Dinámica relativista de fluidos viscosos lejos del equilibrio

Cristian Santiago Vega

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Junio de 2017

TEMA: Dinámica relativista de fluidos viscosos lejos del equilibrio

ALUMNO: Cristian Santiago Vega

LU N° : 15/12

LUGAR DE TRABAJO: Departamento de Física, FCEyN, UBA

DIRECTOR DEL TRABAJO: Esteban Calzetta

FECHA DE INICIACION: Abril de 2016

FECHA DE FINALIZACION: Junio de 2017

FECHA DE EXAMEN:

INFORME FINAL APROBADO POR:

Autor	Jurado
Director	Jurado
Profesor de Tesis de Licenciatura	Jurado

Resumen

En este trabajo de seminario se estudian las restricciones impuestas por la segunda ley de la termodinámica sobre un tipo de teoría hidrodinámica viscosa relativista lejos del equilibrio llamada hidrodinámica anisótropa viscosa. Esta teoría se deriva a partir de teoría cinética relativista haciendo una expansión de la función de distribución de una partícula alrededor de un estado anisótropo en el espacio de momentos.

Se comienza derivando a partir de teoría cinética la hidrodinámica viscosa relativista cerca del equilibrio y haciendo un estudio termodinámico de la misma. Se encuentra que, de forzar el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica, surge una relación entre la parametrización de la función de distribución de una partícula y el momento de la ecuación de Boltzmann de donde se obtiene la ecuación de movimiento de la corrección viscosa. Se muestra también que esta teoría forma parte de una clase más general de teorías hidrodinámicas con creación de entropía definida positiva.

Se procede de manera análoga con la teoría anisótropa. Del cálculo de la creación de entropía se ve que, al igual que en el caso isótropo, la segunda ley impone restricciones sobre los momentos de la ecuación de Boltzmann que se pueden tomar para deducir las ecuaciones de movimiento de los grados de libertad viscosos.

Se determina que en el modelo de hidrodinámica anisótropa viscosa estudiado aquí no está garantizado el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica.

Índice

Agradecimientos

Quisiera agradecerle a mi director, Esteban Calzetta, por su invaluable ayuda y su excesiva paciencia. Este trabajo no hubiera sido posible sin su guía.

Capítulo 1

Introducción

Actualmente, una herramienta muy usada para modelar el plasma de quarks y gluones resultante de las colisiones de iones pesados es la hidrodinámica viscosa relativista, pero obtener una teoría de este tipo es una tarea no trivial [1].

La teoría hidrodinámica viscosa no relativista puede derivarse de la termodinámica, obteniéndose la conocida ecuación de Navier-Stokes. Pero su generalización relativista más natural, que se obtiene de exigir que la teoría se reduzca a la forma no relativista en el marco de referencia donde el fluido está en reposo, presenta violaciones de causalidad y soluciones inestables [2]. Al fallar la derivación termodinámica, se recurre a algo más fundamental: la teoría cinética relativista. El problema pasa a ser ahora cómo obtener de esta teoría una aproximación hidrodinámica. En el caso no relativista, se utiliza el método conocido como expansión de Chapman-Enskog [3], que lleva a la ecuación de Navier-Stokes. Este método usado en el caso relativista resulta en la generalización relativista de Navier-Stokes, por lo que debe ser rechazado.

Existe otra técnica, llamada expansión de Grad, que sí resulta en una teoría hidrodinámica viscosa relativista estable y causal. La más conocida de estas teorías hidrodinámicas es la de Israel-Stewart [4], en donde se deduce la ecuación de movimiento de la corrección viscosa del segundo momento de la ecuación de Boltzmann. Más recientemente, en [5], los autores usan la expansión de Grad para deducir infinitas ecuaciones de movimiento para la corrección viscosa, provenientes de distintos momentos de la ecuación de Boltzmann, quedando la hidrodinámica de Israel-Stewart como un caso particular.

Una de las desventajas de estas teorías es que se deducen haciendo una linealización alrededor de un estado de equilibrio, es decir, la corrección viscosa se toma como una desviación pequeña respecto al comportamiento de un fluido ideal. Hoy en día se sabe que el comportamiento del plasma de quarks y gluones en las colisiones de iones pesados se aleja considerablemente del comportamiento ideal para tiempos tempranos posteriores a la colisión o incluso para tiempos grandes en regiones alejadas del centro del plasma en expansión. Más precisamente, el sistema presenta una gran anisotropía en una dirección del espacio de momentos, por lo que parece apropiado hacer una expansión alrededor de una función de distribución que incluya la anisotropía de forma no perturbativa. Se llega así a la llamada hidrodinámica anisótropa viscosa [6].

Distintos autores han estudiado esta hidrodinámica (ver, por ejemplo, [7–11]), pero no es de nuestro conocimiento que se hayan investigado posibles restricciones sobre la teoría provenientes de la segunda ley de la termodinámica, por lo que éste será el objetivo principal de este trabajo de seminario.

En el capítulo 2 se hace una derivación termodinámica de las hidrodinámicas ideal y viscosa no relativistas y sus correspondientes generalizaciones relativistas. En el capítulo 3 se da una breve introducción a teoría cinética relativista y su relación con la hidrodinámica. Se muestra que la expansión de Chapman-Enskog resulta en la generalización relativista de Navier-Stokes y se pasa luego a la expansión de Grad. Se deriva una hidrodinámica viscosa relativista causal y estable siguiendo el método presentado en [5], pero para una parametrización más general de la función de distribución de una partícula. A continuación, se muestra que de forzar la segunda ley de la termodinámica se deduce una relación entre la parametrización de la función de distribución y el momento de la ecuación de Boltzmann de donde debe obtenerse la ecuación de movimiento de los grados de libertad viscosos. Se cierra el capítulo mostrando que estas teorías forman parte de una clase más general de teorías hidrodinámicas con creación de entropía definida positiva. En el capítulo 4, siguiendo la referencia [10], se hace un procedimiento análogo para la teoría anisótropa. Se obtienen las ecuaciones de movimiento de la hidrodinámica anisótropa viscosa sin asumir una forma en particular para la función de distribución anisótropa, pero para el cálculo de la creación de entropía se usa el ansatz propuesto por Romatschke y Strickland en [7] y estudiado también en [8,9]. Se encuentra que este modelo no garantiza el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica.

Por simplicidad se trabajará con un fluido conforme y con estadística de Maxwell-Juttner. Se usará la signatura donde la métrica de Minkowski es $\eta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y unidades naturales, donde $c = \hbar = k_B = 1$.

Capítulo 2

Derivación de la hidrodinámica a partir de la termodinámica

2.1 Fluidos ideales no relativistas

En esta sección se hace una derivación termodinámica de la dinámica no relativista de fluidos ideales [1]. Se define a un fluido ideal como aquel que fluye sin creación de entropía. Se considerará el caso de un fluido ideal descargado y de una sola componente. Este sistema en el equilibrio está completamente caracterizado por los siguientes parámetros extensivos: la energía interna U, la entropía S, el volumen V y el número de partículas N [13]. Toda la información termodinámica del sistema puede deducirse de una relación de la forma $S = S(U, V, N)$. Entonces, las primeras desviaciones de estas cantidades respecto del equilibrio se relacionan de la siguiente manera:

$$TdS = dU + PdV - \mu dN, \tag{2.1}$$

donde se han definido los parámetros intensivos $1/T \equiv \partial S/\partial U|_{V,N}$ (inversa de la temperatura), $P \equiv \partial S/\partial V|_{U,N}$ (presión) y $\mu \equiv -\partial S/\partial N|_{U,V}$ (potencial químico). En el equilibrio estas cantidades son independientes de la posición. La ecuación (2.1) es la primera ley de la termodinámica.

Si un sistema puede separarse en subsistemas no interactuantes, las cantidades extensivas son aditivas. Por lo tanto, la entropía S es una función homogénea de primer grado, es decir, $S(\lambda U, \lambda V, \lambda N) = \lambda S(U, V, N)$. Luego, la ecuación (2.1) implica:

$$TS = U + PV - \mu N. \tag{2.2}$$

Diferenciando (2.2), restándole (2.1) y dividiendo por V se obtiene la relación de Gibbs-Duhem:

$$dP = sdT + nd\mu, \tag{2.3}$$

donde $s = S/V$ y $n = N/V$ son la densidad de entropía y de partículas, respectivamente. Dividiendo (2.2) por V se obtiene:

$$Ts = \rho + P - \mu n. \tag{2.4}$$

donde $\rho = U/V$ es la densidad de energía.

Pensando ahora en una configuración fuera del equilibrio (variables intensivas inhomogéneas), a la ecuación anterior se le debe agregar un término relacionado al movimiento de masa que se construye con la densidad de momento lineal p_i y la velocidad v_i [14].

$$s = \frac{1}{T}(\rho + P - v_i p^i - \mu n). \tag{2.5}$$

Para las densidades fuera del equilibrio, vale la primera ley de la termodinámica en la siguiente forma:

$$Tds = d\rho - v_i dp^i - \mu dn. \tag{2.6}$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) implican la siguiente relación de Gibbs-Duhem:

$$dP = sdT + p^i dv_i + nd\mu. \tag{2.7}$$

Para calcular la creación de entropía empezamos derivando (2.6) respecto al tiempo:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - v_i \frac{\partial p^i}{\partial t} - \mu \frac{\partial n}{\partial t}\right). \tag{2.8}$$

La dinámica de las densidades ρ, p^i y n está dada por las leyes de conservación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla_j N_\rho^j, \tag{2.9a}$$
$$\frac{\partial p^i}{\partial t} = -\nabla_j T^{ij}, \tag{2.9b}$$
$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla_j N^j, \tag{2.9c}$$

donde se han introducido las correspondientes corrientes N_ρ^j (flujo de energía), T^{ij} (flujo de momento; simétrico [15]) y N^j (flujo de partículas). Reemplazando (2.9) en (2.8) se obtiene:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T}\left(\nabla_j N_\rho^j - v_i \nabla_j T^{ij} - \mu \nabla_j N^j\right). \tag{2.10}$$

Haciendo la descomposición $N^j = nv^j + \chi^j$, definiendo $\alpha \equiv \mu/T$ y a la corriente de entropía $S^j = \left(N_\rho^j + Pv^j - v_i T^{ij} - \mu N^j\right)/T$, y usando las relaciones (2.5) y (2.7) se llega a la siguiente expresión para la creación de entropía [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_j S^j = {} & \left[N_\rho^j - (\rho + P)v^j - \left(T^{ij} - P\delta^{ij} - p^i v^j\right) v_i\right] \nabla_j \left(\frac{1}{T}\right) \\ & - \frac{1}{T}\left(T^{ij} - P\delta^{ij} - p^i v^j\right) \nabla_j v_i - \frac{1}{T}\chi^j \nabla_j \alpha.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Por definición, para un fluido ideal debe valer:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_j S^j = 0. \tag{2.12}$$

Hasta ahora se ha dejado abierta la posibilidad de que N_ρ^j y N^j no sean paralelas y por lo tanto debe adoptarse alguna convención sobre qué es la velocidad del fluido. Se adoptará la prescripción de Landau-Lifshitz, a saber, la velocidad v^j es tal que $v^j = 0$ implica $N_\rho^j = 0$ y $p^j = 0$ [16]. Con esta convención, y usando (2.12), se obtiene:

$$T^{ij} = p^i v^j + P\delta^{ij}, \tag{2.13a}$$
$$N_\rho^j = (\rho + P)v^j, \tag{2.13b}$$
$$\chi^j = 0. \tag{2.13c}$$

Notar que la simetría de T^{ij} junto con la ecuación (2.13a) implica que p^i tiene que ser proporcional a v^i.

Reemplazando (2.13) en las leyes de conservación se obtienen las ecuaciones de movimiento para el fluido ideal:

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + v^j \nabla_j p^i + \nabla^i P = 0, \tag{2.14a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho + P) v^j = 0, \tag{2.14b}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_j n v^j = 0. \tag{2.14c}$$

De esta manera se llega a un sistema de cinco ecuaciones con seis incógnitas (ρ, P, n y v^i). El sistema se cierra finalmente con una ecuación de estado $P = P(\rho, n)$.

La ecuación (2.14a) es la llamada ecuación de Euler. Las ecuaciones (2.14b) y (2.14c) son ecuaciones de continuidad. El mismo resultado podría haberse obtenido haciendo un análisis dinámico basado en las leyes de Newton [15, 16].

2.2 Fluidos viscosos no relativistas

Para fluidos viscosos la creación de entropía debe ser positiva. Es decir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_j S^j = &\left[N^j_\rho - (\rho + P) v^j - \left(T^{ij} - P\delta^{ij} - p^i v^j\right) v_i\right] \nabla_j \left(\frac{1}{T}\right) \\ &- \frac{1}{T}\left(T^{ij} - P\delta^{ij} - p^i v^j\right) \nabla_j v_i - \frac{1}{T}\chi^j \nabla_j \alpha \geq 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Entoces, se propone:

$$T^{ij} = T^{ij}_0 + \tau^{ij}, \tag{2.16a}$$

$$N^j_\rho = N^j_{\rho 0} + v_i \tau^{ij}, \tag{2.16b}$$

$$\chi^j = -\kappa \nabla^j \alpha. \tag{2.16c}$$

donde T^{ij}_0 y $N^j_{\rho 0}$ están dados por las ecuaciones (2.13), y κ es la movilidad. El tensor τ^{ij} se define como:

$$\tau^{ij} = -2\eta \sigma^{ij} - \xi \delta^{ij} \nabla_k v^k, \tag{2.17a}$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla^i v^j + \nabla^j v^i\right) - \frac{1}{3}\delta^{ij} \nabla_k v^k. \tag{2.17b}$$

Los coeficientes η y ξ son, respectivamente, la viscosidad de corte y la viscosidad de volumen. Reemplazando (2.16)y (2.17) en (2.15) se obtiene:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla_j S^j = \kappa \left(\nabla_j \alpha\right)^2 + \frac{4\eta}{T}\sigma^{ij}\sigma_{ij} + \frac{\xi}{T}\left(\nabla_j v^j\right)^2 \geq 0. \tag{2.18}$$

Notar que la expresión anterior implica η, ξ, $\kappa \geq 0$. Si no hay viscosidad ni difusión, se vuelve al fluido ideal. Las ecuaciones de movimiento ahora son:

$$\frac{\partial p^i}{\partial t} + \nabla_j p^i v^j + \delta^{ij} \nabla_j P = \eta \nabla^2 v^i + \left(\frac{\eta}{3} + \xi\right) \nabla^i \nabla_j v^j, \tag{2.19a}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_j (\rho + P) v^j = \nabla_j (v_i \tau^{ij}), \tag{2.19b}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_j n v^j = \kappa \nabla^2 \alpha. \tag{2.19c}$$

La ecuación (2.19a) es la conocida ecuación de Navier-Stokes. Los coeficientes η, ξ y κ son función de T y P, que en general no van a ser homogéneos y, por lo tanto, también deberían ser afectados por ∇_j. Sin embargo, en la mayoría de los casos estos coeficientes no varían apreciablemente a lo largo del fluido y se los puede considerar como constantes [16].

2.3 Fluidos ideales relativistas

En esta sección se presenta la generalización relativista de la teoría de fluidos ideales expuesta en 2.1. La teoría que se desarrollará a continuación es válida en una métrica arbitraria $g^{\mu\nu}$. Las derivadas serán derivadas covariantes respecto a la conección de Levi-Civita ($g_{\mu\nu;\rho} = 0$). Los índices griegos van de 0 a 3, donde el 0 se refiere a la coordenada temporal $x^0 = t$ y $i = 1, 2, 3$ se refiere a las coordenadas espaciales x^i (en esta sección los índices latinos siempre se referirán a coordenadas espaciales).

Construiremos la teoría covariante basándonos en las siguientes reglas [18]:
a) Las cantidades intensivas T, P y μ son ahora escalares que representan la correspondiente magnitud en un evento dado, medida en un marco de referencia localmente en reposo (LRF: local rest frame). Siguiendo la prescripción de Landau-Lifshitz [16], vamos a definir al LRF como aquel marco de referencia donde se anula localmente el flujo de energía.
b) Las cantidades extensivas S, V y N están asociadas a cuadricorrientes S^μ, u^μ y N^μ, respectivamente. u^μ es la cuadrivelocidad del fluido, que en el espacio de Minkowski vale:

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, v^i), \tag{2.20}$$

y cumple con la restricción $u^\mu u_\mu = -1$ (sólo tres de las cuatro componentes son independientes).

Si un observador mide en el LRF una densidad x y un flujo N_x^i para una magnitud X, se tiene $X^\mu_{LRF} = (x, N_x^i)$. Para un marco de referencia en general, vale:

$$X^\mu = xu^\mu + N_x^i \Delta^\mu{}_i. \tag{2.21}$$

donde se introdujo el proyector espacial $\Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu$, $u_\nu \Delta^{\mu\nu} = 0$. Si bien la componente 0 depende del marco de referencia, en general le llamaremos densidad x a X^0 en el LRF: $x = -u_\mu X^\mu$. Si X es una cantidad conservada, entonces $X^\mu_{;\mu} = 0$, donde ";" representa a la derivada covariante. Respecto a la creación de entropía, la segunda ley de la termodinámica exige que el incremento de entropía dentro de un volumen dado debe ser mayor que el flujo de entropía a través de la frontera de ese volumen: $S^\mu_{;\mu} \geq 0$.
c) La energía y el momento forman parte de un tensor simétrico de orden 2 , llamado tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$. T^{00} es la densidad de energía medida por cualquier observador, T^{0j} es el flujo de energía, T^{i0} es la densidad de momento lineal y T^{ij} es el flujo de momento lineal. Notar que la simetría del tensor de energía-momento implica que la densidad de momento lineal es igual al flujo de energía (recordar que aquí estamos tomando $c = 1$, de lo contrario habría un factor c^2 de diferencia). Llamaremos ρ a la densidad de energía en el LRF: $\rho = u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}$. En la convención de Landau-Lifshitz la velocidad u^μ y la densidad de energía ρ se obtienen como solución de la ecuación de autovalores $T^{\mu\nu} u_\nu = -\rho u^\mu$.

Ya estamos en condiciones de presentar la teoría relativista de fluidos ideales. Según lo expuesto, ahora la densidad de partículas es la componente 0 de un cuadrivector N^μ. Llamaremos n a esta densidad en el LRF. En el marco de referencia en reposo debemos recuperar el resultado no relativista, con lo que $N^i_{LRF} = nv^i = 0$. Luego:

$$N^\mu_{LRF} = (n, 0, 0, 0). \tag{2.22}$$

Por otro lado tenemos $T^{00}_{LRF} = \rho$ y $T^{ij}_{LRF} = P\delta^{ij}$ (ecuación (2.13a) con $v^j = 0$). Entonces:

$$T^{\mu\nu}_{LRF} = \mathrm{diag}(\rho, P, P, P). \tag{2.23}$$

Además:

$$u^\mu_{LRF} = \delta^\mu_0, \quad \Delta^{\mu\nu}_{LRF} = \mathrm{diag}(0, 1, 1, 1). \tag{2.24}$$

Por lo tanto, en un marco de referencia arbitrario:

$$N^{\mu} = nu^{\mu}, \quad T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu} + P\Delta^{\mu\nu}. \tag{2.25}$$

Respecto a la entropía, llamando s a la densidad en el LRF, que debe cumplir con la ecuación (2.4), se tiene:

$$S^{\mu} = (s, 0, 0, 0). \tag{2.26}$$

En un marco de referencia arbitrario, debe valer $S^{\mu} = su^{\mu}$ o, usando (2.4):

$$S^{\mu} = -\beta_{\nu} T^{\mu\nu} + P\beta^{\mu} - \alpha N^{\mu}, \tag{2.27}$$

donde se ha definido $\beta^{\mu} \equiv u^{\mu}/T$. Para calcular la creación de entropía, tomamos la derivada covariante de la expresión anterior:

$$S^{\mu}_{;\mu} = -T^{\mu\nu}_{;\mu}\beta_{\nu} - T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu} + P_{;\mu}\beta^{\mu} + P\beta^{\mu}_{;\mu} - \alpha_{;\mu}N^{\mu} - \alpha N^{\mu}_{;\mu} \tag{2.28}$$

Trabajemos los términos $T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu}$ y $P\beta^{\mu}_{;\mu}$:

$$T^{\mu\nu}\beta_{\nu;\mu} = (\rho u^{\mu} u^{\nu} + P\Delta^{\mu\nu}) \left(\frac{u_{\nu;\mu}}{T} - \frac{u_{\nu} T_{;\mu}}{T^2} \right) = \frac{P\theta}{T} + \frac{\rho \dot{T}}{T^2}, \tag{2.29a}$$

$$P\beta^{\mu}_{;\mu} = \frac{P\theta}{T} - \frac{P\dot{T}}{T^2}, \tag{2.29b}$$

donde se ha definido $\theta \equiv u^{\mu}_{;\mu} = \Delta^{\mu\nu} u_{\nu;\mu}$ y la derivada temporal $\dot{a} \equiv u^{\mu} a_{;\mu}$. De la relación de Gibbs-Duhem (2.7) se deduce:

$$P_{;\mu}\beta^{\mu} = sT_{;\mu}\beta^{\mu} + n\mu_{;\mu}\beta^{\mu} = \frac{\rho + P}{T^2}\dot{T} + \dot{\alpha} n. \tag{2.30}$$

Reemplazando (2.29) y (2.30) en (2.28) se obtiene:

$$S^{\mu}_{;\mu} = -T^{\mu\nu}_{;\mu}\beta_{\nu} - \alpha N^{\mu}_{;\mu}. \tag{2.31}$$

Notar que la condición $S^{\mu}_{;\mu} = 0$ (fluido ideal) implica las leyes de conservación:

$$N^{\mu}_{;\mu} = 0, \quad T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \tag{2.32}$$

Reemplazando (2.25) en (2.32) y proyectando la parte temporal y espacial de la conservación de la energía-momento, se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$N^{\mu}_{;\mu} = \dot{n} + n\theta = 0, \tag{2.33a}$$

$$u_{\nu} T^{\mu\nu}_{;\mu} = -\dot{\rho} - (\rho + P)\theta = 0, \tag{2.33b}$$

$$\Delta^{\alpha}_{\nu} T^{\mu\nu}_{;\mu} = (\rho + P)\dot{u^{\alpha}} + \nabla^{\alpha} P = 0, \tag{2.33c}$$

donde se ha definido a la derivada espacial $\nabla^{\alpha} a = \Delta^{\alpha\nu} a_{;\nu}$.

Al igual que en el caso no relativista, se tienen cinco ecuaciones con seis incógnitas, y el sistema se cierra con una ecuación de estado $P = P(\rho, n)$.

2.4 Fluidos viscosos relativistas

2.4.1 Navier-Stokes relativista

En la teoría no relativista de fluidos viscosos se tiene $T^{ij} = T_0^{ij} + \tau^{ij}$. Entonces, el tensor de energía momento en el LRF queda:

$$T^{\mu\nu}_{LRF} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & P\delta^{ij} + \tau^{ij} \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

En un marco de referencia arbitrario podemos escribir:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu}, \tag{2.35}$$

donde $T_0^{\mu\nu}$ está dado por (2.25) y el tensor de viscosidad $\Pi^{\mu\nu}$ mide las desviaciones respecto al comportamiento de fluido ideal. Proponer un modelo para $\Pi^{\mu\nu}$ equivale a proponer un modelo de hidrodinámica viscosa relativista.

Respecto a la corriente de partículas, se tiene:

$$N^{\mu} = N_0^{\mu} + \chi^{\mu}. \tag{2.36}$$

donde N_0^{μ} está dado por (2.25).

Al igual que antes, se define la velocidad del fluido de forma tal que en el LRF se anule el flujo de energía: $u_\nu T^{\mu\nu} = -\rho u^{\mu}$. Como también vale $u_\nu T_0^{\mu\nu} = -\rho u^{\mu}$ se obtiene:

$$u_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0. \tag{2.37}$$

Otra prescripción muy usada para definir la velocidad es la de Eckart, donde u^{μ} se define de manera de anular la corriente N^{μ} en el LRF, con lo cual la corriente de difusión χ^{μ} se hace cero [19]. Para otras definiciones de la velocidad puede consultarse [20].

De las leyes de conservación se obtiene:

$$N^{\mu}_{;\mu} = \dot{n} + n\theta + \chi^{\mu}_{;\mu} = 0, \tag{2.38a}$$

$$u_\nu T^{\mu\nu}_{;\mu} = -\dot{\rho} - (\rho + P)\theta - \Pi^{\mu\nu} u_{(\nu;\mu)} = 0, \tag{2.38b}$$

$$\Delta^{\alpha}_{\nu} T^{\mu\nu}_{;\mu} = (\rho + P)\dot{u^{\alpha}} + \nabla^{\alpha} P + \Delta^{\alpha}_{\nu} \Pi^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \tag{2.38c}$$

donde $u_{(\nu;\mu)}$ es la proyección simétrica de $u_{\nu;\mu}$. Para llegar a (2.38b) se usó la ortogonalidad entre u^{μ} y $\Pi^{\mu\nu}$: $u_\nu \Pi^{\mu\nu}_{;\mu} = -\Pi^{\mu\nu} u_{\nu;\mu}$.

Para obtener la generalización relativista de Navier-Stokes, se propone:

$$\Pi^{\mu\nu} = -2\eta\sigma^{\mu\nu} - \xi\Delta^{\mu\nu}\theta, \tag{2.39a}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\nabla^{\mu} v^{\nu} + \nabla^{\nu} v^{\mu}\right) - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\theta. \tag{2.39b}$$

Por simplicidad, tomemos $\xi = 0$. Esta condición vale para fluidos conformes, que son los que se tratarán en este trabajo (ver sección 3.2). Entonces, la conservación de la energía-momento queda:

$$u_\nu T^{\mu\nu}_{;\mu} = -\dot{\rho} - (\rho + P)\theta + 2\eta\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} = 0, \tag{2.40a}$$

$$\Delta^{\alpha}_{\nu} T^{\mu\nu}_{;\mu} = (\rho + P)\dot{u^{\alpha}} + \nabla^{\alpha} P - \eta\Delta^{\alpha}_{\nu}\sigma^{\mu\nu}_{;\mu} = 0. \tag{2.40b}$$

La ecuación (2.40b) es la forma relativista de Navier-Stokes. Como $\sigma^{\mu\nu}$ depende únicamente de la velocidad, agregándole una ecuación de estado $P = P(\rho)$ a (2.40) se consigue un sistema cerrado de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. Sin embargo, esta prescripción permite la propagación de señales superlumínicas y presenta soluciones inestables [2].

Capítulo 3

Derivación de la hidrodinámica a partir de teoría cinética

3.1 Ecuación de Boltzmann relativista

En la teoría de Boltzmann relativista de gases diluidos se tiene la siguiente ecuación de transporte [1, 12]:

$$p^{\mu}\partial_{\mu}f = I_{\mathrm{col}}. \tag{3.1}$$

Esta es la llamada ecuación de Boltzmann. El término de colisión I_{col} es en principio desconocido.

Aquí simplificaremos la ecuación de Boltzmann relativista proponiendo un término de colisión I_{col} lineal en Z bajo la prescripción de Anderson-Witting [21]:

$$I_{\mathrm{col}} = \frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}}u_{\mu}p^{\mu}f_0 Z. \tag{3.2}$$

Esto se conoce como aproximación RTA (relaxation time approximation).

3.2 Relación entre variables hidrodinámicas y teoría cinética

La corriente N^{μ} y el tensor de energía-momento $T^{\mu\nu}$ corresponden a los momentos primero y segundo de la función de distribución de una partícula f [17]:

$$N^{\mu} = \langle p^{\mu}\rangle, \quad T^{\mu\nu} = \langle p^{\mu}p^{\nu}\rangle, \tag{3.3}$$

donde se ha definido:

$$\langle A\rangle \equiv \int DpAf, \quad Dp \equiv \frac{2d^4p\delta(p^2)}{(2\pi)^3} = \frac{d^4p}{(2\pi)^3 p}\delta(p^0 - p). \tag{3.4}$$

De esta manera, las leyes de conservación resultan ser los momentos cero y primero de la ecuación de Boltzmann.

Descomponemos al momento p^{μ} en una componente paralela a u^{μ} y otra transversal:

$$p^{\mu} = p_u u^{\mu} + p^{\langle\mu\rangle}, \tag{3.5}$$

donde $p_u = -u_{\nu}p^{\nu}$ y $p^{\langle\mu\rangle} = \Delta^{\mu\nu}p_{\nu}$. Reemplazando en (3.3) se llega a:

$$N^{\mu} = \langle p_u\rangle u^{\mu} + \langle p^{\langle\mu\rangle}\rangle, \tag{3.6a}$$

$$T^{\mu\nu} = \langle p_u^2\rangle u^{\mu}u^{\nu} + \langle p_u p^{\langle\nu\rangle}\rangle u^{\mu} + \langle p_u p^{\langle\mu\rangle}\rangle u^{\nu} + \langle p^{\langle\mu\rangle}p^{\langle\nu\rangle}\rangle. \tag{3.6b}$$

Definimos ahora a la densidad de energía $\rho \equiv u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}$, a la densidad de partículas $n \equiv -u_\mu N^\mu$, a la corriente de difusión $\chi^\mu \equiv \Delta^{\mu\nu} N_\nu$ y al flujo de energía $h^\alpha \equiv \Delta^\alpha_\mu u_\nu T^{\mu\nu}$. Entonces tenemos:

$$\rho = \langle p_u^2 \rangle, \quad n = \langle p_u \rangle, \quad h^\mu = \langle p_u p^{\langle\mu\rangle} \rangle, \quad \chi^\mu = \langle p^{\langle\mu\rangle} \rangle. \tag{3.7}$$

Adoptaremos nuevamente la definición de velocidad de Landau-Lifshitz:

$$T^{\mu\nu} u_\nu = -\rho u^\mu. \tag{3.8}$$

Esto implica la nulidad del flujo de energía: $h^\mu = 0$.

Respecto al término $\langle p^{\langle\mu\rangle} p^{\langle\nu\rangle} \rangle$, proponemos la siguiente descomposición:

$$\langle p^{\langle\mu\rangle} p^{\langle\nu\rangle} \rangle = \langle p^{\langle\mu} p^{\nu\rangle} \rangle + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \langle \Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \rangle, \tag{3.9}$$

donde $p^{\langle\mu} p^{\nu\rangle} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$ y $\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = (\Delta^\mu_\alpha \Delta^\nu_\beta + \Delta^\mu_\beta \Delta^\nu_\alpha)/2 - \Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta}/3$ (proyector transverso de traza nula). De esta separación obtenemos:

$$P_0 + \Pi = \langle \Delta_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \rangle / 3, \quad \pi^{\mu\nu} = \langle p^{\langle\mu} p^{\nu\rangle} \rangle, \tag{3.10}$$

donde P_0 es la presión en el equilibrio y Π y $\pi^{\mu\nu}$ son correcciones viscosas al tensor de energía-momento. Notar que $\pi^\mu_\mu = 0$ y que por la prescripción de Landau-Lifshitz $\pi^{\mu\nu}$ es transverso a u^μ: $u_\nu \pi^{\mu\nu} = u_\nu (T^{\mu\nu} - T_0^{\mu\nu}) = 0$. Como aquí sólo trateremos el caso de un fluido conforme, tomamos $\Pi = 0$ y $\chi^\mu = 0$.

