

## Tesis de Posgrado

# Grafos self-clique y otras clases de grafos clique

Lin, Min Chih

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Computación de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Lin, Min Chih. (2001). Grafos self-clique y otras clases de grafos clique. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3337\\_Lin.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3337_Lin.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Lin, Min Chih. "Grafos self-clique y otras clases de grafos clique". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3337\\_Lin.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3337_Lin.pdf)

**Tesis Doctoral**  
**Grafos Self-Clique y Otras Clases de**  
**Grafos Clique**

Min Chih Lin

oscarlin@dc.uba.ar

Departamento de Computación  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Director: Jayme L. Szwarcfiter  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Mayo de 2001

Nº 3 3 3 7 4

*En memoria de mi padre.*

*A Paula, mi amada esposa.*

*A Juani, mi adorable hijo y al otro que viene en camino.*

*A Lolo, mi precioso ahijado y Sebas, Mazi, Lourdes, mis otros sobrinos.*

# Agradecimientos

*A Jayme, mi director, por su experiencia, su claridad conceptual, su guía, su humildad y su hospitalidad.*

*A Irene, mi consejera de estudios, por las ayudas y los consejos valiosos que me brindó a lo largo de estos años.*

*A mis jefes y ex-jefes de Sofrecom: Pablo, Dany, Charly, Koko, Adrián y especialmente a María Elena, quienes siempre me apoyaron para realizar este emprendimiento*

*A Willy, mi compañero de estudio, por compartir todos estos años de pasantías en la UFRJ y las largas charlas sobre nuestras respectivas tesis.*

*A Marisa, Celina y Célia, por su cuidadosa lectura y sus valiosas sugerencias que contribuyeron a pulir y mejorar este trabajo.*

*A mis suegros: Marita y Jorge y mis cuñados Vanesa y Gustavo, quienes muchas veces cuidaron a Juani para que pudiera cursar materias del doctorado.*

*A mis otros compañeros del grupo de investigación: Isa y Pablo, quienes más de una vez me ayudaron a aclarar dudas relacionadas con mi tesis.*

*A Fabio, quien siempre estuvo dispuesto a darme una mano las veces que estuve en la UFRJ.*

*A Oscar P. y Laura, por su hospitalidad durante mi estadía en Rio.*

*A mi vieja, mis hermanos, mis tíos, mis primos; a abuela Nené, abuela Renza, Mariana y mis otros familiares políticos.*

*A Adrián Bondy, por las brillantes ideas que me brindó.*

*A los amigos que me ha dado la vida: Andrés, Raquel, Osvaldo, Gabriel, Waldo, Gustavo, Alex, Gaby, Tucho, Ariel, María Eva, Liliana, María Martha, Viviana, Ana Lía, Emilio, Ernesto, Darío, Pepe, Juan, Diego C., Pipo y seguramente algunos más que me estoy olvidando*

*A mis compañeros y ex-compañeros de Sofrecom: Dany W., Hémi, Fabito, Silvana M., Gustavo S., Gustavo J., Suyen, Alejandra G., Germán, Leandro, Diego T., Mariano V., Matute, Adrián M., Gustavo G., Juan Carlos, Silvana D., Sebastián, Luís D., Pablo N., Cristián C., Dany C., Carlos M., Fabián R., Mariano L., Néstor P, Armando, Sonia, Valeria L., Diego Z., Ariel, Carlos L., Juan, Viviana, Ezequiel, Virginia, Gustavo T., Horacio, Gabriel, Mónica N., Daniel I., Fernando, Néstor, Oscar A., Oscar D.P., Marcelo C., Cristina P., Karina, Alejandrina, Bárbara, Valeria, Julieta, Florencia R., Gustavo T., Mariano B, Noberto, Valeria C., Mariu, Tito, Trinidad, Hernán, Natalia L., Fedra, César, Adrián C., Osvaldo, Eduardo, Luís Q., Guillermo, Marcelo J., Nacho, Alejandra C., Martín M., Paola, Cristina B., Mónica B., Javier, Martín A., Diego C., Daniela, Tita, Claudia, Alejandra M, Hugo, Marcelo P. y a muchos otros.*

## Resumen:

Dada una familia de conjuntos, el grafo intersección de esta familia es generado colocando un vértice por cada conjunto de la familia y dos vértices son adyacentes si y sólo si los conjuntos correspondientes se intersecan.

El grafo clique de un grafo  $G$  (se denota como  $K(G)$ ) es el grafo intersección de los cliques (cada uno de ellos es un subconjunto de vértices de  $G$  que induce un subgrafo completo maximal de  $G$ ) de  $G$ . Por lo tanto,  $K$  es un operador que transforma un grafo en otro grafo.

Si aplicamos  $t$  veces este operador  $K$  a un grafo  $G$ , el grafo resultante (denotamos como  $K^t(G)$ ) es isomorfo a  $G$ ,  $G$  se llama grafo  $t$ -self-clique (si  $t = 1$ , se abrevia como self-clique).

Una familia de subconjuntos  $S$  satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de  $S$  consistente en subconjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Un grafo es llamado clique-Helly si la familia de los cliques del grafo verifica la propiedad de Helly.

Presentamos aquí una condición suficiente relacionada con el grado mínimo  $\delta(G)$  y el *girth*  $g(G)$  de un grafo  $G$  para que algunas potencias pares de este grafo sean grafos self-clique. A través de esta condición conseguimos una nueva familia de grafos self-clique. También presentamos otra familia de grafos self-clique generados a partir de los grafos bipartitos que poseen una matriz de adyacencia reducida simétrica. Además presentamos una caracterización de los grafos self-clique para los grafos clique-Helly. Esta caracterización indica que un grafo  $G$  posee una matriz clique  $A_G$  quasi-simétrica si y sólo si  $G$  es un grafo self-clique y clique-Helly. A su vez conjeturamos que en lugar de “una matriz clique quasi-simétrica”, puede ser reemplazada por “una matriz clique simétrica” en la caracterización anterior. A continuación presentamos dos condiciones suficientes para encontrar grafos 2-self-clique. Las familias de grafos 2-self-clique que surgen de estas condiciones están contenidas en la clase de los grafos clique-Helly y una de ellas es una extensión de la familia descrita por Escalante en [33].

Los grafos arco-circular son los grafos intersección de arcos alrededor de un círculo. Un grafo arco-circular que tiene una representación de arcos alrededor de un círculo y a su vez estos arcos verifican la propiedad de Helly, se denomina arco-circular Helly.

Presentamos también en esta tesis, una caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular Helly. También probamos que los grafos clique de los grafos arco-circular Helly son una subclase de los grafos arco-circular y analizamos la relación entre esta subclase con las otras ya conocidas. Además analizamos algunas propiedades sobre la segunda iteración de grafos clique de los grafos arco-circular Helly.

Los grafos circular son los grafos intersección de cuerdas dentro de un círculo. Una subclase de los grafos circular es la de los grafos circular Helly, aquellos que tienen un modelo de cuerdas que verifican la propiedad de Helly.

Presentamos una clase de grafos llamada dualmente circular Helly y probamos que los grafos clique de los grafos circular Helly son exactamente los grafos dualmente circular Helly y viceversa. Probamos además que estas dos clases de grafos son distintas.

A continuación, introducimos otros conceptos relacionados con los cliques de un grafo, revisamos la definición de los grafos clique-perfectos y presentamos una familia de grafos altamente clique-imperfectos.

Por último, presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y las líneas futuras de investigación en estos tópicos, destacando algunos problemas interesantes que permanecen abiertos.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Definiciones básicas y notación . . . . .	5
1.2	Clases de grafos . . . . .	8
1.3	Complejidad algorítmica . . . . .	10
1.4	Clases de grafos clique caracterizadas	12
<b>2</b>	<b>Grafos <math>t</math>-self-clique</b>	<b>13</b>
2.1	Grafos self-clique	13
2.2	Grafos 2-self-clique	25
<b>3</b>	<b>Grafos clique de grafos arco-circular Helly</b>	<b>31</b>
3.1	Preliminares . . . . .	34
3.2	Grafos clique de los grafos arco-circular Helly	35
<b>4</b>	<b>Grafos clique de grafos circular Helly</b>	<b>43</b>
4.1	Preliminares . . . . .	45
4.2	Grafos clique de los grafos circular Helly	48
<b>5</b>	<b>Grafos altamente clique-imperfectos</b>	<b>56</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones y problemas abiertos</b>	<b>59</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Consideremos una familia finita de subconjuntos no vacíos de algún conjunto. El grafo intersección de esta familia se obtiene representando cada subconjunto por un vértice, mientras que dos vértices están conectados por una arista si y sólo si los correspondientes subconjuntos se intersecan. Los grafos intersección han recibido especial atención en los últimos años en el estudio de teoría algorítmica de grafos y sus aplicaciones [15, 39, 71]. Algunas clases conocidas de grafos intersección son los grafos cordales, los grafos de permutación, los grafos de intervalos, los grafos arco-circular, los grafos circular, los grafos clique.

Ahora bien, dado un grafo  $G$ , es natural pensar qué familias de subconjuntos se pueden encontrar en  $G$  para generar otros grafos como grafos intersección a partir de estas familias.

Una posibilidad es considerar las aristas del grafo  $G$  como una familia de subconjuntos de vértices. En este caso, cada subconjunto representa una arista y está compuesto por los dos extremos de dicha arista. Entonces el grafo intersección resultante es el grafo de línea de  $G$  que se denota como  $L(G)$ . Se puede pensar que  $L$  es un operador de grafos que transforma un grafo en otro grafo.

También podemos considerar los cliques (cada uno de ellos induce un subgrafo completo maximal de  $G$ ) del grafo  $G$  como una familia de subconjuntos de vértices. El grafo intersección resultante se denomina grafo clique de  $G$  y se denota como  $K(G)$ . Similarmente  $K$  se puede definir como un operador de grafos.

Tanto  $L$  como  $K$  son operadores de grafos muy estudiados en la teoría de grafos. Nuestro principal objetivo en esta tesis es el estudio del operador  $K$ .

Los grafos clique han sido estudiados en un número importante de trabajos. Los primeros avances en este tópico fueron presentados en [50, 91]. En 1995, Prisner [81] publicó un libro sobre grafos dinámicos, enfocando el estudio de ciertos operadores de grafos, incluyendo el operador de grafo clique  $K$ .

Un concepto esencial en teoría de grafos clique es la propiedad de Helly. Una familia  $S$  de subconjuntos de un conjunto se dice que satisface la propie-

dad de Helly cuando cada subfamilia de  $S$  formada por subconjuntos que se intersecan de a pares tiene una intersección no vacía. Se dice que un grafo  $G$  es clique-Helly cuando la familia de subconjuntos de vértices que inducen los cliques de  $G$  satisface la propiedad de Helly. El grafo de la figura 1.1 se llama grafo de Hajós y es el menor grafo en número de vértices no clique-Helly.

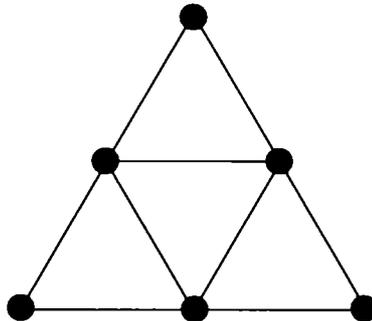


Figura 1.1: el grafo de Hajós.

Los grafos clique de los grafos clique-Helly ya han sido estudiados. Escalante [33] probó que el grafo clique de un grafo clique-Helly es nuevamente un grafo clique-Helly, y por otro lado, cada grafo clique-Helly es el grafo clique de algún grafo clique-Helly. Esta propiedad indica que la clase de grafos clique-Helly es fija bajo el operador de grafo clique  $K$ . En [33], además se mostró que si un grafo  $G$  es un grafo clique-Helly, entonces  $K(K(G))$  es un subgrafo inducido de  $G$ . Bandelt y Prisner [3] caracterizaron los grafos clique-Helly que convergen al grafo trivial después de un número finito de aplicaciones del operador de grafo clique  $K$ .

Szwarcfiter [98] describió una caracterización de los grafos clique-Helly, derivable a un algoritmo de reconocimiento de tiempo polinomial para esta clase.

Sea  $K^j(G)$  la  $j$ -ésima iteración de grafo clique de  $G$ , donde  $K^1(G) = K(G)$  y  $K^j(G) = K(K^{j-1}(G))$ ,  $j \geq 2$ . Un grafo  $G$  es un grafo  $t$ -self-clique ( $t \in \mathbb{N}$ ) si  $t$  es el menor entero positivo tal que  $K^t(G)$  es isomorfo a  $G$  (la notación es  $K^t(G) \cong G$ ). En [33], este entero  $t$  es llamado como el período de  $G$  bajo el operador de grafo clique  $K$ . Llamaremos grafos self-clique como abreviatura de grafos 1-self-clique.

Los grafos arco-circular son grafos intersección de arcos alrededor de un círculo. Fueron introducidos a mediados de la década del '60, siendo Alan Tucker [101, 102, 103, 104, 105, 106] quien aportó los primeros resultados teóricos.

Los grafos circular son grafos intersección de cuerdas en un círculo. Fueron presentados por Even e Itai [35] a comienzos de la década del '70.

Es objetivo principal de esta tesis estudiar los grafos clique. Existen varias líneas de investigación alrededor de los grafos clique:

1. Caracterizar los grafos que son grafo clique de algún grafo. En este punto, existe ya una caracterización para la clase general de grafos pero que no ayudó a encontrar un algoritmo polinomial para el reconocimiento [91]. Luego surgieron caracterizaciones para diversas clases de grafos, es decir que se han caracterizado los grafos que son grafos clique de algún grafo de la clase correspondiente. Algunas de estas caracterizaciones derivaron en algoritmos polinomiales para el reconocimiento. También se estudia el comportamiento del operador clique en clases generales de grafos de intersección y de 2-sección de familias de conjuntos. En estos trabajos se muestran resultados generales que engloban muchos de los obtenidos en clases particulares [41, 44]. La bibliografía para esta línea de investigación es [3, 12, 14, 15, 19, 24, 33, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 52, 53, 63, 83, 82, 84, 91, 99].
2. Convergencia y Periodicidad. Se estudia también si a un grafo se le aplica infinita veces el operador  $K$ . “¿Qué es lo que sucede?” “¿Converge a un grafo, converge a un ciclo de grafos o diverge?” También se puede restringir esta pregunta a una clase de grafos en particular. El estudio del comportamiento de diámetros de los grafos clique iterados también es un tema relacionado con este tópico. Las referencias para esta línea de investigación son [2, 3, 10, 11, 17, 27, 33, 53, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 75, 76, 77, 78, 79, 80].
3. Similar al punto 1, pero en este caso se busca caracterizar cuáles son los grafos que aplicando  $K$  resultan ser grafos que están en clases particulares de grafos. En [27, 34, 70, 85, 86, 87, 88] hay resultados de esta línea de investigación.
4. Estudiar operaciones en los grafos clique. Esto es analizar el efecto de las combinaciones de algunos operadores binarios de grafos con el operador de grafo clique, por ejemplo los operadores de unión, junta, producto cartesiano y producto punto. Se pueden encontrar algunos de estos resultados en [75].

