{\Phi^* \Psi}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Debe ser posible integrar por partes y eliminar los términos de superficie en (7.1.17). Dado que hemos supuesto $\Psi \in \mathcal{D}(A_m^\dagger)$, Ψ debe ser de cuadrado integrable. También hemos supuesto $\Phi \in L^2((0, +\infty), dx)$. Por lo tanto, para anular los términos de superficie es necesario imponer condiciones sobre Φ . Aquí habría que ser cuidadosos y considerar *Espacios de Sobolev*. En cambio, impondremos las siguientes condiciones de contorno que resultan sensatas y suficientes

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi(+\infty) = \Phi'(+\infty) = 0 \quad (7.1.18)$$

Reemplazando (7.1.18) en (7.1.17) arribamos a

$$\begin{aligned} (\Phi, A_m^\dagger \Psi) &= \int_0^{+\infty} dx \left\{ -\frac{d^2 \Phi^*}{dx^2} \Psi + \frac{\Phi^* \Psi}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\Phi^* \Psi}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \frac{l}{r_+} \right] \right\} \\ (\Phi, A_m^\dagger \Psi) &= (A_m^{\dagger\dagger} \Phi, \Psi) \quad \forall \Psi \in \mathcal{D}(A_m^\dagger) \end{aligned} \quad (7.1.19)$$

La expresión (7.1.19) nos determina c uales son las Φ que pertenecen a $\mathcal{D}(A_m^{\dagger\dagger})$. Como $\overline{A_m} = A_m^{\dagger\dagger}$, el dominio de la clausura $\overline{A_m}$ es

$$\mathcal{D}(\overline{A_m}) = \{ \Phi \in L^2((0, +\infty), dx) / \Phi' \in AC(0, +\infty); \overline{A_m}\Phi \in L^2((0, +\infty), dx); \Phi(0) = \Phi'(0) = \Phi(+\infty) = \Phi'(+\infty) = 0 \} \quad (7.1.20)$$

Aclaremos que como en nuestra carta $x = +\infty$ representa el horizonte de eventos, lo que estamos pidiendo es que las funciones que pertenezcan a $\overline{A_m}$ se anulen en el horizonte y también se anule sus derivada.

Haber determinado los dominios $\mathcal{D}(A_m^\dagger)$ (7.1.16) y $\mathcal{D}(\overline{A_m})$ (7.1.20) es fundamental para encontrar las posibles extensiones autoadjuntas de A_m . Los subespacios de deficiencia del operador A_m^\dagger vendrán dados por todas las soluciones de la ecuación diferencial (7.1.14) con autovalor $\omega^2 = \pm 8i$ que pertenezcan a $\mathcal{D}(A_m^\dagger)$.

Interpretación física

La ecuación diferencial (7.1.14) nos permite definir el potencial efectivo

$$V_{eff} = \frac{1}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{1}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] \quad (7.1.21)$$

Es interesante comparar las ecuaciones (6.1.17) y (7.1.14) que corresponden al campo escalar libre en Anti-de Sitter y el agujero negro BTZ sin momento angular respectivamente. Una primera observación es que el potencial efectivo en ambos casos es divergente en infinito si el campo es masivo, y es finito si el acople es conforme. Este resultado es lógico porque si tomamos el límite de grandes valores de r en el elemento de línea de Anti-de Sitter en tres dimensiones (3.1.6) y en el del agujero negro BTZ (7.1.1), ambas métricas tienden a

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{l^2} \right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$0 \leq r < +\infty; \quad 0 \leq \theta < 2\pi; \quad -\infty < t < +\infty$$

Como las dos métricas coinciden asintóticamente (al menos en ciertas coordenadas) era de esperarse que el comportamiento en infinito de ambos potenciales sea el mismo. Otra forma de fundamentar que estos espacio-tiempo son asintóticamente iguales a grandes distancias del horizonte de eventos, es porque la estructura del Diagrama de Penrose es la misma para los infinitos de Anti-de Sitter y BTZ. Formalmente lo que estamos diciendo es que tienen la misma estructura conforme en el infinito. Veremos en las secciones siguientes que el comportamiento de las soluciones en la frontera será el mismo en ambos espacio-tiempos.

A pesar del comportamiento común en infinito, los potenciales efectivos son diferentes. Podemos arriesgarnos a interpretar que cada uno de estos V_{eff} representa la interacción de bajas energías del campo ϕ con la gravedad cuántica en dos estados distintos; uno que corresponde a Anti-de Sitter y el otro al agujero negro BTZ. Como hemos dicho en el capítulo anterior, una de las principales motivaciones de estudiar teoría de campos en espacios curvos es poder obtener información de aspectos cuánticos de la gravedad.

7.2. Soluciones del campo escalar libre en el agujero negro BTZ

En esta sección encontraremos las soluciones exactas a la ecuación diferencial (7.1.14). El procedimiento es muy similar al hecho en Anti-de Sitter. Proponemos $\varphi_m(x) = \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) f(x)$, simplificamos $\sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x)$ en todos los miembros y luego multiplicamos por $\sinh^2(x) \cosh^2(x)$

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 \sinh^2 \cosh^2 f &= \sinh^2 \cosh^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 [\alpha \sinh \cosh^3 + \beta \sinh^3 \cosh] \frac{df}{dx} \\
 &+ [\alpha(\alpha - 1) \cosh^4 + \sinh^2 \cosh^2 (\alpha(\beta + 1) + \beta(\alpha + 1)) + \beta(\beta - 1) \sinh^4] f \\
 &- \cosh^2 \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] f - \sinh^2 \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] f
 \end{aligned} \tag{7.2.1}$$

Proponemos el cambio de variables $u = \cosh^2(x)$ y recordamos que

$$r = r_+ \coth \left(\frac{r_+}{l^2} r^* \right); \quad x = \frac{r_+}{l^2} r^*; \quad u = \cosh^2(x),$$

$$r = r_+ \Leftrightarrow x = +\infty \Leftrightarrow u = +\infty,$$

$$r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1,$$

para no perder de foco qué valor de coordenadas representa el horizonte de eventos y el infinito del agujero negro. Haciendo el cambio de variables en la ecuación (7.2.1) escribimos la ecuación diferencial en función de la variable u

$$\begin{aligned}
 0 &= 4u^2(u - 1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2 [(2\alpha + 1)(u - 1)u^2 + (2\beta + 1)(u - 1)^2 u] \frac{\partial f}{\partial u} \\
 &+ [\alpha(\alpha - 1)u^2 + u(u - 1) (\alpha(\beta + 1) + \beta(\alpha + 1)) + \beta(\beta - 1)(u - 1)^2] f \\
 &- u \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] f - (u - 1) \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] f \\
 &+ \omega^2 u(u - 1) f
 \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

Estrategia para resolver la ecuación diferencial

Al igual que como hemos hecho en Anti-de Sitter, el objetivo es llevar la ecuación diferencial (7.2.2) a la ecuación diferencial de las hipergeométricas

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z)\frac{dw}{dz} - abw = 0 \quad (7.2.3)$$

En analogía con el caso de Anti-de Sitter, α y β son parámetros arbitrarios que hemos introducido en la ecuación. Ahora fijaremos sus valores para arribar a la ecuación de las hipergeométricas y así obtener una expresión exacta para la solución f .

Sea el término

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha-1)u^2 + \beta(\beta-1)(u-1)^2 - u \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] \\ & - (u-1) \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = \\ & = u^2 [\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1)] \\ & + u \left[-2\beta(\beta-1) - \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] - \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] \right] \\ & + \beta(\beta-1) + \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Imponemos que el término constante en (7.2.4) se anule

$$\begin{aligned} & \beta(\beta-1) + \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = 0 \\ & \beta_{\pm} = \frac{1}{2} \pm i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right) \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

Aclaremos que ponemos explícitamente el módulo en $|m|$ porque este valor respresenta el número que categoriza las representaciones irreducibles de $SO(2)$ y no la proyección del momento angular (que puede ser negativa o positiva). Poner el módulo explícitamente es para hacer los cálculos correctamente cuando se reemplacen las soluciones en la sumatoria (7.1.11). Reemplazando la restricción (7.2.5) en (7.2.4)

$$= u^2 [\alpha(\alpha-1) + \beta(\beta-1)] - u \left[\beta(\beta-1) + \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] \right] \quad (7.2.6)$$

Ahora imponemos que

$$\begin{aligned}\alpha(\alpha - 1) &= \frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \\ \alpha_{\pm} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + m_0^2 l^2}\end{aligned}\tag{7.2.7}$$

Antes de continuar con la resolución de la ecuación diferencial, podemos hacer un breve chequeo de los cálculos hechos hasta ahora. La métrica del agujero negro BTZ (7.1.1) coincide con la métrica de Anti-de Sitter en tres dimensiones (3.1.6) en el caso que

$$\begin{aligned}\left(\frac{r_+}{l}\right)^2 &= -1 \Leftrightarrow r_+^2 = e^{i\pi} l^2 \\ r_+ &= e^{i\pi/2} l = il\end{aligned}\tag{7.2.8}$$

Si reemplazamos (7.2.8) en la prescripción de la constante β (7.2.5) obtenemos

$$\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \pm |m|\tag{7.2.9}$$

Tomando este valor particular de r_+ vemos que las constantes β (7.2.9) y α (7.2.7) coinciden con los valores de β (6.2.6) y α (6.2.9) encontrados en el capítulo anterior cuando estudiamos el caso particular de Anti-de Sitter en tres dimensiones. Esto es consistente con el hecho que las métricas de los dos espacio-tiempos coinciden con ese valor particular de r_+ . Aclaramos que esto es un truco formal ya que las cartas no son las mismas en AdS(3) y en el agujero negro BTZ.