Proponemos ahora una expansión de f alrededor de una función de distribución en equilibrio local f_0, donde por equilibrio local se entiende una configuración en la cual las cantidades termodinámicas intensivas están bien definidas en cada punto del fluido pero no son necesariamente homogéneas. En principio, no es necesario que f_0 corresponda a un estado de equilibrio y en el capítulo 4 se verá un caso en que se trata de una función de distribución lejos del equilibrio.

$$f = f_0(1 + Z) \tag{3.11}$$

En la ecuación anterior $Z = Z(x^\mu, p^\mu)$. Vamos a considerar desviaciones pequeñas respecto al equilibrio local: $|Z| << 1$. Como estamos considerando un fluido conforme, el estado de equilibrio local f_0 está caracterizado únicamente por la temperatura $T(x^\mu)$. Fuera del equilibrio la temperatura carece de significado físico, por lo que no hay una única f_0 correspondiente a cada f. Elegiremos f_0 de forma tal que la entropía real y la de equilibrio local difieran en términos de segundo orden en las desviaciones respecto al equilibrio. Esto se cumple cuando se da la siguiente condición [18]:

$$\rho = \rho_0 = \langle p_u^2 \rangle_0, \tag{3.12}$$

donde:

$$\langle A \rangle_0 \equiv \int Dp A f_0. \tag{3.13}$$

Otras formas de elegir f_0 se discuten en [20, 22, 23].

Reemplazando la expansión (3.11) en (3.10) se obtiene:

$$P_0 = \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_0 + \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z = \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta} T_0^{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z, \tag{3.14a}$$

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_0 + \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} T_0^{\alpha\beta} + \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z, \tag{3.14b}$$

donde $T_0^{\alpha\beta} = \langle p^\alpha p^\beta \rangle_0$ es el tensor de energía-momento en el estado f_0 y:

$$\langle A \rangle_Z \equiv \int DpAf_0 Z. \tag{3.15}$$

Usando que $T_0^{\alpha\beta} = \rho_0 u^\alpha u^\beta + P_0 \Delta^{\alpha\beta}$:

$$0 = \frac{1}{3}\Delta_{\alpha\beta}\langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z, \tag{3.16a}$$

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\langle p^\alpha p^\beta \rangle_Z. \tag{3.16b}$$

De esta manera queda garantizado que cuando $Z = 0$, $\pi^{\mu\nu}$ se anula.

Todos los grados de libertad del fluido se encuentran en $T^{\mu\nu}$, que ahora puede escribirse de la siguiente manera:

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + P_0 \Delta^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}. \tag{3.17}$$

La simetría conforme implica que $T^\mu_\mu = 0 = -\rho_0 + 3P_0$, de donde se obtiene la ecuación de estado $P_0 = \rho_0/3$. Reemplazando en (3.17):

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu} \right) + \pi^{\mu\nu}. \tag{3.18}$$

El tensor de energía momento es un cuadritensor simétrico de segundo orden, con lo que tiene diez componentes independientes. Sin embargo, al tener la restricción $T^\mu_\mu = 0$ se pierde un grado de libertad (el correspondiente a Π), quedando nueve componentes independientes. Los grados de libertad restantes son la densidad de energía ρ_0, las tres componentes independientes de la velocidad u^μ y las cinco componentes de la corriente viscosa $\pi^{\mu\nu}$. ρ_0 depende únicamente de la temperatura:

$$\rho_0 = \int Dp\, p_u^2 f_0 = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 p_u} p_u^2 e^{-p_u/T} = \frac{3}{\pi^2}T^4. \tag{3.19}$$

La conservación de la energía-momento da cuatro ecuaciones de movimiento:

$$\dot{T} + \frac{T}{3}\theta + \frac{\pi^2}{12}\frac{\pi^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}{T^3} =0, \tag{3.20a}$$

$$\nabla^\alpha T + \frac{\pi^2}{3}\frac{\Delta^\alpha_\nu \dot{u}^\nu}{T^3} + \frac{\pi^2}{4}\frac{\Delta^\alpha_\nu \pi^{\mu\nu}_{;\mu}}{T^3} =0. \tag{3.20b}$$

El sistema se cierra encontrando la ecuación de movimiento para $\pi^{\mu\nu}$.

Para terminar esta sección, escribimos la corriente de entropía asumiento una estadística de Maxwell-Juttner [17]:

$$S^\mu = \int Dp\, p^\mu f(1 - \ln f). \tag{3.21}$$

Haciendo una expansión de Taylor de $f\ln f$ hasta segundo orden, se obtiene:

$$f\ln f = f_0(1+Z)(\ln f_0 + \ln(1+Z)) \approx f_0(1+Z)\left(\ln f_0 + Z - \frac{Z^2}{2}\right) \approx f\ln f_0 + f_0 Z + f_0\frac{Z^2}{2}. \tag{3.22}$$

Reemplazando en (3.21) y usando que para Maxwell-Juttner $f_0 = e^{\beta_\nu p^\nu}$:

$$\begin{aligned} S^\mu &= \int Dp\, p^\mu f - \int Dp\, p^\mu f_0 Z - \int Dp\, p^\mu f\ln f_0 - \frac{1}{2}\int Dp\, p^\mu f_0 Z^2, \\ &= N_0^\mu - \beta_\nu T_0^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int Dp\, p^\mu f_0 Z^2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde se ha usado que $\beta_\nu T^{\mu\nu} = \beta_\nu T_0^{\mu\nu}$. Notar que, como se había adelantado en párrafos anteriores, la entropía real difiere de la entropía en el equilibrio local en una cantidad de segundo orden en Z.

3.3 Chapman-Enskog

En esta sección trabajaremos con el término de colisión lineal (3.2). El procedimiento de Chapman-Enskog consiste en una expansión de Z en potencias del tiempo de relajación $\tau_{\rm rel}$. Se propone entonces la siguiente parametrización [1]:

$$Z = \tau_{\rm rel} z_1 + \tau_{\rm rel}^2 z_2 + ... \tag{3.24}$$

Escribamos la ecuación de Boltzmann relativista bajo la aproximación RTA:

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu [f_0(1+Z)] =& \frac{1}{\tau_{\rm rel}} u_\mu p^\mu f_0 Z, \\ p^\mu \partial_\mu f_0 + p^\mu \partial_\mu (f_0 Z) =& \frac{1}{\tau_{\rm rel}} u_\mu p^\mu f_0 Z. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Las derivadas espaciales $\nabla^\mu u^\nu$ y $\nabla^\mu T$ son cantidades de orden 0 en $\tau_{\rm rel}$ y las derivadas temporales $\dot{u}^\mu$ y $\dot{T}$ se obtienen de la conservación de la energía-momento. Reemplazando (3.24) en la ecuación anterior e igualando los términos de orden cero se obtiene:

$$z_1 = -\frac{p^\mu p^\nu}{p_u} \beta_{\nu,\mu}. \tag{3.26}$$

Desarrollemos $p^\mu p^\nu \beta_{\nu,\mu}$:

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu \beta_{\nu,\mu} =& p^\mu p^\nu \beta_{(\nu,\mu)} = \frac{p^\mu p^\nu}{T}\left[u_{(\nu,\mu)} - \frac{T_{,(\mu} u_{\nu)}}{T}\right] = \frac{p^\mu p^\nu}{T}\left[-u_{(\mu}\dot{u}_{\nu)} + \sigma_{\mu\nu} + \frac{\Delta_{\mu\nu}}{3}\theta - \frac{1}{2T} T_{(,\mu} u_{\nu)}\right], \\ =& \frac{p^\mu p^\nu}{T}\left[\sigma_{\mu\nu} + \frac{\Delta_{\mu\nu}}{3}\theta + u^\mu u^\nu \frac{\dot{T}}{T} - \frac{1}{2} u_{(\mu}\Delta^\lambda_{\nu)}\left(\frac{T_{,\lambda}}{T} + \dot{u}_\lambda\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De las ecuaciones de conservación (3.20a) y (3.20b) se obtiene:

$$\frac{\dot{T}}{T} \approx -\frac{\theta}{3}, \quad \Delta^\alpha_\nu \dot{u}^\nu \approx -\frac{\nabla^\alpha T}{T}, \tag{3.28}$$

donde nos hemos quedado a orden cero en $\tau_{\rm rel}$. Reemplazando en (3.27):

$$p^\mu p^\nu \beta_{\nu,\mu} = \frac{p^\mu p^\nu}{T}\left(\sigma_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{3}\theta\right) = \frac{p^\mu p^\nu}{T}\sigma_{\mu\nu}. \tag{3.29}$$

Luego:

$$z_1 = -\frac{p^\mu p^\nu}{T p_u}\sigma_{\mu\nu}. \tag{3.30}$$

Con este resultado podemos calcular $\pi^{\mu\nu}$ a primer orden en $\tau_{\rm rel}$:

$$\pi^{\mu\nu} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\int Dp\, p^\alpha p^\beta f_0 Z \approx -\tau_{\rm rel}\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\frac{\sigma_{\rho\sigma}}{T}\int \frac{Dp}{p_u} p^\alpha p^\beta p^\rho p^\sigma f_0. \tag{3.31}$$

La integral es isótropa y simétrica ante intercambio de cualquier par de índices de Lorentz. Entonces, se puede plantear:

$$\int \frac{Dp}{p_u} p^\alpha p^\beta p^\rho p^\sigma f_0 = a u^\alpha u^\beta u^\rho u^\sigma + b(u^\alpha u^\beta \Delta^{\rho\sigma} + \text{permutaciones}) + c(\Delta^{\alpha\beta}\Delta^{\rho\rho} + \text{permutaciones}). \tag{3.32}$$

Contrayendo cualquier par de índices y usando que $p_\mu p^\mu = 0$:

$$\begin{aligned} 0 =&(3b-a)u^\rho u^\sigma + (5c-b)\Delta^{\rho\sigma}, \\ b =&\frac{a}{3}, \quad c = \frac{a}{15}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Luego:

$$\int \frac{Dp}{p_u} p^\alpha p^\beta p^\rho p^\sigma f_0 = a\left[u^\alpha u^\beta u^\rho u^\sigma + \frac{1}{3}(u^\alpha u^\beta \Delta^{\rho\sigma} + \text{permutaciones}) + \frac{1}{15}(\Delta^{\alpha\beta}\Delta^{\rho\rho} + \text{permutaciones})\right]. \tag{3.34}$$

Tomando todos los índices iguales a cero:

$$a = \int Dp\, p_u^3 f_0 = \frac{1}{2\pi^2}\int dp_u p_u^4 e^{-p_u/T} = \frac{12}{\pi^2}T^5. \tag{3.35}$$

Finalmente:

$$\pi^{\mu\nu} = -\frac{8}{5\pi^2}\tau_{\text{rel}} T^4 \sigma^{\mu\nu}. \tag{3.36}$$

Nótese que se ha llegado a la teoría de Navier-Stokes relativista con $\eta = 4\tau_{\text{rel}}T^4/(5\pi^2)$ (ver sección (2.4.1)), por lo que esta expansión nos lleva a los mismos problemas de causalidad y estabilidad ya mencionados.

El problema es que, mientras que $\pi^{\mu\nu}$ debería introducir nuevos grados de libertad dinámicos, el resultado aquí obtenido sugiere que la evolución temporal de la corrección viscosa está únicamente ligada a la evolución de T y de u^μ. En realidad, hay un tiempo de relajación asociado a la evolución de $\pi^{\mu\nu}$, pero en la teoría de Navier-Stokes es nulo. Tenemos que recurrir entonces a otro procedimiento que nos permita encontrar una ecuación de movimiento para $\pi^{\mu\nu}$.

3.4 Grad

3.4.1 Expansión de Z en tensores irreducibles

Recordamos que estamos trabajando con un gas conforme y estadística de Maxwell-Juttner; para ver el caso más general, consultar [5, 27]. Siguiendo estas referencias, haremos una expansión de Z en el espacio de momentos usando una base de tensores irreducibles ante transformaciones de Lorentz que dejan invariante a la cuadrivelocidad u^μ:

$$1, \quad p^{\langle\mu\rangle}, \quad p^{\langle\mu}p^{\nu\rangle}, \quad p^{\langle\mu}p^\nu p^{\lambda\rangle}, ... \tag{3.37}$$

donde se ha hecho la definición $A^{\langle\mu_1...\mu_l\rangle} \equiv \Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l}A^{\nu_1...\nu_l}$, siendo $\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l}$ el proyector sobre el espacio ortogonal a u^μ ($u_{\mu_i}\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l} = u^{\nu_i}\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l} = 0$), simétrico en los índices μ_i y ν_j por separado y, para $l > 1$, de traza nula ($g_{\mu_i\mu_j}\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l} = g^{\nu_i\nu_j}\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\nu_1...\nu_l} = 0$, pero $\Delta^{\mu_1...\mu_l}_{\mu_1...\mu_l} = 2l+1$). Estos tensores forman un conjunto completo y ortogonal en el sentido de la relación (3.38), análogo a los armónicos esféricos [5, 27–29]:

$$\int DpF(p_u)p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_m\rangle}p_{\langle\nu_1}...p_{\nu_n\rangle} = \frac{m!\delta_{mn}}{(2m+1)!!}\Delta^{\mu_1...\mu_m}_{\nu_1...\nu_m}\int DpF(p_u)p_u^{2m}, \tag{3.38}$$

donde $F(p_u)$ es una función arbitraria de $p_u = -u_\nu p^\nu$. La demostración de la relación anterior puede encontrarse en el apéndice C. La ortogonalidad facilitará la obtención de los coeficientes de la expansión de Z. Los proyectores $\Delta^{\mu_1\cdots\mu_l}_{\nu_1\cdots\nu_l}$, construidos originalmente en [29], se calculan como:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mu_1\cdots\mu_l\nu_1\cdots\nu_l} =& \sum_{k=0}^{[l/2]} C(l,k)(l-2k)! \left(\frac{2^k k!}{l!}\right)^2 \\
&\times \sum_{P^l_\mu P^l_\nu} \Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_l\nu_l}, \qquad (3.39)\\
C(l,k) =& (-1)^k \frac{(l!)^2(2l-2k)!}{k!(2l)!(l-k)!(l-2k)!},
\end{aligned}$$

donde $[a]$ denota la parte entera de a y $\sum_{P^l_\mu P^l_\nu}$ es la sumatoria sobre todas las permutaciones distintas de los índices μ_i y ν_i (por separado; no se permutan los índices μ_i y ν_i entre sí). Para ver cómo se construyen estos proyectores, consultar el apéndice B. Notar que si tomamos $l=1$ recuperamos $\Delta^{\mu\nu}$, y si tomamos $l=2$ obtenemos $\Delta^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = (\Delta^{\mu_1\nu_1}\Delta^{\mu_2\nu_2} + \Delta^{\mu_1\nu_2}\Delta^{\mu_2\nu_1})/2 - \Delta^{\mu_1\mu_2}\Delta^{\nu_1\nu_2}/3$.

Escribamos ahora la expansión de Z en la base (3.37):

$$Z = p_u^\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^{\langle\mu_1\cdots\mu_l\rangle} p_{\langle\mu_1}\cdots p_{\mu_l\rangle}, \qquad (3.40)$$

En la parametrización anterior se ha introducido el número entero α, que se ajustará de manera tal que se cumpla la segunda ley de la termodinámica. Los coeficientes $\lambda^{\langle\mu_1\cdots\mu_l\rangle}$ son tensores de orden l que dependen únicamente de p_u y pueden expandirse en una base ortogonal de polinomios adimensionales $P_n^{(l)}$, donde n es el orden del polinomio:

$$\lambda^{\langle\mu_1\cdots\mu_l\rangle} = \sum_{n=0}^{N_l} c_n^{\langle\mu_1\cdots\mu_l\rangle} P_n^{(l)}, \qquad (3.41a)$$

$$P_n^{(l)} = \sum_{r=0}^{n} a_{nr}^{(l)} p_u^r. \qquad (3.41b)$$

En principio N_l debe ser infinito, pero en la práctica la expansión (3.41a) es truncada.

Necesitamos hallar los coeficientes $c_n^{\langle\mu_1\cdots\mu_l\rangle}$. Usando (3.40), (3.38) y (3.41a), podemos escribir:

$$\int Dp\, p^{\langle\nu_1}...p^{\nu_{l'}\rangle} P_n^{(l)} Z f_0 = \frac{l'!}{(2l'+1)!!} \sum_{m=0}^{N_{l'}} c_m^{\langle\nu_1\cdots\nu_{l'}\rangle} \int Dp P_m^{(l')} P_n^{(l')} p_u^{2l'+\alpha} f_0. \qquad (3.42)$$

Podemos construir los polinomios (3.41b) de manera que cumplan con la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\frac{1}{(2l+\alpha+1)!} \int Dp P_m^{(l)} P_n^{(l)} p_u^{2l+\alpha} f_0 = \frac{\delta_{mn}}{2\pi^2} T^{2l+\alpha+2}. \qquad (3.43)$$

Haciendo la sustitución $p_u/T = x$ y definiendo:

$$\tilde{P}_n^{(l)}(x) \equiv \sum_{r=0}^{n} \tilde{a}_{nr}^{(l)} x^r, \qquad (3.44)$$

$$\tilde{a}_{nr}^{(l)} \equiv a_{nr}^{(l)} T^r,$$

se obtiene:

$$\int dx x^{2l+\alpha+1} \tilde{P}_m^{(l)}(x) \tilde{P}_n^{(l)}(x) e^{-x} = (2l+\alpha+1)!\delta_{mn}. \qquad (3.45)$$

Notar que según la condición de ortogonalidad anterior, $\tilde{P}_0^{(l)} = 1$. En el apéndice A se muestra una relación de recurrencia que permite determinar $\tilde{P}_n^{(l)}$ fácilmente si son conocidos $\tilde{P}_{n-1}^{(l)}$ y $\tilde{P}_{n-2}^{(l)}$.

Volviendo al cálculo de $c_n^{\langle \nu_1 ... \nu_l \rangle}$, reemplazando (3.43) en (3.42), renombrando $l' = l$ y usando (3.41b), se obtiene:

$$c_n^{\langle \nu_1 ... \nu_l \rangle} = \frac{2\pi^2 (2l+1)!!}{l!(2l+\alpha+1)! T^{2l+\alpha+2}} \sum_{r=0}^{n} a_{nr}^{(l)} Z_r^{\nu_1 ... \nu_l}, \tag{3.46}$$

donde se ha definido $Z_r^{\nu_1 ... \nu_l} \equiv \langle p_u^r p^{\langle \nu_1} ... p^{\nu_l \rangle} \rangle_Z$. Notar que las condiciones (3.12) y la definición de velocidad de Landau-Lifshitz implican:

$$Z_1 = \langle p_u \rangle_Z = 0, \quad Z_2 = \langle p_u^2 \rangle_Z = 0, \quad Z_1^\mu = \langle p_u p^\mu \rangle_Z = -u_\nu \langle p^\nu p^\mu \rangle_Z = 0. \tag{3.47}$$

Además, se tiene:

$$Z_0^\mu = \langle p^{\langle \mu \rangle} \rangle_Z = \chi^\mu = 0, \quad Z_0^{\mu\nu} = \langle p^{\langle \mu} p^{\nu \rangle} \rangle_Z = \pi^{\mu\nu}. \tag{3.48}$$

Usando que $\Pi = -m^2 \langle 1 \rangle_Z / 3$, se puede escribir:

$$\Pi = -\frac{m^2}{3} Z_0. \tag{3.49}$$

Para un fluido conforme ambos miembros de la ecuación anterior se anulan para cualquier valor de Z_0, por lo que adoptaremos:

$$Z_0 = 0. \tag{3.50}$$

Volviendo a la expansión de Z, reemplazando (3.46) en (3.41a) se obtiene:

$$\lambda^{\langle \mu_1 ... \mu_l \rangle} = \sum_{r=0}^{N_l} H_r^{(l)} Z_r^{\mu_1 ... \mu_l}, \tag{3.51}$$

donde se ha definido $H_r^{(l)} \equiv \frac{2\pi^2 (2l+1)!!}{l!(2l+\alpha+1)! T^{2l+\alpha+2}} \sum_{n=r}^{N_l} a_{nr}^{(l)} P_n^{(l)}$. Entonces, la expansión de Z queda finalmente:

$$Z = p_u^\alpha \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{N_l} H_r^{(l)} Z_r^{\mu_1 ... \mu_l} p_{\langle \mu_1} ... p_{\mu_l \rangle}. \tag{3.52}$$

3.4.2 Aproximación de Grad

Queremos obtener una expresión para Z en función de cantidades hidrodimámicas que nos permita hallar la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$. En esta sección haremos la aproximación de Grad, que nos permitirá llegar a una hidrodinámica causal y estable [24].

El único tensor transverso a u^μ disponible para dar origen a los índices de $Z^{\mu_1 ... \mu_l}$ es $\pi^{\mu\nu}$. Aquí nos quedaremos a primer orden en las desviaciones respecto al equilibrio, por lo que supondremos despreciables los términos de la expansión de Z para $l > 2$, pues para armar los tensores $Z^{\mu_1 ... \mu_l}$ con $l > 2$ se tiene que ir más allá del primer orden en $\pi^{\mu\nu}$.

Además, como aproximación queremos quedarnos con la menor cantidad posible de momentos de Z y relacionarlos con las correcciones viscosas. Esto nos llevaría a la aproximación de 14 momentos de Grad, que se obtiene tomando $N_0 = 2$, $N_1 = 1$ y $N_2 = 0$ (notar que esto nos da los tres escalares Z_0, Z_1 y Z_2, los dos vectores espaciales Z_0^μ y Z_1^μ, y el tensor de orden 2, espacial, simétrico y de traza nula $Z_0^{\mu\nu}$, sumando 14 momentos). Pero como consecuencia de las condiciones (3.47) a (3.50) sólo sobrevive el término de la expansión que es proporcional a $Z_0^{\mu\nu}$:

$$Z = p_u^\alpha H_0^{(2)} Z_0^{\mu\nu} p_{\langle\mu} p_{\nu\rangle} = p_u^\alpha H_0^{(2)} \pi^{\mu\nu} p_{\langle\mu} p_{\nu\rangle}. \tag{3.53}$$

Faltaría calcular el coeficiente $H_0^{(2)}$ para tener un expresión (aproximada) de Z.

$$H_0^{(2)} = \frac{15\pi^2}{(\alpha+5)!T^{\alpha+6}} a_{00}^{(2)} P_0^{(2)} = \frac{15\pi^2}{(\alpha+5)!T^{\alpha+6}}. \tag{3.54}$$

Se llega entonces a la siguiente expresión aproximada para Z:

$$Z = \frac{15\pi^2 p_u^\alpha}{(\alpha+5)!T^{\alpha+6}} \pi^{\mu\nu} p_{\langle\mu} p_{\nu\rangle}. \tag{3.55}$$

Combinando la expresión anterior con la relación de ortogonalidad (3.38) se obtiene que todos los momentos de Zf_0 son nulos salvo los tensores de orden 2:

$$Z_i^{\mu\nu} = \int Dp\, p_u^i p^{\langle\mu} p^{\nu\rangle} Z f_0 = \frac{(i+\alpha+5)!}{(\alpha+5)!} T^i \pi^{\mu\nu}. \tag{3.56}$$

Una de las ventajas que tiene descomponer Z en la forma (3.52) es que es muy sencillo mejorar la aproximación de Grad tomando más momentos de Z. Por ejemplo, tomando $N_0 = 3$, $N_1 = 2$ y $N_2 = 1$ se obtienen 23 momentos y, más en general, tomando $N_0 = n+2$, $N_1 = n+1$ y $N_2 = n$ se obtienen $14 + 9 \times n$ momentos [27].

3.4.3 Ecuación de movimiento de $Z_i^{\mu\nu}$

Como se ve en la ecuación (3.56), $\pi^{\mu\nu}$ está relacionado con los momentos $Z_i^{\mu\nu}$. Calcularemos entonces la ecuación de movimiento de los momentos no nulos de Z, que nos servirá para luego hallar la ecuación correspondiente para $\pi^{\mu\nu}$. Tomemos la derivada temporal de (3.56):

$$\dot{Z}_i^{\langle\mu\nu\rangle} = \Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \frac{d}{d\tau} \int Dp\, p_u^i p^{\langle\alpha} p^{\beta\rangle} Z f_0 \tag{3.57}$$

donde se ha definido $\dot{a} \equiv da/d\tau$. Notar que sólo se está calculando la proyección espacial, simétrica y de traza nula de la ecuación de movimiento. La derivada temporal de Zf_0 se elimina usando la ecuación de Boltzmann, (3.1).

En la ecuación de movimiento aparece el índice i que, junto con α, se ajustará para hacer valer la segunda ley de la termodinámica. Escribiendo $p_u^i = (-u_\mu p^\mu)^i$ es fácil entender que, para $i \geq 1$, se está obteniendo la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ del momento $i+1$ de la ecuación de Boltzmann. Cuando $i = 0$, la ecuación de movimiento no corresponde a ningún momento de la ecuación de Boltzmann, sino que se está derivando directamente la definición de $\pi^{\mu\nu}$ (ecuación (3.16b)).

Luego de un extenso cálculo, se llega a:

$$\dot{Z}_i^{\langle\mu\nu\rangle} = I_{i-1}^{\langle\mu\nu\rangle} - \frac{(i+4)!}{15\pi^2} T^{i+4} \sigma^{\mu\nu} - (i+4)\frac{\theta}{3} Z_i^{\mu\nu} + 2 Z_i^{\delta\langle\mu} \omega_\delta^{\nu\rangle} - \frac{2}{7}(2i+5) Z_i^{\delta\langle\mu} \sigma_\delta^{\nu\rangle}, \tag{3.58}$$

donde se ha definido $\omega^{\mu\nu} \equiv (\nabla^\mu u^\nu - \nabla^\nu u^\mu)/2$ y:

$$I_i^{\langle\mu_1 \cdots \mu_l\rangle} \equiv \int Dp\, p_u^i p^{\langle\mu_1} \ldots p^{\mu_l\rangle} I_{\rm col}[f]. \tag{3.59}$$

3.4.4 Término de colisión

Ahora calcularemos el término $I_i^{\langle\mu\nu\rangle}$ en función de la corriente $\pi^{\mu\nu}$ bajo la aproximación RTA. Usando la integral de colisión (3.2) en la ecuación (3.59), se obtiene:

$$I_i^{\langle\mu_1\ldots\mu_l\rangle} = -\frac{1}{\tau_{\rm rel}}\int Dp\, p_u^{i+1} p^{\langle\mu_1}\ldots p^{\mu_l\rangle} Z f_0. \tag{3.60}$$

Usando ahora la aproximación de Grad (3.55), se obtiene:

$$I_i^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{(\alpha+i+6)!T^{i+1}}{(\alpha+5)!\tau_{\rm rel}}\pi^{\mu\nu}. \tag{3.61}$$

3.4.5 Ecuación de movimiento hidrodinámica

En esta sección usaremos la ecuación (3.58) para obtener una ecuación de movimiento para $\pi^{\mu\nu}$. La teoría hidrodinámica completa quedaría entonces formada por esta ecuación sumada a las ecuaciones de conservación (3.20).

Usando (3.56), escribimos:

$$\dot{Z}_i^{\langle\mu\nu\rangle} = \frac{(i+\alpha+5)!i}{(\alpha+5)!}T^{i-1}\dot{T}\pi^{\mu\nu} + \frac{(i+\alpha+5)!}{(\alpha+5)!}T^i\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle}. \tag{3.62}$$

La derivada temporal de T se obtiene de la ecuación (3.20a). Entonces, (3.62) queda:

$$\dot{Z}_i^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{(i+\alpha+5)!i}{3(\alpha+5)!}T^i\theta\pi^{\mu\nu} - \frac{\pi^2(i+\alpha+5)!i}{12(\alpha+5)!}T^{i-4}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\pi^{\mu\nu} + \frac{(i+\alpha+5)!}{(\alpha+5)!}T^i\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle}. \tag{3.63}$$

Reemplazando en (3.58):

$$\begin{aligned}
&-\frac{(i+\alpha+5)!i}{3(\alpha+5)!}T^i\theta\pi^{\mu\nu} - \frac{\pi^2(i+\alpha+5)!i}{12(\alpha+5)!}T^{i-4}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\pi^{\mu\nu} + \frac{(i+\alpha+5)!}{(\alpha+5)!}T^i\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle}\\
&= -\frac{(\alpha+i+6)!T^{i+1}}{(\alpha+5)!\tau_{\rm rel}}\pi^{\mu\nu} - \frac{(i+4)!}{15\pi^2}T^4\sigma^{\mu\nu} - \frac{(i+4)(i+\alpha+5)!}{3(\alpha+5)!}T^i\theta\pi^{\mu\nu}\\
&+\frac{2(i+\alpha+5)!}{(\alpha+5)!}T^i\pi^{\delta\langle\mu}\omega^{\nu\rangle}_{\delta} - \frac{2}{7}\frac{(i+\alpha+5)!(2i+5)}{(\alpha+5)!}T^i\pi^{\delta\langle\mu}\sigma^{\nu\rangle}_{\delta}.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Despejando para $\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle}$:

$$\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{\pi^{\mu\nu}}{\tau_{\pi,i}} - \frac{(i+4)!(\alpha+5)!}{15\pi^2(i+\alpha+5)!}T^4\sigma^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\theta\pi^{\mu\nu} + 2\pi^{\delta\langle\mu}\omega^{\nu\rangle}_{\delta} - \frac{2}{7}(2i+5)\pi^{\delta\langle\mu}\sigma^{\nu\rangle}_{\delta} + \frac{i\pi^2}{12T^4}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\pi^{\mu\nu}, \tag{3.65}$$

donde $\tau_{\pi,i} \equiv T\tau_{\rm rel}/(\alpha+i+6)$ es el tiempo de relajación de $\pi^{\mu\nu}$. Recordar que tomar distintos valores de i corresponde a obtener la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ a partir de distintos momentos de la ecuación de Boltzmann si $i \geq 1$, o a partir de la definición de $\pi^{\mu\nu}$ (ecuación (3.16b)) si $i = 0$. La ecuación de movimiento obtenida tiene la misma forma en cada caso, pero los coeficientes de transporte varían. En la sección siguiente veremos que de exigir el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica, surge una relación entre i y α. Es decir, se verá que para una parametrización dada de Z bajo la aproximación de Grad, hay una única forma de obtener la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ para que la teoría tenga creación de entropía definida positiva.