Como algo complementario, estudiamos otros conceptos que surgen también de los cliques de un grafo tales como conjunto independiente de cliques y conjunto transversal de los cliques. Con ellos, se define una clase de grafos llamados clique-perfectos [40] de una manera similar a la definición de los grafos perfectos pero con otros parámetros.

En esta tesis, hemos obtenido varios resultados que consideramos interesantes. Aquí va un resumen de ellos.

1. Probamos una condición suficiente para que algunas potencias pares de un grafo sean grafos self-clique.
2. Encontramos una caracterización de los grafos self-clique para los grafos clique-Helly basada en algunas propiedades de la matriz clique.

3. Construimos una familia de grafos self-clique a través de los grafos bipartitos cuya matriz de adyacencia reducida es simétrica.
4. Probamos que los grafos self-clique de (1) y (3) poseen una matriz clique simétrica.
5. Construimos una familia de grafos 2-self-clique que generaliza la de Escalante.
6. Encontramos otra condición suficiente para que un grafo sea 2-self-clique.
7. Construimos un familia de grafos 2-self-clique que verifican (6) a partir de cualquier grafo clique-Helly con al menos una arista.
8. Encontramos una caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular Helly cuya formulación es similar a la de caracterización general de Roberts y Spencer [91].
9. Probamos que los grafos clique de los grafos arco-circular Helly están contenidos en la intersección de los grafos arco-circular Helly, los grafos arco-circular propios y los grafos arco-circular clique-Helly.
10. Probamos que la segunda iteración de grafos clique de un grafo arco-circular Helly  $G$  es, o bien un grafo completo, o bien un subgrafo inducido de  $G$ . Este resultado es similar al de Escalante para los grafos clique-Helly [33].
11. Probamos que los grafos clique de los grafos circular Helly son los grafos dualmente circular Helly y dado un grafo dualmente circular Helly  $H$ , siempre se puede encontrar un grafo circular Helly  $G$  tal que  $K(G) = H$ .
12. También probamos que los grafos clique de los grafos dualmente circular Helly son los grafos circular Helly y dado un grafo circular Helly  $H$ , siempre se puede encontrar un grafo dualmente circular Helly  $G$  tal que  $K(G) = H$ .
13. Mostramos que la clase de grafos circular Helly es distinta a la clase de grafos dualmente circular Helly.
14. Encontramos una familia de grafos altamente clique-imperfectos.

Los resultados descriptos anteriormente fueron presentados en los siguientes trabajos.

- [8] A Sufficient Condition for Self-Clique Graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, (2001). Co-autores: A. Bondy, G. A. Durán, y J. L. Szwarcfiter.

- [9] On self-clique graphs and 2-self-clique graphs, en preparación para ser enviado a Discrete Applied Mathematics. Co-autores: A. Bondy, G. A. Durán, y J. L. Szwarcfiter. Este trabajo contiene al resultado de [8].
- [30] Clique graphs of Helly circular-arc graphs, aceptado para su publicación en Ars Combinatoria, (1999). Co-autor: G. A. Durán.
- [69] Clique graphs of Helly circular graphs, en preparación. Co-autor: J. L. Szwarcfiter.
- [31] On clique-transversal and clique-independent sets, enviado para su publicación en Annals of Operations Research (2000). Co-autores: G. A. Durán, y J. L. Szwarcfiter.

Describimos a continuación la forma en que está organizado el presente trabajo.

En este capítulo, se presenta a continuación una lista de definiciones básicas y de la notación que se empleará a lo largo del trabajo, un resumen sobre clases de grafos, una breve introducción sobre complejidad de algoritmos y una tabla con las clases de grafos clique caracterizadas hasta el momento.

En el Capítulo 2, trataremos sobre los grafos  $t$ -self-clique que son clique-Helly.

El Capítulo 3 está destinado a estudiar la caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular Helly.

El Capítulo 4 está destinado a estudiar la caracterización de los grafos clique de los grafos circular Helly.

El Capítulo 5 está destinado a estudiar otros conceptos que están relacionados también con los cliques de un grafo.

En el Capítulo 6, presentamos algunas conclusiones que surgen de este trabajo y las líneas futuras de investigación en estos tópicos, destacando algunos problemas interesantes que permanecen abiertos.

### 1.1 Definiciones básicas y notación

Un grafo  $G$  es un par  $(V_G, E_G)$ , donde  $V_G$  representa un conjunto finito de vértices de  $G$  y  $E_G$ , un conjunto de pares no ordenados de vértices de  $G$ , llamadas aristas. Sean  $n = |V_G|$  y  $m = |E_G|$ .

Un vértice  $v$  es adyacente a otro vértice  $w$  en  $G$  si  $(v, w) \in E_G$ . Decimos que  $v$  y  $w$  son los extremos de la arista. El vecindario de un vértice  $v$  en un grafo  $G$  es el conjunto  $N_G(v)$  que consiste de todos los vértices adyacentes a  $v$  en  $G$ . El vecindario cerrado de  $v$  en  $G$  es  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ . Si el contexto no es ambiguo, se abrevian  $N_G(v)$  y  $N_G[v]$  como  $N(v)$  y  $N[v]$ .

Un vértice  $v$  es **universal** cuando  $N_G(v) = V_G - \{v\}$ .

Un vértice  $v$  es **aislado** cuando  $N_G(v) = \emptyset$ .

El **grado** de un vértice  $v$  en  $G$  es la cardinalidad del conjunto  $N_G(v)$  y se denota como  $d_G(v)$ . Similarmente, cuando no hay duda sobre el contexto se puede abreviar como  $d(v)$ . Denotamos  $\delta(G)$ , el mínimo grado entre los vértices de  $G$ , y  $\Delta(G)$ , el máximo grado entre los vértices de  $G$ .

El **complemento** de un grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , es el grafo que tiene el mismo conjunto de vértices de  $G$  y tal que dos vértices distintos son adyacentes en  $\overline{G}$  si y sólo si no son adyacentes en  $G$ . El complemento es un operador unario de grafos. Existen otros operadores binarios que vamos a detallar a continuación:

**Unión:**  $G_1 \cup G_2$  es el grafo tal que  $V_{G_1 \cup G_2} = V_{G_1} \cup V_{G_2}$  y  $E_{G_1 \cup G_2} = E_{G_1} \cup E_{G_2}$ .

**Junta:**  $G_1 + G_2$  es el grafo tal que  $V_{G_1 + G_2} = V_{G_1 \cup G_2}$  y  $E_{G_1 + G_2} = E_{G_1 \cup G_2} \cup [V_{G_1} \times V_{G_2}]$  donde  $V_{G_1} \times V_{G_2}$  representa el conjunto de pares no ordenados  $(v_1, v_2)$ , con  $v_1 \in V_{G_1}$  y  $v_2 \in V_{G_2}$ .

**Producto Cartesiano:**  $G_1 \times G_2$  es el grafo tal que  $V_{G_1 \times G_2} = V_{G_1} \times V_{G_2}$  y para  $v_1, w_1 \in V_{G_1}$  y  $v_2, w_2 \in V_{G_2}$ ,  $(v_1, v_2)$  y  $(w_1, w_2)$  son vértices adyacentes en  $G_1 \times G_2$  precisamente cuando  $(v_1, w_1) \in E_{G_1}$  y  $(v_2, w_2) \in E_{G_2}$ .

**Producto Punto:**  $G_1 \circ G_2$  es el grafo tal que  $V_{G_1 \circ G_2} = V_{G_1 \times G_2}$  y sus aristas se definen de la siguiente manera. Para  $v_1, w_1 \in V_{G_1}$  y  $v_2, w_2 \in V_{G_2}$ ,  $(v_1, v_2)$  y  $(w_1, w_2)$  son vértices adyacentes en  $G_1 \circ G_2$  si (i)  $v_1 = w_1$  y  $(v_2, w_2) \in E_{G_2}$ , o (ii)  $v_2 = w_2$  y  $(v_1, w_1) \in E_{G_1}$ , o (iii)  $(v_1, w_1) \in E_{G_1}$  y  $(v_2, w_2) \in E_{G_2}$ .

Un grafo  $H$  es un **subgrafo** de un grafo  $G$  si  $V_H \subseteq V_G$  y  $E_H \subseteq E_G$ . Si  $V_H = V_G$ , decimos que  $H$  es un **subgrafo generador** de  $G$ . Dado un conjunto de vértices  $X \subseteq V_G$ , el **subgrafo de  $G$  inducido** por  $X$  es el subgrafo  $H$  de  $G$  tal que  $V_H = X$  y  $E_H$  es el conjunto de aristas de  $G$  que tiene ambos extremos en  $X$ .

Dos grafos  $G$  y  $H$  son **isomorfos** si existe una biyección entre  $V_G$  y  $V_H$  que conserva las adyacencias. En este caso, notamos  $G \cong H$ .

Un **camino** en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices distintos  $P = v_1, v_2, \dots, v_k$ , donde  $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ . Una **cuerda** en  $P$  es una arista que une dos vértices no consecutivos de  $P$ . Un **camino inducido** es un camino sin cuerdas. Denotamos por  $P_k$  un camino inducido por  $k$  vértices. La **distancia** entre dos vértices  $v$  y  $w$  en  $G$  es la longitud del camino más corto entre estos dos vértices (se mide por la cantidad de aristas que componen los caminos) y se denota como  $d_G(v, w)$ . Si el contexto no es ambiguo, se abrevia como  $d(v, w)$ .

Un **circuito**  $C$  en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , no necesariamente distintos, donde  $v_1 = v_k$  y  $(v_i, v_{i+1}) \in E_G$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ .

Un **ciclo** en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices  $C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$ , donde  $v_1, \dots, v_k$  es un camino,  $v_1$  es adyacente a  $v_k$ ,  $v_1 = v_{k+1}$  y  $k \geq 3$ . Una

cuerda en  $C$  es cualquier cuerda del camino  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Un ciclo es un ciclo inducido si no posee cuerdas. Llamamos  $C_k$  al ciclo inducido por  $k$  vértices ( $C_3$  es también llamado triángulo).  $C_k$  es conocido como el **agujero** de  $k$  vértices. El **girth** de  $G$  es la longitud del ciclo más corto, si  $G$  posee algún ciclo. Lo denotamos  $g(G)$ .

Un conjunto  $S$  es **maximal (minimal)** en relación a una determinada propiedad  $P$  si  $S$  satisface  $P$ , y todo conjunto  $S'$  que contiene propiamente a  $S$  (que está contenido propiamente en  $S$ ) no satisface  $P$ .

Un **bloque** en un grafo es una componente biconexa maximal.

Un **disco** de tamaño  $k$  de un grafo  $G$  son los vértices que están a distancia  $\leq k$  de algún vértice fijo de  $G$ .

Un grafo  $G$  es **conexo** si para todo par de vértices distintos  $v$  y  $w$  de  $G$  existe un camino de  $v$  a  $w$ .

Un grafo  $G$  es **completo** si cualquier par de vértices distintos de  $G$  son adyacentes. Llamamos  $K_n$  al grafo completo con  $n$  vértices.

Un conjunto de vértices  $M$  de un grafo  $G$  es un **completo** si el subgrafo inducido por  $M$  es completo. Un **clique** es un completo maximal de  $G$ . El subgrafo inducido por un clique es un subgrafo completo maximal que muchas veces abusamos el término "**clique**" para llamarlo. Se denota la familia de los cliques de  $G$  como  $\mathcal{C}(G)$ . La cantidad de cliques de un grafo  $G$  puede no ser polinomial. Una arista es llamada **multiclicical** si como subconjunto de vértices está contenido en por lo menos dos cliques distintos. Un parámetro bastante estudiado en un grafo  $G$  es el tamaño de un clique máximo  $\omega(G)$ , definido como la cardinalidad de un clique máximo de  $G$ .

Un conjunto de vértices  $I$  de un grafo  $G$  es un **conjunto independiente** si el subgrafo inducido por  $I$  no tiene aristas. Otro parámetro muy estudiado de un grafo  $G$  es su **número de estabilidad**  $\alpha(G)$ , definido como la cardinalidad de un conjunto independiente máximo de  $G$ .

Un conjunto de vértices  $S$  de un grafo  $G$  es un **conjunto dominante** si todo vértice de  $G$  está en  $S$  o es adyacente a algún vértice de  $S$ .

Un **coloreo** de un grafo  $G$  es una partición de  $V_G$ , donde cada clase de la partición es un conjunto independiente al que identificamos con un color. Un  **$k$ -coloreo** es una partición de  $V_G$  en  $k$  conjuntos independientes. Si  $G$  admite un  $k$ -coloreo, decimos que  $G$  es  **$k$ -cromático**. El **número cromático** de  $G$  es el menor  $k$  para el cual existe un  $k$ -coloreo de  $G$ . Lo denotamos  $\chi(G)$ .

Dado un grafo  $G$  y  $M_1, M_2, \dots, M_q$  sus cliques. Definimos  $C_G(v) = \{\text{cliques } M_i \text{ de } G / v \in M_i\}$  el conjunto de cliques que contienen a  $v$ , para cada vértice  $v$  de  $G$ . La **matriz clique**  $A_G$  es la matriz de incidencia de los cliques y los vértices de  $G$ . Esto es, las filas y columnas corresponden a los cliques  $M_i$  y vértices  $v_j$  de  $G$ , tal que cada entrada  $(i, j)$  es 1 si  $v_j \in M_i$  y 0 en caso contrario.

Un grafo  $G$  es un **árbol** si  $G$  es conexo y no tiene ciclos.

Un grafo  $G$  es un **diamante** si es isomorfo a  $K_4 - \{e\}$ , para  $e$  cualquier arista de  $K_4$ .

Un **sol** es un grafo  $G$  cordal con  $2n$  vértices,  $n \geq 3$ , tal que  $V_G$  se puede

particionar en  $W = \{w_1, \dots, w_n\}$  y  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  donde  $W$  es un conjunto independiente y  $(w_j, u_i) \in E_G$  si y sólo si  $i = j$  o  $i \equiv j + 1 \pmod{n}$ . Un sol completo es un sol  $G$  en el cual  $U$  es completo. Un  $t$ -sol es un sol completo de  $2t$  vértices.