Habiendo hecho este comentario, continuamos con la resolución de la ecuación diferencial. De ahora en más volvemos al caso $r_+ > 0$. Reemplazando (7.2.5) y (7.2.7) en (7.2.6) arribamos a que el término (7.2.4) que aparece en la ecuación diferencial es equivalente a

$$u(u - 1) [\alpha(\alpha - 1) + \beta(\beta - 1)]\tag{7.2.10}$$

Lo que hemos hecho es fijar las constantes α y β de modo que la ecuación diferencial (7.2.2) puede escribirse como la ecuación de las hipergeométricas (7.2.3). Reemplazamos (7.2.10) en (7.2.2) y finalmente se llega a la ecuación diferencial

$$u(1 - u) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \left[\left(\beta + \frac{1}{2} \right) - u(\alpha + \beta + 1) \right] \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{4} [(\alpha + \beta)^2 + \omega^2] f = 0\tag{7.2.11}$$

Sea la ecuación diferencial de las hipergeométricas (7.2.3), tomando

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha + \beta + i\omega}{2} \\ b &= \frac{\alpha + \beta - i\omega}{2} \\ c &= \beta + \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{7.2.12}$$

con

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \pm i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right) \\ \alpha &= \frac{1}{2} + \sqrt{1 + m_0^2 l^2}, \end{aligned} \tag{7.2.13}$$

podemos obtener la solución exacta de la ecuación diferencial (7.2.11) en términos de funciones hipergeométricas. Resaltamos que aún no elegimos el signo de la raíz cuadrada en β . Cuando estudiemos el caso de campo masivo el signo será irrelevante para los cálculos, pero en el caso de acoplamiento conforme elegir apropiadamente el signo en β simplificará las cuentas.

Soluciones

Las soluciones a la ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\varphi_m}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = \omega^2 \varphi_m$$

vienen dadas por $\varphi_m(x) = \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) f(x)$ con $f(x)$ una combinación lineal de dos funciones hipergeométricas. Para analizar el comportamiento de las soluciones en el horizonte de eventos, $r = r_+ \Leftrightarrow x = +\infty$ es conveniente primero escribir la solución $\varphi_m(x)$ en la forma

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) \left[B_1 (\cosh^2(x))^{-a} {}_2F_1(a, 1 + a - c; 1 + a - b; \cosh^{-2}(x)) \right] \\ &+ \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) \left[B_2 (\cosh^2(x))^{-b} {}_2F_1(b, 1 + b - c; 1 + b - a; \cosh^{-2}(x)) \right] \end{aligned} \tag{7.2.14}$$

con a, b y c definidos en (7.2.12), α y β definidos en (7.2.13) y $B_1, B_2 \in \mathbb{C}$ dos constantes arbitrarias.

Para poder escribir las funciones hipergeométricas de la solución (7.2.14) a partir del desarrollo en serie

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s s!} (z)^s = 1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} (z)^2 + \dots$$

debemos probar que $a - b \notin \mathbb{Z}$.

$$a - b = \frac{\alpha + \beta + i\omega}{2} - \frac{\alpha + \beta - i\omega}{2} = i\omega,$$

Los valores de interés para nuestro análisis son $\omega^2 \in \mathbb{R}$ y $\omega^2 = \pm 8i$. Como en ambos casos $a - b \notin \mathbb{Z}$ podemos usar el desarrollo en serie para la solución (7.2.14).

Previo a analizar los casos de acoplamiento mínimo y conforme, sea φ_{1m} la solución que acompaña a la constante B_1 , probaremos que esta función no es de cuadrado integrable para ningún valor $\omega^2 \in \mathbb{R} > 0$ u $\omega^2 = \pm 8i$ (en verdad tampoco es de cuadrado integrable para ningún $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$). Por lo tanto, impondremos que $B_1 = 0$.

Sea

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_{1m} = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u-1)^{\alpha/2} u^{\beta/2} (u)^{-a} {}_2F_1(a, 1+a-c; 1+a-b; u^{-1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{-i\omega/2} \quad (7.2.15)$$

Caso $\omega^2 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_{1m} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{-i \ln(u)\omega/2} \quad (7.2.16)$$

A pesar de que el límite (7.2.16) no existe dado que $|\varphi_{1m}|^2$ tiende a 1 cuando nos acercamos a $u \rightarrow +\infty$, φ_{1m} no es de cuadrado integrable si $\omega^2 \in \mathbb{R}$.

Caso $\omega^2 = \pm 8i$

Si $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$ la solución es divergente en el horizonte de eventos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_{1m} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{-i\omega/2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{\ln(u)(\mp i + 1)} = \infty \quad (7.2.17)$$

Del límite vemos que el módulo cuadrado $|\varphi_{1m}|^2$ tiende a u^2 cuando $u = +\infty$. Por lo tanto, φ_{1m} no es de cuadrado integrable si $\omega^2 = \pm 8i$. Más aún, no es de cuadrado integrable para ningún $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como hemos probado que la solución φ_{1m} no es de cuadrado integrable para $\omega^2 \in \mathbb{R}$ ni para $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, imponemos $B_1 = 0$. Por lo tanto, la solución (7.2.14) que podría ser de cuadrado integrable resulta

$$\varphi_m = \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) \left[(\cosh^2(x))^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; \cosh^{-2}(x)) \right] \quad (7.2.18)$$

La solución $\varphi_m(x)$ escrita de la forma (7.2.18) es la indicada para estudiar las posibles extensiones autoadjuntas del operador A_m . **Al igual que en el caso de Anti-de Sitter, haber resuelto la ecuación diferencial de forma genérica nos permitirá estudiar los casos de acople mínimo con la curvatura y acople conforme solamente con determinar cuanto vale m_0^2 .**

7.2.1. Campo masivo con acople mínimo a la curvatura

Nos disponemos a estudiar las propiedades de la solución (7.2.18) de la ecuación diferencial (7.1.14) cuando $m_0^2 > 0$. Sean a, b y c definidos en (7.2.12), α y β definidos en (7.2.13).

Comportamiento en el horizonte de eventos: $r = r_+ \Leftrightarrow x = +\infty \Leftrightarrow u = +\infty$

Sea

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_m = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u-1)^{\alpha/2} u^{\beta/2} (u)^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; u^{-1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{i\omega/2} \quad (7.2.19)$$

Caso $\omega^2 \in \mathbb{R}$

Vemos de la expresión (7.2.19) que no existe el límite pero el módulo cuadrado $|\varphi_m|^2$ tiende a 1 cuando nos acercamos a $u \rightarrow +\infty$. Concluimos que φ_m no es de cuadrado integrable cuando $\omega^2 \in \mathbb{R}$.

Caso $\omega^2 = \pm 2i$

Si $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$ la solución tiende a cero en el horizonte de eventos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_m = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^{i\omega/2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^{ln(u)(\pm i)} u^{-1} = 0 \quad (7.2.20)$$

Del límite (7.2.20) vemos que el comportamiento cerca del horizonte de eventos del módulo cuadrado de la solución es $|\varphi_m|^2 = u^{-2} = \cosh(x)^{-4}$. Como $|\varphi_m|^2$ tiende a cero más rapido que $\frac{1}{x}$, será integrable en la vecindad de $x \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, **las únicas soluciones de la ecuación diferencial (7.1.14) que pueden llegar a ser de cuadrado integrables son aquellas con $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$.**

Comportamiento en el infinito del agujero negro: $r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

Para analizar la integrabilidad de la solución φ_m con autovalores $\omega^2 = \pm 8i$ en la región exterior al agujero negro será conveniente escribir las soluciones de la ecuación diferencial (7.1.14) como la combinación lineal

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \sinh(x) \cosh^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-\cosh^2(x)) \right] \\ &+ \cosh^\beta(x) \left[e^{i(c-a-b)\pi} \frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\cosh^2(x)) \right] \\ &= \frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} \psi_{1m} + e^{i(c-a-b)\pi} \frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)} \psi_{2m} \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

Donde hemos usado las *fórmulas de conexión de las funciones hipergeométricas* (ver [21], [22]) para escribir la solución (7.2.18) como combinación lineal de otras dos soluciones, usamos los valores de a , b y c definidos en (7.2.12) y los valores de α y β definidos en (7.2.13).

Sea

$$c - a - b = -\sqrt{1 + m_0^2 l^2}$$

Para el campo masivo, se tiene que $c - a - b \notin \mathbb{Z}$ (salvo para valores particulares del producto $m_0^2 l^2$). De modo que podemos usar las expresiones en serie para las funciones hipergeométricas en (7.2.21).

Para determinar si la solución φ_m es de cuadrado integrable basta estudiar el comportamiento de ψ_{1m} y ψ_{2m} en el infinito del agujero negro.