3.4.6 Creación de entropía

Comenzamos calculando el vector de entropía mediante la ecuación (3.23):

$$S^\mu = N_0^\mu - \beta_\nu T_0^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int Dp\, p^\mu f_0 Z^2. \tag{3.66}$$

Empecemos con los dos primeros términos:

$$N_0^\mu = \int Dp\, p^\mu f_0 = u^\mu \int Dp\, p_u f_0 = \frac{1}{\pi^2}T^3, \tag{3.67a}$$

$$T_0^{\mu\nu} = \frac{3}{\pi^2}T^4\left(u^\mu u^\nu + \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\right). \tag{3.67b}$$

Luego:

$$N_0^\mu - \beta_\nu T_0^{\mu\nu} = \frac{4}{\pi^2}T^3 u^\mu. \tag{3.68}$$

Para calcular el otro término, usaremos la ecuación (3.55):

$$\int Dp\, p^\mu f_0 Z^2 = \frac{225\pi^4}{(\alpha+5)!^2 T^{2(\alpha+6)}}\pi_{\rho\sigma}\pi_{\alpha\beta}\int Dp\, p_u^{2\alpha} p^\mu p^{\langle\rho}p^{\sigma\rangle}p^{\langle\alpha}p^{\beta\rangle}f_0. \tag{3.69}$$

La integral se resuelve usando la relación de ortogonalidad (3.38). Se obtiene:

$$\int Dp\, p^\mu f_0 Z^2 = \frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)!^2 T^5}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}u^\mu. \tag{3.70}$$

Reemplazando (3.68) y (3.70) en (3.66):

$$S^\mu = T^3\left[\frac{4}{\pi^2} - \frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{2(\alpha+5)!^2 T^8}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}\right]u^\mu. \tag{3.71}$$

Ya estamos en condiciones de calcular la creación de entropía. Tomemos la cuadridivergencia de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} S^\mu_{;\mu} =& \frac{12}{\pi^2}T^2\dot{T} + \frac{4}{\pi^2}T^3\theta + \frac{75\pi^2(2\alpha+6)!}{2(\alpha+5)!^2}\frac{\dot{T}}{T^6}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma} - \frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)!^2T^5}\pi^{\rho\sigma}\dot{\pi}_{\langle\rho\sigma\rangle} - \frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{2(\alpha+5)!^2T^5}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}\theta, \\ =& T^4\left[-\frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)!^2T^9}\pi^{\rho\sigma}\dot{\pi}_{\langle\rho\sigma\rangle} + \left(\frac{12}{\pi^2} + \frac{75\pi^2(2\alpha+6)!}{2(\alpha+5)!^2T^8}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}\right)\frac{\dot{T}}{T^2} + \left(\frac{4}{\pi^2} - \frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{2(\alpha+5)!^2T^8}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma}\right)\frac{\theta}{T}\right]. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Usando las ecuaciones de movimiento (3.20a) y (3.65) y quedándonos a segundo orden en la desviación respecto al equilibrio y en las derivadas espaciales, se llega a:

$$S^\mu_{;\mu} = T^4\left\{\frac{15\pi^2(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)!^2T^9\tau_{\pi,i}}\pi^{\rho\sigma}\pi_{\rho\sigma} + \left[\frac{(i+4)!(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)!(i+\alpha+5)!} - 1\right]\frac{\pi^{\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma}}{T^5}\right\}. \tag{3.73}$$

Para que la creación de entropía sea definida positiva a segundo orden en las correcciones viscosas, se debe imponer:

$$\frac{(i+4)!(2\alpha+6)!}{(\alpha+5)(i+\alpha+5)!} = 1, \tag{3.74}$$

de donde se deduce:

$$i = \alpha + 1. \tag{3.75}$$

Por lo tanto, dado un valor de α, la relación anterior nos dice cuál es la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ correspondiente.

Usando la condición (3.75), la ecuación de movimiento (3.65) queda:

$$\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{\pi^{\mu\nu}}{\tau_{\pi,i}} - \frac{(i+4)!^2}{15\pi^2(2i+4)!}T^4\sigma^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\theta\pi^{\mu\nu} + 2\pi^{\delta\langle\mu}\omega_{\delta}^{\nu\rangle} - \frac{2}{7}(2i+5)\pi^{\delta\langle\mu}\sigma_{\delta}^{\nu\rangle} + \frac{i\pi^2}{12T^4}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\pi^{\mu\nu}, \tag{3.76}$$

con $\tau_{\pi,i} = T\tau_{\text{rel}}/(2i+5)$.

3.4.7 Israel, Stewart

Israel y Stewart obtuvieron una teoría hidrodinámica expandiendo Z en los tensores 1, p^μ, $p^\mu p^\nu$, etc [4] y truncando la expansión a orden cuadrático (aproximación de Grad). Pero estos tensores no son ortogonales entre sí, lo que dificulta el cálculo de los coeficientes de la expansión. A su vez, obtuvieron las ecuaciones de las corrientes disipativas (en nuestro caso, solamente $\pi^{\mu\nu}$) a partir del segundo momento de la ecuación de Boltzmann. La teoría desarrollada por Israel y Stewart equivale a tomar $i = 1$ y α=0. Haciendo $i = 1$ en la ecuación (3.76), se obtiene:

$$\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{\pi^{\mu\nu}}{\tau_{\pi,1}} - \frac{4}{3\pi^2}T^4\sigma^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\theta\pi^{\mu\nu} + 2\pi^{\delta\langle\mu}\omega_{\delta}^{\nu\rangle} - 2\pi^{\delta\langle\mu}\sigma_{\delta}^{\nu\rangle} + \frac{\pi^2}{12T^4}\pi^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}\pi^{\mu\nu}. \tag{3.77}$$

Los dos últimos términos y aquel proporcional a $\theta\pi^{\mu\nu}$ fueron despreciados en el trabajo original de Israel y Stewart [4]. (Ver también [31, 32]).

Por lo expuesto en la sección anterior, esta teoría hidrodinámica respeta la segunda ley de la termodinámica.

3.4.8 Denicol, Koide, Rischke

Denicol, Koide y Rischke obtienen en [33] la ecuación de movimiento de $\pi^{\mu\nu}$ derivando la ecuación (3.16b) y usando la ecuación de Boltzmann para eliminar $d(Zf_0)/d\tau$. Esto es equivalente a tomar $i = 0$. Sin embargo, en [5, 27, 33] los autores adoptan $\alpha = 0$, con lo cual la teoría hidródinámica que derivan viola la segunda ley de la termodinámica. Parametrizando Z apropiadamente, es decir, tomando $\alpha = i - 1 = -1$, o haciendo $i = 0$ en (3.76), se llega a:

$$\dot{\pi}^{\langle\mu\nu\rangle} = -\frac{\pi^{\mu\nu}}{\tau_{\pi,0}} - \frac{8}{5\pi^2}T^4\sigma^{\mu\nu} - \frac{4}{3}\theta\pi^{\mu\nu} + 2\pi^{\delta\langle\mu}\omega_{\delta}^{\nu\rangle} - \frac{10}{7}\pi^{\delta\langle\mu}\sigma_{\delta}^{\nu\rangle}. \tag{3.78}$$

3.5 Condición suficiente para tener una hidrodinámica con creación de entropía definida positiva

En esta sección veremos que la teoría de Grad presentada en la sección anterior cae dentro de un esquema más general de teorías hidrodinámicas con creación de entropía definida positiva.

Sea f una función de distribución de una partícula que es solución de la ecuación de Boltzmann:

$$p^\mu\partial_\mu f = I_{\text{col}}[f]. \tag{3.79}$$

Definiendo al vector de entropía S^μ como [17]:

$$S^\mu = -\int Dp\, p^\mu [e^a(1-e^{-a}f)\ln(1-e^{-a}f) + f\ln f], \tag{3.80}$$

$$a = \begin{cases} 0 & \text{para Fermi} - \text{Dirac}, \\ i\pi & \text{para Bose} - \text{Einstein}, \\ \infty & \text{para Maxwell} - \text{Juttner}, \end{cases}$$

y usando la ecuación de Boltzmann se llega a la siguiente expresión para la creación de entropía:

$$S^\mu_{;\mu} = \int Dp \ln(f^{-1} - e^{-a}) I_{\text{col}}[f] \geq 0. \tag{3.81}$$

La desigualdad anterior es el teorema H de Boltzmann y no depende de que f sea solución de la ecuación (3.79) [12, 17].

Supóngase ahora que se tiene una parametrización de la función de distribución $f = f(\xi^\sigma)$. Entonces:

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma = I_{\text{col}}(p^\mu, \xi^\sigma). \tag{3.82}$$

Relajaremos ahora el requisito de que f sea solución de la ecuación de Boltzmann. En vez de eso, proponemos una f y funciones $R^\lambda(p^\mu)$ tales que:

$$\int Dp R^\lambda p^\mu \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma = \int Dp R^\lambda I_{\text{col}}(p^\mu, \xi^\sigma), \tag{3.83a}$$

$$-\ln(f^{-1} - e^{-a}) = \Gamma_\lambda(\xi^\sigma) R^\lambda. \tag{3.83b}$$

Tomando la cuadridivergencia de S^μ, se obtiene:

$$S^\mu_{;\mu} = \int Dp \ln(f^{-1} - e^{-a}) p^\mu \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma = -\Gamma_\lambda(\xi^\sigma) \int Dp R^\lambda p^\mu \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma, \tag{3.84}$$

donde se ha utilizado (3.83b). Usando ahora (3.83a), se obtiene:

$$S^\mu_{;\mu} = -\Gamma_\lambda(\xi^\sigma) \int Dp R^\lambda I_{\text{col}}(p^\mu, \xi^\sigma) = \int Dp \ln(f^{-1} - e^{-a}) I_{\text{col}}(p^\mu, \xi^\sigma) \geq 0. \tag{3.85}$$

Por lo tanto, una teoría hidrodinámica cuyas ecuaciones de movimiento están dadas por (3.83a) y donde la parametrización de f cumple con (3.83b), tiene garantizada creación de entropía definida positiva. Como único requisito adicional pediremos que $M^\lambda_\sigma = \int Dp\, p_u R^\lambda \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma}$ sea invertible, dado que nos interesa tener las derivadas temporales de los parámetros ξ^σ.

Supongamos la siguiente forma funcional para f:

$$f = \frac{1}{e^{-\Phi(\xi^\sigma, p^\mu)} + e^{-a}}. \tag{3.86}$$

Si $\Phi = \frac{u_\mu p^\mu}{T} + Z$, la función anterior incluye a las teorías de tipo divergencia (tomando Z cuadrático en los cuadrimomentos, [35]) y, para $|Z| << 1$, a la teoría de tipo Grad que fue planteada en la sección anterior sólo para la estadística de Maxwell-Juttner, ahora generalizada a Bose-Einstein y Fermi-Dirac. Esto último se ve haciendo la expansión correspondiente para Z pequeño:

$$f \approx f_0[1 + (1 - f_0 e^{-a})Z], \tag{3.87}$$

$$f_0 = \frac{1}{e^{-\frac{u_\mu p^\mu}{T}} + e^{-a}}, \tag{3.88}$$

y eligiendo:

$$Z = C_{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha+2}} p^{\mu_1} \ldots p^{\mu_{\alpha+2}}. \tag{3.89}$$

Veamos ahora que esta parametrización de la función de distribución cae dentro del esquema planteado en esta sección. Tenemos:

$$-\ln(f^{-1} - e^{-a}) = \Phi = \frac{u_\mu p^\mu}{T} + C_{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha+2}} p^{\mu_1} \ldots p^{\mu_{\alpha+2}}, \tag{3.90}$$

y, por lo tanto:

$$\Gamma^\lambda = \left(\frac{u_\mu}{T}, C_{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha+2}} \right), \quad R^\lambda = \left(p^\mu, p^{\mu_1} \ldots p^{\mu_{\alpha+2}} \right). \tag{3.91}$$

Luego, de acuerdo a la ecuación (3.83a) y a lo expuesto anteriormente, si las ecuaciones de movimiento para esta teoría hidrodinámica son los momentos primero (conservación de la energía-momento) y $\alpha + 2$ de la ecuación de Boltzmann, se tiene una teoría con creación de entropía definida positiva. Obsérvese que para que este argumento valga, se debe tener $\alpha \geq 0$.

En la teoría de Grad planteada en la sección 3.4 se tiene $C_{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha+2}} = \frac{(-1)^\alpha 15\pi^2}{(\alpha+5)! T^{\alpha+6}} u_{\mu_1} \ldots u_{\mu_\alpha} \pi_{\mu_{\alpha+1}\mu_{\alpha+2}}$ y las ecuaciones de movimiento se obtienen del momento primero y del momento $i + 1$ (ecuación (3.57)) de la ecuación de Boltzmann. Si $i = \alpha + 1$, el esquema aquí presentado nos garantiza creación de entropía definida positiva. Notar que esta es la misma relación entre i y α a la que se había llegado anteriormente.

Capítulo 4

Dinámica relativista de fluidos viscosos lejos del equilibrio. Hidrodinámica anisótropa viscosa

A partir de aquí trataremos con fluidos conformes lejos del equilibrio. En particular, desarrollaremos una teoría hidrodinámica para el caso en que la función de distribución de una partícula presenta una gran anisotropía en una dirección del espacio de momentos. Cuando se da esta situación, la desviación Z puede ser comparable a 1 o incluso mayor, por lo que no se espera que una expansión alrededor de un estado de equilibrio presente una buena convergencia.

En [9, 10] se obtiene una teoría hidrodinámica desde teoría cinética proponiendo la siguiente parametrización de la función de distribución de una partícula:

$$f = \hat{f}_0(1 + \hat{Z}), \tag{4.1}$$

donde $\hat{f}_0$ no es una función de distribución en el equilibrio, sino que es una función anisótropa en una dirección del espacio de momentos (distribución esferoidal). Esta proposición viene motivada por la necesidad de describir la evolución temporal del plasma de quarks y gluones resultante de las colisiones de iones pesados ultrarrelativistas. La distribución esferoidal incluye la principal corrección viscosa para este fluido de forma no perturbativa en $\hat{f}_0$ [6]. Puede tomarse $\hat{Z} = 0$ como primera aproximación, obteniéndose así la llamada hidrodinámica anisótropa [8]. Como la anisotropía es en una única dirección, se requiere un único parámetro adicional para medir la deformación respecto al estado de equilibrio, y por lo tanto, una única ecuación de movimiento adicional además de las ecuaciones de conservación.

Las correcciones sobre la distribución esferoidal se tratan de forma perturbativa en $\hat{Z}$, obteniéndose la llamada hidrodinámica anisótropa viscosa [9,10]. En [9] se hace una expansión de $\hat{Z}$ en los tensores 1, p^μ, $p^\mu p^\nu$, etc y se la trunca a orden cuadrático (aproximación de Grad de 14 momentos). Las correcciones viscosas se definen ahora mediante $\hat{Z}$, con lo cual ya no miden las desviaciones respecto al equilibrio, sino que miden las desviaciones respecto al estado anisótropo $\hat{f}_0$. Las ecuaciones de movimiento derivadas de las leyes de conservación son complementadas con ecuaciones para las correcciones viscosas, llegando a un sistema cerrado de ecuaciones hidrodinámicas.

La principal desventaja de esta formulación de la hidrodinámica anisótropa viscosa es que no permite mejorar sistemáticamente la aproximación de Grad agregando más momentos. Más recientemente, en [10], Molnár et al. derivan la teoría anisótropa siguiendo un procedimiento análogo al hecho para el caso isótropo en [5] y en el capítulo anterior de este trabajo. Aquí seguiremos principalmente el trabajo de Molnár et al.

4.1 Relación entre variables hidrodinámicas y teoría cinética en la teoría anisótropa

Volvamos a las ecuaciones (3.3):

$$N^\mu = \langle p^\mu \rangle, \quad T^{\mu\nu} = \langle p^\mu p^\nu \rangle. \tag{4.2}$$

En la sección 3.2 se hizo una expansión de p^μ en los tensores u^μ y $\Delta^{\mu\nu}$. Sin embargo, ahora es también relevante el vector espacial l^μ que indica la dirección de la anisotropía; $l_\mu l^\mu = 1$, $u_\mu l^\mu = 0$. Entonces, expandiremos p^μ en los tensores u^μ, l^μ y $\Xi^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu - l^\mu l^\nu = \Delta^{\mu\nu} - l^\mu l^\nu$:

$$p^\mu = p_u u^\mu + p_l l^\mu + p^{\{\mu\}}, \tag{4.3}$$

donde $p^{\{\mu\}} \equiv \Xi^\mu_\nu p^\nu$. Reemplazando en (4.2) se llega a:

$$N^\mu = \langle p_u \rangle u^\mu + \langle p_l \rangle l^\mu + \langle p^{\{\mu\}} \rangle, \tag{4.4a}$$

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} =& \langle p_u^2 \rangle u^\mu u^\nu + \langle p_u p_l \rangle (u^\mu l^\nu + l^\mu u^\nu) + \langle p_u p^{\{\nu\}} \rangle u^\mu + \langle p_u p^{\{\mu\}} \rangle u^\nu + \langle p_l^2 \rangle l^\mu l^\nu \\ &+ \langle p_l p^{\{\nu\}} \rangle l^\mu + \langle p_l p^{\{\mu\}} \rangle l^\nu + \langle p^{\{\mu\}} p^{\{\nu\}} \rangle. \end{aligned} \tag{4.4b}$$

Al igual que antes, la densidad de energía es $\rho \equiv u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}$ y la densidad de partículas $n \equiv -u_\mu N^\mu$. Por otro lado, ahora la componente de la corriente de difusión paralela a l^μ se encuentra en $n_l \equiv l_\mu N^\mu$, siendo $\chi^\mu_\perp \equiv \Xi^\mu_\nu N^\nu$ la componente perpendicular a l^μ. Dado que seguimos tratando el caso de un fluido conforme, el número de partículas no se conserva y la corriente de difusión es nula. La presión, ahora anisótropa, se separa en las componentes longitudinal $P_l \equiv l_\mu l_\nu T^{\mu\nu}$ y perpendicular $P_\perp \equiv \Xi_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}/2$. También definimos $\hat{h}^\alpha_{\perp l} \equiv \Xi^\alpha_\mu l_\nu T^{\mu\nu}$. Definiendo a la velocidad mediante la prescripción de Landau-Lifshitz, se anulan las siguientes componentes de $T^{\mu\nu}$: $h \equiv u_\mu l_\nu T^{\mu\nu} = 0$, $h^\alpha_{\perp u} \equiv \Xi^\alpha_\mu u_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Entonces tenemos:

$$n = \langle p_u \rangle, \quad \rho = \langle p_u^2 \rangle, \quad P_l = \langle p_l^2 \rangle, \quad P_\perp = \Xi_{\alpha\beta} \langle p^\alpha p^\beta \rangle /2, \quad \hat{h}^\mu_{\perp l} = \langle p_l p^{\{\mu\}} \rangle. \tag{4.5}$$

Respecto a la definición del vector l^μ, una posibilidad, usada, por ejemplo, en [9], es fijarlo en alguna dirección en particular, pensando en que en la etapa inicial de las colisiones de iones pesados la función de distribución de una partícula es altamente anisótropa en la dirección del haz. No es esta la definición que adoptaremos aquí, sino que definiremos l^μ siguiendo una prescripción análoga a la de Landau-Lifshitz para u^μ. Pero por ahora no asumiremos nada sobre l^μ, sino que seguiremos [10] y recuperaremos las ecuaciones hidrodinámicas de estos autores para el caso particular de un fluido conforme y estadística de Maxwell-Juttner.

Respecto al término $\langle p^{\{\mu\}} p^{\{\nu\}} \rangle$, proponemos la siguiente descomposición:

$$\langle p^{\{\mu\}} p^{\{\nu\}} \rangle = \langle p^{\{\mu} p^{\nu\}} \rangle + \frac{1}{2} \Xi^{\mu\nu} \langle \Xi_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta \rangle. \tag{4.6}$$

donde $p^{\{\mu} p^{\nu\}} = \Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta$ y $\Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = (\Xi^\mu_\alpha \Xi^\nu_\beta + \Xi^\mu_\beta \Xi^\nu_\alpha)/2 - \Xi^{\mu\nu} \Xi_{\alpha\beta}/2$ (proyector transverso a u^μ y l^μ y de traza nula). El segundo término de esta separación corresponde a $P_\perp$. Llamemos al primero de la siguiente manera:

$$\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp = \langle p^{\{\mu} p^{\nu\}} \rangle. \tag{4.7}$$

Notar que $u_\mu \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp = l_\mu \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp = \hat{\pi}^\mu_{\mu\perp} = 0$. Reemplazando (4.5) y (4.7) en (4.4):

$$N^\mu = n u^\mu, \tag{4.8a}$$

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P_l l^\mu l^\nu + P_\perp \Xi^{\mu\nu} + 2\hat{h}^{(\mu}_{\perp l} l^{\nu)} + \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp. \tag{4.8b}$$

Es fácil relacionar a la presión longitudinal y perpendicular con la presión isótropa:

$$\begin{aligned}P_l =&l_\mu l_\nu T^{\mu\nu}, \quad 2P_\perp = \Xi_{\mu\nu}T^{\mu\nu},\\ \frac{1}{3}(P_l+2P_\perp) =&\frac{1}{3}(l_\mu l_\nu + \Xi_{\mu\nu})T^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\Delta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = P_0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Notar que en un estado isótropo $P_\perp = P_l = P_0$.

Para relacionar a $\pi^{\mu\nu}$ y $\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}$, primero escribiremos $\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$ en función de $\Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta} =&\Delta^{(\mu}_\alpha\Delta^{\nu)}_\beta - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta_{\alpha\beta} = (\Xi^{(\mu}_\alpha + l^{(\mu}l_\alpha)(\Xi^{\nu)}_\beta + l^{\nu)}l_\beta) - \frac{1}{3}(\Xi^{\mu\nu}+l^\mu l^\nu)(\Xi_{\alpha\beta}+l_\alpha l_\beta),\\ =&\Xi^{(\mu}_\alpha\Xi^{\nu)}_\beta - \frac{1}{2}\Xi^{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} + \Xi^{(\mu}_\alpha l^{\nu)}l_\beta + l_\alpha l^{(\mu}\Xi^{\nu)}_\beta + \frac{2}{3}l^\mu l^\nu l_\alpha l_\beta + \frac{1}{6}\Xi^{\mu\nu}\Xi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(\Xi^{\mu\nu}l_\alpha l_\beta + \Xi_{\alpha\beta}l^\mu l^\nu),\\ =&\Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + 2l_{(\alpha}\Xi^{(\mu}_{\beta)}l^{\nu)} + \frac{1}{6}(\Xi^{\mu\nu}-2l^\mu l^\nu)(\Xi_{\alpha\beta}-2l_\alpha l_\beta).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\pi^{\mu\nu} =&\Delta^{\mu\nu}_{\alpha\beta}\langle p^\alpha p^\beta\rangle = \left[\Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + 2l_{(\alpha}\Xi^{(\mu}_{\beta)}l^{\nu)} + \frac{1}{6}(\Xi^{\mu\nu}-2l^\mu l^\nu)(\Xi_{\alpha\beta}-2l_\alpha l_\beta)\right]\langle p^\alpha p^\beta\rangle,\\ =&\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp + 2\hat{h}^{(\mu}_{\perp l}l^{\nu)} + \frac{1}{3}(P_\perp - P_l)(\Xi^{\mu\nu}-2l^\mu l^\nu).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Proponemos ahora una expansión de f alrededor de una función de distribución anisótropa $\hat{f}_0 = \hat{f}_0(p_u/T_u, p_l/T_l)$:

$$f = \hat{f}_0(1+\hat{Z}). \tag{4.12}$$

La función $\hat{f}_0$ debe cumplir:

$$\lim_{1/T_l\to 0}\hat{f}_0 = f_0. \tag{4.13}$$

Notar que la prescripción de velocidad de Landau-Lifshitz impone restricciones sobre $\hat{f}_0$:

$$\int Dp\, p_u p_l \hat{f}_0 = \int Dp\, p^{\{\mu\}}p_l\hat{f}_0 = 0. \tag{4.14}$$

Para garantizar que estas condiciones se cumplan, impondremos:

$$\hat{f}_0\left(\frac{p_u}{T_u}, -\frac{p_l}{T_l}\right) = \hat{f}_0\left(\frac{p_u}{T_u}, \frac{p_l}{T_l}\right). \tag{4.15}$$

Definamos los siguientes valores medios:

$$\langle A\rangle_{\hat{0}} \equiv \int DpA\hat{f}_0, \quad \langle A\rangle_{\hat{Z}} \equiv \int DpA\hat{f}_0\hat{Z}. \tag{4.16}$$

Definamos entonces a la corriente anisótropa y al tensor de energía-momento anisótropo de la siguiente manera:

$$N^\mu_{\hat{0}} \equiv \langle p^\mu\rangle_{\hat{0}}, \quad T^{\mu\nu}_{\hat{0}} \equiv \langle p^\mu p^\nu\rangle_{\hat{0}}. \tag{4.17}$$

Luego:

$$N^\mu_{\hat{0}} = n_{\hat{0}}u^\mu, \quad T^{\mu\nu}_{\hat{0}} = \rho_{\hat{0}}u^\mu u^\nu + P_{l\hat{0}}l^\mu l^\nu + P_{\perp\hat{0}}\Xi^{\mu\nu}, \tag{4.18a}$$

$$n_{\hat{0}} \equiv \langle p_u\rangle_{\hat{0}}, \quad \rho_{\hat{0}} = \langle p_u^2\rangle_{\hat{0}}, \quad P_{l\hat{0}} \equiv \langle p_l^2\rangle_{\hat{0}}, \quad P_{\perp\hat{0}} \equiv \langle\Xi_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\rangle_{\hat{0}}/2. \tag{4.18b}$$

Por otro lado, la desviación respecto al estado anisótropo $\hat{f}_0$ se encuentra en:

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} \equiv \hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu} + 2\hat{h}_{\perp l}^{(\mu} l^{\nu)} + P_{l\hat{Z}} l^{\mu} l^{\nu} + P_{\perp\hat{Z}} \Xi^{\mu\nu}, \tag{4.19a}$$

$$\hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu} = \Xi^{\mu\nu}_{\alpha\beta} \langle p^{\alpha} p^{\beta} \rangle_{\hat{Z}}, \quad \hat{h}^{\mu}_{\perp l} = \Xi^{\mu}_{\nu} \langle p_l p^{\nu} \rangle_{\hat{Z}}, \quad P_{l\hat{Z}} = \langle p_l^2 \rangle_{\hat{Z}}, \quad P_{\perp\hat{Z}} = \langle \Xi_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta} \rangle_{\hat{Z}}/2. \tag{4.19b}$$

Para relacionar al estado definido por f con un estado anisótropo $\hat{f}_0$ en particular, impondremos una condición análoga a (3.12). En el caso isótropo, esta condición definía a la temperatura T. En el caso anisótropo tenemos dos parámetros, T_u y T_l, por lo que necesitaremos una condición más:

$$\rho = \rho_{\hat{0}} = \langle p_u^2 \rangle_{\hat{0}}, \quad P_l = P_{l\hat{0}} = \langle p_l^2 \rangle_{\hat{0}}. \tag{4.20}$$

Notar que la condición sobre ρ implica:

$$P_{\perp\hat{Z}} = \frac{1}{2} \langle p_{\perp}^2 \rangle_{\hat{Z}} = \frac{1}{2} \langle p_u^2 - p_l^2 \rangle_{\hat{Z}} = \frac{1}{2} (\langle p_u^2 \rangle_{\hat{Z}} - \langle p_l^2 \rangle_{\hat{Z}}) = -\frac{1}{2} \langle p_l^2 \rangle_{\hat{Z}} = -\frac{1}{2} P_{l\hat{Z}} = 0. \tag{4.21}$$

Por lo tanto, la condición (4.20) sobre P_l equivale a una condición análoga sobre $P_{\perp}$. Entonces, (4.19a) queda:

$$\hat{\Pi}^{\mu\nu} \equiv \hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu} + 2\hat{h}_{\perp l}^{(\mu} l^{\nu)}. \tag{4.22}$$

Podemos conectar al estado anisótropo $\hat{f}_0$ con un estado de equilibrio f_0, obteniendo una relación entre los parámetros T_u y T_l que caracterizan a $\hat{f}_0$ y el parámetro T, que caracteriza a f_0. Para ello, elegimos la siguiente condición [9]:

$$\langle p_u^2 \rangle_{\hat{0}} = \langle p_u^2 \rangle_0. \tag{4.23}$$

Escribamos ahora la corriente de entropía asumiendo una estadística de Maxwell-Juttner [17]:

$$S^{\mu} = \int Dp\, p^{\mu} f(1 - \ln f). \tag{4.24}$$

Haciendo una expansión de Taylor de $f \ln f$ hasta segundo orden, se obtiene:

$$f \ln f = \hat{f}_0 (1 + \hat{Z}) [\ln \hat{f}_0 + \ln(1 + \hat{Z})] \approx \hat{f}_0 (1 + \hat{Z}) \left(\ln \hat{f}_0 + \hat{Z} - \frac{\hat{Z}^2}{2} \right) \approx f \ln \hat{f}_0 + \hat{f}_0 \hat{Z} + \hat{f}_0 \frac{\hat{Z}^2}{2}. \tag{4.25}$$

Reemplazando en (4.24) se obtiene:

$$\begin{aligned} S^{\mu} &= \int Dp\, p^{\mu} \hat{f}_0 - \int Dp\, p^{\mu} f \ln \hat{f}_0 - \frac{1}{2} \int Dp\, p^{\mu} \hat{f}_0 \hat{Z}^2, \\ &= N^{\mu}_{\hat{0}} - \int Dp\, p^{\mu} \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 - \int Dp\, p^{\mu} \hat{Z} \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 - \frac{1}{2} \int Dp\, p^{\mu} \hat{f}_0 \hat{Z}^2. \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.2 Expansión de $\hat{Z}$ en tensores irreducibles

En esta sección seguiremos un procedimiento análogo al realizado en la sección 3.4.1 para el caso isótropo. Aquí expandiremos $\hat{Z}$ en la siguiente base de tensores irreducibles ante transformaciones de Lorentz que dejan invariantes a los vectores u^{μ} y l^{μ}:

$$1, \quad p^{\{\mu\}}, \quad p^{\{\mu} p^{\nu\}}, \quad p^{\{\mu} p^{\nu} p^{\lambda\}}, \ldots \tag{4.27}$$

donde se ha hecho la definición $A^{\{\mu_1 \ldots \mu_q\}} \equiv \Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} A^{\nu_1 \ldots \nu_q}$, siendo $\Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ el proyector sobre el espacio ortogonal a u^{μ} y l^{μ} ($u_{\mu_i} \Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = u^{\nu_i} \Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = l_{\mu_i} \Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = l^{\nu_i} \Xi^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = 0$), simétrico en los índices μ_i y ν_j por separado y, para $q > 1$, de traza nula ($g_{\mu_i\mu_j}\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_q} = g^{\nu_i\nu_j}\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\nu_1\ldots\nu_q} = 0$, pero $\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q}_{\mu_1\ldots\mu_q} = 2$). Estos tensores cumplen con la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\int DpF(p_u, p_l)p^{\{\mu_1}\ldots p^{\mu_m\}}p_{\{\nu_1}\ldots p_{\nu_n\}} = \frac{\delta_{mn}}{2^m}\Xi^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\nu_1\ldots\nu_m}\int DpF(p_u, p_l)(p_u^2 - p_l^2)^m, \tag{4.28}$$

donde $F(p_u, p_l)$ es una función arbitraria de $p_u = -u_\nu p^\nu$ y $p_l = l_\nu p^\nu$. Los proyectores $\Xi^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ se calculan como:

$$\begin{aligned}\Xi^{\mu_1\ldots\mu_n\nu_1\ldots\nu_n} &= \sum_{k=0}^{[n/2]}\hat{C}(n,k)(n-2k)!\left(\frac{2^k k!}{n!}\right)^2 \\ &\times \sum_{P^n_\mu P^n_\nu}\Xi^{\mu_1\mu_2}\ldots\Xi^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Xi^{\nu_1\nu_2}\ldots\Xi^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Xi^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Xi^{\mu_n\nu_n}, \\ \hat{C}(n,k) &= \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!},\end{aligned} \tag{4.29}$$

donde $[a]$ denota la parte entera de a y $\sum_{P^n_\mu P^n_\nu}$ es la sumatoria sobre todas las permutaciones distintas de los índices μ_i y ν_i (por separado; no se permutan los índices μ_i y ν_i entre sí). Si tomamos $n = 1$ recuperamos $\Xi^{\mu\nu}$, y eligiendo $n = 2$ obtenemos $\Xi^{\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2} = (\Xi^{\mu_1\nu_1}\Xi^{\mu_2\nu_2} + \Xi^{\mu_1\nu_2}\Xi^{\mu_2\nu_1})/2 - \Xi^{\mu_1\mu_2}\Xi^{\nu_1\nu_2}/2$.