Dado un grafo  $G$ , definimos el **grafo de líneas**  $L(G)$ , como un nuevo grafo en el que los vértices son las aristas de  $G$ , y dos vértices en  $L(G)$  son adyacentes si y sólo si las correspondientes aristas en  $G$  tienen un vértice en común.

Decimos que  $D = (V_D, E_D)$  es un **digrafo**, o un **grafo dirigido**, si  $V_D$  es un conjunto de vértices y  $E_D$  es un conjunto de aristas direccionadas, esto significa que  $E_D$  está dado por un conjunto de pares ordenados de vértices, es decir,  $(v, w) \neq (w, v)$  y para no prestar a confusión, denotamos  $(v, w)$  y  $(w, v)$  como  $v \rightarrow w$  y  $w \rightarrow v$ , respectivamente.

Decimos que  $G$  es un **multigrafo** si se permite que entre un mismo par de vértices se trace más de una arista.

Un concepto muy usado a lo largo de este trabajo es el de la **propiedad de Helly**. Una familia de conjuntos  $S$  satisface la propiedad de Helly cuando toda subfamilia de  $S$  consistente en conjuntos que se intersecan de a pares tiene intersección no vacía.

Una propiedad en grafos es **hereditaria** cuando se verifica que si un grafo tiene la propiedad, cualquier subgrafo inducido de él también la tiene.

Definiciones no dadas aquí pueden encontrarse en [5, 39, 51].

## 1.2 Clases de grafos

Un grafo  $G$  es **bipartito** si su conjunto de vértices puede ser particionado en dos conjuntos disjuntos y no vacíos  $V_1$  y  $V_2$ , de modo de que no exista ninguna arista entre vértices de  $V_1$  ni entre vértices de  $V_2$ .

Un grafo **sin diamantes**  $G$  es un grafo que no tiene, como subgrafo inducido, a un diamante. También es equivalente decir que cada arista de  $G$  como subconjunto de vértices está contenido a exactamente un clique de  $G$ .

Un **cografo** es un grafo  $G$  que no tiene, como subgrafo inducido, a  $P_4$ .

Un grafo  $G$  es  $\mathcal{H}_1$  cuando para cada par de vértices  $v_1, v_2 \in V_G$ ,  $\exists C_1, C_2 \in \mathcal{C}(G)$  tal que  $v_1 \in C_1 \setminus C_2$  y  $v_2 \in C_2 \setminus C_1$ .

Un grafo  $G$  se llama **Ptolomaic** si para cada cuatro vértices,  $u, v, w, t \in V_G$ , satisface  $d_G(u, v) \cdot d_G(w, t) \leq d_G(u, w) \cdot d_G(v, t) + d_G(u, t) \cdot d_G(v, w)$ .

Un grafo **Desmontable** (*Dismantable*)  $G$  es o bien un grafo trivial con un único vértice o tiene un vértice dominado  $v$  (es decir  $\exists w/N_G[v] \subseteq N_G[w]$ ) tal que  $G \setminus \{v\}$  es Desmontable.

Un grafo se llama **disco Helly** si sus discos de distintos tamaños verifican la propiedad de Helly.

Un grafo es **clique-Helly** si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly.

Un grafo  $G$  es **Helly hereditario** cuando cada subgrafo inducido de  $G$  es clique-Helly.

Consideremos una familia finita de conjuntos no-vacíos. El **grafo intersección** de esta familia es obtenido representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan.

Es sencillo probar que todo grafo es un grafo intersección de alguna familia.

El grafo **overlap** de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, conectando dos vértices por una arista si y sólo si los correspondientes conjuntos se intersecan pero ninguno de los dos está incluido en el otro (diremos en este caso que los conjuntos se superponen). Es fácil también demostrar que todo grafo es un grafo **overlap** de alguna familia.

Un grafo **arco-circular** es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo.

Un **grafo circular** es el grafo intersección de un conjunto de cuerdas dentro de un círculo.

Un **grafo de intervalos** es el grafo intersección de intervalos de la recta real. Un **grafo de intervalos propios** es el grafo intersección de intervalos propios de la recta real. Un **grafo de intervalos propios minimales** es el grafo intersección de intervalos propios de la recta real, cuyo número de vértices  $= 2|C(G)| - |C(K(G))|$ .

Un **grafo de bloques** es el grafo intersección de los bloques de un grafo.

Un grafo **UV** es el grafo intersección de caminos de un árbol.

Un grafo **DV** es el grafo intersección de caminos de un árbol dirigido.

Un grafo **RDV** es el grafo intersección de caminos de un árbol dirigido con raíz.

Un grafo **DE** es el grafo arista-intersección de caminos de un árbol dirigido, donde se considera que dos caminos se intersecan cuando ellos comparten alguna arista.

Un grafo  $G$  es **cordal** (o triangulado) si  $G$  no contiene al ciclo inducido  $C_k$  como subgrafo inducido, para  $k \geq 4$ . También es el grafo intersección de subárboles de un árbol. Un grafo  $G$  es **Split** cuando  $G$  y  $\bar{G}$  son grafos cordales. Otra definición que se usa de grafos **Split** es que su conjunto de vértices puede particionarse en clique y un conjunto independiente. Un grafo  $G$  es **fuertemente cordal** si  $G$  es cordal y no contiene, como subgrafos inducidos, a los  $t$ -soles,  $t \geq 3$ .

El **grafo clique** de  $G$ ,  $K(G)$ , es el grafo intersección de los cliques de  $G$ . Dada una clase de grafos  $\mathcal{H}$ , definimos  $K(\mathcal{H})$  como la clase de los grafos clique de grafos en  $\mathcal{H}$ , y  $K^{-1}(\mathcal{H})$  como la clase de los grafos cuyos grafos clique están en  $\mathcal{H}$  (éstos últimos son llamados los grafos clique-inversos de  $\mathcal{H}$ ).

Un grafo  $G$  es **grafo línea** si existe un grafo  $H$  tal que  $L(H) = G$ , o sea,  $G$  es el grafo de líneas de  $H$ .

Un **grafo overlap de intervalos** (conocidos en la literatura como los grafos *overlap*) es el grafo *overlap* de intervalos de la recta real.

Un grafo  $G = (V_G, E_G)$  es de **comparabilidad** si es posible direccionar sus aristas de modo de que el grafo dirigido resultante  $G' = (V_G, D_G)$  satisfaga:  $u \rightarrow v \in D_G, v \rightarrow w \in D_G \Rightarrow u \rightarrow w \in D_G$

Sea  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$  una permutación de los números  $1, \dots, n$ . Definimos  $G[\pi]$  como el grafo de  $n$  vértices, en el que dos vértices son adyacentes si y sólo si el de índice mayor está a la izquierda del de índice menor en  $\pi$ . Diremos entonces que  $G$  es un **grafo de permutación** si existe una permutación  $\pi$  tal que  $G$  sea isomorfo a  $G[\pi]$ . Los grafos de permutación constituyen una subclase de los grafos de comparabilidad.

Un grafo  $G$  es **dualmente cordal** si admite un árbol generador  $T$ , tal que para cada subgrafo completo  $H$  de  $G$ , los vértices de  $V_H$  induce un subárbol conexo en  $T$ .

Un grafo  $G$  es **dualmente DV** si admite un árbol generador dirigido  $T$ , tal que para cada subgrafo completo  $H$  de  $G$ , los vértices de  $V_H$  induce un camino dirigido en  $T$ .

Un grafo  $G$  es **dualmente RDV** si admite un árbol generador dirigido  $T$  con raíz, tal que para cada subgrafo completo  $H$  de  $G$ , los vértices de  $V_H$  induce un camino dirigido en  $T$ .

La  $k$ -ésima potencia de un grafo  $G$  es el grafo  $G^k$  cuyos vértices son los mismos de  $G$ , y dos de ellos son adyacentes si y sólo si la distancia entre estos dos vértices en  $G$  es a lo sumo  $k$ .

Una completa recopilación sobre clases de grafos aparece en [15].

### 1.3 Complejidad algorítmica

Un problema algorítmico  $\pi(I, Q)$  consiste en un conjunto  $I$  de todas las posibles entradas para el problema, llamado el conjunto de instancias, y de una pregunta  $Q$  sobre esas instancias. Resolver uno de estos problemas consiste en desarrollar un algoritmo cuya entrada es una instancia del problema y cuya salida es una respuesta a la pregunta del problema.

Decimos que un problema es de decisión cuando las posibles respuestas a la pregunta son SI ó NO. Por ejemplo,  $\pi$  podría ser el siguiente problema: “dado un grafo  $G$ , ¿ es arco-circular ?”. El conjunto de instancias es el conjunto de todos los grafos y la pregunta es saber si el grafo dado es ó no arco-circular. El problema dado no sólo es de decisión sino que en particular es un problema de reconocimiento. Es de sumo interés tanto desde el punto de vista teórico como de las aplicaciones estudiar problemas de reconocimiento para las diferentes clases de grafos.

Un problema es de optimización cuando lo que se busca a través de la pregunta es la solución óptima para el problema formulado. Por ejemplo, “dado un grafo  $G$ , ¿ cuánto vale  $\chi(G)$  ?”

Usualmente, los problemas de optimización tienen su variante de decisión. En el caso del coloreo será: “dado un grafo  $G$  y un entero  $k$  positivo, ¿ existe un coloreo de  $G$  con menos que  $k$  colores ?”

Diremos que un algoritmo es polinomial cuando el número de operaciones que efectúa está acotado por una función polinomial en el tamaño de su entrada. Si el tamaño de la entrada es  $n$  y la función polinomial es  $f(n)$ , decimos que el algoritmo tiene complejidad  $O(f(n))$ . Los problemas de decisión para los que existen algoritmos polinomiales constituyen la clase  $P$  y son llamados polinomiales.

Un problema de decisión es no-determinístico polinomial cuando cualquier instancia que produce respuesta SI posee una comprobación de correctitud (también llamada certificado) verificable en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia. Estos problemas de decisión pertenecen a la clase  $NP$ .

Claramente,  $P \subseteq NP$ . Sin embargo, no se sabe si esta inclusión es estricta: uno de los principales problemas abiertos en informática teórica es saber si  $P \neq NP$ .

Un problema de decisión pertenece a la clase Co- $NP$  cuando cualquier instancia que produce respuesta NO posee un certificado polinomial en el tamaño de la instancia.

Sean  $\pi_1(I_1, Q_1)$  y  $\pi_2(I_2, Q_2)$  dos problemas de decisión. Una transformación polinomial de  $\pi_1$  en  $\pi_2$  es una función  $f : I_1 \rightarrow I_2$  tal que se satisfacen las siguientes dos condiciones:

1.  $f$  puede computarse en tiempo polinomial.
2. Para toda instancia  $D \in I_1$ ,  $D$  produce respuesta SI para  $\pi_1$  si y sólo si  $f(D)$  produce respuesta SI para  $\pi_2$ .

Una definición esencial en la teoría de complejidad es la definición de problema NP-completo. Un problema de decisión  $\pi$  pertenece a la clase NP-completo cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in NP$ .
- Para todo problema  $\pi' \in NP$ , existe una transformación polinomial de  $\pi'$  en  $\pi$ .

Un problema de decisión  $\pi$  pertenece a la clase NP-hard cuando se satisface la siguiente condición:

- Para todo problema  $\pi' \in NP$ , existe una transformación polinomial de  $\pi'$  en  $\pi$ .

La teoría de NP-completitud fue iniciada por Cook en 1971 [22]. Allí probó que el problema de satisfactibilidad de la lógica matemática es NP-completo, en un resultado que se conoce como el Teorema de Cook. Primero Karp [59], y tiempo después Garey y Johnson [37], presentaron largas listas de problemas NP-completos en el campo de la combinatoria, la lógica, la teoría de conjuntos, la teoría de grafos y otras áreas de la matemática discreta.

La técnica standard para probar que un problema  $\pi$  es NP-completo es la siguiente: elegir en forma apropiada un problema  $\pi'$  que ya sabemos que es NP-completo y luego probar que  $\pi \in NP$  y que  $\pi'$  es transformable polinomialmente en  $\pi$ . Si sólo probáramos esta segunda parte, habremos probado que el problema  $\pi$  es NP-hard.

No se conoce ningún algoritmo polinomial para resolver un problema NP-completo. Surge de la definición de NP-completitud que si se encontrara un algoritmo polinomial para un problema en esta clase, todo problema en  $NP$  sería polinomial (y estaría probado, en consecuencia, que  $P = NP$ ).

Como fuente de referencia en complejidad de algoritmos sugerimos consultar [37].

## 1.4 Clases de grafos clique caracterizadas

CLASE $\mathcal{A}$	$K(\mathcal{A})$	Ref.
<i>Bloques</i>	<i>Bloques</i>	[52]
<i>Clique-Helly</i>	<i>Clique-Helly</i>	[33]
<i>Cordal</i>	<i>Dualmente Cordal</i>	[14, 43, 99]
<i>Clockwork</i>	<i>Clockwork</i>	[63]
<i>DE</i>	<i>Dualmente DE</i>	[45]
<i>Disco Helly</i>	<i>Disco Helly</i>	[3]
<i>Desmontable</i>	<i>Desmontable</i>	[3]
<i>Dualmente Cordal</i>	<i>Cordal <math>\cap</math> Clique-Helly</i>	[14, 43]
<i>Dualmente DE</i>	<i>DE</i>	[45]
<i>Dualmente DV</i>	<i>DV</i>	[48, 84]
<i>Dualmente RDV</i>	<i>RDV</i>	[10, 84]
<i>DV</i>	<i>Dualmente DV</i>	[48, 84]
$\mathcal{H}_1$	$\mathcal{H}_1$	[24]
<i>Helly Hereditario</i>	<i>Helly Hereditario</i>	[83]
<i>Intervalos</i>	<i>Intervalos Propios</i>	[53]
<i>Intervalos Propios Minimales</i>	<i>Intervalos Propios</i>	[47]
<i>Intervalos Propios</i>	<i>Intervalos Propios</i>	[53]
<i>Ptolomaic</i>	<i>Ptolomaic</i>	[3]
<i>RDV</i>	<i>Dualmente RDV</i>	[10, 84]
<i>Sin Diamantes</i>	<i>Sin Diamantes</i>	[19]
<i>Split</i>	<i>Estrella</i>	
<i>Fuertemente Cordal</i>	<i>Fuertemente Cordal</i>	[3, 14]
<i>Arbol</i>	<i>Bloques</i>	[52]
<i>UV</i>	<i>Dualmente UV</i>	[99]

La tabla anterior contiene las clases de grafos clique caracterizada hasta el momento, en los capítulos 3 y 4 presentaremos las caracterizaciones de los grafos clique para los grafos arco-circular Helly y los grafos circular Helly respectivamente.