Comportamiento de ψ_{1m} en infinito $r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \psi_{1m} = 0 \quad (7.2.22)$$

Comportamiento de ψ_{2m} en infinito $r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \psi_{2m} = \lim_{u \rightarrow 1} (u - 1)^{\alpha/2} (1 - u)^{c-a-b} = \lim_{u \rightarrow 1} (u - 1)^{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \sqrt{1 + m_0^2 l^2} \right]} (1 - u)^{-\sqrt{1 + m_0^2 l^2}}$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \psi_{2m} = \lim_{u \rightarrow 1} (u - 1)^{\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{1 + m_0^2 l^2} \right]} e^{-i\pi \sqrt{1 + m_0^2 l^2}} \quad (7.2.23)$$

$$\lim_{u \rightarrow 1} \psi_{2m} = \lim_{x \rightarrow 0} [\text{senh}^2]^{-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \sqrt{1 + m_0^2 l^2} \right]} e^{-i\pi \sqrt{1 + m_0^2 l^2}} = \infty \quad (7.2.24)$$

La solución ψ_{2m} diverge en el infinito del agujero negro. Para determinar si ψ_{2m} es de cuadrado integrable en $x = 0$ ($r = +\infty \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$) estudiamos el comportamiento de

$$\lim_{x \rightarrow 0} x |\psi_{2m}|^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\sinh(x)^2 \right]^{\frac{1}{2} - \sqrt{1 + m_0^2 l^2}} \quad (7.2.25)$$

Usando que el campo es masivo, aproximamos $\sqrt{1 + m_0^2 l^2} \simeq 1 + \epsilon$. Aclaremos que $1 + \epsilon$ es un buena cota inferior pues $\epsilon = 0$ corresponde al caso de campo no masivo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x |\psi_{2m}|^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + 2\epsilon) \sinh^{2\epsilon} \cosh} = \infty \quad (7.2.26)$$

El límite (7.2.26) indica que si $m_0^2 > 0 \Leftrightarrow \epsilon > 0$ entonces $|\psi_{2m}|^2$ tiende a infinito más rapido que $\frac{1}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$. Por lo tanto ψ_{2m} no es de cuadrado integrable cuando el campo es masivo.

Dado que la solución φ_m (7.2.18) puede escribirse como la suma (7.2.21) y la solución ψ_{2m} no es de cuadrado integrable; entonces φ_m tampoco lo es.

Dominio del operador extendido \overline{A}

Hemos resuelto la ecuación diferencial (7.1.14) para el campo mínimamente acoplado con $m_0^2 > 0$ y determinamos que no existen soluciones con $\omega^2 = \pm 8i$ que sean de cuadrado integrable. Más aún, no existen soluciones de la forma $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean de cuadrado integrable. Los subespacios de deficiencia son nulos, A_m es un operador esencialmente autoadjunto y existe una única extensión determinada por la clausura. Como consecuencia, A también es esencialmente autoadjunto y su extensión también es única definida a partir del operador clausura \overline{A} .

Considerando el dominio de $\overline{A_m}$ (7.1.20), el dominio de la extensión cerrada y autoadjunta \overline{A} es

$$\mathcal{D}(\overline{A}) = \left\{ \phi = r^{-1/2} \sum_m f \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \mid f \in \mathcal{D}(\overline{A_m}), m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (7.2.27)$$

Las soluciones de la Ecuación de Klein-Gordon definidas globalmente

$$\phi_t = \cos(\overline{A}^{1/2}t) \phi_0 + (\overline{A})^{-1/2} \sin(\overline{A}^{1/2}t) \dot{\phi}_0 \quad (7.2.28)$$

con condiciones iniciales $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in C_0^\infty(\Sigma) \times C_0^\infty(\Sigma)$ implican que $\phi_t \in \mathcal{D}(\overline{A})$. Como las funciones f que pertenecen al dominio de $\overline{A_m}$ verifican que $f = f' = 0$ en infinito y en el horizonte de eventos, la solución ϕ_t y $\partial_x \phi_t$ se anulan en la frontera del agujero negro y en el horizonte de eventos en todo instante de tiempo. La conclusión Física es que para el campo escalar masivo el potencial efectivo es confinante y las soluciones son reflejadas totalmente sin llegar a la frontera del espacio-tiempo.

Interpretación Física de las soluciones para el campo masivo en el agujero negro BTZ

Hemos probado que no existen soluciones de la ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\varphi_m}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{\varphi_m}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = \omega^2 \varphi_m$$

con $\omega^2 = \pm \lambda i$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ que sean de cuadrado integrables para el campo mínimamente acoplado cuando $m_0^2 > 0$ en el agujero negro BTZ sin momento angular. Por lo tanto, los índices de deficiencia del operador A_m son cero, $n_+ = n_- = 0$. Usando el teorema de von Neumann concluimos que A_m (y por ende A) son esencialmente autoadjuntos. Esto significa que existe una única extensión autoadjunta determinada por la clausura $\overline{A_m}$.

Al igual que como hemos hecho en el capítulo anterior, podemos intentar interpretar este resultado haciendo una analogía formal con la Ecuación de Schrödinger. Como hemos dicho en la sección anterior, el término

$$V_{eff} = \frac{1}{\sinh^2(x)} \left[\frac{3}{4} + m_0^2 l^2 \right] + \frac{1}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right]$$

de la ecuación diferencial podemos pensarlo como un potencial efectivo introducido por la gravedad debido a que se está estudiando el campo ϕ en un espacio curvo. Como el potencial es divergente cuando nos aproximamos a infinito, $x \rightarrow 0 \Rightarrow V(x) \rightarrow +\infty$, resulta lo suficientemente repulsivo para reflejar completamente al campo sin que nunca llegue a la frontera del agujero negro. Matemáticamente esto corresponde a que las funciones f que pertenecen al dominio de \overline{A}_m verifican que f y f' se anulan en infinito. Por lo tanto, no es necesario imponer ninguna condición de contorno extra en la frontera del espacio-tiempo. Este resultado es el mismo que obtuvimos cuando estudiamos el campo escalar masivo en Anti-de Sitter. Recordamos que el comportamiento para grandes valores de la coordenada radial r en las métricas del agujero negro y Anti-de Sitter es el mismo, y en ambos casos el potencial efectivo es divergente en infinito para el campo masivo. Por lo tanto, físicamente interpretamos que el hecho que el campo masivo se refleje completamente en la frontera del agujero negro es consecuencia que el agujero negro BTZ y Anti-de Sitter son dos espacios-tiempos asintóticamente iguales en infinito.

La novedad respecto al caso de Anti-de Sitter es que no existen valores de $\omega \in \mathbb{R}$ para los cuales la solución (7.2.18) sea de cuadrado integrable. En otras palabras, el operador \overline{A}_m no tiene autofunciones pues ninguna de las funciones con autovalor bien definido es normalizable. Físicamente podemos interpretar este resultado haciendo una analogía con las soluciones de la Ecuación de Klein-Gordon en el agujero negro de Schwarzschild. Al igual que el agujero negro BTZ sin momento angular, esta geometría presenta una isometría generada por un vector de Killing time-like globalmente definido en la región exterior del agujero negro. Esta simetría es generada por un campo vectorial que llamaremos ∂_t y la interpretamos como la invariancia frente a traslaciones temporales. En el caso de resolver la Ecuación de Klein-Gordon para el campo masivo en el agujero negro de Schwarzschild imponiendo que las soluciones sean autofunciones del campo vectorial de Killing ∂_t , se obtienen soluciones que no son normalizables debido a que no son bien comportadas en el horizonte de eventos futuro ni pasado [23]. En el lenguaje de Teoría Cuántica de Campos en espacios curvos, estos modos corresponden a haber definido **El Vacío de Boulware para el campo masivo**. El contenido de *partículas* de la teoría de campos definida respecto a este vacío es el asociado a observadores que están estáticos en el espacio-tiempo (sus líneas de universo son las curvas integrales del campo vectorial ∂_t).

En nuestro caso también hemos resuelto la Ecuación de Klein-Gordon para el campo masivo en un agujero negro estático y también hemos impuesto que las soluciones sean autofunciones del campo vectorial de Killing time like de la variedad. Por lo tanto, era de esperarse que las soluciones no sean de cuadrado integrables debido a su comportamiento singular en el horizonte de eventos. Físicamente interpretamos que hemos encontrado los modos que definen **El Vacío de Boulware para el campo masivo del agujero negro BTZ sin momento angular**. Al igual que en el caso del agujero negro de Schwarzschild, el contenido de *partículas* de la teoría de campos definida respecto a este vacío es el asociado a observadores que están estáticos en el espacio-tiempo (sus líneas de universo son las curvas integrales del campo vectorial ∂_t).