Escribamos ahora la expansión de $\hat{Z}$ en la base (4.27):

$$\hat{Z} = p_u^\alpha p_l^{\alpha'}\sum_{q=0}^{\infty}\hat{\lambda}^{\{\mu_1\ldots\mu_q\}}p_{\{\mu_1}\ldots p_{\mu_q\}}. \tag{4.30}$$

En la parametrización anterior se ha incluido el momento en la dirección de la anisotropía, lo que nos lleva a introducir al entero α'. Se buscará ajustar α y α' de manera tal que la creación de entropía sea manifiestamente definida positiva y que la teoría isótropa tratada en el capítulo 3.4 se obtenga como el límite correspondiente de la teoría anisótropa. Los coeficientes $\hat{\lambda}^{\{\mu_1\ldots\mu_q\}}$ son tensores de orden q que dependen únicamente de p_u y de p_l y pueden expandirse en una base ortogonal de polinomios adimensionales $P^{(q)}_{nm}$:

$$\hat{\lambda}^{\{\mu_1\ldots\mu_q\}} = \sum_{n=0}^{N_q}\sum_{m=0}^{N_q-n}\hat{c}^{\{\mu_1\ldots\mu_q\}}_{nm}P^{(q)}_{nm}, \tag{4.31a}$$

$$P^{(q)}_{nm} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a^{(q)}_{nimj}p_u^i p_l^j. \tag{4.31b}$$

En principio N_q debe ser infinito, pero en la práctica la expansión (4.31a) es truncada.

Necesitamos hallar los coeficientes $\hat{c}^{\{\mu_1\ldots\mu_q\}}_{nm}$. Usando (4.30), (4.28) y (4.31a), podemos escribir:

$$\int Dp\, p^{\{\nu_1}\ldots p^{\nu_{q'}\}}P^{(q)}_{nm}\hat{Z}\hat{f}_0 = \frac{1}{2^{q'}}\sum_{n'=0}^{N_{q'}}\sum_{m'=0}^{N_{q'}-n'}\hat{c}^{\{\nu_1\ldots\nu_{q'}\}}_{n'm'}\int DpP^{(q')}_{n'm'}P^{(q')}_{nm}p_u^\alpha p_l^{\alpha'}(p_u^2 - p_l^2)^{q'}\hat{f}_0. \tag{4.32}$$

Podemos construir los polinomios (4.31b) de manera que cumplan con la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int DpP^{(q)}_{n'm'}P^{(q)}_{nm}p_u^\alpha p_l^{\alpha'}(p_u^2 - p_l^2)^q\hat{f}_0 = g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u, T_l)\delta_{n'n}\delta_{m'm}, \tag{4.33}$$

donde $g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u,T_l)$ es alguna función de T_u y T_l que habrá que determinar. Si imponemos que para todo q se tiene $P^{(q)}_{00}=1$, se obtiene:

$$g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u,T_l)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^{q-k}\int dp_u dp_l p_u^{\alpha+2k}p_l^{\alpha'+2(q-k)}\hat{f}_0. \tag{4.34}$$

En el desarrollo anterior se ha hecho el cambio de variables $(p_x,p_y,p_z)\to(\phi,p_u,p_l)$, donde ϕ es el ángulo azimutal alrededor de la dirección l^μ y hemos elegido $p_l=p_z$. También hemos usado simetría azimutal. Haciendo la sustitución $p_u/T_u=x$ y $p_l/T_l=y$:

$$g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u,T_l)=\frac{T_u^{\alpha+1}T_l^{\alpha'+1}}{(2\pi)^2}\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^{q-k}T_u^{2k}T_l^{2(q-k)}\mathcal{I}_{\alpha+2k,\alpha'+2(q-k)}, \tag{4.35}$$

donde se ha definido:

$$\mathcal{I}_{ij}\equiv\int_0^\infty dx\int_{-\frac{T_u}{T_l}x}^{\frac{T_u}{T_l}x}dy x^i y^j\hat{f}_0(x,y). \tag{4.36}$$

Notar que la condición (4.15) implica que para j impar vale $\mathcal{I}_{ij}=0$.

Nos servirá saber la derivada de $\mathcal{I}_{ij}$:

$$d\mathcal{I}_{ij}=\frac{T_u^{j+1}}{T_l^{j+1}}\left(\frac{dT_u}{T_u}-\frac{dT_l}{T_l}\right)\mathcal{J}_{ij}, \tag{4.37a}$$

$$\mathcal{J}_{ij}\equiv[1+(-1)^j]\int_0^\infty dx x^{i+j+1}\hat{f}_0\left(x,x\frac{T_u}{T_l}\right). \tag{4.37b}$$

Para conocer la forma de $\mathcal{I}_{\alpha+2k,\alpha'+2(q-k)}$ y, por lo tanto, de $g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u,T_l)$, hace falta conocer $\hat{f}_0(x,y)$.

Volviendo a (4.33):

$$\begin{aligned}\int DpP^{(q)}_{n'm'}P^{(q)}_{nm}p_u^\alpha p_l^{\alpha'}(p_u^2-p_l^2)^q\hat{f}_0=&\delta_{n'n}\delta_{m'm}\frac{T_u^{\alpha+1}T_l^{\alpha'+1}}{(2\pi)^2}\\ &\times\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^{q-k}T_u^{2k}T_l^{2(q-k)}\mathcal{I}_{\alpha+2k,\alpha'+2(q-k)}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

Volviendo al cálculo de $\hat{c}^{\{\nu_1\ldots\nu_q\}}_{nm}$, reemplazemos (4.33) en (4.32) y renombremos $q'=q$:

$$\hat{c}^{\{\nu_1\ldots\nu_q\}}_{nm}=\frac{2^q}{g^{(q)}_{\alpha\alpha'}(T_u,T_l)}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a^{(q)}_{nimj}\hat{Z}^{\nu_1\ldots\nu_q}_{ij}, \tag{4.39}$$

donde se ha definido $\hat{Z}^{\nu_1\ldots\nu_q}_{ij}\equiv\langle p_u^i p_l^j p^{\{\nu_1}\ldots p^{\nu_q\}}\rangle_{\hat{Z}}$. Notar que las condiciones (4.20) y la definición de velocidad de Landau-Lifshitz implican:

$$\hat{Z}_{10}=\langle p_u\rangle_{\hat{Z}}=0,\quad \hat{Z}_{20}=\langle p_u^2\rangle_{\hat{Z}}=0,\quad \hat{Z}_{02}=\langle p_l^2\rangle_{\hat{Z}}=0,\quad \hat{Z}_{11}=\langle p_u p_l\rangle_{\hat{Z}}=0,\quad \hat{Z}^\mu_{10}=\langle p_u p^{\{\mu\}}\rangle_{\hat{Z}}=0. \tag{4.40}$$

Además, se tiene:

$$\hat{Z}_{01}=\langle p_l\rangle_{\hat{Z}}=n_l=0,\quad \hat{Z}^\mu_{00}=\langle p^{\{\mu\}}\rangle_{\hat{Z}}=\chi^\mu_\perp=0, \tag{4.41a}$$

$$\hat{Z}^\mu_{01}=\langle p_l p^{\{\mu\}}\rangle_{\hat{Z}}=\hat{h}^\mu_{\perp l},\quad \hat{Z}^{\mu\nu}_{00}=\langle p^{\{\mu}p^{\nu\}}\rangle_{\hat{Z}}=\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp. \tag{4.41b}$$

Definamos $\hat{\Pi} \equiv \Delta_{\mu\nu}\langle p^\mu p^\nu\rangle_{\hat{Z}}/3 = -m^2\langle 1\rangle_{\hat{Z}}/3 = 0$. Entonces, podemos escribir:

$$\hat{\Pi} = -\frac{m^2}{3}\hat{Z}_{00}. \tag{4.42}$$

Ambos miembros de la ecuación anterior se anulan para cualquier valor de $\hat{Z}_{00}$, por lo que adoptaremos:

$$\hat{Z}_{00} = 0. \tag{4.43}$$

Volviendo a la expansión de $\hat{Z}$, reemplazando (4.39) en (4.31a) se obtiene:

$$\hat{\lambda}^{\{\mu_1\dots\mu_q\}} = \sum_{i=0}^{N_q}\sum_{j=0}^{N_q-i} \hat{H}_{ij}^{(q)} \hat{Z}_{ij}^{\mu_1\dots\mu_q}, \tag{4.44}$$

donde se ha definido $\hat{H}_{ij}^{(q)} \equiv \frac{2^q}{g_{\alpha\alpha'}^{(q)}(T_u,T_l)} \sum_{n=i}^{N_q-j}\sum_{m=j}^{N_q-n} a_{nimj}^{(q)} P_{nm}^{(q)}$. Entonces, la expansión de $\hat{Z}$ queda finalmente:

$$\hat{Z} = p_u^\alpha p_l^{\alpha'} \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{N_q}\sum_{j=0}^{N_q-i} \hat{H}_{ij}^{(q)} \hat{Z}_{ij}^{\mu_1\dots\mu_q} p_{\{\mu_1}\dots p_{\mu_q\}}. \tag{4.45}$$

4.3 Aproximación de Grad

Queremos obtener una expresión de $\hat{Z}$ en función de las cantidades hidrodinámicas que nos permita hallar las ecuaciones de movimiento de T_u, T_l, $\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}$ y $\hat{h}_{\perp l}^\mu$. Al igual que en el caso cercano al equilibrio, haremos la aproximación de Grad.

Nuevamente, supondremos despreciables los términos de la expansión de $\hat{Z}$ con $q > 2$, pues los mismos van más allá del primer orden en la desviación respecto al estado anisótropo. Respecto a los términos restantes, nos quedaremos con la menor cantidad posible de momentos de $\hat{Z}$, que relacionaremos con las cantidades hidrodinámicas. Esto nos llevaría a la aproximación de 14 momentos de Grad, que se obtiene tomando $N_0 = 2$, $N_1 = 1$ y $N_2 = 0$. Notar que esto nos da los seis escalares $\hat{Z}_{00}$, $\hat{Z}_{01}$, $\hat{Z}_{02}$, $\hat{Z}_{10}$, $\hat{Z}_{11}$ y $\hat{Z}_{20}$, los tres vectores ortogonales a u^μ y l^μ, $\hat{Z}_{00}^\mu$, $\hat{Z}_{01}^\mu$ y $\hat{Z}_{10}^\mu$ (cada uno de dos componentes independientes), y el tensor de orden 2, ortogonal a u^μ y l^μ, simétrico y de traza nula $\hat{Z}_{00}^{\mu\nu}$ (dos componentes independientes), sumando 14 momentos. Pero como consecuencia de las condiciones (4.40) y (4.41) la mayoría de estos momentos se anulan:

$$\hat{Z} = p_u^\alpha p_l^{\alpha'}\left(\hat{H}_{01}^{(1)}\hat{h}_{\perp l}^\mu p_{\{\mu\}} + \hat{H}_{00}^{(2)}\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu} p_{\{\mu}p_{\nu\}}\right). \tag{4.46}$$

Faltaría calcular los coeficientes $\hat{H}_{01}^{(1)}$ y $\hat{H}_{00}^{(2)}$ para tener un expresión (aproximada) de $\hat{Z}$:

$$\hat{H}_{01}^{(1)} = \frac{2}{g_{\alpha\alpha'}^{(1)}(T_u,T_l)} a_{0011}^{(1)} P_{01}^{(1)} = \frac{2}{g_{\alpha\alpha'}^{(1)}(T_u,T_l)} \frac{\tilde{a}_{0011}^{(1)}}{T_l} \tilde{P}_{01}^{(1)}, \tag{4.47a}$$

$$\hat{H}_{00}^{(2)} = \frac{4}{g_{\alpha\alpha'}^{(2)}(T_u,T_l)} a_{0000}^{(2)} P_{00}^{(2)} = \frac{4}{g_{\alpha\alpha'}^{(2)}(T_u,T_l)}, \tag{4.47b}$$

donde hemos definido:

$$\tilde{P}_{nm}^{(q)} \equiv \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \tilde{a}_{nimj}^{(q)} x^i y^j, \tag{4.48a}$$

$$\tilde{a}_{nimj}^{(q)} \equiv a_{nimj}^{(q)} T_u^i T_l^j. \tag{4.48b}$$

Para conocer la forma explícita de estos coeficientes es necesario especificar $\hat{f}_0$.

Se llega entonces a la siguiente expresión:

$$\hat{Z} = p_u^{\alpha} p_l^{\alpha'} \left[\frac{2}{g_{\alpha\alpha'}^{(1)}(T_u, T_l)} \frac{\tilde{a}_{0011}^{(1)}}{T_l} \tilde{P}_{01}^{(1)} \hat{h}_{\perp l}^{\mu} p_{\{\mu\}} + \frac{4}{g_{\alpha\alpha'}^{(2)}(T_u, T_l)} \hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu} p_{\{\mu} p_{\nu\}} \right]. \tag{4.49}$$

Combinando la expresión anterior con la relación de ortogonalidad (4.28) se obtiene que todos los momentos de $\hat{Z}\hat{f}_0$ son nulos salvo los tensores de orden 1 y 2:

$$\hat{Z}_{ij}^{\mu} = \xi_{h,ij}(T_u, T_l) \hat{h}_{\perp l}^{\mu}, \tag{4.50a}$$

$$\hat{Z}_{ij}^{\mu\nu} = \xi_{\pi,ij}(T_u, T_l) \hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu}, \tag{4.50b}$$

donde se ha definido:

$$\begin{aligned} \xi_{h,ij}(T_u, T_l) \equiv & \frac{T_u^{i+\alpha+1} T_l^{j+\alpha'}}{g_{\alpha\alpha'}^{(1)}(T_u, T_l)} \frac{\tilde{a}_{0011}^{(1)}}{(2\pi)^2} \Big\{ T_u^2 \left[\tilde{a}_{0010}^{(1)} \mathcal{I}_{i+\alpha+2, j+\alpha'} + \tilde{a}_{0011}^{(1)} \mathcal{I}_{i+\alpha+2, j+\alpha'+1} \right] \\ & - T_l^2 \left[\tilde{a}_{0010}^{(1)} \mathcal{I}_{i+\alpha, j+\alpha'+2} + \tilde{a}_{0011}^{(1)} \mathcal{I}_{i+\alpha, j+\alpha'+3} \right] \Big\}, \end{aligned} \tag{4.51a}$$

$$\xi_{\pi,ij}(T_u, T_l) \equiv \frac{T_u^{i+\alpha+1} T_l^{j+\alpha'+1}}{(2\pi)^2 g_{\alpha\alpha'}^{(2)}(T_u, T_l)} \left[T_u^4 \mathcal{I}_{i+\alpha+4, j+\alpha'} + T_l^4 \mathcal{I}_{i+\alpha, j+\alpha'+4} - 2T_u^2 T_l^2 \mathcal{I}_{i+\alpha+2, j+\alpha'+2} \right]. \tag{4.51b}$$

4.4 Ecuaciones de movimiento de los momentos de $\hat{Z}\hat{f}_0$

De manera análoga a lo que se hizo en la teoría isótropa, las ecuaciones de movimiento de T_u, T_l, $\hat{h}_{\perp l}^{\mu}$ y $\hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu}$ se obtendrán a partir de las ecuaciones de movimiento de $\hat{Z}_{ij}$, $\hat{Z}_{ij}^{\mu}$ y $\hat{Z}_{ij}^{\mu\nu}$.

Partimos de:

$$\dot{\hat{Z}}_{ij} = 0 = \frac{d}{d\tau} \int Dp\, p_u^i p_l^j \hat{Z} \hat{f}_0, \tag{4.52a}$$

$$\dot{\hat{Z}}_{ij}^{\{\mu\}} = \Xi_{\nu}^{\mu} \frac{d}{d\tau} \int Dp\, p_u^i p_l^j p^{\{\nu\}} \hat{Z} \hat{f}_0, \tag{4.52b}$$

$$\dot{\hat{Z}}_{ij}^{\{\mu\nu\}} = \Xi_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \frac{d}{d\tau} \int Dp\, p_u^i p_l^j p^{\{\rho} p^{\sigma\}} \hat{Z} \hat{f}_0. \tag{4.52c}$$

Los índices i y j que aparecen en las ecuaciones de movimiento se tratarán de ajustar junto con α y α' para que valga la segunda ley de la termodinámica y para que la teoría anisótropa se reduzca a la teoría isótropa tomando el límite correspondiente. Conviene aclarar que los índices no necesariamente valen lo mismo en las tres ecuaciones.

Escribiendo $p_u^i = (-u_\mu p^\mu)^i$ y $p_l^j = (l_\mu p^\mu)^j$, es fácil ver que, para $i+j \geq 1$ y $i, j > 0$, la ecuaciones de movimiento (4.52a), (4.52b) y (4.52c) corresponden, respectivamente, a los momentos $i+j-1$, $i+j$ y $i+j+1$ de la ecuación de Boltzmann.

Luego de un extenso cálculo, se llega a:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{Z}}_{ij} = 0 = & I_{i-1,j} - \frac{T_u^i T_l^j}{(2\pi)^2}\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right) l^\nu \dot{u}_\nu - \left[T_u^{j+1}\mathcal{J}_{ij} + (i+1)T_l^{j+1}\mathcal{I}_{ij}\right]\frac{T_u^i}{(2\pi)^2}\dot{T}_u \\
& + \left[T_u^{j+1}\mathcal{J}_{ij} - (j+1)T_l^{j+1}\mathcal{I}_{ij}\right]\frac{T_u^{i+1}}{(2\pi)^2}\frac{\dot{T}_l}{T_l} - \frac{T_u^{i-1}T_l^{j+1}}{(2\pi)^2}\left[(i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2 + (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2\right] l^\nu u'_\nu \\
& - \left(T_u^{j+2}\mathcal{J}_{i-1,j+1} + iT_l^{j+2}\mathcal{I}_{i-1,j+1}\right)\frac{T_u^{i-1}}{(2\pi)^2}T'_u + \left[T_u^{j+2}\mathcal{J}_{i-1,j+1} - (j+2)T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i-1,j+1}\right]\frac{T_u^i}{(2\pi)^2}\frac{T'_l}{T_l} \\
& - \frac{T_u^{i-1}T_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2\right]\hat{\theta} + \frac{T_u^i T_l^j}{8\pi^2}\left[j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2 - (j+2)\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2\right]\hat{\theta}_l \\
& - i\hat{Z}^\nu_{i-1,j}\dot{u}_{\{\nu\}} + j\hat{Z}^\nu_{i,j-1}\dot{l}_{\{\nu\}} - (i-1)\hat{Z}^\nu_{i-2,j+1}u'_{\{\nu\}} + (j+1)\hat{Z}^\nu_{i-1,j}l'_{\{\nu\}} \\
& - \left[(i-1)\hat{Z}^\mu_{i-2,j+1} + j\hat{Z}^\mu_{i,j-1}\right] l^\nu\hat{\nabla}_\mu u_\nu - (i-1)\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-2,j}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + j\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-1,j-1}\hat{\sigma}_{l\mu\nu} - \hat{\nabla}_\mu\hat{Z}^\mu_{i-1,j},
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{Z}}^{\{\mu\}}_{ij} = & I^{\{\mu\}}_{i-1,j} - \frac{\dot{u}^{\{\mu\}}}{8\pi^2}\left[(i+2)T_u^{i+2}T_l^{j+1}\mathcal{I}_{i+1,j} - iT_u^iT_l^{j+3}\mathcal{I}_{i-1,j+2}\right] + \frac{\dot{l}^{\{\mu\}}}{8\pi^2}\Big[jT_u^{i+3}T_l^j\mathcal{I}_{i+2,j-1} \\
& -(j+2)T_u^{i+1}T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i,j+1}\Big] - \frac{u'^{\{\mu\}}}{8\pi^2}\left[(i+1)T_u^{i+1}T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i,j+1} - (i-1)T_u^{i-1}T_l^{j+4}\mathcal{I}_{i-2,j+3}\right] \\
& + \frac{l'^{\{\mu\}}}{8\pi^2}\left[(j+1)T_u^{i+2}T_l^{j+1}\mathcal{I}_{i+1,j} - (j+3)T_u^iT_l^{j+3}\mathcal{I}_{i-1,j+2}\right] \\
& - \frac{l^\sigma\hat{\nabla}^\mu u_\sigma}{8\pi^2}\Big[(i-1)\left(T_u^{i+1}T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i,j+1} - T_u^{i-1}T_l^{j+4}\mathcal{I}_{i-2,j+3}\right) \\
& + j\left(T_u^{i+3}T_l^j\mathcal{I}_{i+2,j-1} - T_u^{i+1}T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i,j+1}\right)\Big] - \frac{1}{8\pi^2}\hat{\nabla}^\mu\left(T_u^{i+2}T_l^{j+1}\mathcal{I}_{i+1,j} - T_u^iT_l^{j+3}\mathcal{I}_{i-1,j+2}\right) \\
& - l^\rho\dot{u}_\rho\left(i\hat{Z}^\mu_{i-1,j+1} + j\hat{Z}^\mu_{i+1,j-1}\right) - l^\rho u'_\rho\left[(i-1)\hat{Z}^\mu_{i-2,j+2} + (j+1)\hat{Z}^\mu_{ij}\right] - \hat{Z}'^{\{\mu\}}_{i-1,j+1} \\
& - \frac{\hat{\sigma}^{\mu\rho}}{2}\left[(i+1)\hat{Z}_{ij;\rho} - (i-1)\hat{Z}_{i-2,j+2;\rho}\right] + \hat{\omega}^{\mu\rho}\hat{Z}_{ij;\rho} - \frac{\hat{\theta}}{2}\left[(i+2)\hat{Z}^\mu_{ij} - (i-1)\hat{Z}^\mu_{i-2,j+2}\right] \\
& + \frac{\hat{\sigma}_l^{\mu\rho}}{2}\left[j\hat{Z}_{i+1,j-1;\rho} - (j+2)\hat{Z}_{i-1,j+1;\rho}\right] + \hat{\omega}_l^{\mu\rho}\hat{Z}_{i-1,j+1;\rho} + \frac{\hat{\theta}_l}{2}\left[j\hat{Z}^\mu_{i+1,j-1} - (j+3)\hat{Z}^\mu_{i-1,j+1}\right] \\
& - i\dot{u}_\rho\hat{Z}^{\mu\rho}_{i-1,j} + j\dot{l}_\rho\hat{Z}^{\mu\rho}_{i,j-1} - (i-1)u'_\rho\hat{Z}^{\mu\rho}_{i-2,j+1} + (j+1)l'_\rho\hat{Z}^{\mu\rho}_{i-1,j} - \Xi^\mu_\nu\hat{\nabla}_\rho\left(\hat{Z}^{\nu\rho}_{i-1,j}\right) \\
& - l^\sigma\hat{\nabla}_\rho u_\sigma\left[(i-1)\hat{Z}^{\mu\rho}_{i-2,j+1} + j\hat{Z}^{\mu\rho}_{i,j-1}\right],
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{Z}}^{\{\mu\nu\}}_{ij} = & I^{\{\mu\nu\}}_{i-1,j} + \frac{\hat{\sigma}^{\mu\nu}}{16\pi^2}\left[2(i+1)T_u^{i+1}T_l^{j+3}\mathcal{I}_{i,j+2} - (i+3)T_u^{i+3}T_l^{j+1}\mathcal{I}_{i+2,j} - (i-1)T_u^{i-1}T_l^{j+5}\mathcal{I}_{i-2,j+4}\right] \\
& + \frac{\hat{\sigma}_l^{\mu\nu}}{16\pi^2}\left[jT_u^{i+4}T_l^j\mathcal{I}_{i+3,j-1} + (j+4)T_u^iT_l^{j+4}\mathcal{I}_{i-1,j+3} - 2(j+2)T_u^{i+2}T_l^{j+2}\mathcal{I}_{i+1,j+1}\right] \\
& + \frac{\dot{u}^{\{\mu}}{2}\left[i\hat{Z}^{\nu\}}_{i-1,j+2} - (i+4)\hat{Z}^{\nu\}}_{i+1,j}\right] + \frac{\dot{l}^{\{\mu}}{2}\left[j\hat{Z}^{\nu\}}_{i+2,j-1} - (j+4)\hat{Z}^{\nu\}}_{i,j+1}\right] \\
& + \frac{i-1}{2}u'^{\{\mu}\left(\hat{Z}^{\nu\}}_{i-2,j+3} - \hat{Z}^{\nu\}}_{i,j+1}\right) + \frac{j+1}{2}l'^{\{\mu}\left(\hat{Z}^{\nu\}}_{i+1,j} - \hat{Z}^{\nu\}}_{i-1,j+2}\right) \\
& - \frac{\Xi^{\mu\nu}_{\sigma\eta}}{2}l^\rho\hat{\nabla}^\sigma u_\rho\left[(i-1)\left(\hat{Z}^\eta_{i,j+1} - \hat{Z}^\eta_{i-2,j+3}\right) + j\left(\hat{Z}^\eta_{i+2,j-1} - \hat{Z}^\eta_{i,j+1}\right)\right] \\
& - \frac{\Xi^{\mu\nu}_{\rho\sigma}}{2}\hat{\nabla}^\rho\left(\hat{Z}^\sigma_{i+1,j} - \hat{Z}^\sigma_{i-1,j+2}\right) - l^\rho\dot{u}_\rho\left(i\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-1,j+1} + j\hat{Z}^{\mu\nu}_{i+1,j-1}\right) - l^\rho u'_\rho\Big[(i-1)\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-2,j+2}
\end{aligned}$$

$$+(j+1)\hat{Z}^{\mu\nu}_{ij}\Big] - \hat{Z}'^{\{\mu\nu\}}_{i-1,j+1} - \frac{2}{3}\hat{\sigma}^{\{\mu}_{\rho}\left[(i+2)\hat{Z}^{\nu\}\rho}_{ij} - (i-1)\hat{Z}^{\nu\}\rho}_{i-2,j+2}\right] + \frac{2}{3}\hat{\sigma}^{\{\mu}_{l\rho}\Big[j\hat{Z}^{\nu\}\rho}_{i+1,j-1}$$
$$-(j+3)\hat{Z}^{\nu\}\rho}_{i-1,j+1}\Big] - \frac{\hat{\theta}}{2}\left[(i+3)\hat{Z}^{\mu\nu}_{ij} - (i-1)\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-2.j+2}\right] + \frac{\hat{\theta}_l}{2}\left[j\hat{Z}^{\mu\nu}_{i+1,j-1} - (j+4)\hat{Z}^{\mu\nu}_{i-1,j+1}\right]$$
$$- 2\hat{\omega}^{\{\mu}_{\xi}\hat{Z}^{\nu\}\xi}_{ij} - 2\hat{\omega}^{\{\mu}_{l\xi}\hat{Z}^{\nu\}\xi}_{i-1,j+1}, \tag{4.55}$$

donde hemos definido $a' \equiv l^\mu \partial_\mu a$, $\hat{\nabla}_\mu \equiv \Xi^\nu_\mu \partial_\nu$, $\hat{\theta} \equiv \hat{\nabla}_\rho u^\rho$, $\hat{\theta}_l \equiv \hat{\nabla}_\rho l^\rho$, $\hat{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \Xi^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\hat{\nabla}^\rho u^\sigma = \hat{\nabla}^{\{\mu}u^{\nu\}}$, $\hat{\sigma}^{\mu\nu}_l \equiv \Xi^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\hat{\nabla}^\rho l^\sigma = \hat{\nabla}^{\{\mu}l^{\nu\}}$, $\hat{\omega}^{\mu\rho} \equiv \Xi^{[\mu}_\sigma \Xi^{\rho]}_\nu \hat{\nabla}^\sigma u^\nu$, $\hat{\omega}^{\mu\rho}_l \equiv \Xi^{[\mu}_\sigma \Xi^{\rho]}_\nu \hat{\nabla}^\sigma l^\nu$ y:

$$I^{\mu_1 \dots \mu_q}_{ij} \equiv \int Dp\, p^i_u p^j_l p^{\mu_1} \dots p^{\mu_q} I_{\mathrm{col}}[f]. \tag{4.56}$$

4.5 Término de colisión

Ahora calcularemos los términos de colición I_{ij}, $I^{\{\mu\}}_{ij}$ y $I^{\{\mu\nu\}}_{ij}$ en función de las cantidades hidrodinámicas bajo la aproximación RTA. Usando la integral de colisión (3.2) en la ecuación (4.56), se obtiene:

$$I^{\mu_1 \dots \mu_q}_{ij} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l p^{\mu_1} \dots p^{\mu_q} Z f_0. \tag{4.57}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} f =& f_0(1+Z) = \hat{f}_0(1+\hat{Z}), \\ Z f_0 =& \hat{f}_0 - f_0 + \hat{Z}\hat{f}_0. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Luego:

$$I^{\mu_1 \dots \mu_q}_{ij} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l p^{\mu_1} \dots p^{\mu_q} (\hat{f}_0 - f_0 + \hat{Z}\hat{f}_0). \tag{4.59}$$