# Capítulo 2

## Grafos $t$ -self-clique

Los grafos self-clique han sido estudiados previamente en [2] donde una familia de grafos con esta propiedad ha sido descrita. En [33], Escalante probó que para los grafos clique-Helly no existen grafos  $t$ -self-clique con  $t \geq 3$  y mostró una caracterización de los grafos clique-Helly que son grafos self-clique o 2-self-clique. También probó que existe un grafo  $G$  con período  $t$  para cualquier entero positivo finito  $t$ . En [34], Escalante y Toft presentaron algunos resultados relacionados a los grafos self-clique y probaron una condición necesaria (pero no suficiente) para que un grafo clique-Helly  $G$  sea isomorfo a  $K^t(G)$ .

En las secciones 1 y 2 describiremos nuevas familias de grafos self-clique y grafos 2-self-clique, respectivamente. En la sección 1, además presentamos una caracterización de los grafos self-clique que son clique-Helly por medio de sus matrices clique.

Los resultados de este capítulo fueron presentados en [8, 9].

### 2.1 Grafos self-clique

Una cuestión central relacionada con los grafos self-clique es la caracterización y reconocimiento de esta clase. No se conoce hasta el momento una caracterización general de los grafos self-clique. El problema de reconocimiento de los grafos self-clique pertenece a NP, pues dado un grafo  $G$  se puede determinar en tiempo polinomial si  $G$  tiene exactamente  $n$  cliques [100] y ante una respuesta SI (una biyección entre vértices y cliques de  $G$ ), se puede verificar en tiempo polinomial su correctitud. Desconocemos si este problema es NP-Completo.

El problema de decidir si un grafo  $G$  dado es un grafo self-clique puede ser fácilmente reducido en tiempo polinomial al problema de isomorfismo entre grafos. La reducción es la siguiente: se puede verificar si  $G$  tiene exactamente  $n$  cliques y además los genera en tiempo polinomial [100]. Una vez obtenidos los cliques, se puede generar  $K(G)$  en tiempo  $O(n^2)$ . Ahora solamente hay que determinar si  $G \cong K(G)$ . Para el caso general, esta

reducción no permite contestar de una manera eficiente si un grafo  $G$  es un grafo self-clique, porque el problema de isomorfismo entre grafos para grafos en general es un importante problema abierto. En cambio, se puede encontrar algoritmos de tiempo polinomial para decidir si un grafo  $G$  es un grafo self-clique, en el caso en que  $G$  pertenezca a una clase de grafos donde los problemas de determinar la pertenencia en esta clase dada y el isomorfismo entre dos grafos miembros de esta clase han sido resueltos eficientemente. Los grafos planares [37]; los grafos de permutación [39, 20]; los cografos [23] y los grafos arco-circular [57, 106] son ejemplos de las clases que verifican ambas propiedades. Cabe destacar que la resolución del problema de reconocimiento de los grafos self-clique puede no depender de la resolución del problema de isomorfismo.

Balakrishnan y Paulraja describieron en [2] una familia de grafos self-clique. Un miembro de esta familia es el grafo mostrado en la figura 2.1.

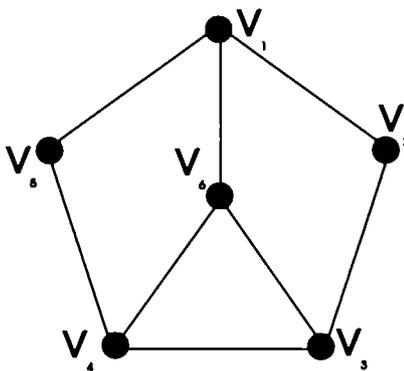


Figura 2.1

Escalante [33] probó que un grafo clique-Helly  $G$  es self-clique o 2-self-clique si y sólo si no existen dos vértices distintos  $v, w \in V_G$ , tal que  $N_G[w] \subseteq N_G[v]$ . Como un caso especial, en [33] se concluye que si  $G$  es sin triángulos y  $\delta(G) \geq 2$  entonces  $G$  es self-clique o 2-self-clique. Adicionalmente, probó que bajo las condiciones anteriores,  $G$  es self-clique si y sólo si  $G$  es un circuito simple. Este resultado ha sido extendido por Chia [18], caracterizando los grafos self-clique donde todos los cliques tienen tamaño 2 salvo exactamente uno. El problema de caracterizar los grafos self-clique sigue abierto, aunque en esta tesis se resuelve este problema restringiendo a los grafos clique-Helly. Finalmente, los grafos self-clique también han sido estudiado por Escalante y Toft [34].

A continuación, enunciamos el teorema de caracterización de los grafos clique-Helly que son self-clique o 2-self-clique de Escalante. Esta caracterización permite desarrollar un algoritmo de tiempo polinomial para el reconocimiento de estos grafos.

**Teorema 2.1 ([33]).** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo clique-Helly  $G$ :*

1.  $G$  es un grafo self-clique o 2-self-clique.

2.  $\nexists v, w \in V_G, v \neq w$  tal que  $N_G[v] \subseteq N_G[w]$ .
3.  $\nexists v, w \in V_G, v \neq w$  tal que  $C_G(v) \subseteq C_G(w)$ .

Nosotros proponemos aquí, una familia de grafos self-clique a partir de la siguiente condición suficiente: si  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) \geq 6k + 1$  entonces  $G^{2k}$  es un grafo self-clique,  $k \geq 1$ . La siguiente notación es utilizada. Sea  $G$  un grafo y  $v, w \in V_G$ . Se denota  $P_{v,w}$  un camino entre  $v$  y  $w$ . Además se denota  $P_{v,w}^e$  las aristas de  $P_{v,w}$ . Sea  $T(v)$  un árbol generador de caminos mínimos de  $G$ . Esto es, un árbol con raíz  $v$  que contiene exactamente los vértices de  $G$  de manera tal que el camino en  $T(v)$  entre  $v$  y cualquier vértice  $w$  es un camino mínimo  $P_{v,w}$  en  $G$ . El nivel de un vértice  $w$  en  $T(v)$  es la longitud del camino  $P_{v,w}$  en  $T(v)$ . Este árbol  $T(v)$  se obtiene aplicando el algoritmo BFS a partir del vértice  $v$ . Denotamos  $T_k(v)$  el árbol con raíz distinguido obtenido de  $T(v)$ , borrando los vértices que están en nivel  $> k$ . Denotamos  $D_k(v)$  el subconjunto de vértices de  $G$ , con distancia a  $v \leq k$ . Claramente  $D_k(v) = V_{T_k(v)}$ . En general, se dice que un árbol con raíz distinguido es uniforme (con respecto a sus hojas) cuando todas sus hojas son del mismo nivel.

**Teorema 2.2.** *Sea  $G$  un grafo, donde  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) \geq 6k + 1$ ,  $k \geq 1$ . Entonces  $G^{2k}$  es un grafo self-clique.*

*Demostración:*

Sea  $G$  un grafo que satisface la hipótesis para algún  $k \geq 1$ . La primera parte de la prueba consiste en mostrar que cada miembro de  $\mathcal{C}(G^{2k})$  es integrante de la familia  $\mathcal{D}_k = (D_k(v))_{v \in V_G}$  (son discos de tamaño  $k$ ) y viceversa. Con este propósito, examinamos  $D_j(v) \subseteq V_G$ , para un entero  $j$ . Se denotan  $G_j(v)$  y  $G_j^{2k}(v)$ , los subgrafos inducidos por  $D_j(v)$  en  $G$  y  $G^{2k}$ , respectivamente. A continuación, describimos a  $G_j(v)$  y  $G_j^{2k}(v)$ .

Claramente,  $T_j(v)$  es un árbol generador de  $G_j(v)$ , porque todos los vértices de  $T_j(v)$  están a distancia a lo sumo  $j$  de  $v$ . Estudiamos la posibilidad de que exista una arista  $e = (u, w) \in E_{G_j(v)} \setminus E_{T_j(v)}$ . Sabemos que  $u$  y  $w$  deben estar en el mismo nivel o en niveles consecutivos de  $T_j(v)$ , porque  $T_j(v)$  es un árbol de camino mínimo. Sea  $l$  el mayor de los niveles de  $u$  y  $w$ . Agregando  $e$  a  $T_j(v)$  se formaría un ciclo de longitud  $\leq 2l + 1$ . Como  $g(G) \geq 6k + 1$ , podemos concluir que  $l \geq 3k$ . Consecuentemente, esta arista  $e$  no puede existir en niveles  $< 3k$ . Entonces  $G_j(v)$  es un árbol y es isomorfo a  $T_j(v)$  con  $j < 3k$ . En adición,  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) \geq 6k + 1$  implica que  $T_j(v)$ , y consecuentemente  $G_j(v)$ , son árboles uniformes, para  $j < 3k$ . También podemos afirmar que  $T_{3k}(v)$  es un árbol uniforme.

A continuación, examinamos  $G_j^{2k}(v)$ . Claramente,  $G_j^{2k}(v)$  es un grafo completo para  $j \leq k$ , ya que la distancia en  $G$  entre dos vértices de  $D_j(v)$  es

$\leq 2j$ . Consecuentemente,  $D_k(v)$  (integrante de  $\mathcal{D}_k$ ) es un completo de  $G^{2k}$ . Más aún, probaremos que  $D_k(v)$  es un clique de  $G^{2k}$ . Supongamos que no lo es. Entonces existe otro vértice  $w \in V_G \setminus D_k(v)$ , tal que  $w$  es adyacente en  $G^{2k}$  a todos los vértices de  $D_k(v)$ . Sea  $l$  el nivel de  $w$  en  $T(v)$ . Claramente,  $l \leq 2k$ , de otra manera  $v$  y  $w$  no serían adyacentes en  $G^{2k}$ . Además,  $l > k$ , sino  $w \in D_k(v)$ . Se puede elegir un vértice  $u \in V_G$  en el nivel  $k$  de  $T(v)$  y que no pertenezca a la componente conexa de  $w$  en  $T(v) \setminus \{v\}$ . Sabemos que esta elección es posible porque  $T_k(v) \cong G_k(v)$  es un árbol uniforme y  $\delta(G) \geq 2$ . Claramente,  $u \in D_k(v)$ , implicando que  $(u, w) \in E_{G^{2k}}$ . Consideremos ahora un camino mínimo  $P_{u,w}$  en  $G$ . Si  $P_{u,w}$  contiene a  $v$  entonces  $P_{u,w} = P_{u,v} \cup P_{v,w}$ . En este caso, la longitud de  $P_{u,w}$  es  $l + k > 2k$ , lo cual contradice  $(u, w) \in E_{G^{2k}}$ . Si  $P_{u,w}$  no contiene a  $v$ , y sabiendo que  $u$  y  $w$  están en componentes distintas en  $T(v) \setminus \{v\}$ . Entonces en  $P_{u,w}$ , existe al menos una arista  $e = (a, b) \in E_G \setminus E_{T(v)}$  que conecta distintos componentes de  $T(v) \setminus \{v\}$ . Esta arista  $e$  tiene extremos  $a$  y  $b$  que son vértices que están en niveles  $\geq 3k$  de  $T(v)$ . Sin pérdida de generalidad, podemos decir que  $a$  está más cerca de  $u$  que  $b$  de  $u$  en  $P_{u,w}$ . Entonces  $P_{u,w} = P_{u,a} \cup \{(a, b)\} \cup P_{b,w}$ . Como  $u$  está en el nivel  $k$  de  $T(v)$  y  $a$  en el nivel  $\geq 3k$ , esto significa que  $P_{u,a}$  tiene longitud  $\geq 2k$ . Y por el mismo razonamiento, podemos afirmar que  $P_{b,w}$  tiene longitud  $\geq 3k - l \geq 3k - 2k = k$ . Concluimos que  $P_{u,w}$  tiene longitud  $\geq 3k + 1 > 2k$ , contradiciendo nuevamente  $(u, w) \in E_{G^{2k}}$ . Como consecuencia, no existe tal  $w$ , lo cual asegura que  $D_k(v)$  es un clique de  $G^{2k}$  y por lo tanto un miembro de  $\mathcal{C}(G^{2k})$ .

En este párrafo, probaremos que un miembro de  $\mathcal{C}(G^{2k})$  es un integrante de  $\mathcal{D}_k$ . Sea  $M$  un clique de  $G^{2k}$  (un miembro de  $\mathcal{C}(G^{2k})$ ). Sabemos que para cada par  $v, w \in M$ , existe un camino  $P_{v,w}$  de longitud  $\leq 2k$  en  $G$ . Denotamos como  $M^*$ , el conjunto de vértices contenidos en todos los caminos  $P_{v,w}$  para todo  $v, w \in M$ . Claramente,  $M^* \supseteq M$  y probamos que  $M^* \subseteq M$ . Sean  $v, w \in M$  y  $u \in P_{v,w}$ . Tenemos que mostrar que  $u \in M$ . Se elige cualquier vértice  $z \in M$  y se considera  $P_{v,z}$ . Como  $P_{v,w}$  y  $P_{v,z}$  son ambos de longitud  $\leq 2k$  y  $g(G) \geq 6k + 1$ , sabemos que el subgrafo inducido en  $G$  por  $P_{v,w} \cup P_{v,z}$  es un árbol. Además la diferencia simétrica  $P_{v,w}^e \oplus P_{v,z}^e$  define un camino entre  $z$  y  $w$  en  $G$ . Si  $u \in P_{v,z}$  entonces  $G$  contiene un camino entre  $u$  y  $z$  de longitud  $\leq 2k$ , significa que  $(u, z) \in E_{G^{2k}}$  o  $u = z$ . Si  $u \notin P_{v,z}$ . Entonces  $u \in P_{v,w} \oplus P_{v,z}$ . Mostramos que  $P_{v,w} \oplus P_{v,z}$  tiene longitud  $\leq 2k$ . Para empezar, sabemos que  $P_{v,w} \oplus P_{v,z}$  tiene longitud  $\leq 4k$ . Como  $w, z \in M$ , existe un camino  $P_{w,z}$  de longitud  $\leq 2k$ . Si  $P_{v,w} \oplus P_{v,z} \neq P_{w,z}$ , entonces  $(P_{v,w} \oplus P_{v,z}) \cup P_{w,z}$  define un ciclo de longitud  $\leq 6k$ , contradiciendo la condición sobre el *girth* de  $G$ . Consecuentemente,  $P_{v,w} \oplus P_{v,z} = P_{w,z}$ . Esto significa que  $P_{u,z} \subseteq P_{w,z}$ , implicando que  $(u, z) \in E_{G^{2k}}$  o  $u = z$  nuevamente. Como  $z$  fue elegido en forma arbitraria, esto significa que  $u$  es adyacente a todos los vértices de  $M$  o es uno de ellos. Como  $M$  es un clique de  $G$ , la primera opción es descartada. Por lo tanto  $u \in M$  y  $M^* = M$ . Ahora estamos listos para examinar el subgrafo  $G'$ , inducido en  $G$  por  $M$ . Como

$M^* = M$ , entonces  $G'$  contiene un camino  $P_{v,w}$  de longitud  $\leq 2k$ , para cada par  $v, w \in M$ . Esto significa que el diámetro de  $G'$  es  $\leq 2k$ . Sabemos que cualquier grafo  $H$  que tiene algún ciclo verifica  $g(H) \leq 2diam(H) + 1$  [26]. Esto aplicado a  $G'$ , si  $G'$  tiene un ciclo, entonces  $g(G') \leq 4k + 1$ , una contradicción. Consecuentemente  $G'$  es una foresta. Más aún, como para cada par de vértices de  $G'$  existe un camino que los conecta. Resulta que  $G'$  es un árbol. Sea  $v$  un centro de  $G'$ , como este árbol tiene diámetro  $\leq 2k$ , entonces su radio es  $\leq k$ . Por lo cual  $G'$  contiene un camino  $P_{v,w}$  de longitud  $\leq k$ , para cada  $w \in M$ . Consecuentemente,  $M \subseteq D_k(v)$ . En el párrafo anterior, probamos que  $D_k(v)$  es un clique de  $G^{2k}$  y como  $M$  también lo es por definición, entonces  $M = D_k(v)$  que es un integrante de  $\mathcal{D}_k$ .