7.2.2. Campo no masivo con acople conforme a la curvatura

Recordamos que sea un espacio-tiempo de d dimensiones, la ecuación para al campo escalar libre con acople conforme es

$$\left[g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu - \frac{d-2}{4(d-1)} R \right] \phi = 0$$

Es importante destacar que como todas las soluciones de la ecuación de Einstein con constantes cosmológica negativa en tres dimensiones ($d = 3$) son localmente diffeomorfas a Anti-de Sitter, los escalares de curvatura, R , de todas las soluciones coinciden con el de Ads(3). Entonces, el escalar de curvatura del agujero negro BTZ resulta

$$R = -\frac{6}{l^2} \tag{7.2.29}$$

Recordamos que hemos resuelto la ecuación

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m_0^2 \phi = 0,$$

en el agujero negro BTZ. Al igual que como hemos hecho en Anti-de Sitter, si consideramos que

$$m_0^2 = \frac{d-2}{4(d-1)} R = \frac{1}{8} R = m_0^2 = -\frac{3}{4l^2} \tag{7.2.30}$$

entonces podemos usar todos los cálculos de la sección anterior. En particular, ya tenemos las soluciones φ_m (7.2.18) cuando el acople es conforme si imponemos que en

$$\varphi_m = \sinh^\alpha(x) \cosh^\beta(x) \left[(\cosh^2(x))^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; \cosh^{-2}(x)) \right]$$

m_0^2 adopte el valor (7.2.30). Además, esta elección implica que la ecuación diferencial (7.1.14) resulte

$$-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\varphi_m}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = \omega^2 \varphi_m \tag{7.2.31}$$

Al igual que en Anti-de Sitter, el potencial efectivo del agujero negro

$$V_{eff} = \frac{1}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right], \tag{7.2.32}$$

no es divergente en el infinito ($x = 0$). Como el potencial no es confinante, ya no es lo suficientemente repulsivo como para reflejar al campo completamente sin que nunca llegue a la frontera del agujero negro. Por lo tanto, el campo puede llegar a la frontera y será necesario imponer condiciones de contorno apropiadas. Esas condiciones de contorno las obtendremos haciendo las extensiones autoadjuntas del operador A_m .

Las constantes α y β definidas en (7.2.13) presentes en la solución φ_m adoptan los valores

$$\beta = \frac{1}{2} \pm i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right), \quad \alpha = 1 \quad (7.2.33)$$

Usando estos valores; y tomando a, b y c definidos en (7.2.12) tenemos que

$$c - a - b = \frac{1}{2} - \alpha = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}, \quad (7.2.34)$$

Comportamiento en el horizonte de eventos: $r = r_+ \Leftrightarrow x = +\infty \Leftrightarrow u = +\infty$

Recordamos el comportamiento de la solución φ_m (7.2.18) en el horizonte de eventos $r = r_+ \Leftrightarrow x = +\infty \Leftrightarrow u = +\infty$

Caso $\omega^2 \in \mathbb{R}$

En este caso $|\varphi_m|^2$ tiende a 1 cuando nos acercamos a $u \rightarrow +\infty$ así que φ_m no es de cuadrado integrable.

Caso $\omega^2 = \pm 8i$

Si $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$ la solución tiende a cero en el horizonte de eventos y el comportamiento del módulo cuadrado de la solución es $|\varphi_m|^2 = u^{-2} = \cosh(x)^{-4}$. Como $|\varphi_m|^2$ tiende a cero más rapido que $\frac{1}{x}$, será integrable en la vecindad de $x \rightarrow +\infty$. Por lo tanto, las únicas soluciones de la ecuación diferencial (7.2.31) que pueden llegar a ser de cuadrado integrables son aquellas con $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$.

Comportamiento en el infinito del agujero negro: $r = + \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow u = 1$

Para analizar la integrabilidad de la solución φ_m (7.2.18) con autovalores $\omega^2 = \pm 8i$ en la región exterior al agujero negro nuevamente será conveniente escribir esta solución como la combinación lineal

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \sinh(x) \cosh^\beta(x) \left[(\cosh^2(x))^{-b} {}_2F_1(b, 1+b-c; 1+b-a; \cosh^{-2}(x)) \right] \\ \varphi_m &= \sinh(x) \cosh^\beta(x) \left[\frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, b; 1+a+b-c; 1-\cosh^2(x)) \right] \\ &\quad + \cosh^\beta(x) \left[e^{i(c-a-b)\pi} \frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)} {}_2F_1(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-\cosh^2(x)) \right], \end{aligned} \quad (7.2.35)$$

con a, b y c definidos en (7.2.12) y α y β definidos en (7.2.33).

Hemos visto que la solución φ_m (7.2.35) tiende a cero en el horizonte de eventos si $\omega^2 = \pm 8i$ y es de cuadrado integrable en la vecindad de $u \rightarrow +\infty$. Para determinar si efectivamente $\varphi_m \in L^2((0, +\infty), dx)$, estudiamos su comportamiento en el infinito del agujero negro BTZ. Usando la expresión (7.2.35)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_m = e^{i(c-a-b)\pi} \frac{\Gamma(b-a+1)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c+1)}, \quad (7.2.36)$$

lo que determina que **la solución φ_m (7.2.35) pertenece a $L^2(0, +\infty, dx)$ si $\omega^2 = \pm 8i \Leftrightarrow \omega = 2(\pm 1 + i)$. Por lo tanto, estas soluciones pertenecen a $\mathcal{D}(A_m^\dagger)$. Este resultado es fundamental, nos enseña que los índices de deficiencia n_+ y n_- del operador A_m^\dagger son iguales a 1, $n_+ = n_- = 1$ cuando se estudia el campo escalar con acople conforme en el agujero negro BTZ.**

Los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- son generados por

$$\begin{aligned} \varphi_m^+ = \sinh(x) \cosh^\beta(x) & \left[\frac{\Gamma(b_+ - a_+ + 1)\Gamma(c_+ - a_+ - b_+)}{\Gamma(1 - a_+)\Gamma(c_+ - a_+)} {}_2F_1(a_+, b_+; 1 + a_+ + b_+ - c_+; 1 - \cosh^2(x)) \right] + \cosh^\beta(x) \\ & \left[e^{i(c_+ - a_+ - b_+)\pi} \frac{\Gamma(b_+ - a_+ + 1)\Gamma(a_+ + b_+ - c_+)}{\Gamma(b_+)\Gamma(b_+ - c_+ + 1)} {}_2F_1(c_+ - a_+, c_+ - b_+; 1 + c_+ - a_+ - b_+; 1 - \cosh^2(x)) \right] \end{aligned} \quad (7.2.37)$$

con a_+ , b_+ y c_+ son las constantes definidas en (7.2.12) usando $\omega^2 = 8i \Rightarrow \omega_+ = 2(1 + i)$,

$$\begin{aligned} \varphi_m^- = \sinh(x) \cosh^\beta(x) & \left[\frac{\Gamma(b_- - a_- + 1)\Gamma(c_- - a_- - b_-)}{\Gamma(1 - a_-)\Gamma(c_- - a_-)} {}_2F_1(a_-, b_-; 1 + a_- + b_- - c_-; 1 - \cosh^2(x)) \right] + \cosh^\beta(x) \\ & \left[e^{i(c_- - a_- - b_-)\pi} \frac{\Gamma(b_- - a_- + 1)\Gamma(a_- + b_- - c_-)}{\Gamma(b_-)\Gamma(b_- - c_- + 1)} {}_2F_1(c_- - a_-, c_- - b_-; 1 + c_- - a_- - b_-; 1 - \cosh^2(x)) \right] \end{aligned} \quad (7.2.38)$$

con a_- , b_- y c_- definidos en (7.2.12) usando $\omega^2 = -8i \Rightarrow \omega_- = 2(-1 + i)$.

Hasta ahora no hemos determinado el valor de $\beta = \frac{1}{2} \pm i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right)$. Para que los cálculos posteriores sean más sencillos elegimos

$$\beta_+ = \frac{1}{2} + i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right) \quad (7.2.39)$$

para la solución φ_m^+ (7.2.37) y

$$\beta_- = \frac{1}{2} - i|m| \left(\frac{l}{r_+} \right) \quad (7.2.40)$$

para la solución φ_m^- (7.2.38).

Aclaremos que no hay pérdida de generalidad al tomar estos valores particulares para β , pues α y β son dos constantes introducidas con el único fin de poder escribir la ecuación diferencial original como la ecuación de las hipergeométricas.

Recordamos que las extensiones autoadjuntas del operador A_m vienen dadas por el agregado a su dominio del subespacio

$$S_m^E = \{ \varphi_m^+ + U(\varphi_m^+) / \varphi_m^+ \in \mathcal{D}_m^+; U(\varphi_m^+) \in \mathcal{D}_m^- \}$$

Al igual que en Anti-de Sitter, los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_m^+ y \mathcal{D}_m^- son de dimensión igual a uno, la única isometría parcial $U : \mathcal{D}_m^+ \rightarrow \mathcal{D}_m^-$, son los mapas $\varphi_m^+ \rightarrow e^{i\theta} \varphi_m^-$ con $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$U\varphi_m^+ = e^{i\theta} \varphi_m^- \quad (7.2.41)$$

Recordamos una vez más qué representa el agregado del subespacio S_m^E al dominio del operador $\overline{A_m}$. Por definición, las funciones $f \in \mathcal{D}(\overline{A_m})$ tienden rápidamente a cero en la frontera $x = 0$. El agregado del subespacio S_m^E extiende el dominio a todas las funciones que en el infinito $x = 0$ se comporten como $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^-$. La elección de un valor de θ determina el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial (7.2.31) en la frontera, lo que equivale a la elección de una posible condición de contorno. Las condiciones de contorno más generales están determinadas por la razón $\left. \frac{\partial_x(\varphi_m^\theta)}{\varphi_m^\theta} \right|_{x=0}$ y para cada valor del cociente hay un θ asociado.

Como hemos hecho en Anti-de Sitter, calculamos explícitamente los valores de θ para las condiciones de Dirichlet y Neumann.