Usando ahora la aproximación de Grad (4.49), obtenemos para I_{ij}:

$$\begin{aligned} I_{ij} =& -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l (\hat{f}_0 - f_0 + \hat{f}_0 \hat{Z}) = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l (\hat{f}_0 - f_0) \\ =& -\frac{1}{4\pi^2 \tau_{\mathrm{rel}}} \left\{ \mathcal{I}_{i+1,j} T^{i+2}_u T^{j+1}_l - \left[1 + (-1)^j\right] \frac{(i+j+2)!}{j+1} T^{i+j+3} \right\}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

De la relación (4.23), se obtiene:

$$T = \left(\frac{\mathcal{I}_{20}}{12}\right)^{1/4} T^{3/4}_u T^{1/4}_l. \tag{4.61}$$

Luego:

$$I_{ij} = \frac{T^{i+2}_u T^{j+1}_l}{4\pi^2 \tau_{\mathrm{rel}}} \left\{ \left[1 + (-1)^j\right] \frac{(i+j+2)!}{j+1} \left(\frac{\mathcal{I}_{20}}{12}\right)^{(i+j+3)/4} \left(\frac{T_u}{T_l}\right)^{(3j-i+1)/4} - \mathcal{I}_{i+1,j} \right\}. \tag{4.62}$$

Para $I^{\{\mu\}}_{ij}$ y $I^{\{\mu\nu\}}_{ij}$, se obtiene:

$$I^{\{\mu\}}_{ij} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l p^{\{\mu\}} \hat{f}_0 \hat{Z} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \hat{Z}^\mu_{i+1,j} = -\frac{\xi_{h,i+1,j}}{\tau_{\mathrm{rel}}} \hat{h}^\mu_{\perp l}, \tag{4.63a}$$

$$I^{\{\mu\nu\}}_{ij} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \int Dp\, p^{i+1}_u p^j_l p^{\{\mu}p^{\nu\}} \hat{f}_0 \hat{Z} = -\frac{1}{\tau_{\mathrm{rel}}} \hat{Z}^{\mu\nu}_{i+1,j} = -\frac{\xi_{\pi,i+1,j}}{\tau_{\mathrm{rel}}} \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp. \tag{4.63b}$$

4.6 Ecuaciones de movimiento hidrodinámicas

4.6.1 Ecuaciones de movimiento de la hidrodinámica anisótropa

Comenzaremos obteniendo las ecuaciones de conservación de la energía-momento:

$$
\begin{aligned}
0 =& -\frac{1}{(2\pi)^2}\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)T_u^2\dot{T}_u - \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\frac{T_u^3}{T_l}\dot{T}_l - \frac{T_uT_l}{(2\pi)^2}\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)l_\mu u'^\mu \\
&- \frac{T_uT_l}{8\pi^2}\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\hat{\theta} - \hat{h}^\mu_{\perp l}l^\nu\hat{\nabla}_\mu u_\nu - \hat{h}^\nu_{\perp l}u'_{\{\nu\}} - \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp\hat{\sigma}_{\mu\nu}, \qquad (4.64a)\\
0 =& \frac{T_uT_l}{(2\pi)^2}\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)l_\mu\dot{u}^\mu + \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{J}_{02}T_u^3\right)T'_u + \frac{1}{(2\pi)^2}\left(3\mathcal{I}_{02}T_l^3 - \mathcal{J}_{02}T_u^3\right)\frac{T_u}{T_l}T'_l \\
&+ \frac{T_uT_l}{8\pi^2}\left(3\mathcal{I}_{02}T_l^2 - \mathcal{I}_{20}T_u^2\right)\hat{\theta}_l + \hat{h}^\mu_{\perp l}\dot{u}_{\{\mu\}} - 2\hat{h}^\mu_{\perp l}l'_{\{\mu\}} + \hat{\nabla}_\mu\hat{h}^\mu_{\perp l} - \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp\hat{\sigma}_{l\mu\nu}, \qquad (4.64b)\\
0 =& \frac{T_uT_l}{8\pi^2}\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\dot{u}^{\{\sigma\}} + \frac{T_uT_l}{8\pi^2}\left(3\mathcal{I}_{02}T_l^2 - \mathcal{I}_{20}T_u^2\right)l'^{\{\sigma\}} + \frac{1}{8\pi^2}\left[\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)T_u^2\right.\\
&\left.-\mathcal{I}_{02}T_l^3 - \mathcal{J}_{02}T_u^3\right]\hat{\nabla}^\sigma T_u + \frac{1}{8\pi^2}\left[\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\frac{T_u^3}{T_l} - \left(3\mathcal{I}_{02}T_l^3 - \mathcal{J}_{02}T_u^3\right)\frac{T_u}{T_l}\right]\hat{\nabla}^\sigma T_l \\
&+ \hat{h}^\mu_{\perp l}\left(\hat{\sigma}^\sigma_{l,\mu} - \hat{\omega}^\sigma_{l,\mu}\right) + \frac{3}{2}h^\sigma_{\perp l}\hat{\theta}_l + h'^{\{\sigma\}}_{\perp l} + h^\sigma_{\perp l}l_\mu\dot{u}^\mu + \pi^{\mu\sigma}_\perp\dot{u}_{\{\mu\}} - \pi^{\mu\sigma}_\perp l'_{\{\mu\}} + \Xi^\sigma_\nu\hat{\nabla}_\mu\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp. \qquad (4.64c)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones (4.64a) y (4.64b) corresponden, respectivamente, a la conservación de la energía y del momento en la dirección l^μ. Ambas se obtienen de la ecuación (4.53), la primera tomando $i = 2$ y $j = 0$ y la segunda tomando $i = 1$ y $j = 1$. La ecuación (4.64c) corresponde a la conservación del momento en las dos direcciones restantes y se obtiene eligiendo $i = 1$ y $j = 0$ en (4.54). Las mismas ecuaciones podrían haberse obtenido calculando las proyecciones correspondientes de $\partial_\mu T^{\mu\nu}$.

En un estado de equilibrio local las ecuaciones de conservación de la energía-momento forman un sistema cerrado de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: la temperatura T y las tres componentes independientes de u^μ. Cuando se tiene un estado anisótropo ($\hat{Z} = 0, \hat{h}^\mu_{\perp l} = \hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp = 0$), en lugar de T se tienen los parámetros T_u y T_l, por lo que hace falta una ecuación más para cerrar el sistema de ecuaciones. En [8,9] se completa el sistema usando la ecuación de creación de partículas (momento cero de la ecuación de Boltzmann). Esto corresponde a tomar $i = 1$ y $j = 0$ en la ecuación (4.53). Sin embargo, cualquier elección de i y j que no lleve a las ecuaciones de conservación (4.64a) y (4.64b) es, en principio, válida. En [11] se evalúan varias alternativas comparándolas con la solución exacta de la ecuación de Boltzmann para un flujo de Bjorken. Aquí, de momento, dejaremos libres a estos índices.

Como se había mencionado anteriormente, la elección de i y j no es necesariamente la misma en las tres ecuaciones de movimiento (4.53) a (4.55), por lo que hay que tener el cuidado de distinguir entre los pares de índices de distintas ecuaciones. Tomaremos $i = r$ y $j = s$ en (4.53), quedando entonces la ecuación que cierra el sistema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
0 =& I_{r-1,s} - \frac{T_u^rT_l^s}{(2\pi)^2}\left(r\mathcal{I}_{r-1,s+1}T_l^2 + s\mathcal{I}_{r+1,s-1}T_u^2\right)l^\nu\dot{u}_\nu - \left[T_u^{s+1}\mathcal{J}_{rs} + (r+1)T_l^{s+1}\mathcal{I}_{rs}\right]\frac{T_u^r}{(2\pi)^2}\dot{T}_u \\
&+ \left[T_u^{s+1}\mathcal{J}_{rs} - (s+1)T_l^{s+1}\mathcal{I}_{rs}\right]\frac{T_u^{r+1}}{(2\pi)^2}\frac{\dot{T}_l}{T_l} - \frac{T_u^{r-1}T_l^{s+1}}{(2\pi)^2}\left[(r-1)\mathcal{I}_{r-2,s+2}T_l^2 + (s+1)\mathcal{I}_{rs}T_u^2\right]l^\nu u'_\nu \\
&- \left(T_u^{s+2}\mathcal{J}_{r-1,s+1} + rT_l^{s+2}\mathcal{I}_{r-1,s+1}\right)\frac{T_u^{r-1}}{(2\pi)^2}T'_u + \left[T_u^{s+2}\mathcal{J}_{r-1,s+1} - (s+2)T_l^{s+2}\mathcal{I}_{r-1,s+1}\right]\frac{T_u^r}{(2\pi)^2}\frac{T'_l}{T_l} \\
&- \frac{T_u^{r-1}T_l^{s+1}}{8\pi^2}\left[(r+1)\mathcal{I}_{rs}T_u^2 - (r-1)\mathcal{I}_{r-2,s+2}T_l^2\right]\hat{\theta} + \frac{T_u^rT_l^s}{8\pi^2}\left[s\mathcal{I}_{r+1,s-1}T_u^2 - (s+2)\mathcal{I}_{r-1,s+1}T_l^2\right]\hat{\theta}_l \\
&- r\xi_{h,r-1,s}\hat{h}^\nu_{\perp l}\dot{u}_{\{\nu\}} + s\xi_{h,r,s-1}\hat{h}^\nu_{\perp l}\dot{l}_{\{\nu\}} - (r-1)\xi_{h,r-2,s+1}\hat{h}^\nu_{\perp l}u'_{\{\nu\}} + (s+1)\xi_{h,r-1,s}\hat{h}^\nu_{\perp l}l'_{\{\nu\}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \left[(r-1)\xi_{h,r-2,s+1} + s\xi_{h,r,s-1}\right] \hat{h}^{\mu}_{\perp l} l^{\nu} \hat{\nabla}_{\mu} u_{\nu} - (r-1)\xi_{\pi,r-2,s}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + s\xi_{\pi,r-1,s-1}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\mu\nu} \\
&- \hat{\nabla}_{\mu}\left(\xi_{h,r-1,s}\hat{h}^{\mu}_{\perp l}\right). \qquad (4.65)
\end{aligned}
$$

Notar que la ecuación que completa la hidrodinámica anisótropa no puede salir de (4.54) o de (4.55), ya que se necesita una segunda ecuación con las derivadas temporales de T_u y T_l.

De (4.64) y (4.65) se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$
\begin{aligned}
\dot{T}_u =& \Upsilon^{u(0)}_{rs} - \Upsilon^{u(1)}_{lu;rs} l^{\mu} u'_{\mu} + \Upsilon^{u(1)}_{T_u;rs} T'_u + \Upsilon^{u(1)}_{T_l;rs} T'_l - \Upsilon^{u(1)}_{\theta;rs}\hat{\theta} + \Upsilon^{u(1)}_{\theta_l;rs}\hat{\theta}_l + \Upsilon^{u(2)}_{hl;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} l'_{\{\nu\}} - \Upsilon^{u(2)}_{hu;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} u'_{\{\nu\}} \\
&+ \Upsilon^{u(2)}_{h\dot{l};rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\dot{l}_{\{\nu\}} + \Upsilon^{u(2)}_{hT_u;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_u + \Upsilon^{u(2)}_{hT_l;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_l - \Upsilon^{u(2)}_{hlu;rs}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} l^{\nu}\hat{\nabla}_{\mu} u_{\nu} + \Upsilon^{u(2)}_{h;rs}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} \\
&- \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\mu\nu}, \qquad (4.66a)\\
\dot{T}_l =& \Upsilon^{l(0)}_{rs} + \Upsilon^{l(1)}_{lu;rs} l^{\mu} u'_{\mu} - \Upsilon^{l(1)}_{T_u;rs} T'_u - \Upsilon^{l(1)}_{T_l;rs} T'_l + \Upsilon^{l(1)}_{\theta;rs}\hat{\theta} - \Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;rs}\hat{\theta}_l - \Upsilon^{l(2)}_{hl;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} l'_{\{\nu\}} + \Upsilon^{l(2)}_{hu;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} u'_{\{\nu\}} \\
&- \Upsilon^{l(2)}_{h\dot{l};rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\dot{l}_{\{\nu\}} - \Upsilon^{l(2)}_{hT_u;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_u - \Upsilon^{l(2)}_{hT_l;rs}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_l + \Upsilon^{l(2)}_{hlu;rs}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} l^{\nu}\hat{\nabla}_{\mu} u_{\nu} - \Upsilon^{l(2)}_{h;rs}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} \\
&+ \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{\mu\nu} - \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\mu\nu}, \qquad (4.66b)\\
\dot{u}^{\{\mu\}} =& - u^{(1)}_{l} l'^{\{\mu\}} - u^{(1)}_{T_u}\hat{\nabla}^{\mu} T_u - u^{(1)}_{T_l}\hat{\nabla}^{\mu} T_l - u^{(2)}_{h\sigma_l}\hat{\sigma}^{\mu\rho}_{l}\hat{h}_{\perp l\rho} + u^{(2)}_{h\omega_l}\hat{\omega}^{\mu\rho}_{l}\hat{h}_{\perp l\rho} - u^{(2)}_{h\theta_l}\hat{\theta}_l\hat{h}^{\mu}_{\perp l} - u^{(2)}_{h} h'^{\{\mu\}}_{\perp l} \\
&+ u^{(2)}_{T_u h} T'_u \hat{h}^{\mu}_{\perp l} + u^{(2)}_{T_l h} T'_l \hat{h}^{\mu}_{\perp l} + u^{(2)}_{\pi l}\pi^{\mu\rho}_{\perp} l'_{\{\rho\}} + u^{(2)}_{\pi T_u}\pi^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho} T_u + u^{(2)}_{\pi T_l}\pi^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho} T_l - u^{(2)}_{\pi}\Xi^{\mu}_{\nu}\hat{\nabla}_{\rho}\pi^{\rho\nu}_{\perp}, \qquad (4.66c)\\
l_{\rho}\dot{u}^{\rho} =& - \psi^{(1)}_{T_u} T'_u - \psi^{(1)}_{T_l} T'_l - \psi^{(1)}_{\theta_l}\hat{\theta}_l + \psi^{(2)}_{hl} h^{\rho}_{\perp l} l'_{\{\rho\}} + \psi^{(2)}_{hT_u} h^{\rho}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\rho} T_u + \psi^{(2)}_{hT_l} h^{\rho}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\rho} T_l - \psi^{(2)}_{h}\hat{\nabla}_{\rho} h^{\rho}_{\perp l} \\
&+ \psi^{(2)}_{\pi\sigma_l}\pi^{\rho\sigma}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\rho\sigma}, \qquad (4.66d)
\end{aligned}
$$

donde nos hemos quedado a segundo orden en las desviaciones respecto al estado anisótropo y en las derivadas espaciales. Los coeficientes de transporte se listan en el apéndice D. Si $\hat{\pi}^{\mu\nu} = \hat{h}^{\mu}_{\perp l} = 0$, estas ecuaciones forman un sistema cerrado correspondiente a la hidrodinámica anisótropa.

4.6.2 Ecuaciones de movimiento de $\hat{h}^{\mu}_{\perp l}$ y $\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}$

Derivando las ecuaciones (4.50a) y (4.50b), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{Z}}^{\{\mu\}}_{ab} =& \dot{\xi}_{h,ab}(T_u, T_l)\hat{h}^{\mu}_{\perp l} + \xi_{h,ab}(T_u, T_l)\dot{\hat{h}}^{\{\mu\}}_{\perp l}, \qquad (4.67a)\\
\dot{\hat{Z}}^{\{\mu\nu\}}_{kl} =& \dot{\xi}_{\pi,kl}(T_u, T_l)\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \xi_{\pi,kl}(T_u, T_l)\dot{\hat{\pi}}^{\{\mu\nu\}}_{\perp}. \qquad (4.67b)
\end{aligned}
$$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_{h,ab} =& \frac{\partial \xi_{h,ab}}{\partial T_u}\dot{T}_u + \frac{\partial \xi_{h,ab}}{\partial T_l}\dot{T}_l, \qquad (4.68a)\\
\dot{\xi}_{\pi,kl} =& \frac{\partial \xi_{\pi,kl}}{\partial T_u}\dot{T}_u + \frac{\partial \xi_{\pi,kl}}{\partial T_l}\dot{T}_l. \qquad (4.68b)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_{h,ab} =& \xi^{h(0)}_{rsab} + \xi^{h(1)}_{lu;rsab} l^{\mu} u'_{\mu} + \xi^{h(1)}_{T_u;rsab} T'_u + \xi^{h(1)}_{T_l;rsab} T'_l + \xi^{h(1)}_{\theta;rsab}\hat{\theta} + \xi^{h(1)}_{\theta_l;rsab}\hat{\theta}_l + \xi^{h(2)}_{hl;rsab}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} l'_{\{\nu\}} + \xi^{h(2)}_{hu;rsab}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} u'_{\{\nu\}} \\
&+ \xi^{h(2)}_{h\dot{l};rsab}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\dot{l}_{\{\nu\}} + \xi^{h(2)}_{hT_u;rsab}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_u + \xi^{h(2)}_{hT_l;rsab}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_l + \xi^{h(2)}_{hlu;rsab}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} l^{\nu}\hat{\nabla}_{\mu} u_{\nu} + \xi^{h(2)}_{h;rsab}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} \\
&+ \xi^{h(2)}_{\pi\sigma;rsab}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \xi^{h(2)}_{\pi\sigma_l;rsab}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\mu\nu}, \qquad (4.69a)\\
\dot{\xi}_{\pi,kl} =& \xi^{\pi(0)}_{rskl} + \xi^{\pi(1)}_{lu;rskl} l^{\mu} u'_{\mu} + \xi^{\pi(1)}_{T_u;rskl} T'_u + \xi^{\pi(1)}_{T_l;rskl} T'_l + \xi^{\pi(1)}_{\theta;rskl}\hat{\theta} + \xi^{\pi(1)}_{\theta_l;rskl}\hat{\theta}_l + \xi^{\pi(2)}_{hl;rskl}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} l'_{\{\nu\}} + \xi^{\pi(2)}_{hu;rskl}\hat{h}^{\nu}_{\perp l} u'_{\{\nu\}} \\
&+ \xi^{\pi(2)}_{h\dot{l};rskl}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\dot{l}_{\{\nu\}} + \xi^{\pi(2)}_{hT_u;rskl}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_u + \xi^{\pi(2)}_{hT_l;rskl}\hat{h}^{\nu}_{\perp l}\hat{\nabla}_{\nu} T_l + \xi^{\pi(2)}_{hlu;rskl}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} l^{\nu}\hat{\nabla}_{\mu} u_{\nu} + \xi^{\pi(2)}_{h;rskl}\hat{\nabla}_{\mu}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} \\
&+ \xi^{\pi(2)}_{\pi\sigma;rskl}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{\mu\nu} + \xi^{\pi(2)}_{\pi\sigma_l;rskl}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}\hat{\sigma}_{l\mu\nu}. \qquad (4.69b)
\end{aligned}
$$

Los coeficientes se listan en el apéndice D. Reemplazando en (4.67) y usando (4.66) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{h}}_{\perp l}^{\{\mu\}} =& -\frac{\hat{h}^{\mu}_{\perp l}}{\tau^{h}_{rsab}} + \lambda^{(1)}_{l;ab}\dot{l}^{\{\mu\}} - \lambda^{(1)}_{u;ab}u'^{\{\mu\}} + \lambda^{(1)}_{l;ab}l'^{\{\mu\}} - \lambda^{(1)}_{lu;ab}l^{\sigma}\hat{\nabla}^{\mu}u_{\sigma} + \lambda^{(1)}_{T_u;ab}\hat{\nabla}^{\mu}T_u + \lambda^{(1)}_{T_l;ab}\hat{\nabla}^{\mu}T_l \\
&+ \lambda^{(2)}_{T_u h;rsab}T'_u\hat{h}^{\mu}_{\perp l} + \lambda^{(2)}_{T_l h;rsab}T'_l\hat{h}^{\mu}_{\perp l} - \lambda^{(2)}_{luh;rsab}l^{\rho}u'_{\rho}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} + \lambda^{(2)}_{h;ab}\hat{h}'^{\{\mu\}}_{\perp l} - \lambda^{(2)}_{\sigma h;ab}\hat{\sigma}^{\mu\rho}\hat{h}_{\perp l,\rho} + \hat{\omega}^{\mu\rho}\hat{h}_{\perp l,\rho} \\
&- \lambda^{(2)}_{\theta h;rsab}\hat{\theta}\hat{h}^{\mu}_{\perp l} + \lambda^{(2)}_{\sigma_l h;ab}\hat{\sigma}^{\mu\rho}_{l}\hat{h}_{\perp l,\rho} + \lambda^{(2)}_{\omega_l h;ab}\hat{\omega}^{\mu\rho}_{l}\hat{h}_{\perp l,\rho} + \lambda^{(2)}_{\theta_l h;rsab}\hat{\theta}_l\hat{h}^{\mu}_{\perp l} + \lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}\dot{l}_{\{\rho\}} \\
&+ \lambda^{(2)}_{\pi l;ab}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}l'_{\{\rho\}} - \lambda^{(2)}_{\pi u;ij}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}u'_{\{\rho\}} + \lambda^{(2)}_{\pi T_u;ab}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho}T_u + \lambda^{(2)}_{\pi T_l;ab}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho}T_l + \lambda^{(2)}_{\pi;ab}\Xi^{\mu}_{\nu}\hat{\nabla}_{\rho}\hat{\pi}^{\nu\rho}_{\perp} \\
&- \lambda^{(2)}_{lu\pi;ab}l^{\sigma}\hat{\nabla}_{\rho}u_{\sigma}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp},
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\pi}}_{\perp}^{\{\mu\nu\}} =& -\frac{\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}}{\tau^{\pi}_{rskl}} + \phi^{(1)}_{\sigma;kl}\hat{\sigma}^{\mu\nu} + \phi^{(1)}_{\sigma_l;kl}\hat{\sigma}^{\mu\nu}_{l} + \phi^{(2)}_{\dot{l}h;rskl}\dot{l}^{\{\mu}\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} + \phi^{(2)}_{uh;kl}u'^{\{\mu}\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} + \phi^{(2)}_{lu;kl}l'^{\{\mu}\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} \\
&+ \phi^{(2)}_{T_u h;kl}\hat{\nabla}^{\{\mu}T_u\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} + \phi^{(2)}_{T_l h;kl}\hat{\nabla}^{\{\mu}T_l\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} + \phi^{(1)}_{h;kl}\Xi^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\hat{\nabla}^{\rho}\hat{h}^{\sigma}_{\perp l} + \phi^{(2)}_{luh;kl}l^{\rho}\hat{\nabla}^{\{\mu}u_{\rho}\hat{h}^{\nu\}}_{\perp l} \\
&- \phi^{(2)}_{lu\pi;rskl}l^{\rho}u'_{\rho}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{T_u\pi;rskl}T'_u\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{T_l\pi;rskl}T'_l\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} - \phi^{(2)}_{\pi;kl}\hat{\pi}'^{\{\mu\nu\}}_{\perp} + \phi^{(2)}_{\sigma\pi;kl}\hat{\sigma}^{\rho\{\mu}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} \\
&- 2\hat{\omega}^{\rho\{\mu}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} + \phi^{(2)}_{\theta\pi;rskl}\hat{\theta}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{\sigma_l\pi;kl}\hat{\sigma}^{\rho\{\mu}_{l}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} - \phi^{(2)}_{\omega_l\pi;kl}\hat{\omega}^{\rho\{\mu}_{l}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} + \phi^{(2)}_{\theta_l\pi;rskl}\hat{\theta}_l\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}.
\end{aligned}
\tag{4.71}
$$

Los coeficientes de transporte se encuentran en el apéndice D.

Hasta aquí se han recuperado las ecuaciones de movimiento de [10] para un fluido conforme. Resta definir el campo l^{μ}. Análogamente a la definición de Landau-Lifshitz de u^{μ}, se impone:

$$
l_{\nu}T^{\mu\nu} = P_l l^{\mu}, \tag{4.72}
$$

de donde se deduce:

$$
\hat{h}^{\mu}_{\perp l} = 0. \tag{4.73}
$$

Es decir, los grados de libertad de $\hat{h}^{\mu}_{\perp l}$ se trasladan a l^{μ}, que es ahora una cantidad dinámica. La ecuación de movimiento para l^{μ} se obtiene de (4.70):

$$
\begin{aligned}
\dot{l}^{\{\mu\}} =& \frac{\lambda^{(1)}_{u;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}u'^{\{\mu\}} - \frac{\lambda^{(1)}_{l;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}l'^{\{\mu\}} + \frac{\lambda^{(1)}_{lu;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}l^{\sigma}\hat{\nabla}^{\mu}u_{\sigma} - \frac{\lambda^{(1)}_{T_u;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}\hat{\nabla}^{\mu}T_u - \frac{\lambda^{(1)}_{T_l;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}\hat{\nabla}^{\mu}T_l + \left(\frac{\lambda^{(2)}_{\pi u}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}} - \frac{\lambda^{(1)}_{u;ab}\lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}}{\lambda^{(1)2}_{\dot{l};ab}}\right)\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}u'_{\{\rho\}} \\
&- \left(\frac{\lambda^{(2)}_{\pi l}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}} - \frac{\lambda^{(1)}_{l;ab}\lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}}{\lambda^{(1)2}_{\dot{l};ab}}\right)\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}l'_{\{\rho\}} - \left(\frac{\lambda^{(2)}_{\pi T_u}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}} - \frac{\lambda^{(1)}_{T_u;ab}\lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}}{\lambda^{(1)2}_{\dot{l};ab}}\right)\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho}T_u - \left(\frac{\lambda^{(2)}_{\pi T_l}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}} - \frac{\lambda^{(1)}_{T_l;ab}\lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}}{\lambda^{(1)2}_{\dot{l};ab}}\right)\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp}\hat{\nabla}_{\rho}T_l \\
&+ \left(\frac{\lambda^{(2)}_{lu\pi}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}} - \frac{\lambda^{(1)}_{lu;ab}\lambda^{(2)}_{\pi\dot{l};ab}}{\lambda^{(1)2}_{\dot{l};ab}}\right)l^{\sigma}\hat{\nabla}_{\rho}u_{\sigma}\hat{\pi}^{\mu\rho}_{\perp} - \frac{\lambda^{(2)}_{\pi;ab}}{\lambda^{(1)}_{\dot{l};ab}}\Xi^{\mu}_{\nu}\hat{\nabla}_{\rho}\hat{\pi}^{\nu\rho}_{\perp}.
\end{aligned}
\tag{4.74}
$$

La ecuación de movimiento de $\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}$ queda:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{\pi}}_{\perp}^{\{\mu\nu\}} =& -\frac{\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}}{\tau^{\pi}_{rskl}} + \phi^{(1)}_{\sigma;kl}\hat{\sigma}^{\mu\nu} + \phi^{(1)}_{\sigma_l;kl}\hat{\sigma}^{\mu\nu}_{l} - \phi^{(2)}_{lu\pi;rskl}l^{\rho}u'_{\rho}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{T_u\pi;rskl}T'_u\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{T_l\pi;rskl}T'_l\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} - \phi^{(2)}_{\pi;kl}\hat{\pi}'^{\{\mu\nu\}}_{\perp} \\
&+ \phi^{(2)}_{\sigma\pi;kl}\hat{\sigma}^{\rho\{\mu}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} - 2\hat{\omega}^{\rho\{\mu}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} + \phi^{(2)}_{\theta\pi;kl}\hat{\theta}\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp} + \phi^{(2)}_{\sigma_l\pi;kl}\hat{\sigma}^{\rho\{\mu}_{l}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} - \phi^{(2)}_{\omega_l\pi;kl}\hat{\omega}^{\rho\{\mu}_{l}\hat{\pi}^{\nu\}}_{\perp\rho} + \phi^{(2)}_{\theta_l\pi;kl}\hat{\theta}_l\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}.
\end{aligned}
\tag{4.75}
$$

4.7 Ansatz de Romatschke-Strickland y conexión con la teoría isótropa

En [8, 9] se asume la siguiente forma para $\hat{f}_0$:

$$\hat{f}_0 = \exp\left(-\frac{\sqrt{p_\perp^2 + (1+\xi)p_l^2}}{\Lambda}\right). \tag{4.76}$$

Este ansatz para la función de distribución anisótropa fue propuesto originalmente por Romatschke y Strickland en [7]. Λ es un parámetro que coincide con la temperatura en el estado de equilibrio y ξ mide la anisotropía en el espacio de momentos; $-1 < \xi < \infty$. Escribiendo $p_\perp^2 = p_u^2 - p_l^2$, podemos relacionar estos dos parámetros con T_u y T_l:

$$\frac{p_\perp^2 + (1+\xi)p_l^2}{\Lambda^2} = \frac{p_u^2}{\Lambda^2} + \frac{\xi}{\Lambda^2}p_l^2, \tag{4.77}$$

luego:

$$T_u^2 = \Lambda^2, \quad T_l^2 = \frac{\Lambda^2}{\xi}. \tag{4.78}$$

Notar que cuando $-1 < \xi < 0$, T_l es imaginario. Es inmediato ver que este ansatz cumple con las condiciones (4.13) y (4.15).

Veamos ahora cómo recuperar la teoría isótropa partiendo de la teoría anisótropa. Partamos de la ecuación (4.12):

$$f = \hat{f}_0(1+\hat{Z}), \tag{4.79}$$

donde $\hat{f}_0$ está dado por (4.76) y $\hat{Z}$ por la aproximación de Grad:

$$\hat{Z} = \frac{16\pi^2 p_u^\alpha p_l^{\alpha'} \hat{\pi}_\perp^{\mu\nu} p_{\{\mu}p_{\nu\}}}{\mathcal{I}_{\alpha+4,\alpha'}T_u^4 + \mathcal{I}_{\alpha,\alpha'+4}T_l^4 - 2\mathcal{I}_{\alpha+2,\alpha'+2}T_u^2T_l^2}. \tag{4.80}$$

La teoría isótropa debe obtenerse tomando valores de $\xi = (T_u/T_l)^2$ cercanos a cero. Haremos entonces una expansión de Taylor de (4.79) en el parámetro $\epsilon = T_u/T_l$ y nos quedaremos al orden más bajo no trivial. Para $\hat{f}_0$ tenemos:

$$\hat{f}_0 \approx f_0\left(1 - \frac{p_l^2}{2T_u p_u}\epsilon^2\right), \quad |\epsilon| << 1. \tag{4.81}$$

Para la expansión de $\hat{Z}$ usaremos la expansión de las integrales $\mathcal{I}_{ij}$, que puede encontrarse en el apéndice E. Se obtiene:

$$\hat{Z} \approx \frac{2\pi^2(\alpha'+1)(\alpha'+3)(\alpha'+5)p_u^\alpha p_l^{\alpha'}}{[1+(-1)^{\alpha'}]\Gamma(\alpha+\alpha'+6)T_u^{2\alpha+6}}\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}p_{\{\mu}p_{\nu\}}\left[1 + \frac{(\alpha+\alpha'+6)(\alpha'+1)(\alpha'+3)(\alpha'+5)}{2(\alpha'+3)(\alpha'+5)(\alpha'+7)}\epsilon^2\right]. \tag{4.82}$$

Los términos que tengan $\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}\epsilon^2$ son de orden mayor que 1 en las correcciones viscosas y por lo tanto pueden descartarse. De hecho, vale que $\epsilon^2 \propto l_\mu l_\nu \pi^{\mu\nu} \equiv \pi^{ll}$, como se verá enseguida.