La conclusión es que los miembros de  $\mathcal{C}(G^{2k})$  son los de  $\mathcal{D}_k$  y viceversa. Más aún, cada miembro de  $\mathcal{D}_k$  es distinto. Es decir si tomamos  $v, w \in V_G$  y  $v \neq w$  hay que probar que  $D_k(v) \neq D_k(w)$ . Si  $w \notin D_k(v)$  entonces  $D_k(v) \neq D_k(w)$ , trivialmente. Supongamos que  $w \in D_k(v)$  y elegimos un vértice  $u$ , ubicado en el nivel  $k + 1$  en  $T(v)$  y tal que el camino  $P_{v,u}$  en  $T(v)$  contenga a  $w$ . Esta elección es posible porque  $T_{k+1}(v)$  es un árbol uniforme y  $\delta(G) \geq 2$ . Entonces  $u \notin D_k(v)$ . Sin embargo,  $u \in D_k(w)$ , porque la distancia entre  $w$  y  $u$  en  $P_{v,u}$  es  $\leq k$ . Como consecuencia,  $D_k(v) \neq D_k(w)$ .

La última etapa de la prueba es verificar que  $G^{2k} \cong K(G^{2k})$ . Se define la biyección asignando cada vértice  $v \in V_{G^{2k}}$  al clique  $D_k(v)$  de  $G^{2k}$ . Supongamos que  $(v, w) \in E_{G^{2k}}$ . Sea  $P_{v,w}$  un camino mínimo en  $G$  y  $u$  un centro de  $P_{v,w}$ . Entonces  $v$  y  $w$  están a distancia  $\leq k$  de  $u$  en  $G$ . Lo cual implica que  $u \in D_k(v) \cap D_k(w)$ , y significa que  $D_k(v)$  y  $D_k(w)$  corresponden a vértices adyacentes en  $K(G^{2k})$ . Para el otro sentido, cuando  $(v, w) \notin E_{G^{2k}}$  entonces  $v$  y  $w$  están a distancia  $> 2k$  en  $G$ . Como consecuencia,  $G$  no puede tener un vértice a distancia  $\leq k$  de ambos vértices  $v$  y  $w$ . Por lo tanto,  $D_k(v) \cap D_k(w) = \emptyset$ , implicando que  $D_k(v)$  y  $D_k(w)$  no son adyacentes en  $K(G^{2k})$ .  $\square$

Cabe destacar que el resultado del Teorema 2.2 es lo mejor posible en el sentido que si  $G$  tiene  $\delta(G) < 2$  o  $g(G) < 6k + 1$ , entonces  $G^{2k}$  no es necesariamente un grafo self-clique. Un grafo  $G$  formado por  $C_7$  y otro vértice adicional que es adyacente a exactamente a un vértice de  $C_7$  es un ejemplo donde la condición de grado del teorema no se verifica y se cumple la condición de *girth* con  $k = 1$  (figura 2.2). Sin embargo,  $G^2$  no es self-clique porque  $G^2$  no se verifica la condición de vecindario cerrado del Teorema 2.1 ( $N_{G^2}[v] \subset N_{G^2}[w]$ ). Por otro lado,  $C_6$  es un grafo donde la condición de grado se verifica, la condición de *girth* no se cumple para ningún  $k$  y  $C_6^2$  no es self-clique (figura 2.3) porque  $C_6^2$  tiene 6 vértices y 8 cliques.

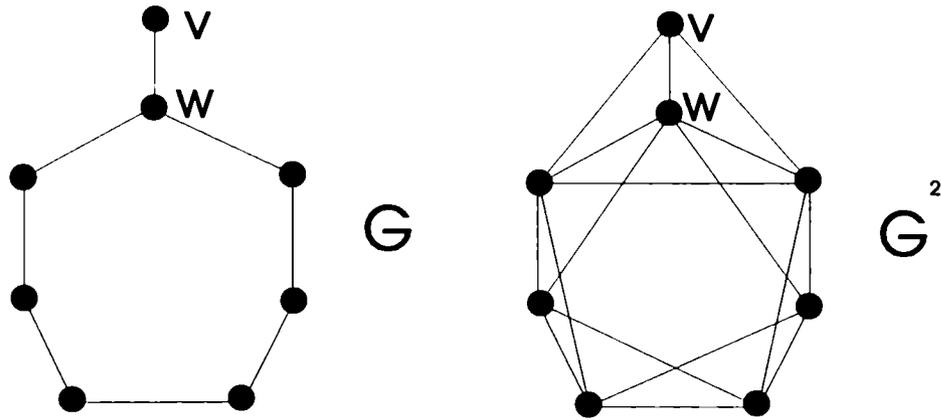


Figura 2.2

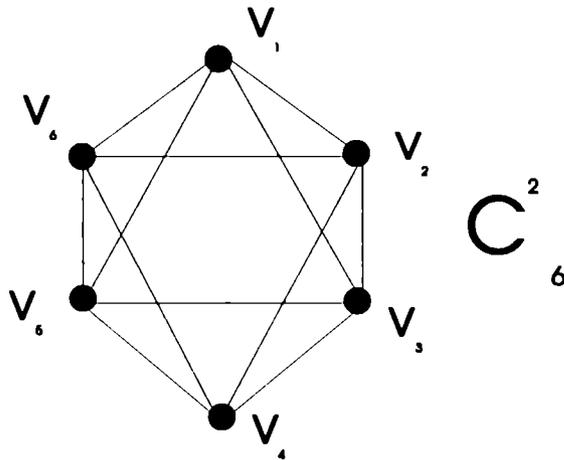


Figura 2.3:  $C_6^2$

También se puede apreciar que  $G^{2k+1}$  no es necesariamente un grafo self-clique. Sin embargo, lo es para un caso especial donde  $G$  es un ciclo de longitud  $\geq 6k + 4$ . Podemos observar el siguiente ejemplo de un miembro de la familia que verifica las condiciones del Teorema 2.2. Con  $G = C_7$  (un ciclo de longitud 7) y  $k = 1$ , entonces  $G^2$  (figura 2.4) es un grafo self-clique.

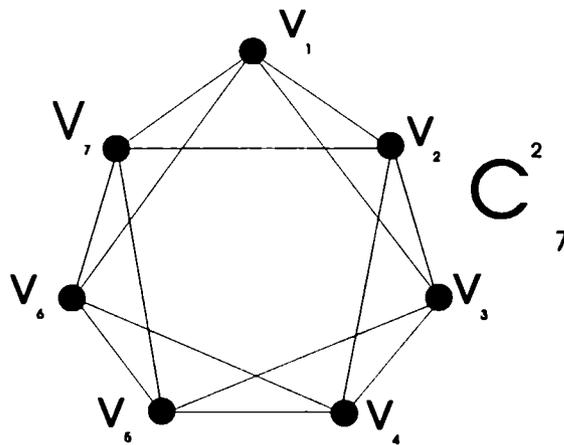


Figura 2.4:  $G^2 = C_7^2$

Es importante resaltar que la recíproca del Teorema 2.2 no es cierta, el grafo de la figura 2.1 sirve como contraejemplo.

Antes de presentar la caracterización de los grafos self-clique de los grafos clique-Helly, introduciremos una definición de matriz quasi-simétrica.

**Definición 2.1.** Una matriz  $M \in \{0, 1\}^{n \times n}$  es llamada una matriz quasi-simétrica si el conjunto de vectores de las columnas es igual al conjunto de vectores de las filas.

A continuación presentamos el teorema de caracterización de los grafos self-clique para los grafos clique-Helly.

**Teorema 2.3.** Un grafo  $G$  es un grafo self-clique y clique-Helly si y sólo si  $G$  tiene una matriz clique  $A_G$  quasi-simétrica.

*Demostración:*

$\implies$ ) Sea  $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Por hipótesis,  $G$  es un grafo self-clique, entonces existe una función biyectiva  $f : V_G \rightarrow \mathcal{C}(G)$  tal que  $(v_i, v_j) \in E_G \Leftrightarrow f(v_i) \cap f(v_j) \neq \emptyset$ . Sean  $C_1 = f(v_1), C_2 = f(v_2), \dots, C_n = f(v_n)$ , construimos una matriz clique  $A_G$  de acuerdo a este orden de vértices y cliques.

Tomamos una columna  $t$  de  $A_G$ , sean  $i_1, i_2, \dots, i_k$  las posiciones de esta columna que son 1's y el resto son 0's. Lo cual quiere decir que  $C_G(v_t) = \{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}\}$  es un subgrafo completo en  $K(G)$  y además es maximal (clique). Si  $C_G(v_t)$  no es maximal, entonces por ser  $G$  un grafo clique-Helly, existe otro vértice  $v_s$  tal que  $C_G(v_t) \subset C_G(v_s)$ , ahora por el Teorema 2.1, concluimos que  $G$  no es self-clique, lo cual es una contradicción.

Por la función de isomorfismo  $f$ ,  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  es un clique en  $G$ , esto significa que existe clique  $C_s$  tal que  $C_s = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ , es decir las posiciones  $i_1, i_2, \dots, i_k$  de la fila  $s$  de  $A_G$  son 1's y el resto son 0's. Como todas las columnas de  $A_G$  son distintas porque  $C_G(v_i) \neq C_G(v_j)$  si  $i \neq j$  ( $G$  es clique-Helly y self-clique, nuevamente por el Teorema 2.1) y la matriz  $A_G$  es cuadrada, el conjunto de vectores de las filas de  $A_G$  es igual al de columnas de  $A_G$ .

$\impliedby$ ) Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  los vértices de  $G$  que corresponden al orden de las columnas de  $A_G$  y  $C_1, C_2, \dots, C_n$  los cliques de  $G$  que corresponden al orden de las filas de  $A_G$ . Definimos una función biyectiva  $f : \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  con  $f(v_i) = C_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Primero vamos a probar que  $(v_i, v_j) \in E_G \Leftrightarrow C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . Sea  $(v_i, v_j) \in E_G$ , entonces existe un clique  $C_t$  tal que  $v_i, v_j \in C_t$ , esto significa que  $a_{t,i} = a_{t,j} = 1$  en  $A_G$ . Por ser  $A_G$  una matriz quasi-simétrica, existe una columna  $s$  tal que  $a_{i,s} = a_{j,s} = 1$ , lo cual quiere decir que existe un vértice  $v_s$  tal

que  $v_s \in C_i \cap C_j$ , entonces  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ . Si  $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ , existe un vértice  $v_s \in C_i \cap C_j$ , significa que  $a_{i,s} = a_{j,s} = 1$  en  $A_G$ . Por ser una matriz  $A_G$  quasi-simétrica, existe una fila  $t$  tal que  $a_{t,i} = a_{t,j} = 1$  y quiere decir que existe un clique  $C_t$  tal que  $v_i, v_j \in C_t$ . Entonces  $(v_i, v_j) \in E_G$ .

A continuación probamos que  $G$  es clique-Helly. Sea  $\{C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}\}$  un conjunto de cliques de  $G$  que se intersecan de a pares. Por la función de isomorfismo  $f$ ,  $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$  es un subgrafo completo de  $G$  y existe un clique  $C_t$  que lo contiene o sea que  $a_{t,i_1} = a_{t,i_2} = \dots = a_{t,i_k} = 1$  en  $A_G$ . Ahora por ser  $A_G$  una matriz quasi-simétrica, existe una columna  $s$  tal que  $a_{i_1,s} = a_{i_2,s} = \dots = a_{i_k,s} = 1$ , lo cual quiere decir que  $v_s \in C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k}$ , entonces  $C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k} \neq \emptyset$ .  $\square$

En principio, creemos que no es fácil aprovechar esta caracterización para implementar un algoritmo polinomial de reconocimiento para los grafos self-clique de los grafos clique-Helly.

El siguiente corolario se desprende del Teorema anterior y el hecho de que una matriz simétrica es una matriz quasi-simétrica.

**Corolario 2.1.** *Si  $G$  tiene una matriz clique  $A_G$  simétrica, entonces  $G$  es un grafo self-clique y clique-Helly.*

Conjeturamos que la recíproca del Corolario 2.1 también es cierta. Esto quiere decir que al Teorema 2.3 le podemos reemplazar “matriz clique quasi-simétrica” por “matriz clique simétrica” en el caso que la conjetura sea verdadera.