Condición de Dirichlet

Hemos dicho que el comportamiento de $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^-$ en la frontera $x = 0$ será la condición de contorno satisfecha por las soluciones. Para la condición de Dirichlet imponemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi_m^\theta = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^- = 0 \quad (7.2.42)$$

Sean φ_m^+ y φ_m^- definidos en (7.2.37) y (7.2.38) respectivamente, la condición (7.2.42) es equivalente a

$$e^{i(c_+ - a_+ - b_+) \pi} \frac{\Gamma(b_+ - a_+ + 1) \Gamma(a_+ + b_+ - c_+)}{\Gamma(b_+) \Gamma(b_+ - c_+ + 1)} + e^{i\theta} e^{i(c_- - a_- - b_-) \pi} \frac{\Gamma(b_- - a_- + 1) \Gamma(a_- + b_- - c_-)}{\Gamma(b_-) \Gamma(b_- - c_- + 1)} = 0, \quad (7.2.43)$$

con coeficientes

$$\begin{cases} a_+ = \frac{\alpha + \beta_+ + i\omega_+}{2} = \frac{\alpha + \beta_+ + i2(1+i)}{2} \\ b_+ = \frac{\alpha + \beta_+ - i\omega_+}{2} = \frac{\alpha + \beta_+ - i2(1+i)}{2} \\ c_+ = \beta_+ + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_- = \frac{\alpha + \beta_- + i\omega_-}{2} = \frac{\alpha + \beta_- + i2(-1+i)}{2} \\ b_- = \frac{\alpha + \beta_- - i\omega_-}{2} = \frac{\alpha + \beta_- - i2(-1+i)}{2} \\ c_- = \beta_- + \frac{1}{2} \end{cases}$$

con $\alpha = 1$ y $\beta_{\pm} = \frac{1}{2} \pm im \left(\frac{l}{r_+} \right)$. Sea $\beta_+ = \beta_-^*$ resulta que

$$b_+ - a_+ + 1 = (b_- - a_- + 1)^*$$

$$a_+ + b_+ - c_+ = a_- + b_- - c_-$$

$$b_+ = (b_-)^*$$

$$b_+ - c_+ + 1 = (b_- - c_- + 1)^* \tag{7.2.44}$$

Usando (7.2.44) la condición (7.2.43) es equivalente a

$$e^{i\theta} = e^{i\pi} \frac{\Gamma(b_+ - a_+ + 1)}{\Gamma[(b_+ - a_+ + 1)^*]} \frac{\Gamma[(b_+ - c_+ + 1)^*] \Gamma(b_+^*)}{\Gamma(b_+ - c_+ + 1) \Gamma(b_+)} \tag{7.2.45}$$

Usando la propiedad $\Gamma(z^*) = (\Gamma(z))^*$ y escribiendo $\Gamma(z) = |\Gamma(z)|e^{i \arg[\Gamma(z)]}$ la condición (7.2.45) es equivalente a

$$e^{i\theta} = e^{i\pi} e^{i2 \arg[\Gamma(b_+ - a_+ + 1)]} e^{-i2 \arg[\Gamma(b_+ - c_+ + 1)]} e^{-i2 \arg[\Gamma(b_+)]}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\{\pi + 2 \arg[\Gamma(b_+ - a_+ + 1)] - 2 \arg[\Gamma(b_+ - c_+ + 1)] - 2 \arg[\Gamma(b_+)]\}} \tag{7.2.46}$$

Por lo tanto, el valor de θ que representa la condición de Dirichlet es

$$\theta = \pi + 2 \{ \arg[\Gamma(b_+ - a_+ + 1)] - \arg[\Gamma(b_+ - c_+ + 1)] - \arg[\Gamma(b_+)] \} \tag{7.2.47}$$

Al igual que como hicimos para Anti-de Sitter, aclararemos que este valor de θ depende de $|m|$ pues al haber propuesto separación de variables, descompusimos φ_m en las representaciones irreducibles de $SO(2)$ que se catalogan con el autovalor m^2 .

Condición de Neumann

Para la condición de Neumann imponemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\varphi_m^\theta}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d(\varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^-)}{dx} = 0 \quad (7.2.48)$$

Sean φ_m^+ y φ_m^- definidos en (7.2.37) y (7.2.38) respectivamente, la condición (7.2.42) es equivalente a

$$\frac{\Gamma(b_+ - a_+ + 1)\Gamma(c_+ - a_+ - b_+)}{\Gamma(1 - a_+)\Gamma(c_+ - a_+)} + e^{i\theta} \frac{\Gamma(b_- - a_- + 1)\Gamma(c_- - a_- - b_-)}{\Gamma(1 - a_-)\Gamma(c_- - a_-)} = 0 \quad (7.2.49)$$

Usando las mismas relaciones para a_\pm , b_\pm y c_\pm y las mismas propiedades de la función $\Gamma(z)$ usadas en el caso de Dirichlet, el valor de θ que representa la condición de Neumann (7.2.49) resulta

$$\theta = \pi + 2 \{ \arg [\Gamma(b_+ - a_+ + 1)] - \arg [\Gamma(1 - a_+)] - \arg [\Gamma(c_+ - a_+)] \} \quad (7.2.50)$$

Al igual que en los casos anteriores, θ depende de $|m|$ porque propusimos separación de variables para la solución ϕ de la ecuación de Klein-Gordon.

Dominio del operador extendido A_E

Consideremos el dominio de $\overline{A_m}$ (7.1.20), $\varphi_m^+(x)$ y $\varphi_m^-(x)$ definidos en (7.2.37) y (7.2.38) respectivamente. El dominio de la extensión autoadjunta $\mathcal{D}(A_m^E)$ resulta

$$\mathcal{D}(A_m^E) = \left\{ \varphi_m^E = f + c \left(\varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^- \right) \mid f \in \mathcal{D}(\overline{A_m}), c \in \mathbb{C} \right\} \quad (7.2.51)$$

Cada extensión se determina unívocamente por el valor de la fase $e^{i\theta}$. Los valores (7.2.47) o (7.2.50) para θ corresponden a la extensión asociada a la condición de Dirichlet o Neumann respectivamente.

El dominio del operador extendido A_E resulta

$$\mathcal{D}(A_E) = \left\{ \phi = r^{-1/2} \sum_m \varphi_m^E \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \mid \varphi_m^E \in \mathcal{D}(A_m^E), m \in \mathbb{Z} \right\} \quad (7.2.52)$$

Las soluciones de la Ecuación de Klein-Gordon definidas globalmente son

$$\phi_t = \cos \left(A_E^{1/2} t \right) \phi_0 + A_E^{-1/2} \operatorname{sen} \left(A_E^{1/2} t \right) \dot{\phi}_0 \quad (7.2.53)$$

Recordamos que ϕ_t queda absolutamente determinada por las condiciones iniciales $(\phi_0, \dot{\phi}_0)$ de soporte compacto y la elección de la extensión autoadjunta A_E . Físicamente entendemos que fue necesario imponer condiciones de contorno sobre las soluciones dado que el potencial efectivo (7.2.32) no es confinante. Las soluciones φ_m^E no son de soporte compacto en $x \in (0, +\infty)$ y requerimos especificar su comportamiento en infinito ($x = 0$).

Condición de Dirichlet

Tomando el valor (7.2.47) para θ la condición de contorno satisfecha por la solución (7.2.53) en todo instante de tiempo es

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{1/2} \phi_t = \lim_{x \rightarrow 0} (r_+ \coth(x))^{1/2} \phi_t = 0, \quad (7.2.54)$$

que corresponde a haber elegido la condición de contorno de Dirichlet para todas las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A_m^E)$.

Condición de Neumann

Tomando el valor (7.2.50) para θ la condición de contorno satisfecha por la solución (7.2.53) en todo instante de tiempo es

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial (r^{1/2} \phi_t)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \left((r_+ \coth(x))^{1/2} \phi_t \right)}{\partial x} = 0, \quad (7.2.55)$$

que corresponde a haber elegido la condición de contorno de Neumann para todas las funciones pertenecientes a $\mathcal{D}(A_m^E)$.

Interpretación Física de las soluciones para el campo no masivo con acople conforme en el agujero negro BTZ

Hemos probado que existen soluciones de la ecuación diferencial

$$-\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} \frac{\varphi_m}{\cosh^2(x)} \left[\frac{1}{4} + m^2 \left(\frac{l}{r_+} \right)^2 \right] = \omega^2 \varphi_m$$

con $\omega^2 = \pm 8i$ que son de cuadrado integrable para el campo no masivo con acople conforme en el agujero negro BTZ sin momento angular. Mostramos que los índices de deficiencia n_+ y n_- del operador A_m^E son iguales a 1, $n_+ = n_- = 1$, y el agregado del subespacio S_m^E extiende el dominio a todas las funciones que en el infinito $x = 0$ se comporten como $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+ + e^{i\theta} \varphi_m^-$. La elección de un valor de θ determina el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial (7.2.31) en la frontera, lo que equivale a la elección de una posible condición de contorno. Al igual que en Anti-de Sitter es importante destacar que las condiciones de contorno que determinan la dinámica del campo no se imponen directamente sobre las soluciones ϕ_t de la Ecuación de Klien-Gordon. La forma apropiada para determinar la evolución temporal es proponer separación de variables de la forma $\phi(t, r, \theta_i) = r^{-1/2} \sum_{m=0} \tilde{\varphi}_m(t, r) \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}$ e imponer condiciones sobre las funciones $\tilde{\varphi}_m(t, r)$ pertenecientes a los dominios extendidos $\mathcal{D}(A_m^E)$. Estos

dominios se caracterizan por la elección de un valor para $\theta \in (0, 2\pi)$, y físicamente los interpretamos como subespacios cuyas funciones verifican una condición de contorno particular en el infinito. Este resultado es el mismo que en el caso de campo con acoplamiento conforme en Anti-de Sitter. Pero aclaramos que los subespacios de deficiencia \mathcal{D}_\pm en cada espacio-tiempo son diferentes. Nuevamente concluimos que el motivo por el cual el campo con acople conforme se comporta de la misma forma en el infinito del agujero negro BTZ y en el infinito de $AdS(3)$, es que estos dos espacio-tiempos son asintóticamente iguales lejos del horizonte de eventos.