Entonces, (4.79) queda:

$$\hat{f}_0(1+\hat{Z}) \approx f_0\left(1 + \frac{2\pi^2(\alpha'+1)(\alpha'+3)(\alpha'+5)p_u^\alpha p_l^{\alpha'}}{[1+(-1)^{\alpha'}]\Gamma(\alpha+\alpha'+6)T_u^{\alpha+\alpha'+6}}\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}p_{\{\mu}p_{\nu\}} - \frac{p_l^2\epsilon^2}{2T_u p_u}\right). \tag{4.83}$$

Usando (4.11), podemos escribir:

$$\pi^{ll} = l_\mu l_\nu \pi^{\mu\nu} = \frac{2}{3}(P_l - P_\perp), \tag{4.84}$$

con:

$$\begin{aligned} P_\perp = \frac{1}{2}\Xi_{\mu\nu}\langle p^\mu p^\nu\rangle_{\hat{0}} =& \frac{T_u T_l}{8\pi^2}(\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2), \quad P_l = \langle p_l^2\rangle_{\hat{0}} = \frac{\mathcal{I}_{02}T_u T_l^3}{4\pi^2}, \\ P_\perp - P_l =& \frac{T_u T_l}{8\pi^2}(\mathcal{I}_{20}T_u^2 - 3\mathcal{I}_{02}T_l^2). \end{aligned} \tag{4.85}$$

Haciendo la expansión de Taylor correspondiente:

$$\pi^{ll} \approx -\frac{8T_u^4}{15\pi^2}\epsilon^2. \tag{4.86}$$

Luego:

$$\hat{f}_0(1+\hat{Z}) \approx f_0\left(1 + \frac{2\pi^2(\alpha'+1)(\alpha'+3)(\alpha'+5)p_u^\alpha p_l^{\alpha'}}{[1+(-1)^{\alpha'}]\Gamma(\alpha+\alpha'+6)T_u^{\alpha+\alpha'+6}}\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}p_{\{\mu}p_{\nu\}} + \frac{15\pi^2\pi^{ll}p_l^2}{16T_u^5 p_u}\right). \tag{4.87}$$

Comparemos con la teoría isótropa. Usando (3.55), (4.11) y (4.10) , podemos escribir:

$$Z = \frac{15\pi^2 p_u^\alpha}{\Gamma(\alpha+6)T^{\alpha+6}}\pi_\perp^{\mu\nu}p_{\{\mu}p_{\nu\}} - \frac{15\pi^2 p_u^\alpha \pi^{ll}}{2\Gamma(\alpha+6)T^{\alpha+6}}(\Xi^{\mu\nu} - 2l^\mu l^\nu)p_\mu p_\nu, \tag{4.88}$$

Usando que $\Delta^{\mu\nu} = \Xi^{\mu\nu} + l^\mu l^\nu$:

$$Z = \frac{15\pi^2 p_u^\alpha}{\Gamma(\alpha+6)T^{\alpha+6}}\pi_\perp^{\mu\nu}p_{\{\mu}p_{\nu\}} + \frac{15\pi^2 p_u^\alpha \pi^{ll}}{2\Gamma(\alpha+6)T^{\alpha+6}}(3p_l^2 - p_u^2), \tag{4.89}$$

Identificando T_u con T (ver ecuación (4.61) notando que $\mathcal{I}_{20} \to 12\epsilon$ si $|\epsilon| << 1$) y comparando la expresión anterior con (4.87) se ve que el término proporcional a $\hat{\pi}_\perp^{\mu\nu}$ se recupera si $\alpha' = 0$. El término proporcional a p_l^2 se recupera si $\alpha = -1$. Sin embargo, la teoría anisótropa con el ansatz de Romatschke-Strickland no produce el término restante de (4.89).

4.8 Creación de entropía

Antes de calcular la creación de entropía, entendamos la necesidad de hacer esta cuenta viendo que la teoría anisótropa no entra en el esquema presentado en la sección 3.5.

En la teoría anisótropa se tiene:

$$\Phi = \hat{\Phi}_0\left(\frac{p_u}{T_u}, \frac{p_l}{T_l}\right) + \hat{C}_{\mu_1\ldots\mu_{\alpha+\alpha'+2}}p^{\mu_1}\ldots p^{\mu_{\alpha+\alpha'+2}}, \tag{4.90}$$

Escribamos:

$$\begin{aligned} \Phi =& \frac{u_\mu p^\mu}{T} - \frac{u_\mu p^\mu}{T} + \hat{\Phi}_0\left(\frac{p_u}{T_u}, \frac{p_l}{T_l}\right) + \hat{C}_{\mu_1\ldots\mu_{\alpha+\alpha'+2}}p^{\mu_1}\ldots p^{\mu_{\alpha+\alpha'+2}}, \\ =& \ln\left(\frac{f_0^{-1} - e^{-a}}{\hat{f}_0^{-1} - e^{-a}}\right) + \frac{u_\mu p^\mu}{T} + \hat{C}_{\mu_1\ldots\mu_{\alpha+\alpha'+2}}p^{\mu_1}\ldots p^{\mu_{\alpha+\alpha'+2}}, \end{aligned} \tag{4.91a}$$

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{e^{-\hat{\Phi}_0\left(\frac{p_u}{T_u}, \frac{p_l}{T_l}\right)} + e^{-a}} \tag{4.91b}$$

Luego, podríamos proponer:

$$\Gamma^\lambda = \left(\ln\left(\frac{f_0^{-1} - e^{-a}}{\hat{f}_0^{-1} - e^{-a}} \right), \frac{u_\mu}{T}, C_{\mu_1 \ldots \mu_{\alpha+2}} \right), \quad R^\lambda = \left(1, p^\mu, p^{\mu_1} \ldots p^{\mu_{\alpha+2}}\right), \tag{4.92}$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento que asegurarían el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica son los momentos primero y $\alpha + \alpha' + 2$ de la ecuación de Boltzmann y:

$$\int Dp \ln\left(\hat{f}_0^{-1} - e^{-a}\right) p^\mu \frac{\partial f}{\partial \xi^\sigma} \partial_\mu \xi^\sigma = \int Dp \ln\left(\hat{f}_0^{-1} - e^{-a}\right) I_{\mathrm{col}}(p^\mu, \xi^\sigma), \tag{4.93}$$

que en general no va a ser un momento de la ecuación de Boltzmann y su significado físico no está claro. Hay que aclarar que, si bien este esquema no sugiere manera alguna de obtener una hidrodinámica anisótropa viscosa que respete la segunda ley de la termodinámica a partir de momentos de la ecuación de Boltzmann, esto no implica que no pueda hacerse, ya que lo que aquí se plantea es una condición suficiente, pero no necesaria, para que la creación de entropía sea definida positiva.

Calculemos entonces el vector de entropía para la teoría anisótropa. Nos será útil definir la siguiente integral y su derivada:

$$\tilde{\mathcal{I}}_{ij} \equiv \int_0^\infty dx \int_{-\frac{T_u}{T_l}x}^{\frac{T_u}{T_l}x} dy x^i y^j \hat{f}_0(x,y) \ln \hat{f}_0(x,y), \tag{4.94a}$$

$$d\tilde{\mathcal{I}}_{ij} = \frac{T_u^{j+1}}{T_l^{j+1}} \left(\frac{dT_u}{T_u} - \frac{dT_l}{T_l} \right) \tilde{\mathcal{J}}_{ij}, \tag{4.94b}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_{ij} \equiv [1 + (-1)^j] \int_0^\infty dx x^{i+j+1} \hat{f}_0\left(x, x\frac{T_u}{T_l}\right) \ln \hat{f}_0\left(x, x\frac{T_u}{T_l}\right). \tag{4.94c}$$

La condición (4.15) implica que para todo j impar vale $\tilde{\mathcal{I}}_{ij} = 0$.

Partamos de la ecuación (4.26):

$$S^\mu = N^\mu_{\hat{0}} - \int Dp\, p^\mu \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 - \int Dp\, p^\mu \hat{Z} \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 - \frac{1}{2} \int Dp\, p^\mu \hat{f}_0 \hat{Z}^2. \tag{4.95}$$

Trabajemos los primeros dos términos:

$$N^\mu_{\hat{0}} = \int Dp\, p^\mu \hat{f}_0 = \frac{\mathcal{I}_{10}}{(2\pi)^2} T_u^2 T_l u^\mu, \tag{4.96a}$$

$$\int Dp\, p^\mu \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{I}}_{10}}{(2\pi)^2} T_u^2 T_l u^\mu. \tag{4.96b}$$

Para los otros dos términos, usaremos la aproximación de Grad (4.49). Recordando que $\hat{h}^\mu_{\perp l} = 0$, se tiene:

$$\int Dp\, p^\mu \hat{Z} \hat{f}_0 \ln \hat{f}_0 = 0. \tag{4.97}$$

Nótese que con la definición adoptada de l^μ la entropía real difiere de la entropía en el estado anisótropo en un término de segundo orden en $\hat{Z}$. Trabajemos ahora con ese término:

$$\int Dp\, p^\mu \hat{Z}^2 \hat{f}_0 = \frac{16}{g^{(2)2}_{\alpha\alpha'}} \pi_\perp^{\rho\sigma} \pi_\perp^{\xi\eta} \int Dp\, p_u^{2\alpha} p_l^{2\alpha'} p^\mu p_{\{\rho} p_{\sigma\}} p_{\{\xi} p_{\eta\}} \hat{f}_0. \tag{4.98}$$

Hagamos la separación $p^\mu = p_u u^\mu + p_l l^\mu + p^{\{\mu\}}$ y, por comodidad, desarrollemos cada término por separado. Se obtiene:

$$-u_\mu \int Dp\, p^\mu \hat{Z}^2 \hat{f}_0 = \frac{T_u^{2\alpha+2} T_l^{2\alpha'+1}}{\pi^2 g_{\alpha\alpha'}^{(2)2}} (\mathcal{I}_{2\alpha+5,2\alpha'} T_u^4 + \mathcal{I}_{2\alpha+1,2\alpha'+4} T_l^4 - 2\mathcal{I}_{2\alpha+3,2\alpha'+2} T_u^2 T_l^2) \pi_\perp^{\rho\sigma} \pi_{\perp,\rho\sigma}, \tag{4.99a}$$

$$l_\mu \int Dp\, p^\mu \hat{Z}^2 \hat{f}_0 = \frac{T_u^{2\alpha+1} T_l^{2\alpha'+2}}{\pi^2 g_{\alpha\alpha'}^{(2)2}} (\mathcal{I}_{2\alpha+4,2\alpha'+1} T_u^4 + \mathcal{I}_{2\alpha,2\alpha'+5} T_l^4 - 2\mathcal{I}_{2\alpha+2,2\alpha'+3} T_u^2 T_l^2) \pi_\perp^{\rho\sigma} \pi_{\perp,\rho\sigma} = 0, \tag{4.99b}$$

$$\begin{aligned} \int Dp\, p^{\{\mu\}} \hat{Z}^2 \hat{f}_0 =& \frac{16}{g_{\alpha\alpha'}^{(2)2}} \pi_\perp^{\rho\sigma} \pi_\perp^{\xi\eta} \int Dp\, p_u^{2\alpha} p_l^{2\alpha'} \left[p^{\{\mu} p_\rho p_{\sigma\}} - \frac{(p_u^2 - p_l^2)}{4} (\Xi^\mu_\rho p_{\{\sigma\}} + \text{permutaciones}) \right] p_{\{\xi} p_{\eta\}} \hat{f}_0, \\ =& 0. \end{aligned} \tag{4.99c}$$

Entonces, el vector de entropía queda:

$$S^\mu = S^\mu_{\hat{0}} - S^\mu_{\hat{Z}}, \tag{4.100}$$

donde:

$$S^\mu_{\hat{0}} = \frac{\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10}}{(2\pi)^2} T_u^2 T_l u^\mu, \tag{4.101a}$$

$$S^\mu_{\hat{Z}} = S_u \pi_\perp^{\rho\sigma} \pi_{\perp,\rho\sigma} u^\mu, \tag{4.101b}$$

y:

$$S_u = \frac{T_u^{2\alpha+2} T_l^{2\alpha'+1}}{2\pi^2 g_{\alpha\alpha'}^{(2)2}} (\mathcal{I}_{2\alpha+5,2\alpha'} T_u^4 + \mathcal{I}_{2\alpha+1,2\alpha'+4} T_l^4 - 2\mathcal{I}_{2\alpha+3,2\alpha'+2} T_u^2 T_l^2). \tag{4.102}$$

Ya estamos en condiciones de calcular la creación de entropía. Comencemos tomando la divergencia del primer término en (4.100):

$$\begin{aligned} S^\mu_{\hat{0};\mu} =& \frac{1}{4\pi^2} \left[2 \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_l + \left(\mathcal{J}_{10} - \tilde{\mathcal{J}}_{10} \right) T_u \right] T_u \dot{T}_u + \frac{1}{4\pi^2} \left[\left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_l - \left(\mathcal{J}_{10} - \tilde{\mathcal{J}}_{10} \right) T_u \right] \frac{T_u^2}{T_l} \dot{T}_l \\ &+ \frac{\left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right)}{4\pi^2} T_u^2 T_l \left(l^\mu u'_\mu + \hat{\theta} \right). \end{aligned} \tag{4.103}$$

Usando (4.66a) y (4.66b):

$$\begin{aligned} S^\mu_{\hat{0};\mu} =& \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\zeta^u \Upsilon^{u(0)}_{rs} + \frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(0)}_{rs} \right) + \frac{T_u}{4\pi^2} \left[\frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{lu;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{lu;rs} + \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_u T_l \right] l^\mu u'_\mu \\ &+ \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{T_u;rs} - \frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{T_u;rs} \right) T'_u + \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{T_l;rs} - \frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{T_l;rs} \right) T'_l \\ &+ \frac{T_u}{4\pi^2} \left[\frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{\theta;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{\theta;rs} + \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_u T_l \right] \hat{\theta} + \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{\theta_l;rs} - \frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;rs} \right) \hat{\theta}_l \\ &+ \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs} \right) \hat{\pi}_\perp^{\mu\nu} \hat{\sigma}_{\mu\nu} + \frac{T_u}{4\pi^2} \left(\zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs} - \frac{T_u}{T_l} \zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs} \right) \hat{\pi}_\perp^{\mu\nu} \hat{\sigma}_{l\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.104}$$

donde:

$$\zeta^u \equiv 2 \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_l + \left(\mathcal{J}_{10} - \tilde{\mathcal{J}}_{10} \right) T_u, \quad \zeta^l \equiv \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10} \right) T_l - \left(\mathcal{J}_{10} - \tilde{\mathcal{J}}_{10} \right) T_u. \tag{4.105}$$

Cuando el subíndice s toma valores impares se anula el denominador de los coeficientes Υ. Por simplicidad nos quedaremos con valores pares de s, pero un estudio más completo de la creación de entropía requeriría evaluar los límites apropiados.

Para s par, vale trivialmente que $\Upsilon^{u(1)}_{T_u;rs} = \Upsilon^{l(1)}_{T_u;rs} = \Upsilon^{u(1)}_{T_l;rs} = \Upsilon^{l(1)}_{T_l;rs} = \Upsilon^{u(1)}_{\theta_l;rs} = \Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;rs} = 0$, con lo cual se anulan los términos proporcionales a T'_u, T'_l y $\hat{\theta}_l$. Es fácil demostrar que, para el ansatz de Romatschke-Strickland, los términos de $l_\mu u'^\mu$ y $\hat{\theta}$ también se anulan (ver apéndice F). Asumiendo esta función de distribución para el estado anisótropo, se tiene:

$$\begin{aligned}S^\mu_{\hat{0};\mu} =& \frac{T_u}{4\pi^2}\left(\zeta^u \Upsilon^{u(0)}_{rs} + \frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(0)}_{rs}\right) + \frac{T_u}{4\pi^2}\left(\frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\right)\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp \hat{\sigma}_{\mu\nu} \\ &+ \frac{T_u}{4\pi^2}\left(\zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs} - \frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\right)\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp \hat{\sigma}_{l\mu\nu}. \qquad (4.106)\end{aligned}$$

Respecto al segundo término del vector de entropía:

$$S^\mu_{\hat{Z};\mu} = \left(\frac{\partial S_u}{\partial T_u}\dot{T}_u + \frac{\partial S_u}{\partial T_l}\dot{T}_l\right)\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \pi_{\perp\rho\sigma} + 2S_u \hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \dot{\hat{\pi}}_{\perp\{\rho\sigma\}} + S_u \hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \pi_{\perp\rho\sigma}(l_\mu u'^\mu + \hat{\theta}). \qquad (4.107)$$

Quedándonos a segundo orden en las desviaciones respecto al estado anisótropo y en las derivadas espaciales y usando las ecuaciones (4.66a), (4.66b) y (4.75):

$$S^\mu_{\hat{Z};\mu} = \left(\frac{\partial S_u}{\partial T_u}\Upsilon^{u(0)}_{rs} + \frac{\partial S_u}{\partial T_l}\Upsilon^{l(0)}_{rs} - 2\frac{S_u}{\tau^\pi_{rskl}}\right)\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \pi_{\perp\rho\sigma} + 2S_u \phi^{(1)}_{\sigma;kl}\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \hat{\sigma}_{\rho\sigma} + 2S_u \phi^{(1)}_{\sigma_l;kl}\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \hat{\sigma}_{l\rho\sigma}. \quad (4.108)$$

Luego:

$$\begin{aligned}S^\mu_{;\mu} =& \frac{T_u}{4\pi^2}\left(\zeta^u \Upsilon^{u(0)}_{rs} + \frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(0)}_{rs}\right) + \left[\frac{T_u}{4\pi^2}\left(\frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\right) - 2S_u \phi^{(1)}_{\sigma;kl}\right]\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \hat{\sigma}_{\rho\sigma} \\ &+ \left[\frac{T_u}{4\pi^2}\left(\zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs} - \frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\right) - 2S_u \phi^{(1)}_{\sigma_l;kl}\right]\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \hat{\sigma}_{l\rho\sigma} \\ &+ \left(2\frac{S_u}{\tau^\pi_{rskl}} - \frac{\partial S_u}{\partial T_u}\Upsilon^{u(0)}_{rs} + \frac{\partial S_u}{\partial T_l}\Upsilon^{l(0)}_{rs}\right)\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \pi_{\perp\rho\sigma}. \qquad (4.109)\end{aligned}$$

Para llegar a una expresión de la creación de entropía que sea manifiestamente definida positiva, es necesario eliminar el segundo y tercer término de la ecuación anterior. Para conseguirlo, tenemos que ajustar los enteros r, s, k, l, α y α'. Recordar que $r+s-1$ indica de qué momento de la ecuación de Boltzmann se obtienen las ecuaciones de movimiento de T_u y T_l, $k+l+1$ indica de qué momento de la ecuación de Boltzmann se obtiene la ecuación de movimiento de $\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp$ y α y α' son números introducidos en la parametrización de $\hat{Z}$. De pedir que la teoría anisótropa se reduzca a la isótropa para $|T_u/T_l| << 1$ se había obtenido $\alpha = -1$ y $\alpha' = 0$. Si a esto le sumamos que estamos asumiendo que s es par, mirando el apéndice D y la definición (4.51b) es fácil notar que el tercer término de (4.109) se anula, quedando el término proporcional a $\hat{\pi}^{\rho\sigma}_\perp \hat{\sigma}_{\rho\sigma}$ como único término conflictivo.

Strickland et al. completan el sistema de ecuaciones de la hidrodinámica anisótropa ($\hat{\pi}^{\mu\nu}_\perp = 0$) con la ecuación de creación de partículas ($r = 1$ y $s = 0$) [8,9], obteniendo una teoría con creación de entropía definida positiva:

$$S^\mu_{\hat{0};\mu} = \frac{16 I_{00} T_u[(3-\epsilon^2)\mathcal{I}_{20} - 3(1+\epsilon^2)\mathcal{J}_{20}\epsilon]}{(1+\epsilon^2)^{3/2}[4\mathcal{J}_{10}\mathcal{I}_{20}T_u - \mathcal{I}_{10}(\mathcal{I}_{20}T_l - 3\mathcal{J}_{20}T_u)]} = \frac{4T_u^3}{\pi^2 \tau_{\rm rel}}F(\xi), \qquad (4.110a)$$

$$F(\xi) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\arctan\sqrt{\xi}}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{1+\xi}\right)\right]^{3/4} - \frac{1}{\sqrt{1+\xi}} \geq 0, \quad \xi = (T_u/T_l)^2, \quad -1 < \xi < \infty, \qquad (4.110b)$$

Respecto a la hidrodinámica anisótropa viscosa, tomando $r = 1$ y $s = 0$ en la ecuación (4.109) se obtiene:

$$\frac{T_u}{4\pi^2}\left(\frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;10} - \zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;10}\right) = 0, \tag{4.111}$$

sobreviviendo el término $2S_u\phi^{(1)}_{\sigma;kl}$, que es no nulo para toda combinación de k y l. Por lo tanto, $r = 1$ y $s = 0$ no garantiza que la creación de entropía sea definida positiva.

Para tratar encontrar la elección apropiada de r, s, k y l, se hizo una expansión de Taylor en $\epsilon = T_u/T_l$ del coeficiente

$$\frac{T_u}{4\pi^2}\left(\frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\right) - 2S_u\phi^{(1)}_{\sigma;kl}$$

y se estudiaron los órdenes más bajos. Cada orden en ϵ debe anularse para que se anule todo el coeficiente. El primer término de la expansión es de orden cero y corresponde a la teoría isótropa. Para que se anule, las siguientes relaciones son condición sufiente: $k = \alpha + 1$, $l = \alpha'$. La primera de estas es la misma a la que se había llegado en la teoría isótropa y, con $\alpha = -1$, implica $k = 0$. De la segunda se deduce que $l = 0$. De esta manera, queda determinada la ecaución de movimiento de $\hat{\pi}^{\mu\nu}_{\perp}$.

Estas relaciones no son suficientes para anular el siguiente orden en la expansión de Taylor, que es proporcional a ϵ^2 y correspondería a la primera corrección anisótropa. Los únicos valores que nos quedan para ajustar ahora son r y s. Se puede ver que si $s = 0$ pero $r \neq 2$ este coeficiente no se anula. El caso $s = 0$ y $r = 2$ requiere una evaluación especial, ya que reemplazando las expresiones formales que se dan en el apendice D se anulan tanto el numerador como el denominador. Se resolvió la indeterminación usando la parametrización $r = 2 + \delta$ y $s = 0$ y tomando el límite $\delta \to 0$. El límite del cociente es no nulo, con lo que no hay solución para $s = 0$.

En la teoría isótropa, las ecuaciones de movimiento de todos los grados de libertad viscosos se obtienen del mismo momento de la ecuación de Boltzmann. Si imponemos esto en la teoría anisótropa, deberíamos tener $r + s - 1 = k + l + 1 = 1$, donde hemos usado que $k = l = 0$. Entonces, debe valer $r + s = 2$. Si asumimos que $r, s \geq 0$, y debe ser así si se quiere interpretar a las ecuaciones de movimiento como momentos de la ecuación de Boltzmann, se deduce que las únicas combinaciones posibles son $(r, s) = (2, 0)$, $(r, s) = (0, 2)$ y $(r, s) = (1, 1)$. Haciendo el cálculo correspondiente, se ve que ninguna de las tres resulta en una creación de entropía manifiestamente definida positiva.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo de seminario, se comenzó obteniendo las ecuaciones de movimiento de la hidrodinámica viscosa relativista cerca del equilibrio local a partir de la ecuación de Boltzmann, siguiendo el método propuesto en [5]. Primero se hizo una expansión en momentos irreducibles de la desviación Z respecto al equilibrio de la función de distribución de una partícula y luego, truncando apropiadamente dicha expansión, se obtuvo la aproximación de Grad de 14 momentos y se relacionó a los tensores irreducibles de segundo orden con la corrección viscosa $\pi^{\mu\nu}$. A partir de las ecuaciones de movimiento de los tensores irreducibles, se obtuvieron infinitas ecuaciones de movimiento para $\pi^{\mu\nu}$ provenientes de distintos momentos de la ecuación de Boltzmann.

De forzar a la teoría hidrodinámica a cumplir con la segunda ley de la termodinámica, se obtuvo una relación entre la parametrización de Z y el momento de la ecuación de Boltzmann de donde debe obtenerse la ecuación de movimiento para la corrección viscosa. También se demostró que la teoría hidrodinámica obtenida forma parte de una clase de teorías más general que incluye a las teorías de tipo divergencia y que, eligiendo correctamente los momentos de la ecuación de Boltzmann de donde se deducen las ecuaciones de movimiento, tienen creación de entropía definida positiva.

A continuación, siguiendo la referencia [10], se hizo un procedimiento análogo al del caso cercano al equilibrio pero tomando ahora desviaciones $\hat{Z}$ respecto a un estado anisótropo en el espacio de momentos. Como la anisotropía es en una única dirección, se requiere de un único parámetro para medirla. De esta manera se introduce un grado de libertad de la corrección viscosa dentro de la función de distribución anisótropa de forma no perturbativa.

A partir de las ecuaciones de movimiento de los momentos irreducibles de orden cero, dos y tres de $\hat{Z}$, se obtuvieron infinitas ecuaciones de movimiento para los grados de libertad viscosos, cada una proveniente de algún momento de la ecuación de Boltzmann. Hasta este punto, no se había asumido ninguna forma en particular de la función de distribución anisótropa. Se introdujo entonces el ansatz de Romatschke-Strickland para el estado anisótropo [7–9] y se mostró que, de exigir que la teoría anisótropa tenga a la teoría isótropa como límite, la parametrización de $\hat{Z}$ queda determinada.

Se demostró que, en general, las teorías de hidrodinámica anisótropa viscosa no entran en la clase de teorías consistentes con la segunda ley de la termodinámica mencionada anteriormente, por lo que se procedió a calcular la creación de entropía. Se determinó que la ecuación de movimiento elegida en [8, 9] para la anisotropía sólo resulta en una creación de entropía definida positiva en un estado anisótropo puro. Cuando se incluyen desviaciones respecto al estado anisótropo, el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica en principio no está garantizado, pues sobrevive un término en la creación de entropía que evita que sea manifiestamente definida positiva.

Para tratar de resolver el problema de elegir las ecuaciones de movimiento de forma tal que se cumpla la segunda ley de la termodinámica, se hizo una expansión de Taylor en el parámetro de la anisotropía del término conflictivo de la creación de entropía y se estudiaron los órdenes más bajos. Del orden más bajo se obtuvo una relación entre la parametrización de $\hat{Z}$ y la ecuación de movimiento del tensor viscoso $\hat{\pi}_{\perp}^{\mu\nu}$. Como la parametrización de $\hat{Z}$ ya había sido fijada, quedó determinada la ecuación de movimiento de este tensor.

Las condiciones encontradas son insuficientes para anular el siguiente orden en la expansión de Taylor, pero todavía se tiene la ecuación de movimiento de la anisotropía, que puede tratar de ajustarse para que la teoría respete la segunda ley de la termodinámica de forma explícita. De imponer que las ecuaciones de movimiento de los grados de libertad viscosos provengan todas del mismo momento de la ecuación de Boltzmann como sucede en la teoría isótropa, se deduce que sólo hay tres posibles ecuaciones de movimiento para la anisotropía, ninguna de las cuales resultó en una creación de entropía manifiestamente definida positiva. Por lo tanto, se concluye que el modelo de hidrodinámica anisótropa viscosa estudiado aquí no garantiza el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica.

Apéndice A

Polinomios ortonormales

Sea $\{P_n\}_0^\infty$ un conjunto de polinomios ortonormales ante cierto producto interno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x) P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn}, \tag{A.1}$$

donde los subíndices m, n indican el orden del polinomio. Para este conjunto vale la siguiente relación de recurrencia [30]:

$$A_1 P_1 = (x - B_1) P_0, \tag{A.2a}$$

$$A_n P_n = (x - B_n) P_{n-1} - C_n P_{n-2}. \tag{A.2b}$$

Los coeficientes A_n, B_n y C_n son constantes que pueden determinarse fácilmente usando la relación de ortonormalidad. Se obtiene:

$$B_n = -\int_{-\infty}^{\infty} w(x) P_{n-1} x dx, \tag{A.3a}$$

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) P_{n-2} x dx, \tag{A.3b}$$

$$A_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) x^2 dx - Bn^2 - Cn^2. \tag{A.3c}$$

Apéndice B

Proyectores transversos

Aquí construiremos los proyectores $\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q}$ y $\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q}$, los cuales tienen las siguientes propiedades [10, 27, 29]:

$$u_{\mu_i}\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = u_{\nu_i}\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = g_{\mu_i\mu_j}\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = g_{\nu_i\nu_j}\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = 0, \tag{B.1a}$$

$$\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q}_{\mu_1\cdots\mu_q} = 2q+1, \tag{B.1b}$$

$$u_{\mu_i}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = u_{\nu_i}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = l_{\mu_i}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = l_{\nu_i}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = 0, \tag{B.1c}$$

$$g_{\mu_i\mu_j}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = g_{\nu_i\nu_j}\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = 0, \tag{B.1d}$$

$$\Xi^{\mu_1\cdots\mu_q}_{\mu_1\cdots\mu_q} = 2. \tag{B.1e}$$

Empecemos con $\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q}$. Por ser transverso a u^μ y simétrico ante permucaciones de los índices μ_i y ν_j (por separado), debe ser combinación de los tensores $\Delta^{\rho\sigma}$:

$$\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{C(q,k)}{K_{qk}} \sum_{P^q_\mu P^q_\nu} \Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_q\nu_q}, \tag{B.2}$$

donde $\sum\limits_{P^q_\mu P^q_\nu}$ representa la sumatoria sobre todas las permutaciones distintas de μ_i y ν_i (por separado) y K_{qk} es la cantidad de dichas permutaciones. Es fácil ver que:

$$K_{qk} = \frac{1}{(q-2k)!}\left(\frac{q!}{2^k k!}\right)^2. \tag{B.3}$$

$q!^2$ es la cantidad total de permutaciones posibles, incluyendo repeticiones. Para eliminar las repeticiones, dividimos este número por $(2^k)^2$, que es la cantidad de permutaciones de los índices en tensores de la forma $\Delta^{\mu_i\mu_j}$ o $\Delta^{\nu_i\nu_j}$, por $k!^2$, que es la cantidad de maneras de ordenar estos mismos tensores, y por $(q-2k)!$, que es la cantidad de maneras de ordenar los tensores de la forma $\Delta^{\mu_i\nu_j}$.