**Conjetura 2.1.** *Si  $G$  es un grafo self-clique y clique-Helly, entonces  $G$  tiene una matriz clique  $A_G$  simétrica.*

Otra formulación equivalente de la Conjetura 2.1 es “*toda matriz binaria quasi-simétrica, matriz clique de algún grafo, es simetrizable mediante permutaciones de filas y/o columnas*”. Sin embargo, esta condición no es cierta para matrices binarias no clique como se ve en el siguiente ejemplo [90] (no es matriz clique porque las columnas 5,6 y 7 que representarían 3 vértices, deberían ser adyacentes entre sí pero no hay una fila que corresponda al clique que los contenga):

0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0

Veamos que el grafo self-clique que está en la figura 2.1 posee una matriz clique simétrica.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
$M_1 = \{v_3, v_4, v_6\}$	0	0	1	1	0	1
$M_2 = \{v_2, v_3\}$	0	1	1	0	0	0
$M_3 = \{v_1, v_2\}$	1	1	0	0	0	0
$M_4 = \{v_1, v_5\}$	1	0	0	0	1	0
$M_5 = \{v_4, v_5\}$	0	0	0	1	1	0
$M_6 = \{v_1, v_6\}$	1	0	0	0	0	1

También el grafo self-clique  $C_7^2$  de la figura 2.4 posee una matriz clique simétrica.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$M_1 = \{v_1, v_2, v_7\}$	1	1	0	0	0	0	1
$M_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$	1	1	1	0	0	0	0
$M_3 = \{v_2, v_3, v_4\}$	0	1	1	1	0	0	0
$M_4 = \{v_3, v_4, v_5\}$	0	0	1	1	1	0	0
$M_5 = \{v_4, v_5, v_6\}$	0	0	0	1	1	1	0
$M_6 = \{v_5, v_6, v_7\}$	0	0	0	0	1	1	1
$M_7 = \{v_1, v_6, v_7\}$	1	0	0	0	0	1	1

Otras matrices clique simétricas para los grafo self-clique  $G'_1$  y  $G'_2$  de la figura 2.8.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$
$M_1 = \{v_4, v_7\}$	0	0	1	1
$M_2 = \{v_5, v_7\}$	0	1	1	0
$M_3 = \{v_6, v_7\}$	1	1	0	0
$M_4 = \{v_1, v_4\}$	1	0	0	1

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$
$M_1 = \{v_4, v_7\}$	0	0	0	1	0	0	1
$M_2 = \{v_5, v_7\}$	0	0	0	0	1	0	1
$M_3 = \{v_6, v_7\}$	0	0	0	0	0	1	1
$M_4 = \{v_1, v_4\}$	1	0	0	1	0	0	0
$M_5 = \{v_2, v_5\}$	0	1	0	0	1	0	0
$M_6 = \{v_3, v_6\}$	0	0	1	0	0	1	0
$M_7 = \{v_1, v_2, v_3\}$	1	1	1	0	0	0	0

Finalmente presentamos una matriz clique simétrica para el grafo self-clique de la figura 2.11. La diferencia con los grafos anteriores es que este grafo no es conexo y cada componente no es un subgrafo self-clique.

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$	$v_{10}$	$v_{11}$
$M_1 = \{v_6, v_9\}$	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
$M_2 = \{v_7, v_{10}\}$	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
$M_3 = \{v_8, v_{11}\}$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$M_4 = \{v_6, v_7, v_8\}$	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
$M_5 = \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$M_6 = \{v_1, v_4\}$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$M_7 = \{v_2, v_4\}$	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$M_8 = \{v_3, v_4\}$	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$M_9 = \{v_1, v_5\}$	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$M_{10} = \{v_2, v_5\}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$M_{11} = \{v_3, v_5\}$	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0

A continuación, en la siguiente proposición probamos que los grafos self-clique del Teorema 2.2 poseen una matriz clique simétrica, por lo tanto son grafos clique-Helly.

**Proposición 2.1.** *Sea  $G$  un grafo, donde  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) \geq 6k + 1$ ,  $k \geq 1$ . Entonces  $G^{2k}$  posee una matriz clique  $A_{G^{2k}}$  simétrica.*

*Demostración:*

Colocamos los vértices de  $V_{G^{2k}} = V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  como columnas de  $A_{G^{2k}}$  y los cliques de  $G^{2k}$  que son  $D_k(v_1), D_k(v_2), \dots, D_k(v_n)$  (fue probado en la demostración del Teorema 2.2) como filas de  $A_{G^{2k}}$ . Ahora una entrada  $(i, j)$  de  $A_{G^{2k}}$  es  $1 \Leftrightarrow v_j \in D_k(v_i) \Leftrightarrow d_G(v_i, v_j) \leq k \Leftrightarrow v_i \in D_k(v_j) \Leftrightarrow$  la entrada  $(j, i)$  de  $A_{G^{2k}}$  es 1.  $\square$

Vamos a presentar ahora otra familia de grafos self-clique que también posee una matriz clique simétrica, pero antes vamos a introducir una definición de matriz de adyacencia reducida para los grafos bipartitos.

**Definición 2.2.** *Una matriz de adyacencia reducida de un grafo bipartito  $G = (V_1, V_2, E)$  es una matriz  $B_G \in \{0, 1\}^{s \times t}$ , donde  $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ ,  $V_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ , y  $b_{i,j} = 1 \Leftrightarrow (v_i, w_j) \in E$ .*

A continuación mostramos un grafo bipartito  $G$  (figura 2.5) y su matriz de adyacencia reducida.

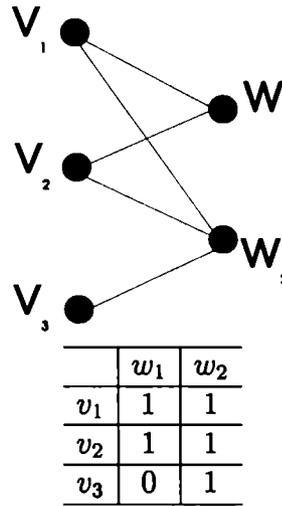


Figura 2.5: un grafo bipartito  $G$  y su matriz de adyacencia reducida

**Teorema 2.4.** *Sea  $G = (V_1, V_2, E)$  un grafo bipartito con  $|V_1| = |V_2|$ ,  $\delta(G) \geq 2$  y posee una matriz de adyacencia reducida  $B_G$  simétrica. Sea  $G'$  el grafo generado a partir de  $G$  reemplazando cada vértice  $w$  de  $V_2$  de grado  $d$  por un clique  $K_d$ , uniendo cada vértice de este clique con un vecino distinto de  $w$ . Entonces,  $G'$  es un grafo self-clique y clique-Helly.*

*Demostración:*

La idea es probar que  $G'$  tiene una matriz clique simétrica y por el Corolario 2.1,  $G'$  es un grafo self-clique y clique-Helly.

Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  los vértices de  $V_1$  que corresponden al orden de las filas de  $B_G$  y  $w_1, w_2, \dots, w_n$  los vértices de  $V_2$  que corresponden al orden de las columnas de  $B_G$ .  $B_G$  simétrica significa que  $(v_i, w_j) \in E \Leftrightarrow (v_j, w_i) \in E$ . Denotamos cada arista  $(v_i, w_j)$  como  $e_{i,j}$ . En  $G'$ , cada  $w_i$  es reemplazado por un clique  $C_i$  con  $d_G(w_i)$  vértices, si  $N_G(w_i) = \{v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_k}\}$  con  $k = d_G(w_i)$ , entonces  $C_i = \{w_{i,j_1}, w_{i,j_2}, \dots, w_{i,j_k}\}$  y  $e'_{j_1,i} = (v_{j_1}, w_{i,j_1}), e'_{j_2,i} = (v_{j_2}, w_{i,j_2}), \dots, e'_{j_k,i} = (v_{j_k}, w_{i,j_k})$  son aristas de  $G'$ . Claramente, si  $e'_{i,j}$  es una arista de  $G'$  entonces  $e'_{j,i}$  también lo es, porque  $e'_{i,j}$  es una arista de  $G' \Leftrightarrow e_{i,j}$  es arista de  $G$ . Es fácil ver que  $w_{j,i}$  es un vértice de  $G' \Leftrightarrow e'_{i,j}$  es una arista de  $G' \Leftrightarrow e'_{j,i}$  es una arista de  $G' \Leftrightarrow w_{i,j}$  es un vértice de  $G'$ .

A continuación vamos a escoger una matriz clique  $A_{G'}$  de  $G'$ . Sabemos que cada  $e'_{i,j}$  es un clique en  $G'$  porque no existe ningún vértice en  $G'$  que pueda ser adyacente a  $v_i$  y  $w_{j,i}$ , los extremos de  $e'_{i,j}$ . Entonces los cliques de  $G'$  son  $C_1, C_2, \dots, C_n$  y los  $|E|$   $e'_{i,j}$ . Las primeras  $n$  filas de  $A_{G'}$  corresponden a  $C_1, C_2, \dots, C_n$  y las  $|E|$  restantes a los  $e'_{i,j}$  ordenados en forma ascendente de acuerdo a sus 2 subíndices. Similarmente, las primeras  $n$  columnas de  $A_{G'}$  corresponden a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  y las subsiguientes a los  $|E|$   $w_{i,j}$  ordenados en forma ascendente de acuerdo a sus 2 subíndices.

Para  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $a_{i,j} = 0$ , ya que ningún  $C_i$  contiene a  $v_j$ .

Para  $1 \leq i \leq n$  y  $n+1 \leq j \leq n+|E|$ , veamos que  $a_{i,j} = 1$  si y sólo si  $a_{j,i} = 1$ . Supongamos  $a_{i,j} = 1$ , esto significa que existe un vértice  $w_{i,k} \in C_i$  que corresponde a la columna  $j$  de  $A_{G'}$ . Ahora la fila  $j$  de  $A_{G'}$  debe corresponder a la arista  $e'_{i,k}$  porque hay tantos  $w_{i,j}$  como  $e'_{i,j}$  con exactamente los mismos subíndices.  $e'_{i,k} = (v_i, w_{k,i})$ , por lo tanto  $a_{j,i} = 1$ . Por otro lado, si  $a_{j,i} = 1$ , significa que existe una arista  $e'_{i,k} = (v_i, w_{k,i})$  que corresponde a la fila  $j$  de  $A_{G'}$ . Ahora la columna  $j$  de  $A_{G'}$  corresponde a  $w_{i,k}$  por el mismo argumento y sabemos que  $w_{i,k} \in C_i$ , entonces  $a_{i,j} = 1$ .

Para  $n+1 \leq i, j \leq n+|E|$ , si  $a_{i,j} = 1$  entonces la fila  $i$  corresponde a una arista  $e'_{s,t} = (v_s, w_{t,s})$  y la columna  $j$  al vértice  $w_{t,s}$ , pues esta es la única alternativa posible. Ahora por el mismo argumento del caso anterior, la fila  $j$  corresponde a la arista  $e'_{t,s} = (v_t, w_{s,t})$  y la columna  $i$  a  $w_{s,t}$ . Entonces  $a_{j,i} = 1$ .

Con estos casos, probamos que  $A_{G'}$  es simétrica. □

Exhibimos un grafo bipartito  $G$  (figura 2.6) cuya matriz de adyacencia reducida es simétrica. Realizamos la construcción de  $G'$  usando el Teorema 2.4 (figura 2.7), mostramos una matriz clique de  $G'$  que resulta ser también simétrica.

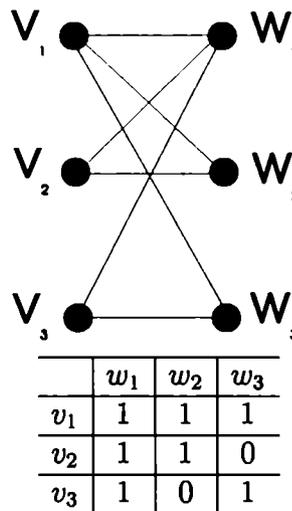
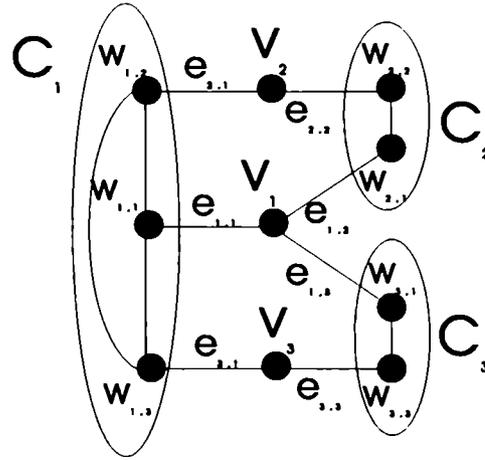


Figura 2.6: un grafo bipartito  $G$  que tiene una matriz de adyacencia reducida simétrica



	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$w_{1,1}$	$w_{1,2}$	$w_{1,3}$	$w_{2,1}$	$w_{2,2}$	$w_{3,1}$	$w_{3,3}$
$c_1$	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
$c_2$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$c_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$e'_{1,1}$	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
$e'_{1,2}$	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$e'_{1,3}$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
$e'_{2,1}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
$e'_{2,2}$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$e'_{3,1}$	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
$e'_{3,3}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

Figura 2.7: el grafo  $G'$  y su matriz clique simétrica

## 2.2 Grafos 2-self-clique

Escalante presentó en [33] una familia de grafos 2-self-clique.

**Teorema 2.5 ([33]).** *Todo grafo conexo sin triángulos con grado mínimo  $\geq 2$  es un grafo 2-self-clique, excepto para un ciclo (el cual es un grafo self-clique).*

En esta sección, primero presentamos una familia más general de grafos 2-self-clique que contiene propiamente a la familia descrita en [33] y luego presentamos otra familia más de grafos 2-self-clique.

**Teorema 2.6.** *Sea  $G$  un grafo conexo con  $\delta(G) \geq 2$  y  $S \subseteq V_G$  (es posible que  $S = \emptyset$ ) tal que  $|E_G| - |V_G| \neq \sum_{v \in S} (d_G(v) - 2)$  y  $G \setminus S$  es sin triángulos. Sea  $G'$  el grafo generado a partir de  $G$  reemplazando cada vértice  $v \in S$  de grado  $d$  por un clique  $K_d$ , uniendo cada vértice de este clique con un vecino diferente de  $v$ . Entonces  $G'$  es un grafo 2-self-clique.*

*Demostración:*

Probaremos que las condiciones del Teorema 2.1 son verificadas por  $G'$ . Primero, veamos que  $G'$  es clique-Helly. Cada grafo que no es clique-Helly debe contener al menos 4 cliques de tamaño  $\geq 3$  que se intersecan de a pares. Pero en  $G'$ , cada clique de tamaño  $\geq 3$  solamente interseca con cliques de tamaño 2. Por lo tanto  $G'$  es clique-Helly.

Ahora, probamos que  $\nexists v, w \in V_{G'}, v \neq w$  tal que  $N_{G'}[v] \subseteq N_{G'}[w]$ . Los vértices de  $G'$  pueden ser particionados en vértices de  $V_G \setminus S$  y vértices pertenecientes a los cliques agregados de  $G'$ . Supongamos lo contrario y consideramos los siguientes casos.