Al igual que para el caso de campo masivo, no existen valores de $\omega \in \mathbb{R}$ para los cuales la solución (7.2.18) sea de cuadrado integrable. Haciendo la analogía con el campo con acople conforme en la geometría de Schwarzschild (campo no masivo), interpretamos que hemos encontrado los modos que definen **El Vacío de Boulware para el campo conformemente acoplado del agujero negro BTZ sin momento angular.**

7.2.3. Resumen de los resultados del trabajo para el campo escalar en el agujero BTZ no rotante

Campo Escalar en el agujero negro BTZ ($J = 0$)		
	Campos masivo: $m_0^2 > 0$	Campo no masivo con acople conforme
ω^2	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{C}$
$\mathcal{D}(A_E)$	$f \in \mathcal{D}(\bar{A})$	$(f + \Phi_+ + U\Phi_+) / f \in \mathcal{D}(\bar{A}); \Phi_+ \in \mathcal{D}_+$

En próximo capítulo seremos más claros en cuanto a la formulación cuántica del campo y se usarán los resultados hasta ahora obtenidos.

Cuantización del Campo Escalar libre en el Agujero Negro BTZ.

En este último capítulo cuantizaremos el campo escalar libre en la región exterior del agujero negro BTZ sin momento angular. El hecho que la variedad sea estática es crucial para la elección de un espacio de Hilbert privilegiado. A pesar de que el agujero negro BTZ no admite superficies de Cauchy, haber aplicado el formalismo de Wald para determinar unívocamente la evolución temporal de un paquete de ondas a partir de condiciones de contorno apropiadas en infinito, nos permite cuantizar en este espacio-tiempo de forma semejante a como se lo hace en variedades globalmente hiperbólicas.

Partículas en Espacios Curvos.

Antes de comenzar con la cuantización en el agujero negro, creemos que es interesante discutir la noción de *partícula* cuántica en una teoría de campos en espacios curvos. Si bien esta noción es sumamente útil para la interpretación de los fenómenos físicos descritos por teorías de campos en el espacio plano (teorías sumamente exitosas como el Modelo Standard) y parece absurdo preguntarse la naturalidad de la definición de partícula, es importante entender *por qué a los estados del campo en el espacio plano se los declara como partículas*. Para hacer nuestro análisis lo más sencillo posible, supongamos que estudiamos el campo escalar libre. En el espacio plano describimos a las partículas como paquetes de onda formados por soluciones de la ecuación de Klein-Gordon con *energía positiva*. La idea subyacente es que el espacio de Minkowski presenta una isometría timelike globalmente definida la cual determina una noción de tiempo privilegiado en la variedad, y asociado a ese tiempo es que podemos definir frecuencias positivas (energías positivas). Más aún, solemos descomponer las soluciones (aún que no sea un requerimiento necesario ni mucho menos) en paquetes de onda con *energía e impulso bien definidos*. Nuevamente, la razón de poder hacer esa descomposición es la invariancia del espacio de Minkowski frente el grupo de Poincaré. No es una mera casualidad que las traslaciones rígidas sean isometrías generadas por $\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z$ y existan soluciones de Klein-Gordon con vector de onda $k^\mu = (k^0, k^x, k^y, k^z)$ bien definido. Concluimos que la estructura del espacio-tiempo juega un rol preponderante para la interpretación física de los estados del campo ya que las isometrías de la variedad tienen relación íntima con las magnitudes que están bien definidas en los estados.

Por lo tanto, si la definición de partícula está relacionada con las isometrías del espacio-tiempo surge naturalmente la siguiente pregunta: *En un espacio curvo donde a priori no hay isometrías ¿Existe una noción natural de partícula?* La respuesta es no. Se abandonó la noción de partícula como un concepto fundamental para la formulación de la teoría cuántica de campos en espacios curvos y aún así pueden construirse teorías consistentes. Dentro de los formalismos existentes mencionamos el de **Algebraic Quantum Field Theory (AQFT)**, ver [24] y [23], en el cual la teoría se construye a partir de la

definición de observables cuánticos (operadores) y pueden definirse estados que toman dichos observables y devuelven el valor de expectación de ese operador. Actualmente AQFT es muy estudiada porque logra independizarse del espacio de Hilbert de una partícula que depende de una elección particular de vacío (esto es lo que usualmente se hace en la construcción de las teorías cuánticas de campos) y esto lo vuelve un formalismo muy natural para abordar la teoría cuántica de campos en espacios curvos donde no hay vacíos privilegiados/naturales. En el presente trabajo no se intenta abordar el estudio de este formalismo y nos conformamos con saber que *conceptos que parecen fundamentales como la noción de partícula en el espacio plano merecen ser re pensados en espacios curvos.*

En nuestro trabajo abordaremos la cuantización canónica del campo escalar en el agujero negro BTZ no rotante y dadas las características de esta variedad podremos dar una noción natural de partícula en el espacio-tiempo.

8.1. Cuantización del Campo Escalar en Espacio-Tiempos Globalmente Hiperbólicos y Estacionarios

En los formalismos usuales es de gran ayuda un concepto natural de partícula para tener interpretaciones claras de los estados presentes en la teoría. Los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos y estacionarios poseen una noción de partícula semejante a la del espacio plano. En nuestro caso nos centraremos en la teoría de campos más sencilla, el campo escalar libre.

Imponer que la variedad sea globalmente hiperbólica surge de que en las maneras usuales de definir la teoría cuántica de campos (en el espacio plano o en espacios curvos) suele exigirse que el espacio de fases clásico de la teoría (formado por el campo ϕ y su momento) pueda pensárselo como el espacio de soluciones. Esto significa que cada punto en el espacio de fases es análogo a dar una condición inicial, $(\phi_0; \dot{\phi}_0)$, y la solución ϕ que surge de la evolución temporal de ese paquete de ondas (de ese punto del espacio de fases) este definida globalmente en toda la variedad y sea única. Por lo tanto, los espacio-tiempos globalmente hiperbólicos son buenos candidatos para definir teorías de campos debido a que por su estructura causal está bien definido el problema de condiciones iniciales.

Si además el espacio-tiempo es estacionario, existe un grupo uniparamétrico de isometrías generadas por un campo vectorial time-like. Llamando ∂_t al campo de Killing, la idea básica de construir la teoría cuántica del campo escalar en un espacio-tiempo de estas características es que podemos definir un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , privilegiado formado por las soluciones, $\phi_{(t,x)}$, de la ecuación de Klein-Gordon cuyas transformadas de Fourier respecto al parámetro de Killing t , $\hat{\phi}_{(\omega,x)}$, solo tengan soporte para valores de ω positivos (si $\omega < 0 \Rightarrow \hat{\phi} = 0$). A esta clase de soluciones se las llama *soluciones de frecuencia positiva*. La interpretación física para quedarnos únicamente con este subespacio de soluciones al definir \mathcal{H} es que al haber invariancia frente a traslaciones temporales, la energía será una magnitud conservada y como es usual en cuántica, interpretamos a la frecuencia ω como la energía del estado. Por lo tanto, la noción natural de partículas en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos y estacionarios es descripta por las funciones que pertenecen a \mathcal{H} (soluciones con frecuencia positiva).

Para el estudio de una construcción rigurosa de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempos globalmente hiperbólicos y estacionarios sugerimos el libro de Wald de teoría cuántica de campos en espacios curvos [24].

8.1.1. Cuantización del Campo Libre

En esta subsección mostramos el formalismo usual de cuantización del campo escalar en un espacio-tiempo estacionario y globalmente hiperbólico. Una vez definido el espacio de Hilbert \mathcal{H} de una partícula, definimos el espacio de Fock de la teoría como

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{H})} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_s^{(n)} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})_s \oplus (\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H})_s \dots \quad (8.1.1)$$

donde $\mathcal{H}_s^{(n)}$ es el subespacio de n-partículas formado por el producto tensorial simetrizado del espacio de Hilbert de una sola partícula. El espacio de Fock debemos entenderlo como el espacio de Hilbert completo de la teoría cuántica de campos, en $\mathcal{F}_{(\mathcal{H})}$ se encuentran todos los estados en los cuales puede encontrarse el campo. Un estado arbitrario $\Psi \in \mathcal{F}_{(\mathcal{H})}$ se escribe como

$$\Psi = (c, \zeta^a, \zeta^{ab}, \zeta^{abc}, \dots) \quad / \quad \|\Psi\|^2 < +\infty \quad (8.1.2)$$

donde ζ^a corresponde a un elemento de \mathcal{H} , ζ^{ab} corresponde a un elemento de $\mathcal{H}_s^{(2)}$ y así sucesivamente. Las cantidad de letras latinas como supra índices lo único que indican es la cantidad de partículas. Un elemento arbitrario del espacio de Fock podemos pensarlo como un estado en el que (en principio) no hay un número definido de partículas y cada una de ellas está en un estado diferente. Ψ representa la amplitud de probabilidad de que el campo este en un estado de una partícula ζ^a , en un estado de dos partículas ζ^{ab} , en un estado de tres partículas ζ^{abc} y así hasta el infinito todos a la vez.