Para calcular $C(q,k)$ usaremos que $g_{\mu_m\mu_n}\Delta^{\mu_1\cdots\mu_q\nu_1\cdots\nu_q} = 0$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $m = q-1$ y $n = q$. Los índices μ_{q-1} y μ_q aparecen en distintos términos que pueden separarse en dos categorías, según la forma que adquieren luego de la contracción de índices:

$$...\Delta^{\mu_{q-1}\mu_i}...\Delta^{\mu_q\mu_j}... \to \Delta^{\mu_i\mu_j} \quad 2k(2k-2) \text{ términos}, \tag{B.4a}$$

$$...\Delta^{\mu_{q-1}\mu_i}...\Delta^{\mu_q\nu_j}... \to \Delta^{\mu_i\nu_j} \quad 4k(q-2k) \text{ términos}, \tag{B.4b}$$

$$...\Delta^{\mu_{q-1}\mu_q}... \to 3 \quad 2k \text{ términos}, \tag{B.4c}$$

$$...\Delta^{\mu_{q-1}\nu_i}...\Delta^{\mu_q\nu_j}... \to \Delta^{\nu_i\nu_j} \quad (q-2k)(q-2k-1) \text{ términos}. \tag{B.5}$$

En (B.4c) se ha usado que $\Delta^{\mu}_{\mu} = 3$. La cantidad de términos de cada tipo se determina de la siguiente manera: en (B.4a) tenemos $2k$ lugares para ubicar μ_{q-1}, lo que nos deja $2k-2$ lugares para ubicar μ_q. Luego, dados i y j, la cantidad de términos de esa forma debe ser $2k(2k-2)$. Los otros casos son análogos.

Los elementos de (B.4) llevan a términos de la forma:

$$\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q}, \tag{B.6}$$

mientras que (B.5) nos da términos de la forma:

$$\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k+1}\nu_{2k+2}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+3}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q}. \tag{B.7}$$

Luego, contrayendo μ_{q-1} y μ_q en (B.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{C(q,k)}{q!^2} \\
&\times \sum_{\tilde{P}^{q-2}_{\mu}\tilde{P}^{q}_{\nu}} \{[2k(2k-2)+4k(q-2k)+6k]\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q} \\
&+ (q-2k)(q-2k-1)\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k+1}\nu_{2k+2}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+3}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q}\}, \\
=& \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{C(q,k)}{q!^2} \sum_{\tilde{P}^{q-2}_{\mu}\tilde{P}^{q}_{\nu}} \{2k(2q-2k+1)\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q} \\
&+ (q-2k)(q-2k-1)\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k+1}\nu_{2k+2}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+3}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q}\},
\end{aligned} \tag{B.8}$$

donde, por simplicidad, se está considerando a la sumatoria $\sum\limits_{\tilde{P}^{q-2}_{\mu}\tilde{P}^{q}_{\nu}}$ sobre todas las permutaciones posibles (incluyendo repeticiones), por lo que se reemplaza K_{qk} por $q!^2$.

El primer término no contribuye cuando $k=0$, mientras que el segundo no lo hace cuando $k=[q/2]$:

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{\tilde{P}^{q-2}_{\mu}\tilde{P}^{q}_{\nu}} \Bigg\{ & \sum_{k=1}^{[q/2]} C(q,k)2k(2q-2k+1)\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q} \\
&+ \sum_{k=0}^{[q/2]-1} C(q,k)(q-2k)(q-2k-1)\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k+1}\nu_{2k+2}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+3}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q} \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Haciendo la sustitución $k \to k-1$ en el segundo término, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 =& \sum_{k=1}^{[q/2]} [C(q,k)2k(2q-2k+1) + C(q,k-1)(q-2k+2)(q-2k+1)] \\
&\times \sum_{\tilde{P}^{q-2}_{\mu}\tilde{P}^{q}_{\nu}} \Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-2}\nu_q}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Para que esta igualdad valga, se debe anular el término entre corchetes:

$$C(q,k) = -\frac{(q-2k+2)(q-2k+1)}{2k(2q-2k+1)}C(q,k-1). \tag{B.11}$$

Eligiendo $C(q,0)=1$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
C(q,k) &= (-1)^k \frac{(q-2k+1)(q-2k+2)(q-2k+3)(q-2k+4)...(q-1)q}{2^k k!(2q-2k+1)(2q-2k+3)...(2q-1)}, \\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{q!}{(q-2k)!}\frac{(2q-2k-1)!!}{(2q-1)!!} = \frac{(-1)^k}{k!}\frac{q!^2}{2^q q!(2q-1)!!}\frac{2^{q-k}(q-k)!(2q-2k-1)!!}{(q-k)!(q-2k)!}, \\
&= (-1)^k \frac{q!^2(2q-2k)!}{k!(2q)!(q-k)!(q-2k)!}.
\end{aligned} \tag{B.12}
$$

Respecto a los proyectores $\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q}$, se tiene:

$$
\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{\hat{C}(q,k)}{K_{qk}} \sum_{P_\mu^q P_\nu^q} \Xi^{\mu_1\mu_2}...\Xi^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Xi^{\nu_1\nu_2}...\Xi^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Xi^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}...\Xi^{\mu_q\nu_q}, \tag{B.13}
$$

donde K_{qk} está dado por (B.3) y, haciendo un planteo idéntico al anterior, se obtiene:

$$
\hat{C}(q,k) = \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{q(q-k-1)!}{k!(q-2k)!}. \tag{B.14}
$$

Nos resta demostrar (B.1b) y (B.1e). Empezaremos demostrando la siguiente relación recursiva:

$$
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = \frac{2q+1}{2q-1}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_{q-1}\nu_1\ldots\nu_{q-1}} \tag{B.15}
$$

Una vez que se demuestra la relación anterior, (B.1b) sigue de manera inmediata.

Primero identifiquemos todos los términos donde puedan aparecer μ_q y ν_q. Nuevamente, los separamos en dos categorías, según los términos que resulten luego de la contracción de índices:

$$
\begin{aligned}
...\Delta^{\mu_i\mu_q}...\Delta^{\mu_j\nu_q}... &\to \Delta^{\mu_i\mu_j} \quad 2k(q-2k) \text{ términos}, && \text{(B.16a)} \\
...\Delta^{\nu_i\nu_q}...\Delta^{\mu_q\nu_j}... &\to \Delta^{\nu_i\nu_j} \quad 2k(q-2k) \text{ términos}, && \text{(B.16b)} \\
...\Delta^{\mu_q\nu_j}...\Delta^{\mu_i\nu_q}... &\to \Delta^{\mu_i\nu_j} \quad (q-2k)(q-2k-1) \text{ términos}, && \text{(B.16c)} \\
...\Delta^{\mu_q\nu_q}... &\to 3 \quad (q-2k) \text{ términos}, && \text{(B.16d)}
\end{aligned}
$$

$$
...\Delta^{\mu_i\mu_q}...\Delta^{\nu_j\nu_q}... \to \Delta^{\mu_i\nu_j} \quad (2k)^2 \text{ términos}. \tag{B.17}
$$

Los elementos de (B.16) llevan a términos de la forma:

$$
\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}, \tag{B.18}
$$

mientras que de (B.17) se obtiene:

$$
\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-3}\nu_{2k-2}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k-1}}...\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}. \tag{B.19}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} &= \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{C(q,k)}{q!^2} \\
\times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} & [(q-2k)(q+2k+2)\Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}...\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}} \\
+ (2k)^2 & \Delta^{\mu_1\mu_2}...\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}...\Delta^{\nu_{2k-3}\nu_{2k-2}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k-1}}...\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}].
\end{aligned} \tag{B.20}
$$

Supongamos ahora que q es par. Entonces, el primer término se anula cuando $k = q/2$, mientras que el segundo se anula cuando $k = 0$. Si además en el segundo término hacemos la sustitución $k \to k+1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = & \sum_{k=0}^{q/2-1}\frac{1}{q!^2}[(q-2k)(q+2k+2)C(q,k)+4(k+1)^2C(q,k+1)] \\ & \times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} \Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}. \end{aligned} \tag{B.21}$$

Usando la relación de recurrencia (B.11), se obtiene:

$$\begin{aligned} g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = & \sum_{k=0}^{q/2-1}\frac{C(q,k)}{q!^2}(q-2k)\left[q+2k+2-\frac{2(k+1)(q-2k-1)}{2q-2k-1}\right] \\ & \times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} \Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}, \\ = & \sum_{k=0}^{q/2-1}\frac{C(q,k)}{q!^2}\frac{q-2k}{2q-2k-1}[(q+2k+2)(2q-2k-1)-2(k+1)(q-2k-1)] \\ & \times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} \Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}, \\ = & \sum_{k=0}^{q/2-1}\frac{C(q,k)}{q!^2}\frac{q(q-2k)(2q+1)}{2q-2k-1} \\ & \times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} \Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}. \end{aligned} \tag{B.22}$$

Usemos (B.12) y escribamos:

$$\begin{aligned} C(q,k)\frac{q(q-2k)(2q+1)}{q!^2(2q-2k-1)} &= (-1)^k\frac{q!^2(2q-2k)!}{k!(2q)!(q-k)!(q-2k)!}\frac{q(q-2k)(2q+1)}{q!^2(2q-2k-1)}, \\ &= (-1)^k\frac{(q-1)!^2(2q-2k-2)!}{k!(2q-2)!(q-k-1)!(q-2k-1)!}\frac{2q+1}{(q-1)!^2(2q-1)}, \\ &= C(q-1,k)\frac{2q+1}{(q-1)!^2(2q-1)}. \end{aligned} \tag{B.23}$$

Luego:

$$\begin{aligned} g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = & \frac{2q+1}{2q-1}\sum_{k=0}^{q/2-1}\frac{C(q-1,k)}{(q-1)!^2} \\ & \times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} \Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}, \\ = & \frac{2q+1}{2q-1}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_{q-1}\nu_1\ldots\nu_{q-1}}. \end{aligned} \tag{B.24}$$

Resta considerar el caso en que q es impar. Ahora $[q/2] = (q-1)/2$.

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\dots\mu_q\nu_1\dots\nu_q} &= \sum_{k=0}^{(q-1)/2}\frac{C(q,k)}{q!^2} \\
\times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} & [(q-2k)(q+2k+2)\Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\dots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}} \\
+ (2k)^2 & \Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{2k-3}\nu_{2k-2}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k-1}}\dots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}].
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

Separemos el término con $k = (q-1)/2$:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\dots\mu_q\nu_1\dots\nu_q} &= \sum_{k=0}^{(q-1)/2-1}\frac{C(q,k)}{q!^2} \\
\times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} & [(q-2k)(q+2k+2)\Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\dots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}} \\
+ (2k)^2 & \Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{2k-3}\mu_{2k-2}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{2k-3}\nu_{2k-2}}\Delta^{\mu_{2k-1}\nu_{2k-1}}\dots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}] \\
+ \frac{1}{q!^2}C\left(q,\frac{q-1}{2}\right) & \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}}[(2q+1)\Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{q-2}\mu_{q-1}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{q-2}\nu_{q-1}} \\
+ (q-1)^2 & \Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{q-4}\mu_{q-3}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{q-4}\nu_{q-3}}\Delta^{\mu_{q-2}\nu_{q-2}}\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}].
\end{aligned}
\tag{B.26}
$$

La segunda línea en la ecuación de arriba se anula cuando $k = 0$. Juntando a la segunda y la cuarta línea en una sumatoria entre $k = 1$ y $k = (q-1)/2$ y haciendo la sustitución $k \to k+1$ en esa misma suma, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\dots\mu_q\nu_1\dots\nu_q} &= \frac{2q+1}{2q-1}\sum_{k=0}^{(q-1)/2-1}\frac{C(q-1,k)}{(q-1)!^2} \\
\times \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}} & \Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\dots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}} \\
+ \frac{(2q+1)}{q!^2}C\left(q,\frac{q-1}{2}\right) & \sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}}\Delta^{\mu_1\mu_2}\dots\Delta^{\mu_{q-2}\mu_{q-1}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\dots\Delta^{\nu_{q-2}\nu_{q-1}}.
\end{aligned}
\tag{B.27}
$$

Trabajemos ahora sobre la tercera línea:

$$
\begin{aligned}
\frac{(2q+1)}{q!^2}C\left(q,\frac{q-1}{2}\right) &= \frac{(2q+1)}{q!^2}(-1)^{(q-1)/2}\frac{q!^2(q+1)}{\left(\frac{q-1}{2}\right)!(2q)!\left(\frac{q+1}{2}\right)!}, \\
&= \frac{(2q+1)}{(q-1)!^2}(-1)^{(q-1)/2}\frac{(q-1)!^3}{\left(\frac{q-1}{2}\right)!^2(2q-2)!}\frac{(q+1)q}{2q(2q-1)(q+1)/2}, \\
&= \frac{(2q+1)}{2q-1}\frac{C\left(q-1,\frac{q-1}{2}\right)}{(q-1)!}.
\end{aligned}
\tag{B.28}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
g_{\mu_q\nu_q}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} &= \frac{2q+1}{2q-1}\sum_{k=0}^{(q-1)/2-1}\frac{C(q-1,k)}{(q-1)!^2}\\
&\times\sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}}\Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}}\\
&+\frac{(2q+1)}{2q-1}\frac{C\left(q-1,\frac{q-1}{2}\right)}{(q-1)!}\sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}}\Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{q-2}\mu_{q-1}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{q-2}\nu_{q-1}},\\
=&\frac{2q+1}{2q-1}\sum_{k=0}^{(q-1)/2}\frac{C(q-1,k)}{(q-1)!^2}\\
&\times\sum_{\tilde{P}_\mu^{q-1}\tilde{P}_\nu^{q-1}}\Delta^{\mu_1\mu_2}\ldots\Delta^{\mu_{2k-1}\mu_{2k}}\Delta^{\nu_1\nu_2}\ldots\Delta^{\nu_{2k-1}\nu_{2k}}\Delta^{\mu_{2k+1}\nu_{2k+1}}\ldots\Delta^{\mu_{q-1}\nu_{q-1}},\\
=&\frac{2q+1}{2q-1}\Delta^{\mu_1\ldots\mu_{q-1}\nu_1\ldots\nu_{q-1}}.
\end{aligned}
\tag{B.29}
$$

Esto completa la demostración de (B.15).

De manera análoga se puede demostrar:

$$
g_{\mu_q\nu_q}\Xi^{\mu_1\ldots\mu_q\nu_1\ldots\nu_q} = \Xi^{\mu_1\ldots\mu_{q-1}\nu_1\ldots\nu_{q-1}}, \tag{B.30}
$$

y usando que $\Xi^\mu_\mu = 2$, se deduce (B.1e) de manera inmediata [10].

Apéndice C

Relación de ortogonalidad de los tensores irreducibles

En esta sección demostraremos las relaciones de ortogonalidad (3.38) y (4.28). Comenzaremos demostrando la siguiente relación:

$$p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\mu_1}...p_{\mu_q\rangle} = \frac{q!}{(2q-1)!!}(\Delta^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^q. \tag{C.1}$$

En primer lugar, escribamos:

$$p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\mu_1}...p_{\mu_q\rangle} = \Delta^{\mu_1...\mu_q}_{\alpha_1...\alpha_q}\Delta^{\beta_1...\beta_q}_{\mu_1...\mu_q}p^{\alpha_1}...p^{\alpha_q}p_{\beta_1}...p_{\beta_q} = \Delta^{\beta_1...\beta_q}_{\alpha_1...\alpha_q}p^{\alpha_1}...p^{\alpha_q}p_{\beta_1}...p_{\beta_q}. \tag{C.2}$$

Usando la expansión (B.2), tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta^{\beta_1...\beta_q}_{\alpha_1...\alpha_q}p^{\alpha_1}...p^{\alpha_q}p_{\beta_1}...p_{\beta_q} &= \sum_{k=0}^{[q/2]}\frac{C(q,k)}{K_{qk}}\sum_{P^q_\beta P^q_\alpha}\Delta^{\beta_1\beta_2}...\Delta^{\beta_{2k-1}\beta_{2k}}\Delta_{\alpha_1\alpha_2}...\Delta_{\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}}\Delta^{\beta_{2k+1}}_{\alpha_{2k+1}}...\Delta^{\beta_q}_{\alpha_q}, \\
&\quad \times p^{\alpha_1}...p^{\alpha_q}p_{\beta_1}...p_{\beta_q}, \\
&= \sum_{k=0}^{[q/2]}C(q,k)(\Delta^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^q.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Por otro lado, los polinomios de Legendre $P_q(z)$ pueden escribirse como [34]:

$$P_q(z) = \frac{1}{2^q}\sum_{k=0}^{[q/2]}(-1)^k\frac{(2q-2k)!}{k!(q-k)!(q-2k)!}z^{q-2k} = \frac{(2q)!}{2^q q!^2}\sum_{k=0}^{[q/2]}C(q,k)z^{q-2k}. \tag{C.4}$$

Para todo q vale:

$$1 = P_q(1) = \frac{(2q)!}{2^q q!^2}\sum_{k=0}^{[q/2]}C(q,k), \tag{C.5}$$

luego:

$$\sum_{k=0}^{[q/2]}C(q,k) = \frac{2^q q!^2}{(2q)!} = \frac{2^q q!^2}{2q(2q-1)!} = \frac{2^{q-1}(q-1)!q!}{(2q-1)!} = \frac{[2(q-1)]!!q!}{(2q-1)!} = \frac{q!}{(2q-1)!!}. \tag{C.6}$$

Reemplazando en (C.3) se completa la demostración de (C.1).

Por otro lado, podemos definir:

$$M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} \equiv \int DpF(p_u)p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\nu_1}...p_{\nu_{q'}\rangle}. \tag{C.7}$$

El tensor $M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}}$ es de orden $q+q'$, es simétrico ante permutaciones de los índices μ_i y de los índices ν_i (por separado), es ortogonal a u^μ y es isótropo. Por lo tanto, debe poder construirse como combinaciones de $\Delta^{\mu\nu}$, lo que implica que el orden del tensor debe ser par. Además, se tiene:

$$\Delta^{\alpha_1...\alpha_q}_{\mu_1...\mu_q}\Delta^{\nu_1...\nu_{q'}}_{\beta_1...\beta_{q'}}M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = M^{\alpha_1...\alpha_q}_{\beta_1...\beta_{q'}}. \tag{C.8}$$

La relación anterior se demuestra de manera inmediata usando la definición de $M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}}$.

Supóngase ahora que $q \neq q'$. Entonces, en la expansión de $M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}}$ en los proyectores espaciales no puede haber términos donde en cada proyector los índices μ_i estén apareados con los índices ν_j como en $\Delta^{\mu_i}_{\nu_j}$, siempre debe sobrar por lo menos un proyector de la forma $\Delta^{\mu_i\mu_j}$ o $\Delta_{\nu_i\nu_j}$. Pero entonces no se cumpliría la relación (C.8), pues valdría $\Delta^{\alpha_1...\alpha_q}_{\mu_1...\mu_q}\Delta^{\nu_1...\nu_{q'}}_{\beta_1...\beta_{q'}}M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = 0$. Luego, tiene que valer $q = q'$, con lo que podemos escribir:

$$M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = \delta_{qq'}M\left(\Delta^{\mu_1}_{\nu_1}...\Delta^{\mu_q}_{\nu_q} + \text{permutaciones}\right) + \text{otros términos}. \tag{C.9}$$

Si ahora usamos (C.8), deducimos:

$$M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = \delta_{qq'}M\Delta^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_q}. \tag{C.10}$$

M es un escalar de Lorentz. Para calcularlo, basta con hacer la siguiente contracción de índices:

$$\begin{aligned} M^{\mu_1...\mu_q}_{\mu_1...\mu_q} =& M\Delta^{\mu_1...\mu_q}_{\mu_1...\mu_q} = (2q+1)M, \\ M =& \frac{1}{2q+1}\int DpF(p_u)p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\mu_1}...p_{\mu_q\rangle} = \frac{q!}{(2q+1)!!}\int DpF(p_u)(\Delta^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^q. \end{aligned} \tag{C.11}$$

Entonces:

$$M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = \int DpF(p_u)p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\mu_1}...p_{\mu'_q\rangle} = \frac{\delta_{qq'}q!}{(2q+1)!!}\int DpF(p_u)(\Delta^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta)^q. \tag{C.12}$$

En el caso conforme:

$$M^{\mu_1...\mu_q}_{\nu_1...\nu_{q'}} = \int DpF(p_u)p^{\langle\mu_1}...p^{\mu_q\rangle}p_{\langle\mu_1}...p_{\mu_{q'}\rangle} = \frac{\delta_{qq'}q!}{(2q+1)!!}\int DpF(p_u)p_u^{2q}. \tag{C.13}$$

Para demostrar la relación de ortogonalidad (4.28) se procede de manera análoga [10].

Apéndice D

Coeficientes de transporte de la teoría anisótropa

A continuación se muestran las expresiones de los coeficientes de transporte de las ecuaciones (4.66):

$$\Upsilon_{ij}^{u(0)} = \frac{4\pi^2\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)I_{i-1,j}}{T_u^i T_l \mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1a}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{lu;ij}^{u(1)} =& \frac{1}{T_u\mathcal{D}_{ij}}\left\{T_l^j\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\left[(i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2 + (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2\right]\right.\\ &\left.+\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} - (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]\right\},\end{aligned} \tag{D.1b}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{T_u;ij}^{u(1)} =& \left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\\ &\times\frac{\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)T_uT_l^j\psi_{T_u}^{(1)} - \mathcal{J}_{i-1,j+1}T_u^{j+2} - i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^{j+2}}{T_uT_l\mathcal{D}_{ij}},\end{aligned} \tag{D.1c}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{T_l;ij}^{u(1)} =& \left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\\ &\times\frac{\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)T_l^{j+1}\psi_{T_l}^{(1)} + \mathcal{J}_{i-1,j+1}T_u^{j+2} - (j+2)\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^{j+2}}{T_l^2\mathcal{D}_{ij}},\end{aligned} \tag{D.1d}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{\theta;ij}^{u(1)} =& \frac{1}{2T_u\mathcal{D}_{ij}}\left\{T_l^j\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\left[(i+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2\right]\right.\\ &\left.+\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} - (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]\right\},\end{aligned} \tag{D.1e}$$

$$\Upsilon_{\theta_l;ij}^{u(1)} = \frac{T_l^{j-1}}{2\mathcal{D}_{ij}}\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\left[j(1+2\psi_{\theta_l}^{(1)})\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2 + (2i\psi_{\theta_l}^{(1)} - j - 2)\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2\right], \tag{D.1f}$$

$$\Upsilon_{hl;ij}^{u(2)} = \frac{\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)}{T_u^iT_l\mathcal{D}_{ij}}\left[4\pi^2(iu_l^{(1)} + j + 1)\xi_{h,i-1,j} - T_u^iT_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi_{hl}^{(2)}\right], \tag{D.1g}$$

$$\Upsilon_{hu;ij}^{u(2)} = \frac{4\pi^2}{T_u^iT_l}\frac{(i-1)\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\xi_{h,i-2,j+1} + \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1h}$$

$$\Upsilon_{hl;ij}^{u(2)} = \frac{4\pi^2 j}{T_u^iT_l}\frac{\left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\xi_{h,i,j-1}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1i}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{hT_u;ij}^{u(2)} =& \left(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u\right)\\ &\times\frac{4\pi^2 iu_{T_u}^{(1)}\xi_{h,i-1,j} - 4\pi^2\frac{\partial\xi_{h,i-1,j}}{\partial T_u} - T_u^iT_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi_{hT_u}^{(2)}}{T_u^iT_l\mathcal{D}_{ij}},\end{aligned} \tag{D.1j}$$

$$\Upsilon^{u(2)}_{hT_l;ij} = (\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u) \times \frac{4\pi^2 i u^{(1)}_{T_l}\xi_{h,i-1,j} - 4\pi^2\frac{\partial\xi_{h,i-1,j}}{\partial T_l} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{hT_l}}{T_u^i T_l \mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1k}$$

$$\Upsilon^{u(2)}_{hlu;ij} = \frac{4\pi^2}{T_u^i T_l}\frac{(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u)\left[(i-1)\xi_{h,i-2,j+1} + j\xi_{h,i,j-1}\right] + \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} - (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1l}$$

$$\Upsilon^{u(2)}_{h;ij} = \frac{(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u)}{T_u^i T_l \mathcal{D}_{ij}}\left[T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_h - 4\pi^2\xi_{h,i-1,j}\right], \tag{D.1m}$$

$$\Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;ij} = \frac{4\pi^2}{T_u^i T_l}\frac{(i-1)(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u)\xi_{\pi,i-2,j} + \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} - (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.1n}$$

$$\Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;ij} = \frac{(\mathcal{I}_{20}T_l - \mathcal{J}_{20}T_u)}{T_u^i T_l \mathcal{D}_{ij}}\left[4\pi^2 j\xi_{\pi,i-1,j-1} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{\pi\sigma_l}\right], \tag{D.1o}$$

$$\Upsilon^{l(0)}_{ij} = -\frac{4\pi^2(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)I_{i-1,j}}{T_u^{i+1}\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2a}$$

$$\Upsilon^{l(1)}_{lu;ij} = \frac{T_l}{T_u^2\mathcal{D}_{ij}}\left\{T_l^j(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)\left[(i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2 + (j+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2\right] - \left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]\right\}, \tag{D.2b}$$

$$\Upsilon^{l(1)}_{T_u;ij} = (3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u) \times \frac{\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)T_u T_l^j\psi^{(1)}_{T_u} - \mathcal{J}_{i-1,j+1}T_u^{j+2} - i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^{j+2}}{T_u^2\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2c}$$

$$\Upsilon^{l(1)}_{T_l;ij} = (3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u) \times \frac{\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)T_l^{j+1}\psi^{(1)}_{T_l} + \mathcal{J}_{i-1,j+1}T_u^{j+2} - (j+2)\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^{j+2}}{T_u T_l\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2d}$$

$$\Upsilon^{l(1)}_{\theta;ij} = \frac{T_l}{2T_u^2\mathcal{D}_{ij}}\left\{T_l^j(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)\left[(i+1)\mathcal{I}_{ij}T_u^2 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+2}T_l^2\right] - \left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]\right\}, \tag{D.2e}$$

$$\Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;ij} = \frac{T_l^j}{2T_u}(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)\frac{j(1+2\psi^{(1)}_{\theta_l})\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2 + (2i\psi^{(1)}_{\theta_l} - j - 2)\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2f}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hl;ij} = \frac{(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)}{T_u^{i+1}}\frac{4\pi^2(iu^{(1)}_l + j + 1)\xi_{h,i-1,j} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{hl}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2g}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hu;ij} = \frac{4\pi^2}{T_u^{i+1}}\frac{(i-1)(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)\xi_{h,i-2,j+1} + \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2h}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hl;ij} = \frac{4\pi^2 j}{T_u^{i+1}}\frac{(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)\xi_{h,i,j-1}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2i}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hT_u;ij} = \frac{(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u)}{T_u^{i+1}} \times \frac{4\pi^2 i u^{(1)}_{T_u}\xi_{h,i-1,j} - 4\pi^2\frac{\partial\xi_{h,i-1,j}}{\partial T_u} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{hT_u}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2j}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hT_l;ij} = \frac{1}{T_u^{i+1}}\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right) \times \frac{4\pi^2 i u^{(1)}_{T_l}\xi_{h,i-1,j} - 4\pi^2\frac{\partial\xi_{h,i-1,j}}{\partial T_l} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{hT_l}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2k}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{hlu;ij} = \frac{4\pi^2}{T_u^{i+1}}\frac{\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)\left[(i-1)\xi_{h,i-2,j+1} + j\xi_{h,i,j-1}\right] - \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2l}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{h;ij} = \frac{\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)}{T_u^{i+1}}\frac{T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_h - 4\pi^2\xi_{h,i-1,j}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2m}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;ij} = \frac{4\pi^2}{T_u^{i+1}}\frac{\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)(i-1)\xi_{\pi,i-2,j} - \left[\mathcal{J}_{ij}T_u^{j+1} + (i+1)\mathcal{I}_{ij}T_l^{j+1}\right]T_u^{i-2}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2n}$$

$$\Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;ij} = \frac{\left(3\mathcal{I}_{20}T_l + \mathcal{J}_{20}T_u\right)}{T_u^{i+1}}\frac{4\pi^2 j\xi_{\pi,i-1,j-1} - T_u^i T_l^j\left(i\mathcal{I}_{i-1,j+1}T_l^2 + j\mathcal{I}_{i+1,j-1}T_u^2\right)\psi^{(2)}_{\pi\sigma_l}}{\mathcal{D}_{ij}}, \tag{D.2o}$$

$$\mathcal{D}_{ij} = 4\mathcal{J}_{ij}\mathcal{I}_{20}T_u^{j+1} + \mathcal{I}_{ij}T_l^j\left[(i-3j-2)\mathcal{I}_{20}T_l - (i+j+2)\mathcal{J}_{20}T_u\right],$$

$$u^{(1)}_l = \frac{3\mathcal{I}_{02}T_l^2 - \mathcal{I}_{20}T_u^2}{3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2}, \tag{D.3a}$$

$$u^{(1)}_{T_u} = \frac{\left(\mathcal{J}_{20} - \mathcal{J}_{02}\right)T_u^3 - \mathcal{I}_{02}T_l^3 + 3\mathcal{I}_{20}T_u^2 T_l}{T_u T_l\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3b}$$

$$u^{(1)}_{T_l} = \frac{\left(\mathcal{J}_{02} - \mathcal{J}_{20}\right)T_u^3 - 3\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{I}_{20}T_u^2 T_l}{T_l^2\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3c}$$

$$u^{(2)}_{h\sigma_l} = u^{(2)}_{h\omega_l} = \frac{8\pi^2}{T_u T_l\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3d}$$

$$u^{(2)}_{h\theta_l} = \frac{16\pi^2\mathcal{I}_{20}T_u}{T_l\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3e}$$

$$u^{(2)}_{T_u h} = \frac{8\pi^2\left(\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{J}_{02}T_u^3\right)}{T_u^2 T_l^2\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3f}$$

$$u^{(2)}_{T_l h} = \frac{8\pi^2\left(3\mathcal{I}_{02}T_l^3 - \mathcal{J}_{02}T_u^3\right)}{T_u T_l^3\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3g}$$

$$u^{(2)}_{\pi l} = \frac{16\pi^2}{T_u T_l}\frac{\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2}{\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)^2}, \tag{D.3h}$$

$$u^{(2)}_{\pi T_u} = \frac{8\pi^2}{T_u^2 T_l^2}\frac{\left(\mathcal{J}_{20} - \mathcal{J}_{02}\right)T_u^3 - \mathcal{I}_{02}T_l^3 + 3\mathcal{I}_{20}T_u^2 T_l}{\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)^2}, \tag{D.3i}$$

$$u^{(2)}_{\pi T_l} = \frac{8\pi^2}{T_u T_l^3}\frac{\left(\mathcal{J}_{02} - \mathcal{J}_{20}\right)T_u^3 - \mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{I}_{20}T_u^2 T_l}{\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)^2}, \tag{D.3j}$$

$$u^{(2)}_{\pi} = \frac{8\pi^2}{T_u T_l\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.3k}$$

$$\tag{D.3l}$$

$$\psi^{(1)}_{T_u} = \frac{\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{J}_{02}T_u^3}{T_uT_l\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4a}$$

$$\psi^{(1)}_{T_l} = \frac{3\mathcal{I}_{02}T_l^3 - \mathcal{J}_{02}T_u^3}{T_l^2\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4b}$$

$$\psi^{(1)}_{\theta_l} = \frac{3\mathcal{I}_{02}T_l^2 - \mathcal{I}_{20}T_u^2}{2\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4c}$$

$$\psi^{(2)}_{hl} = \frac{(2\pi)^2}{T_uT_l}\frac{\mathcal{I}_{02}T_l^2 + 5\mathcal{I}_{20}T_u^2}{\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4d}$$

$$\psi^{(2)}_{hT_u} = \frac{(2\pi)^2}{T_u^2T_l^2}\frac{\left(\mathcal{J}_{20} - \mathcal{J}_{02}\right)T_u^3 - \mathcal{I}_{02}T_l^3 + 3\mathcal{I}_{20}T_u^2T_l}{\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4e}$$

$$\psi^{(2)}_{hT_l} = \frac{(2\pi)^2}{T_uT_l^3}\frac{\left(\mathcal{J}_{02} - \mathcal{J}_{20}\right)T_u^3 - 3\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \mathcal{I}_{20}T_u^2T_l}{\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)\left(3\mathcal{I}_{20}T_u^2 - \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}, \tag{D.4f}$$

$$\psi^{(2)}_{h} = \psi^{(2)}_{\pi\sigma_l} = \frac{(2\pi)^2}{T_uT_l\left(\mathcal{I}_{20}T_u^2 + \mathcal{I}_{02}T_l^2\right)}. \tag{D.4g}$$