- (a)  $v, w \in V_G \setminus S$ , sean  $w$  y  $u$  vértices adyacentes de  $v$  ( $d_{G'}(v) \geq 2$ ). Como  $N_{G'}[v] \subseteq N_{G'}[w]$ ,  $u$  es adyacentes a  $w$  en  $G'$ . El vértice  $u \notin V_G \setminus S$ , porque sino,  $G \setminus S$  contiene un triángulo. Entonces,  $u$  está en un clique  $K_d$  agregado de  $G'$ . Pero, por construcción,  $u$  debe ser adyacente a sólo un vértice de  $V_G \setminus S$ , lo cual es una contradicción.
- (b)  $v \in V_G \setminus S$  y  $w \notin V_G \setminus S$ , sean  $w$  y  $u$  vértices adyacentes de  $v$  ( $d_{G'}(v) \geq 2$ ). Por construcción de  $G'$ ,  $u$  no puede ser adyacente a  $w$ , lo cual es una contradicción.
- (c)  $v \notin V_G \setminus S$  y  $w \in V_G \setminus S$ , sea  $u$  otro vértice que está en el mismo clique  $K_d$  de  $v$  agregado de  $G'$ . Por construcción de  $G'$ ,  $u$  no puede ser adyacente a  $w$ , lo cual es una contradicción.
- (d)  $v, w \notin V_G \setminus S$ , claramente  $v$  y  $w$  pertenecen al mismo  $K_d$  agregado de  $G'$ . Por construcción de  $G'$ ,  $v$  es adyacente a un vértice  $u$  en  $G'$  ( $u \notin K_d$ ) y  $u$  no es adyacente a  $w$ , esto es una contradicción.

En consecuencia, por el Teorema 2.1,  $G'$  es un grafo self-clique o 2-self-clique. Vamos a probar que  $G'$  es un grafo 2-self-clique. Supongamos que este grafo es self-clique. Entonces  $|V_{G'}| = |V_{K(G')}|$ . Por construcción,  $|V_{G'}| = |V_G| - |S| + \sum_{v \in S} d_G(v)$ . Ahora necesitamos contar el número de cliques de  $G'$ , los cuales son de tres tipos:

1. Los cliques de  $G \setminus S$ : todos ellos son  $K_2$  porque  $G \setminus S$  no tiene triángulos.
2. Los cliques  $K_d$  agregados de  $G'$ , correspondientes a los vértices de  $S$ .
3. Los cliques formados por aristas que unen cada vértice de  $K_d$  (de tipo 2) con un vértice fuera de  $K_d$ . Estos cliques son  $K_2$ .

La suma de los cliques de tipo 1 y tipo 3 es igual a  $|E_G|$ , y tenemos  $|S|$  de tipo 2. Entonces si  $|V_G| - |S| + \sum_{v \in S} d_G(v) = |V_{G'}| = |V_{K(G')}| = |E_G| + |S|$ . En consecuencia,  $|E_G| - |V_G| = \sum_{v \in S} d_G(v) - 2|S| = \sum_{v \in S} (d_G(v) - 2)$ , lo cual es una contradicción.  $\square$

Los siguientes grafos de la figura 2.8 son ejemplos para ver que la condición  $|E_G| - |V_G| \neq \sum_{v \in S} (d_G(v) - 2)$  no puede ser eliminada. Observamos que  $G'_1$  y  $G'_2$  son grafos self-clique.

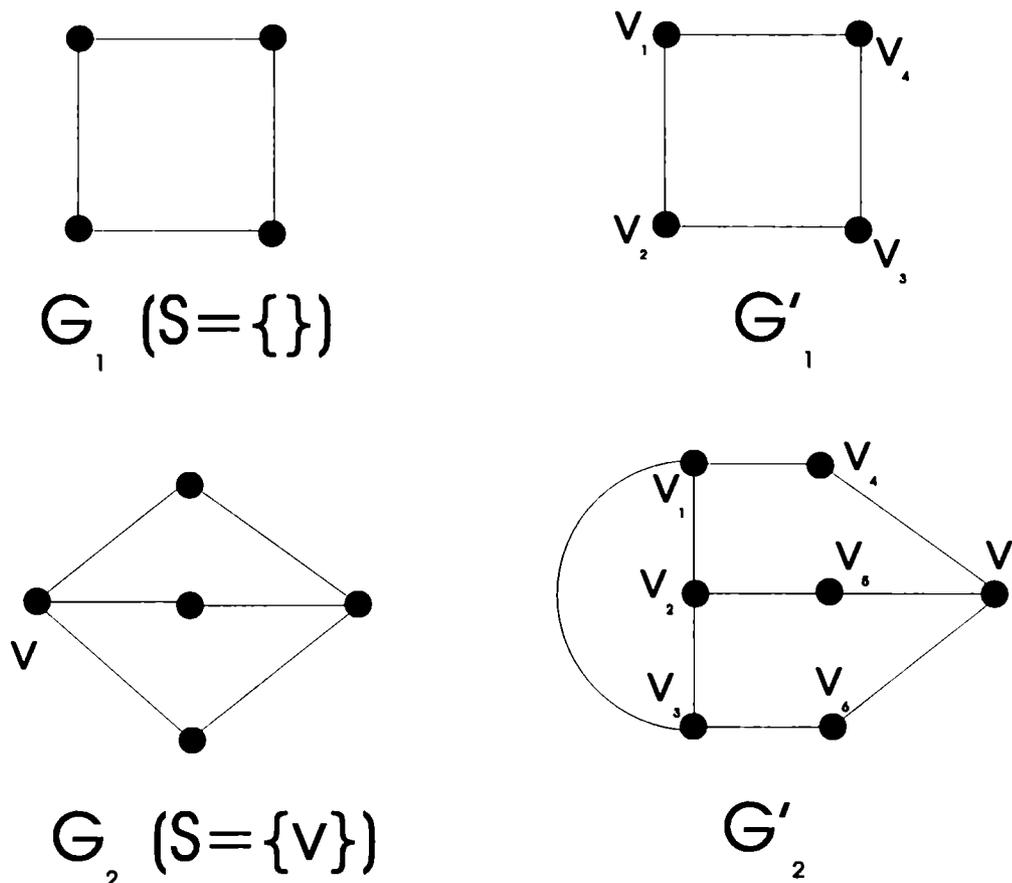


Figura 2.8

Las figuras 2.9 y 2.10 ilustran dos ejemplos de esta familia de grafos 2-self-clique.

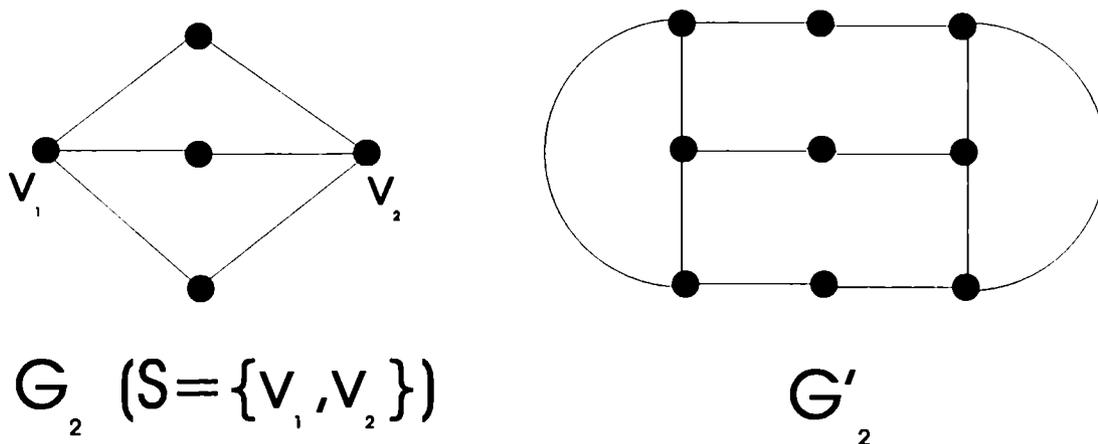


Figura 2.9

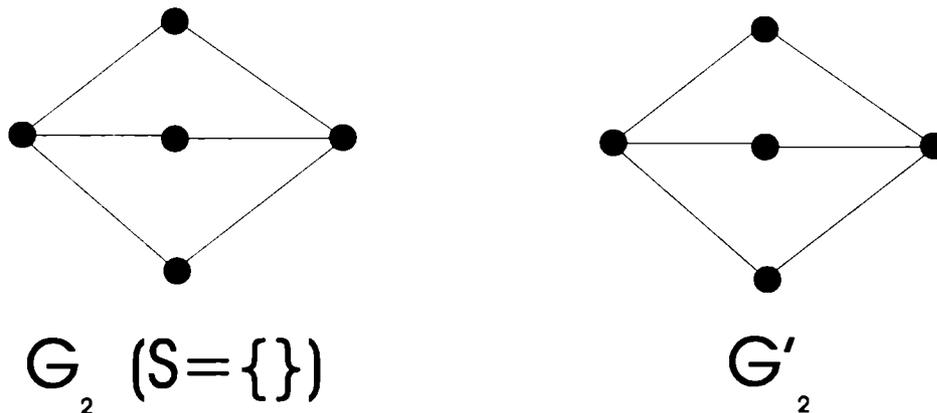


Figura 2.10

La figura 2.11 muestra un grafo self-clique que tiene dos componentes conexas, una componente es  $G_2$  de la figura 2.10 y la otra componente es  $K(G_2)$ . Siempre se puede obtener un grafo self-clique a través de un grafo 2-self-clique de la misma manera.

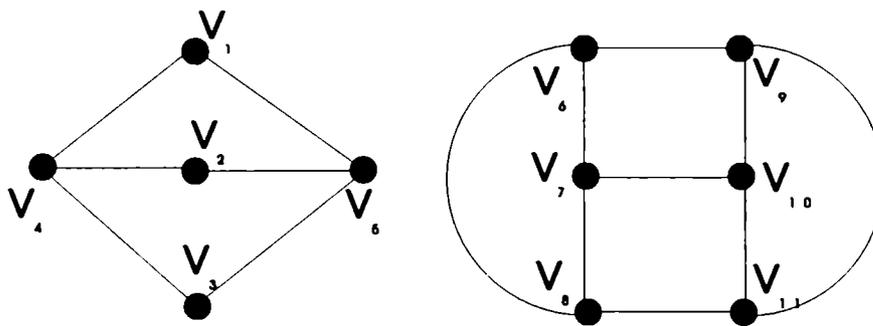


Figura 2.11

Ahora presentamos la segunda familia de grafos 2-self-clique.

**Teorema 2.7.** *Sea  $G = (V_G, E_G)$  un grafo, si  $E_G$  se puede particionar en 2 subconjuntos  $E_1$  y  $E_2$  tales que  $G_1 = (V_G, E_1)$  resulta ser unión de ciclos disjuntos con  $g(G_1) \geq 4$ ,  $G_2 = (V_G, E_2)$  un grafo clique-Helly con  $E_2 \neq \emptyset$  y la intersección entre una componente conexas cualquiera de  $G_2$  y un ciclo cualquiera de  $G_1$  es a lo sumo de un vértice. Entonces,  $G$  es un grafo 2-self-clique y clique-Helly.*

*Demostración:*

Es fácil ver que cada arista de  $G_1$  es un clique ( $K_2$ ) en  $G_1$  y  $|E_1| = |V_G|$  porque  $G_1$  es unión de ciclos disjuntos. Veamos que estos cliques siguen siendo cliques en  $G$ . Sea  $(v, w) \in E_1$  (es una arista de algún ciclo de  $G_1$ ), supongamos que no es clique en  $G$ , esto significa que existe un vértice  $u$  que es adyacente a  $v$  y  $w$  en  $G$ .  $(u, v)$  y  $(u, w)$  no pueden estar ambos en  $E_1$ , sino  $g(G_1) = 3$ . En el caso que los dos están en  $E_2$ , entonces  $v$  y  $w$  están en la misma componente conexas de  $u$  en  $G_2$ , lo que contradice a la hipótesis

(la intersección entre una componente conexa de  $G_2$  y un ciclo de  $G_1$  es a lo sumo de un vértice). En el caso de que sólo una de las 2 aristas está en  $E_2$ , podemos suponer que  $(u, v) \in E_2$ , sin pérdida de generalidad. Entonces  $(u, w) \in E_1$ , esto significa que  $u$  está en el mismo ciclo de  $v$  y  $w$ , pero  $u$  y  $v$  están en la misma componente conexa de  $G_2$  porque son adyacentes en  $G_2$ . Contradice nuevamente a la hipótesis. Por lo tanto  $(v, w)$  también es un clique en  $G$ .

Veamos ahora que  $G$  es clique-Helly. Los cliques de  $G$  son los cliques de  $G_2$  y los de  $G_1$ . Dado que ambas familias verifican la propiedad de Helly y dado que los cliques de  $G_1$  tienen sólo 2 vértices, se tiene que la familia de cliques de  $G$  cumple con la propiedad de Helly, entonces  $G$  es clique-Helly.

Probaremos que  $\nexists v, w \in V_G, v \neq w, N_G[v] \subseteq N_G[w]$ . Supongamos que  $\exists v, w \in V_G, v \neq w, N_G[v] \subseteq N_G[w]$ . Entonces  $(v, w) \in E_G$ . Si  $(v, w) \in E_1$ , entonces  $v$  y  $w$  están en el mismo ciclo  $C_i$  en  $G_1$  y  $v$  debe tener otro vértice adyacente en  $C_i$ . Llamamos  $u$  a este vértice y como  $u \in N_{G_1}[v] \subseteq N_G[v] \subseteq N_G[w]$ , entonces  $(u, w) \in E_G$ . Pero  $(u, w) \notin E_1$  porque sino  $u, v$  y  $w$  forman un ciclo de longitud 3 en  $G_1$ . Tampoco  $(u, w) \in E_2$  porque sino  $u$  y  $w$  están en la misma componente conexa en  $G_2$  y están en  $C_i$ . Absurdo. Por otro lado, si  $(v, w) \in E_2$ , entonces  $v$  y  $w$  están en diferentes ciclos en  $G_1$ . Sea  $\{u, z, v\} = N_{G_1}[v] \subseteq N_G[v] \subseteq N_G[w]$ ,  $u$  y  $z$  deben ser adyacentes a  $w$  en  $G_2$ . Entonces  $u$  y  $z$  están en la misma componente conexa de  $w$  en  $G_2$  y están en el mismo ciclo de  $v$  en  $G_1$ , lo cual contradice la hipótesis. Entonces podemos concluir que  $\nexists v, w \in V_G, v \neq w, N_G[v] \subseteq N_G[w]$ .