Sea \mathcal{H}^* el espacio de Hilbert dual. Para todo $g^* \in \mathcal{H}^*$ y $f \in \mathcal{H}$ arbitrarios, definimos los operadores de aniquilación a_{g^*} y creación a_f^\dagger

$$\begin{aligned} a_{g^*} &: \mathcal{F}_{(\mathcal{H})} \rightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{H})} \\ a_{g^*} \Psi &= (\zeta^a g_a^*, \sqrt{2} \zeta^{ab} g_a^*, \sqrt{3} \zeta^{abc} g_a^*, \dots), \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

donde $\zeta^a g_a^*$ equivale a hacer el producto interno (g, ζ) de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$ entre las funciones ζ y g pertenecientes al espacio de Hilbert (g es el elemento de \mathcal{H} asociado a g^*).

$$\begin{aligned} a_f^\dagger &: \mathcal{F}_{(\mathcal{H})} \rightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{H})} \\ a_f^\dagger \Psi &= (0, c f^a, \sqrt{2} f^{(a} \zeta^{b)}, \sqrt{3} f^{(a} \zeta^{bc)}, \dots), \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

donde los paréntesis alrededor de los índices indican el producto tensorial simetrizado. Cabe aclarar que a_f^\dagger es el operador adjunto de a_{f^*} . Dado que estamos cuantizando un campo escalar (un campo bosónico) las reglas de conmutación impuestas sobre los operadores son

$$\begin{aligned} [a_{g^*}, a_f^\dagger] &= (g, f) \\ [a_{g^*}, a_{f^*}] &= [a_g^\dagger, a_f^\dagger] = 0 \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Existe un estado, $\Omega = (1, 0, 0, \dots)$, llamado *vacío* que es aniquilado por todos los operadores de destrucción y es de norma unitaria $(\Omega, \Omega) = 1$. El vacío representa *el estado en el que no hay partículas presentes*.

$$a_{g^*}\Omega = 0, \quad \forall g^* \in \mathcal{H}^* \tag{8.1.6}$$

El estado de vacío permite definir estados de n-partículas pertenecientes al subespacio $\mathcal{H}_s^{(n)}$ aplicando n-veces el operador de creación. Sean $f_1 \dots f_n$ n funciones arbitrarias pertenecientes a \mathcal{H}

$$a_{f_1}^\dagger \dots a_{f_n}^\dagger \Omega = \zeta^{a_1 \dots a_n} \tag{8.1.7}$$

Por lo tanto, el espacio de Fock, $\mathcal{F}_{(\mathcal{H})}$, se construye aplicando operadores de creación al vacío y tomando suma directa de los espacios de 1, 2, 3, 4 partículas hasta el infinito.

Finalmente, definimos el operador de campo Φ que a cada función del espacio de Hilbert le asigna un operador auto-adjunto que actúa en el espacio de Fock.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{F}_{(\mathcal{H})} \\ \Phi_{(f)} &= a_f + a_f^\dagger \end{aligned} \tag{8.1.8}$$

8.2. Teoría Cúantica del Campo Escalar en el Agujero Negro BTZ

Habiendo hecho la discusión previa, dado que la región exterior del agujero negro BTZ sin momento angular es una geometría estacionaria concluimos que existe un espacio de Hilbert privilegiado para la teoría cuántica del campo escalar. La no hiperbolicidad global es un problema que hemos solucionado aplicando el formalismo de Wald de extensiones autoadjuntas en teoría de campos y garantizamos que el problema de condiciones iniciales está bien definido.

8.2.1. Espacio de Hilbert de una partícula del campo escalar masivo

En el capítulo anterior haciendo uso que la geometría es estática escribimos la ecuación de Klein-Gordon como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -A\phi,$$

y determinamos que el operador A es esencialmente autoadjunto y su extensión es única definida a partir del operador clausura \overline{A} cuyo dominio se definió en (7.2.27). Este resultado es de capital importancia para definir el espacio de Hilbert, \mathcal{H} , de la teoría cuántica del campo escalar masivo. Sean ϕ las soluciones (7.2.28) de la ecuación de Klein-Gordon con transformada de Fourier, $\hat{\phi}$, respecto al parámetro t del vector de Killing, el espacio de estados de una partícula lo definimos como

$$\mathcal{H} = \left\{ \phi = \cos\left(\overline{A}^{1/2}t\right)\phi_0 + \left(\overline{A}\right)^{-1/2}\sin\left(\overline{A}^{1/2}t\right)\dot{\phi}_0 \mid \phi_0, \dot{\phi}_0 \in \mathcal{D}\left(\overline{A}\right); \hat{\phi} = 0 \forall \omega < 0 \right\} \quad (8.2.1)$$

Por lo tanto, hemos definimos el espacio de Hilbert de una partícula de la teoría cuántica del campo escalar masivo como las soluciones ϕ de la ecuación de Klein-Gordon que surgen de la evolución temporal de data inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in \mathcal{D}(\overline{A}) \times \mathcal{D}(\overline{A})$ definida sobre una hipersuperficie Σ de tiempo constante, cuya transformada de Fourier, $\hat{\phi}$, respecto al tiempo t tiene soporte solamente para frecuencias positivas, $\omega > 0$. Dado que un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno, vamos a dotar a \mathcal{H} del producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$. Dado que este producto interno es invariante frente a la superficie Σ de tiempo constante elegida, si inicialmente el estado es de norma finita, lo será para todo instante de tiempo.

Lo relevante es que haber definido \mathcal{H} en (8.2.1) nos permite cuantizar la teoría para el campo escalar masivo en el agujero negro BTZ no rotante de la misma forma que en la sección anterior. Los estados que definimos en nuestra construcción de la teoría cuántica de campos son los asociados al vacío de Boulware para el campo masivo.

8.2.2. Espacio de Hilbert de una partícula del campo escalar con acople conforme

Proponiendo separación de variables para la solución ϕ de la ecuación de Klein-Gordon, en el capítulo anterior determinamos que los índices de deficiencia del operador A_m^\dagger son iguales a 1, $n_+ = n_- = 1$ y por lo tanto este operador admite extensiones autoadjuntas. Habiendo determinado los operadores extendidos A_m^E con dominio (7.2.51) arribamos al operador extendido A_E cuyo dominio se definió en (7.2.52).

De forma análoga al caso de campo masivo, definimos el espacio de Hilbert de la teoría cuántica del campo escalar con acople conforme como las soluciones ϕ (7.2.53) de la ecuación de Klein-Gordon que surgen de la evolución temporal de data inicial $(\phi_0, \dot{\phi}_0) \in \mathcal{D}(A_E) \times \mathcal{D}(A_E)$ definida sobre una hipersuperficie Σ de tiempo constante, cuya transformada de Fourier, $\hat{\phi}$, respecto al tiempo t tiene soporte solamente para frecuencias positivas, $\omega > 0$. El producto interno en \mathcal{H} está dado por el producto interno de $L^2(\Sigma, V^{-1}d\Sigma)$ y las soluciones ϕ son de cuadrado integrables para todo instante de tiempo.

$$\mathcal{H} = \left\{ \phi = \cos\left(A_E^{1/2}t\right)\phi_0 + A_E^{-1/2}\sin\left(A_E^{1/2}t\right)\dot{\phi}_0 \mid \phi_0, \dot{\phi}_0 \in \mathcal{D}(A_E); \hat{\phi} = 0 \forall \omega < 0 \right\} \quad (8.2.2)$$

Por último, ponemos énfasis en remarcar que cada extensión autoadjunta A_m^E define una teoría de campos diferente. Esto se debe a que cada extensión está en correspondencia con una condición de contorno particular que se determina por el comportamiento de $\varphi_m^\theta = \varphi_m^+(x) + e^{i\theta}\varphi_m^-(x)$ en el infinito del agujero negro. Las condiciones de contorno más generales están determinadas por la razón $\left. \frac{\partial_x(\varphi_m^\theta)}{\varphi_m^\theta} \right|_{x=0}$ y para cada valor del cociente hay un $\theta \in [0, 2\pi)$ asociado. Por lo tanto, haber aplicado el formalismo de Wald nos permite hacer la cuantización del campo escalar con acople conforme en la región exterior del agujero negro BTZ para cualquier condición de contorno posible. Cada una de las infinitas teorías cuánticas de campos se define eligiendo una condición de contorno parametrizada por la fase $e^{i\theta}$. Los estados que se definen en cada una de estas teorías es el asociado al vacío de Boulware del campo con acoplamiento conforme (aclaramos que el vacío de cada teoría es diferente).