Para las ecuaciones (4.69a) y (4.69b), se tiene:

$$\xi^{h(0)}_{rsij} = \Upsilon^{u(0)}_{rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} + \Upsilon^{l(0)}_{rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5a}$$

$$\xi^{h(1)}_{lu;rsij} = \Upsilon^{l(1)}_{lu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(1)}_{lu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.5b}$$

$$\xi^{h(1)}_{T_u;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{T_u;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{T_u;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5c}$$

$$\xi^{h(1)}_{T_l;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{T_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{T_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5d}$$

$$\xi^{h(1)}_{\theta;rsij} = \Upsilon^{l(1)}_{\theta;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(1)}_{\theta;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.5e}$$

$$\xi^{h(1)}_{\theta_l;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{\theta_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5f}$$

$$\xi^{h(2)}_{hl;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hl;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hl;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5g}$$

$$\xi^{h(2)}_{hu;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{hu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{hu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.5h}$$

$$\xi^{h(2)}_{h\bar{l};rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{h\bar{l};rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{h\bar{l};rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5i}$$

$$\xi^{h(2)}_{hT_u;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hT_u;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hT_u;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5j}$$

$$\xi^{h(2)}_{hT_l;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hT_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hT_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5k}$$

$$\xi^{h(2)}_{hlu;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{hlu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{hlu;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.5l}$$

$$\xi^{h(2)}_{h;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{h;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{h;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5m}$$

$$\xi^{h(2)}_{\pi\sigma;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.5n}$$

$$\xi^{h(2)}_{\pi\sigma_l;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\frac{\partial \xi_{h,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.5o}$$

(D.5p)

$$\xi^{\pi(0)}_{rsij} = \Upsilon^{u(0)}_{rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} + \Upsilon^{l(0)}_{rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6a}$$

$$\xi^{\pi(1)}_{lu;rsij} = \Upsilon^{l(1)}_{lu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(1)}_{lu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.6b}$$

$$\xi^{\pi(1)}_{T_u;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{T_u;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{T_u;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6c}$$

$$\xi^{\pi(1)}_{T_l;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{T_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{T_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6d}$$

$$\xi^{\pi(1)}_{\theta;rsij} = \Upsilon^{l(1)}_{\theta;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(1)}_{\theta;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.6e}$$

$$\xi^{\pi(1)}_{\theta_l;rsij} = \Upsilon^{u(1)}_{\theta_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(1)}_{\theta_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6f}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{hl;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hl;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hl;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6g}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{hu;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{hu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{hu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.6h}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{h\dot{l};rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{h\dot{l};rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{h\dot{l};rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6i}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{hT_u;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hT_u;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hT_u;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6j}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{hT_l;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{hT_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{hT_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6k}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{hlu;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{hlu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{hlu;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.6l}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{h;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{h;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{h;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}, \tag{D.6m}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{\pi\sigma;rsij} = \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l} - \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u}, \tag{D.6n}$$

$$\xi^{\pi(2)}_{\pi\sigma_l;rsij} = \Upsilon^{u(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_u} - \Upsilon^{l(2)}_{\pi\sigma_l;rs}\frac{\partial \xi_{\pi,ij}}{\partial T_l}. \tag{D.6o}$$

(D.6p)

Para las ecuaciones (4.70) y (4.71), se tiene:

$$\tau^h_{rsij} = \left(1 + \frac{\xi^{h(0)}_{rsij}}{\xi_{h,ij}}\right)^{-1}, \tag{D.7a}$$

$$\lambda^{(1)}_{l;ij} = \frac{T_u^{i+1}T_l^{j}}{8\pi^2\xi_{h,ij}}\left[j\mathcal{I}_{i+2,j-1}T_u^2 - (j+2)\mathcal{I}_{i,j+1}T_l^2\right] l^{\{\mu\}}, \tag{D.7b}$$

$$\lambda^{(1)}_{u;ij} = \frac{T_u^{i-1}T_l^{j+2}}{8\pi^2\xi_{h,ij}}\left[(i+1)\mathcal{I}_{i,j+1}T_u^2 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+3}T_l^2\right], \tag{D.7c}$$

$$\lambda^{(1)}_{l;ij} = \frac{T_u^{i}T_l^{j+1}}{8\pi^2\xi_{h,ij}}\left\{\left[(i+2)u_l^{(1)} + j + 1\right]\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - (iu_l^{(1)} + j + 3)\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right\}, \tag{D.7d}$$

$$\lambda^{(1)}_{lu;ij} = \frac{T_u^{i-1}T_l^j}{8\pi^2\xi_{h,ij}}\left[j\mathcal{I}_{i+2,j-1}T_u^4 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+3}T_l^4 + (i-j-1)\mathcal{I}_{i,j+1}T_u^2T_l^2\right], \tag{D.7e}$$

$$\lambda^{(1)}_{T_u;ij} = \frac{T_u^{i-1}}{8\pi^2\xi_{h,ij}}\left\{\left(T_u u^{(1)}_{T_u} - 1\right)T_l^{j+1}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right] + (J_{i+1,j} - J_{i-1,j+2})T_u^{j+3}\right\}, \tag{D.7f}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(1)}_{T_l;ij} =& \frac{T_u^i}{8\pi^2 T_l\xi_{h,ij}}\Big\{T_l^{j+1}\Big\{\left[(i+2)T_l u^{(1)}_{T_l} - j - 1\right]\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - \left(iT_l u^{(1)}_{T_l} - j - 3\right)\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\Big\} \\ &- (J_{i+1,j} - J_{i-1,j+2})T_u^{j+3}\Big\},\end{aligned} \tag{D.7g}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}_{T_u h;rsij} =& \frac{1}{\xi_{h,ij}}\Bigg\{(i\xi_{h,i-1,j+1} + j\xi_{h,i+1,j-1})\psi^{(1)}_{T_u} - \xi^{h(1)}_{T_u;rsij} - \frac{\partial\xi_{h,i-1,j+1}}{\partial T_u} \\ &- \frac{T_u^iT_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{T_u h}\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.7h}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}_{T_l h;rsij} =& \frac{1}{\xi_{h,ij}}\Bigg\{(i\xi_{h,i-1,j+1} + j\xi_{h,i+1,j-1})\psi^{(1)}_{T_l} - \xi^{h(1)}_{T_l;rsij} - \frac{\partial\xi_{h,i-1,j+1}}{\partial T_l} \\ &- \frac{T_u^iT_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{T_l h}\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.7i}$$

$$\lambda^{(2)}_{luh;rsij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left[\xi^{h(1)}_{lu;rsij} + (i-1)\xi_{h,i-2,j+2} + (j+1)\xi_{h,ij}\right], \tag{D.7j}$$

$$\lambda^{(2)}_{h;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{\frac{T_u^iT_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_h - \xi_{h,i-1,j+1}\right\}, \tag{D.7k}$$

$$\lambda^{(2)}_{\sigma h;ij} = \frac{1}{2\xi_{h,ij}}\left[(i+1)\xi_{h,ij} - (i-1)\xi_{h,i-2,j+2}\right], \tag{D.7l}$$

$$\lambda^{(2)}_{\theta h;rsij} = \frac{1}{2\xi_{h,ij}}\left[(i+2)\xi_{h,ij} - (i-1)\xi_{h,i-2,j+2} - 2\xi^{h(1)}_{\theta;rsij}\right], \tag{D.7m}$$

$$\lambda^{(2)}_{\sigma_l h;ij} = \frac{1}{2\xi_{h,ij}}\left\{\frac{T_u^iT_l^{j+1}}{4\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{h\sigma_l} + j\xi_{h,i+1,j-1} - (j+2)\xi_{h,i-1,j+1}\right\}, \tag{D.7n}$$

$$\lambda^{(2)}_{\omega_l h;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{\xi_{h,i-1,j+1} - \frac{T_u^iT_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{h\omega_l}\right\}, \tag{D.7o}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{(2)}_{\theta_l h;rsij} =& \frac{1}{2\xi_{h,ij}}\Bigg\{\frac{T_u^iT_l^{j+1}}{4\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{h\theta_l} + j\left(1 + \psi^{(1)}_{\theta_l}\right)\xi_{h,i+1,j-1} \\ &+ \left(i\psi^{(1)}_{\theta_l} - j - 3\right)\xi_{h,i-1,j+1} - 2\xi^{h(1)}_{\theta_l;rsij}\Bigg\},\end{aligned} \tag{D.7p}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi l;ij} = j\frac{\xi_{\pi,i,j-1}}{\xi_{h,ij}}, \tag{D.7q}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi u;ij} = (i-1)\frac{\xi_{\pi,i-2,j+1}}{\xi_{h,ij}}, \tag{D.7r}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi l;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{\left(iu^{(1)}_l + j + 1\right)\xi_{\pi,i-1,j} - \frac{T_u^iT_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right]u^{(2)}_{\pi l}\right\}, \tag{D.7s}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi T_u;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{ iu^{(1)}_{T_u}\xi_{\pi,i-1,j} - \frac{\partial \xi_{\pi,i-1,j}}{\partial T_u} - \frac{T_u^i T_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right] u^{(2)}_{\pi T_u}\right\}, \tag{D.7t}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi T_l;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{ iu^{(1)}_{T_l}\xi_{\pi,i-1,j} - \frac{\partial \xi_{\pi,i-1,j}}{\partial T_l} - \frac{T_u^i T_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right] u^{(2)}_{\pi T_l}\right\}, \tag{D.7u}$$

$$\lambda^{(2)}_{\pi;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left\{ \frac{T_u^i T_l^{j+1}}{8\pi^2}\left[(i+2)\mathcal{I}_{i+1,j}T_u^2 - i\mathcal{I}_{i-1,j+2}T_l^2\right] u^{(2)}_{\pi} - \xi_{\pi,i-1,j}\right\}, \tag{D.7v}$$

$$\lambda^{(2)}_{lu\pi;ij} = \frac{1}{\xi_{h,ij}}\left[(i-1)\xi_{\pi,i-2,j+1} + j\xi_{\pi,i,j-1}\right]. \tag{D.7w}$$

$$\tau^{\pi}_{rsij} = \left(1 + \frac{\xi^{\pi(0)}_{rsij}}{\xi_{\pi,ij}}\right)^{-1}, \tag{D.8a}$$

$$\phi^{(1)}_{\sigma;ij} = \frac{T_u^{i-1}T_l^{j+1}}{16\pi^2\xi_{\pi,ij}}\left[2(i+1)\mathcal{I}_{i,j+2}T_u^2T_l^2 - (i+3)\mathcal{I}_{i+2,j}T_u^4 - (i-1)\mathcal{I}_{i-2,j+4}T_l^4\right], \tag{D.8b}$$

$$\phi^{(1)}_{\sigma_l;ij} = \frac{T_u^{i}T_l^{j}}{16\pi^2\xi_{\pi,ij}}\left[j\mathcal{I}_{i+3,j-1}T_u^4 + (j+4)\mathcal{I}_{i-1,j+3}T_l^4 - 2(j+2)\mathcal{I}_{i+1,j+1}T_u^2T_l^2\right], \tag{D.8c}$$

$$\phi^{(2)}_{lh;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}[j\xi_{h,i+2,j-1} - (j+4)\xi_{h,i,j+1}], \tag{D.8d}$$

$$\phi^{(2)}_{uh;ij} = \frac{i-1}{2\xi_{\pi,ij}}(\xi_{h,i-1,j+3} - \xi_{h,i,j+1}), \tag{D.8e}$$

$$\phi^{(2)}_{lh;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}\left\{\left[j + (i+4)u^{(1)}_l + 1\right]\xi_{h,i-1,j+2} - \left(iu^{(1)}_l + j + 1\right)\xi_{h,i+1,j}\right\}, \tag{D.8f}$$

$$\phi^{(2)}_{T_u h;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}\left\{\frac{\partial \xi_{h,i-1,j+2}}{\partial T_u} - \frac{\partial \xi_{h,i+1,j}}{\partial T_u} - [i\xi_{h,i-1,j+2} - (i+4)\xi_{h,i+1,j}]u^{(1)}_{T_u}\right\}, \tag{D.8g}$$

$$\phi^{(2)}_{T_l h;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}\left\{\frac{\partial \xi_{h,i-1,j+2}}{\partial T_l} - \frac{\partial \xi_{h,i+1,j}}{\partial T_l} - [i\xi_{h,i-1,j+2} - (i+4)\xi_{h,i+1,j}]u^{(1)}_{T_l}\right\}, \tag{D.8h}$$

$$\phi^{(2)}_{h;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}(\xi_{h,i-1,j+2} - \xi_{h,i+1,j}), \tag{D.8i}$$

$$\phi^{(2)}_{luh;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}[(i-1)(\xi_{h,i-2,j+3} - \xi_{h,i+1,j}) + j(\xi_{h,i,j+1} - \xi_{h,i+2,j-1})], \tag{D.8j}$$

$$\phi^{(2)}_{lu\pi;rsij} = \frac{1}{\xi_{\pi,ij}}\left[\xi^{\pi(1)}_{lu;rsij} + (i-1)\xi_{\pi,i-2,j+2} + (j+1)\xi_{\pi,ij}\right], \tag{D.8k}$$

$$\phi^{(2)}_{T_u\pi;rsij} = \frac{1}{\xi_{\pi,ij}}\left[\left(i\xi_{\pi,i-1,j+1} + j\xi_{\pi,i+1,j-1}\right)\psi^{(1)}_{T_u} - \frac{\partial \xi_{\pi,i-1,j+1}}{\partial T_u} - \xi^{\pi(1)}_{T_u;rsij}\right], \tag{D.8l}$$

$$\phi^{(2)}_{T_l\pi;rsij} = \frac{1}{\xi_{\pi,ij}}\left[\left(i\xi_{\pi,i-1,j+1} + j\xi_{\pi,i+1,j-1}\right)\psi^{(1)}_{T_l} - \frac{\partial \xi_{\pi,i-1,j+1}}{\partial T_l} - \xi^{\pi(1)}_{T_l;rsij}\right], \tag{D.8m}$$

$$\phi^{(2)}_{\pi;ij} = \frac{\xi_{\pi,i-1,j+1}}{\xi_{\pi,ij}}, \tag{D.8n}$$

$$\phi^{(2)}_{\sigma\pi;ij} = \frac{2}{3\xi_{\pi,ij}}[(i-1)\xi_{\pi,i-2,j+2} - (i+2)\xi_{\pi,ij}], \tag{D.8o}$$

$$\phi^{(2)}_{\theta\pi;rsij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}\left[(i-1)\xi_{\pi,i-2,j+2} - (i+3)\xi_{\pi,ij} - 2\xi^{\pi(1)}_{\theta;rsij}\right], \tag{D.8p}$$

$$\phi^{(2)}_{\sigma_l\pi;ij} = \frac{2}{3\xi_{\pi,ij}}[j\xi_{\pi,i+1,j-1} - (j+3)\xi_{\pi,i-1,j+1}], \tag{D.8q}$$

$$\phi^{(2)}_{\omega_l\pi;ij} = 2\frac{\xi_{\pi,i-1,j+1}}{\xi_{\pi,ij}}, \tag{D.8r}$$

$$\phi^{(2)}_{\theta_l\pi;ij} = \frac{1}{2\xi_{\pi,ij}}\left[j\xi_{\pi,i+1,j-1} - (j+4)\xi_{\pi,i-1,j+1} + 2(i\xi_{\pi,i-1,j+1} + j\xi_{\pi,i+1,j-1})\psi^{(1)}_{\theta_l} - 2\xi^{\pi(1)}_{\theta_l;rsij}\right]. \tag{D.8s}$$

Apéndice E

Serie de Taylor de las integrales $\mathcal{I}_{ij}$ y $\mathcal{J}_{ij}$

En está sección se hará la expansión de Taylor de las integrales $\mathcal{I}_{ij}$ y $\mathcal{J}_{ij}$ en la variable $\epsilon = T_u/T_l$. Partamos de la definición de estas integrales:

$$\mathcal{I}_{ij}(\epsilon) \equiv \int_0^\infty dx \int_{-\epsilon x}^{\epsilon x} dy x^i y^j \hat{f}_0(x,y), \tag{E.1a}$$

$$\mathcal{J}_{ij}(\epsilon) \equiv [1+(-1)^j] \int_0^\infty dx x^{i+j+1} \hat{f}_0\left(x, \epsilon x\right). \tag{E.1b}$$

El ansatz de Romatschke-Strickland para $\hat{f}_0$ es [8]:

$$\hat{f}_0 = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{E.2}$$

Entonces, $\mathcal{J}_{ij}$ puede calcularse de manera exacta y se obtiene:

$$\mathcal{J}_{ij}(\epsilon) = [1+(-1)^j] \frac{\Gamma(i+j+2)}{(1+\epsilon^2)^{\frac{i+j+2}{2}}}. \tag{E.3}$$

Luego:

$$\mathcal{J}_{ij}(\epsilon) = [1+(-1)^j]\Gamma(i+j+2) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma[-(i+j)/2]\epsilon^{2l}}{\Gamma[-(i+j+2l)/2]\Gamma(l+1)}. \tag{E.4}$$

Notar que si $(i+j+2)/2$ es entero, las divergencias en $\Gamma[-(i+j)/2]$ y $\Gamma[-(i+j+2l)/2]$ se cancelan por la propiedad $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

Para $\mathcal{I}_{ij}$ notemos que $\mathcal{I}_{ij}(-\epsilon) = -\mathcal{I}_{ij}(\epsilon)$ y escribamos:

$$\mathcal{I}_{ij}(\epsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}(0)}{\Gamma(2l+2)} \epsilon^{2l+1}, \tag{E.5}$$

donde $\mathcal{I}_{ij}^{(n)}$ es la derivada n-ésima de $\mathcal{I}_{ij}$ respecto a ϵ. Calculemos $\mathcal{I}_{ij}^{(1)}$:

$$\mathcal{I}_{ij}^{(1)}(\epsilon) = \epsilon^j \mathcal{J}_{ij} = [1+(-1)^j]\Gamma(i+j+2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma[-(i+j)/2]\epsilon^{2k+j}}{\Gamma[-(i+j+2k)/2]\Gamma(k+1)}. \tag{E.6}$$

Es fácil calcular $\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}$ a partir del resultado anterior:

$$\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}(\epsilon) = [1+(-1)^j]\Gamma(i+j+2) \sum_{k=(2l-j)\Delta(2l-j)}^{\infty} \frac{\Gamma(2k+j+1)\Gamma[-(i+j)/2]\epsilon^{2k+j-2l}}{\Gamma(2k+j-2l+1)\Gamma[-(i+j+2k)/2]\Gamma(k+1)}, \tag{E.7}$$

$$\Delta(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0, \\ 1/2 & \text{si} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Claramente $\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}(0) = 0$ para todo $2l < j$. Tomando $2l \geq j$, el único término de la expansión de $\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}$ que sobrevive al tomar $\epsilon = 0$ es el primero, ya que para este se tiene $\epsilon^{2(2l-j)/2+j-2l} = 1$. Entonces:

$$\mathcal{I}_{ij}^{(2l+1)}(0) = 2\Delta(2l-j)[1+(-1)^j]\frac{\Gamma(i+j+2)\Gamma(2l+1)\Gamma[-(i+j)/2]}{\Gamma[-(i+2l)/2]\Gamma[(2l-j+2)/2]}. \tag{E.8}$$

Reemplazando en (E.5):

$$\mathcal{I}_{ij}(\epsilon) = [1+(-1)^j] \sum_{l=j/2}^{\infty} \frac{\Gamma(i+j+2)\Gamma[-(i+j)/2]}{\Gamma[-(i+2l)/2]\Gamma[(2l-j+2)/2](2l+1)}\epsilon^{2l+1}. \tag{E.9}$$

Haciendo el cambio de variables $l \to l - j/2$ se obtiene finalmente:

$$\mathcal{I}_{ij}(\epsilon) = [1+(-1)^j]\Gamma(i+j+2)\Gamma[-(i+j)/2]\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{2l+j+1}}{\Gamma[-(i+j+2l)/2]\Gamma(l+1)(j+2l+1)}. \tag{E.10}$$

Apéndice F

Creación de entropía en hidrodinámica anisótropa. Cálculo de los coeficientes de $l_\mu u'^\mu$ y $\hat{\theta}$

Comencemos demostrando la nulidad del término de (4.104) proporcional a $l_\mu u'^\mu$. Queremos ver que:

$$\frac{T_u}{T_l}\zeta^l \Upsilon^{l(1)}_{lu;rs} - \zeta^u \Upsilon^{u(1)}_{lu;rs} + \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10}\right) T_u T_l = 0. \tag{F.1}$$

Usando el apéndice D, vemos que debe valer:

$$\begin{aligned}0 =& \left[(3\zeta^l - \zeta^u)\mathcal{I}_{20}T_l + (\zeta^l + \zeta^u)\mathcal{J}_{20}T_u\right](r-1)\mathcal{I}_{r-2,s+2}T_l^{s+2} \\ &+ \Big\{(3s - r + 2)\left[\zeta^l - (\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10})T_l\right]\mathcal{I}_{20}T_u^2 T_l \\ &+ [(s+1)\zeta^u - (r+1)\zeta^l]\mathcal{I}_{02}T_l^3 + \left[(\zeta^l + \zeta^u)(s+1) - \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10}\right)(r+s+2)T_l\right]\mathcal{J}_{20}T_u^3\Big\}\mathcal{I}_{rs}T_l^s \\ &+ \left\{\left[4\left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10}\right)T_l - (\zeta^l + \zeta^u)\right]\mathcal{I}_{20}T_u^2 - (\zeta^l + \zeta^u)\mathcal{I}_{02}T_l^2\right\}\mathcal{J}_{rs}T_u^{s+1}.\end{aligned} \tag{F.2}$$

Usando (4.36), (4.37b), (4.94a), (4.94c), (4.76) y definiendo $\epsilon \equiv T_u/T_l$, se obtiene:

$$\zeta^l = \frac{16T_u\epsilon^2}{(1+\epsilon^2)^{3/2}}, \quad \zeta^u = \frac{16T_u}{(1+\epsilon^2)^{3/2}}(3+2\epsilon^2), \quad \left(\mathcal{I}_{10} - \tilde{\mathcal{I}}_{10}\right)T_l = \frac{16T_u}{(1+\epsilon^2)^{1/2}}, \tag{F.3a}$$

$$\mathcal{I}_{20} = 6\left(\arctan\epsilon + \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\right), \quad \mathcal{I}_{02} = 6\left(\arctan\epsilon - \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\right), \quad \mathcal{J}_{20} = \frac{12}{(1+\epsilon^2)^2}. \tag{F.3b}$$

Usando las relaciones anteriores, se obtiene:

$$0 = \left[(\epsilon^2 - 3)\arctan\epsilon + (\epsilon^2+3)\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}\right]\left[(r-1)\frac{\mathcal{I}_{r-2,s+2}}{\epsilon^{s+3}} - (s+1)\frac{\mathcal{I}_{rs}}{\epsilon^{s+3}} + \left(1 + \frac{1}{\epsilon^2}\right)\mathcal{J}_{rs}\right]. \tag{F.4}$$

Usando las series de Taylor de $\mathcal{I}_{rs}$ y $\mathcal{J}_{rs}$ (apéndice E):

$$\begin{aligned}&(r-1)\frac{\mathcal{I}_{r-2,s+2}}{\epsilon^{s+3}} - (s+1)\frac{\mathcal{I}_{rs}}{\epsilon^{s+3}} + \left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\mathcal{J}_{rs} = [1+(-1)^s]\Gamma(r+s+2)\Gamma[-(r+s)/2] \\ &\times\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\epsilon^{2l}}{\Gamma[-(r+s+2l+2)/2]\Gamma(l+1)}\frac{r+s+2l+2}{s+2l+3} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l\epsilon^{2l-2}}{\Gamma[-(r+s+2l)/2]\Gamma(l+1)(s+2l+1)}\right].\end{aligned} \tag{F.5}$$

Haciendo la sustitución $l \to l+1$ en la segunda sumatoria y usando la propiedad $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$:

$$
\begin{aligned}
&(r-1)\frac{\mathcal{I}_{r-2,s+2}}{\epsilon^{s+3}} - (s+1)\frac{\mathcal{I}_{rs}}{\epsilon^{s+3}} + \left(1+\frac{1}{\epsilon^2}\right)\mathcal{J}_{rs} = [1+(-1)^s]\Gamma(r+s+2)\Gamma[-(r+s)/2] \\
&\times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{2l}}{\Gamma[-(r+s+2l+2)/2]\Gamma(l+1)} \left[\frac{2}{s+2l+3} - \frac{2(r+s+2l+2)}{(s+2l+3)(r+s+2l+2)}\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{F.6}
$$

Una cuenta análoga demuestra la nulidad del término de $\hat{\theta}$.

Referencias

[1] E. A. Calzetta; Real relativistic fluids in heavy ion collisions; Proceedings of Summer School on Geometric, Algebraic and Topological Methods for Quantum Field Theory, (Villa de Leyva Colombia, 2013), arXiv:1310.0841.

[2] W. A. Hiscock, L. Lindblom, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985).

[3] S. Chapman, T. G. Cowling; The Mathematical Theory of Non-uniform Gases; tercera edición (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1970).

[4] W. Isreael, J. M. Stewart, Ann. Phys. (N.Y.) **118**, 341 (1979).

[5] G. S. Denicol, E. Molnár, H. Niemi, D. H. Rischke, Eur. Phys. J. A **48**: 170 (2012).

[6] M. Strickland, Acta Physica Polonica B, Proceedings Supplement, Vol. 45, No. 12, 2355 (2014).

[7] P. Romatschke, M. Strickland, Phys. Rev. D **68**, 036004 (2003).

[8] M. Martinez, R. Ryblewski, M. Strickland, Phys. Rev. C **85** 064913 (2012).

[9] D. Bazow, U. Heinz, M. Strickland, Phys. Rev. C **90**, 054910 (2014).

[10] E. Molnár, H. Niemi, D. H. Rischke, Phys. Rev. D **93**, 114025 (2016).

[11] E. Molnár, H. Niemi, D. H. Rischke, Phys. Rev. D **94**, 125003 (2016).

[12] E. A. Calzetta, B-L. Hu; Nonequilibrium Quantum Field Theory (Cambridge University Press, Cambridge (England), 2008).

[13] H. B. Callen; Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, segunda edición (John Wiley & Sons, 1985).

[14] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky; Principles of Condensed Matter Physics (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995).

[15] G. K. Batchelor; An Introduction to Fluid Dynamics (Cambridge Univerdity Press, Cambridge, UK, 1967).

[16] L. D. Landau, E. M. Lifshitz; Fluid Mechanics; segunda edición (Pergamon Press, Oxford, 1987).

[17] W. Israel; The Relativistic Boltzmann Equation; en L. O'Raifeartaigh (ed.); General relativity: papers in honour of J. L. Synge (Clarendon Press, Oxford, 1972), p. 201.

[18] W. Israel; Covariant Fluid Mechanics and Thermodynamics: An Introduction; en A. Anile and Y. Choquet-Bruhat (eds.); Relativistic fluid dynamics (Springer, New York, 1988), p. 152.

[19] C. Eckart, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

[20] J. M. Stewart, Lect. Notes Phys. **10**, 1 (1971).

[21] J. L. Anderson, H. R. Witting, Physics **74** 466 (1974).

[22] K. Tsumura, T. Kunihiro, Phys. Lett. B **690**, 255 (2010).

[23] T. Osada, Phys. Rev. C **85**, 014906 (2012).

[24] H. Grad, Commun. Pure Appl. Math. **2**, 331 (1949).

[25] G. S. Denicol, T. Kodama, T. Kooide, P. Mota, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **35** 115102 (2008).

[26] S. Pu, T. Koide, D. H. Rischke, Phys. Rev D **81**, 114039 (2010).

[27] G. S. Denicol, H. Niemi, E. Molnár, D. H. Rischke, Phys. Rev. D **85**, 114047 (2012).

[28] J. L. Anderson, J. Math. Phys. **15**, 1116 (1974).

[29] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen, Ch. G. van Weert; Relativistic Kinetic Theory. Principles and Applications (North-Holland, Amsterdam, 1980).

[30] G. Szegö; Orthogonal Polynomials; cuarta edición (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume XXIII, 1939).

[31] B. Betz, D. Henkel, D. H. Rischke, Prog. Part. Nucl. Phys. **62**, 556 (2009).

[32] B. Betz, G. S. Denicol, T. Koide, E. Molnár, H. Niemi, D. H. Rischke, EPJ Web Conf. **13**, 07005 (2011).

[33] G. S. Denicol, T. Koide, D. H. Rischke, Phys. Rev. Lett. **105**, 162501 (2010).

[34] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik; Table of Integrals, Series and Products; séptima edición (Academic Press, 2007); ecuación 8.911.1.

[35] M. Aguilar, E. A. Calzetta, Phys. Rev. D **95**, 076022 (2017).