Conclusiones

A lo largo del presente trabajo se estudió la dinámica del campo escalar con acople mínimo y conforme en Anti-de Sitter y en el agujero negro BTZ sin momento angular. Al igual que los espacios Ads en todas sus dimensiones, el agujero negro que surge de la identificación de puntos de Ads(3) a partir de un grupo de isometrías discreto no es globalmente hiperbólico. Para determinar unívocamente la solución de la ecuación de Klein-Gordon a partir de la evolución temporal de un paquete de ondas definido sobre una superficie spacelike de tiempo constante tuvimos que estudiar un formalismo propuesto por Robert Wald que se basa en analizar las posibles extensiones autoadjuntas de un operador diferencial. La elección de las posibles extensiones está relacionada con las posibles condiciones de contorno que pueden imponerse sobre las configuraciones de campo en infinito.

Se determinó que el comportamiento del campo en el infinito del agujero negro BTZ y en el infinito de Ads(3) coincide (pero los subespacios de deficiencia en cada espacio-tiempo son diferentes). Creemos que este resultado es físicamente sensato dado que ambos espacio-tiempos son asintóticamente iguales en infinito. Esto puede verse estudiando el comportamiento de ambas métricas cuando se tiende la coordenada radial a infinito, o mejor aún estudiando los diagramas de Penrose de ambas variedades y ver que *la estructura conforme del infinito* en ambos diagramas es la misma. Sin ser formales, podemos imaginarnos que lejos del horizonte de eventos el agujero negro BTZ y Anti-de Sitter en tres dimensiones *son el mismo espacio-tiempo* y por lo tanto es lógico que el campo se comporte igual en el infinito de ambos. Distinto es lo que pasa *en el interior* del espacio-tiempo, donde para el caso del BTZ hay que imponer condiciones de contorno en r_+ .

En relación a la tesis de licenciatura, nos parece interesante mencionar una serie de trabajos en los cuales se estudia el campo escalar en el agujero negro BTZ. En [25] consideran el campo escalar en el agujero negro BTZ rotante y dado el interés en el cálculo de la energía libre y la entropía del campo, introducen un parámetro ϵ denominado *brick wall parameter* que regula las divergencias de sus soluciones en el horizonte externo. Ellos consideran soluciones que se anulan en el infinito del agujero negro rotante y haber introducido este parámetro les permite estudiar diferentes condiciones de contorno en la vecindad del horizonte de eventos externo, r_+ . Estudiando las posibles extensiones autoadjuntas de un operador relacionado con la parte radial del operador de Klein-Gordon obtienen las posibles condiciones de contorno y argumentan que cada una de ellas trae aparejado diferentes comportamientos de las variables termodinámicas del campo. En nuestro caso la motivación para estudiar extensiones autoadjuntas de operadores diferenciales es diferente, deseamos garantizar la existencia de una solución única en toda la variedad a partir de la evolución temporal de data inicial y las condiciones de contorno se aplican en el infinito del BTZ no rotante. Dado que el agujero negro con momento angular no es una geometría estática no puede usarse el formalismo de Wald así que no descartamos que la posibilidad de definir una

solución única en toda la variedad venga de imponer condiciones de contorno apropiadas en el horizonte externo.

Otro trabajo interesante es [26] en el cual estudian las extensiones autoadjuntas del operador de Laplace en variedades con borde. Ellos proponen pensar al operador de Klein-Gordon como el operador de Laplace en el agujero negro BTZ no rotante y considerar al horizonte como el borde de la región exterior. Argumentan que determinando las posibles condiciones de contorno que deben satisfacer las soluciones a partir de las posibles extensiones del operador de KG, y considerando las soluciones que *están localizadas en la vecindad del horizonte de eventos* (que interpretan como *estados ligados*), pueden relacionar la cantidad de estados ligados con el perímetro del horizonte de eventos del agujero negro. La motivación de su trabajo es dar una posible respuesta al origen de la entropía del agujero negro y la cantidad de estados ligados (que se cree que están fuertemente entrelazados con estados de adentro del agujero negro) puede ser una solución. Claramente la motivación de estudiar extensiones autoadjuntas es diferente a la nuestra pero destacamos la versatilidad que tiene el formalismo de von Neumann para abordar problemas físicos sumamente interesantes.

El último trabajo al cual hacemos mención es [13]. Para cuantizar el campo escalar conformemente acoplado en Anti-de Sitter en tres dimensiones hacen uso que este espacio-tiempo es conforme a la mitad del Universo Estático de Einstein en tres dimensiones ($ESU(3)$). Para tener bien definido el problema de condiciones iniciales en esta región de $ESU(3)$ se imponen condiciones de Dirichlet o Neumann a las soluciones del campo escalar en el infinito, y multiplicando por el factor conforme apropiado obtenemos soluciones en $Ads(3)$. Luego calculan funciones de dos puntos del campo escalar con acople conforme en el agujero negro BTZ sin momento angular a partir del método de imágenes usando las funciones de dos puntos de $Ads(3)$. Dado que el agujero negro BTZ y $Ads(3)$ son asintóticamente el mismo espacio-tiempo lejos del horizonte de eventos, dado que las soluciones de $Ads(3)$ verifican una condición de contorno particular (la inducida por la cuantización en $ESU(3)$) suponemos que esas condiciones de contorno pueden también traducirse al agujero negro. Pero no queda claro si esta forma de cuantizar el campo con acople conforme en el agujero negro BTZ sin momento angular coincide con una formulación consistente para la correcta definición del problema de condiciones iniciales.

Volviendo a nuestro trabajo destacamos que haber determinado con rigurosidad los dominios de los operadores diferenciales que surgen en el estudio de la ecuación de Klein-Gordon y poder garantizar que el problema de condiciones iniciales queda bien definido a pesar de la falta de hiperbolicidad global del agujero negro no rotante, son resultados fundamentales para la formulación cuántica del campo escalar. Para el caso de campo masivo y campo con acople conforme, se definió un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , privilegiado que representa los posibles estados de una partícula asociados al vacío de Boulware y se construyó el espacio de Fock, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, que representa el contenido de materia en la teoría. Este vacío particular es el estado invariante frente a las transformaciones generadas por ∂_t .

El aporte de esta tesis de licenciatura es haber cuantizado el campo escalar con acople masivo y conforme en la región exterior del BTZ considerando todas las posibles condiciones de contorno posibles en infinito. En un futuro se estudiará *La Radiación de Hawking* del agujero negro haciendo uso de la formulación cuántica descripta y esperamos determinar la existencia de un estado termal en la región exterior del agujero negro cuya temperatura sea proporcional a la *surface gravity* del horizonte de eventos y entender el rol de las condiciones de contorno en este fenómeno. Este estado se asocia a otra definición de vacío y en principio buscaremos construirlo a partir de las llamadas *transformaciones de Bogoliubov*.

Bibliografía

- [1] S. W. Hawking, In *Gibbons, G.W. (ed.), Hawking, S.W. (ed.): Euclidean quantum gravity** 167-188, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975), [167(1975)].
- [2] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D7**, 2333 (1973).
- [3] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, Physical Review Letters **69**, 13 (1992), arXiv:9204099 [hep-th] .
- [4] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, Phys. Rev. D **48**, 1506 (1993).
- [5] R. M. Wald, Journal of Mathematical Physics **21**, 2802 (1980), arXiv:0402184 [hep-th] .
- [6] A. Ishibashi and R. M. Wald, Classical and Quantum Gravity **21**, 2981 (2004), arXiv:0402184 [hep-th] .
- [7] S. Hawking and G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973).
- [8] R. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 1984).
- [9] J. M. Maldacena, Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999), [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)], arXiv:hep-th/9711200 [hep-th] .
- [10] M. Blau, “Lecture notes on general relativity,” (2016), <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>.
- [11] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Pearson, 2003).
- [12] S. Avis, C. Isham, and D. Storey, Physical Review D **18**, 3565 (1978).
- [13] G. Lifschytz and M. Ortiz, Phys. Rev. **D49**, 1929 (1994), arXiv:gr-qc/9310008 [gr-qc] .
- [14] L. Ortiz, *Quantum Fields on BTZ Black Holes*, Ph.D. thesis, University of York (2011).
- [15] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis*, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I (Academic Press, 1981).
- [16] M. Reed and B. Simon, *Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II (Academic Press, 1975).
- [17] V. Moretti, *Spectral Theory and Quantum Mechanics* (Springer, 2013).
- [18] H. Falomir, *Introducción al Análisis Funcional*, Cursos de Métodos de la Física Matemática, Vol. I (Universidad de La Plata, 2015).
- [19] A. Ishibashi and R. M. Wald, Classical and Quantum Gravity **20**, 3815 (2003).

- [20] J. Conway, *A Course in Functional Analysis* (Springer, 2007).
- [21] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing ed. (Dover, New York, 1964).
- [22] *Digital Library of Mathematical Functions*, <http://dlmf.nist.gov/15.10>.
- [23] S. Hollands and R. M. Wald, *Physics Reports* **574**, 1 (2015), arXiv:1401.2026 .
- [24] R. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, 1994).
- [25] S. K. Chakrabarti, P. R. Giri, and K. S. Gupta, *Eur. Phys. J.* **C60**, 169 (2009), arXiv:0807.2385 [hep-th] .
- [26] T. R. Govindarajan and R. Tibrewala, *Phys. Rev.* **D83**, 124045 (2011), arXiv:1102.4919 [gr-qc] .