Ahora por el Teorema 2.1, podemos afirmar que  $G$  es un grafo self-clique o un grafo 2-self-clique. Vamos a mostrar a continuación que en  $G$  hay más cliques que vértices y por lo tanto  $G$  no puede ser un grafo self-clique. En consecuencia,  $G$  es un grafo 2-self-clique.

En  $G_1$  hay  $|E_1|$   $K_2$  y en  $G_2$  hay por lo menos un clique ya que  $E_2 \neq \emptyset$ . Entonces  $|\mathcal{C}(G)| = |\mathcal{C}(G_1)| + |\mathcal{C}(G_2)| \geq |E_1| + 1 = |V_G| + 1 > |V_G|$ .  $\square$

Mostramos un grafo  $G$  que verifica las condiciones del Teorema 2.7 (figura 2.12).

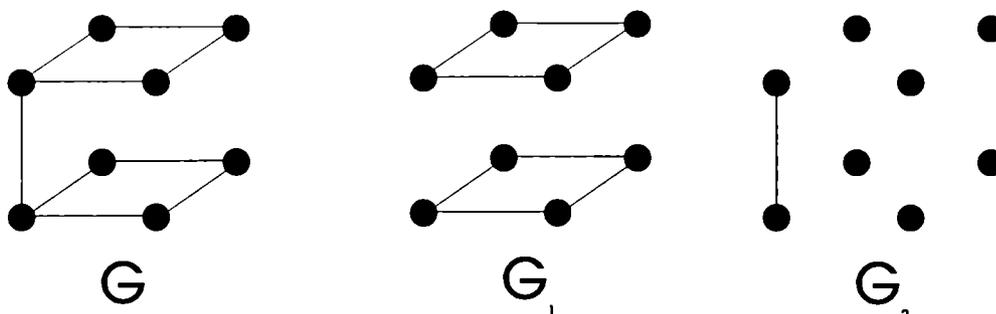


Figura 2.12

A continuación, presentamos una subfamilia de la familia de grafos que verifica el Teorema 2.7 a través del siguiente corolario que da una idea de como se puede contruir grafos que verifican las condiciones del Teorema 2.7.

**Corolario 2.2.** *Sea  $G$  un grafo clique-Helly con  $|E_G| \geq 1$ . Sea  $G'$  el grafo generado a partir de  $k$  copias de  $G$ ,  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , con  $k \geq 4$ , uniendo cada vértice de  $G_i$  con su copia de  $G_{i+1}$ ,  $1 \leq i \leq k$  ( $G_{k+1} = G_1$ ). Entonces,  $G'$  es un grafo 2-self-clique y clique-Helly.*

*Demostración:*

Es fácil ver que  $G'$  verifica la hipótesis del Teorema 2.7.  $G'$  se puede descomponer en  $G_2 = \bigcup_{1 \leq i \leq k} G_i$  y  $G_1$  que consiste de  $|V_G|$  ciclos disjuntos de longitud  $k$ .  $G_2$  es claramente clique-Helly porque  $G$  es clique-Helly. La intersección de un ciclo de  $G_1$  y una componente de  $G_2$  es a lo sumo un sólo vértice.  $\square$

Mostramos un grafo miembro de esta subfamilia. (figura 2.13).

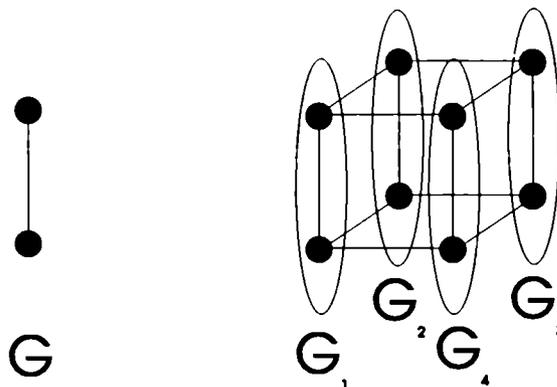


Figura 2.13

## Capítulo 3

# Grafos clique de grafos arco-circular Helly

En este capítulo, se presenta una caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular Helly. Probamos que los grafos clique de esta subclase de los grafos arco-circular están contenidos en la intersección de tres subclases de los grafos arco-circular y analizamos propiedades sobre la segunda iteración de grafos clique de los grafos arco-circular Helly.

Los grafos arco-circular tienen aplicaciones en genética [96], control del tránsito [97], diseño de compiladores [105], estadística [58] y problemas de almacenamiento [21]. El problema de caracterizar los grafos arco-circular fue planteado por primera vez en [49] y discutido con más detalle en [60]. Pero fue Alan Tucker [101, 102, 103, 104, 105, 106] quien aportó todo el basamento teórico inicial para esta clase de grafos, incluyendo una primera caracterización en [102]. El reconocimiento de esta clase es polinomial. Tucker [106] propuso un algoritmo de reconocimiento de complejidad  $O(n^3)$ , mientras que Spinrad [93] simplificó el algoritmo de Tucker para el caso de que el grafo dado pueda ser cubierto por dos cliques. Varios años después, Hsu [57] encontró un algoritmo más eficiente (complejidad  $O(m.n)$ ). Uno de los principales problemas abiertos en esta clase es determinar si existe algún algoritmo de reconocimiento lineal en  $m$  y  $n$ . En [38], Gavril dio algoritmos de complejidad polinomial para reconocer algunas subclases de los grafos arco-circular.

Un grafo  $G$  es arco-circular si existe un conjunto de arcos  $A$  (que llamamos representación) alrededor de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de  $G$  y arcos de  $A$  de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si los arcos correspondientes se intersecan. Es decir, un grafo arco-circular es el grafo intersección de arcos alrededor de un círculo. Los arcos son, o bien abiertos todos, o bien cerrados todos. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que ningún arco cubre el perímetro total de la circunferencia. La figura 3.1 muestra un grafo arco-circular y una representación arco-circular de él.

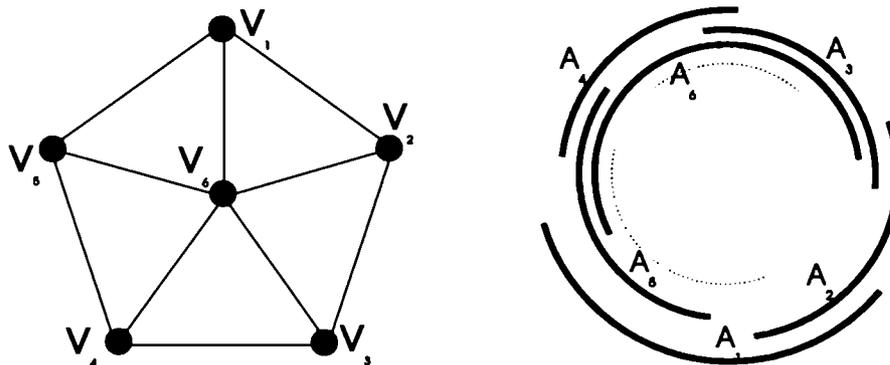


Figura 3.1: Ejemplo de un grafo arco-circular con su representación en arcos alrededor del círculo.

Los grafos arco-circular admiten varias subclases interesantes:

1. Propios (**PCA**): un grafo  $G$  es arco-circular propio si existe una representación arco-circular de  $G$  tal que ningún arco está contenido en forma propia en otro. Tucker [103] propuso una caracterización y un algoritmo eficiente para su reconocimiento, usando matrices de caracterización. El mismo autor también dio una caracterización para esta subclase por medio de subgrafos prohibidos [104].
2. Unitarios (**UCA**): un grafo  $G$  es arco-circular unitario si existe una representación arco-circular de  $G$  tal que todos sus arcos tengan la misma longitud. Claramente,  $UCA \subseteq PCA$ . En [104], el autor muestra que esta inclusión es estricta y propone una caracterización para esta subclase, usando subgrafos prohibidos. Esta caracterización conduce a un algoritmo polinomial para el reconocimiento [95]. Golumbic también muestra en [39] un grafo que pertenece a **PCA** pero no a **UCA**.
3. Helly (**HCA**): un grafo  $G$  es arco-circular Helly si existe una representación arco-circular de  $G$  tal que los arcos satisfacen la propiedad de Helly. Gavril [38] dio una caracterización de esta subclase usando la matriz clique de un grafo. Esta caracterización conduce a un algoritmo eficiente para su reconocimiento. La representación arco-circular de la figura 3.1 es Helly, por lo tanto el grafo de la figura 3.1 está en **HCA**.
4. Clique-Helly (**CHCA**): un grafo  $G$  es arco-circular clique-Helly si  $G$  es arco-circular y clique-Helly. Szwarcfiter [98] describió una caracterización de los grafos clique-Helly que conduce a un algoritmo polinomial de reconocimiento. Este método junto a un algoritmo para los grafos arco-circular [106, 57] resultan en un algoritmo eficiente para el reconocimiento de esta subclase.

Todas las subclases mencionadas, salvo **CHCA** son hereditarias. La clase general de los grafos arco-circular también es hereditaria. En [29] (figura 3.2)

se exhiben ejemplos minimales que pertenecen a todas posibles intersecciones de estas subclases, excepto en una región, la cual es vacía.

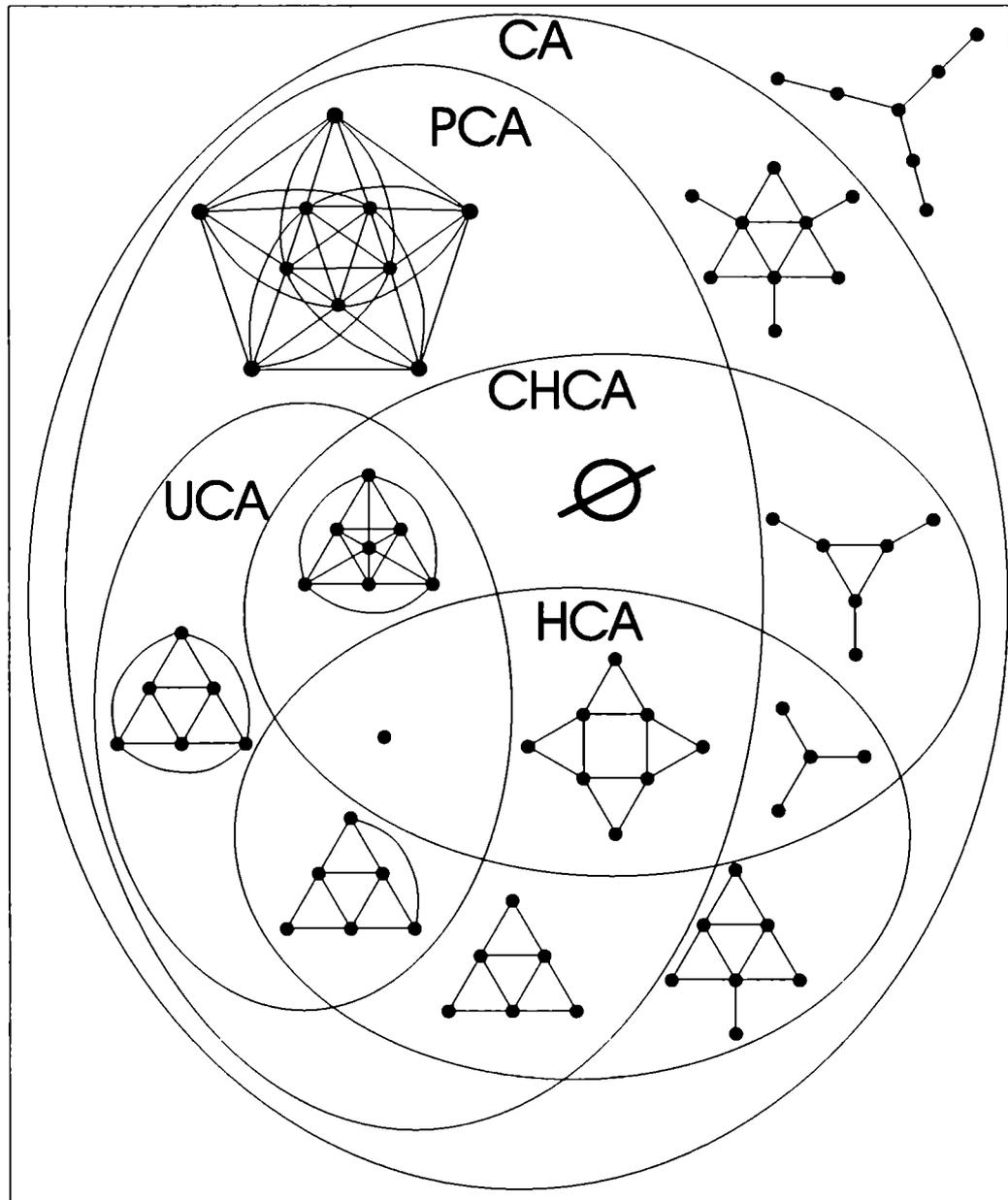


Figura 3.2

Una caracterización para la clase de los grafos clique ha sido formulada por Roberts y Spencer [91], basado en el paper de Hamelink [50]. Aún siendo así, se desconocen algoritmos eficientes para el problema de reconocimiento. De hecho, es un problema abierto saber si este problema es o no NP-completo. Un problema de interés, en el contexto de teoría de grafos de intersección y especialmente en el estudio de los grafos clique, es cómo caracterizar los grafos clique de clases especiales de grafos. Esta tarea ya ha sido hecha para los árboles [52], los grafos de intervalos [53], los grafos clique-Helly [33], los

grafos disk-Helly [3], los grafos cordales [106], etc. A pesar de esto, no se conoce caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular ni de sus subclases.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. En la Sección 1, se revisan algunos teoremas sobre los grafos arco-circular. En la Sección 2, presentamos un teorema de caracterización de los grafos clique de los grafos HCA y se prueba que los grafos clique de los grafos arco-circular Helly están contenidos en la intersección entre los grafos arco-circular propios, los grafos arco-circular clique-Helly y los grafos arco-circular Helly. También, analizamos propiedades sobre  $K^2(G)$  cuando  $G$  es un grafo HCA.

Los resultados de este capítulo fueron presentados en [30].

## 3.1 Preliminares

Primero, revisamos el teorema de caracterización general de los grafos clique de Roberts y Spencer. Luego repasamos un teorema de Escalante que asegura que la segunda iteración de grafos clique de un grafo clique-Helly  $G$  es un subgrafo inducido de  $G$ .

**Teorema 3.1.** *Un grafo  $H$  es grafo clique si y sólo si existe una familia de subgrafos completos  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$ , la cual satisface:*

1. *La familia  $\mathcal{F}$  cubre  $H$ .*
2. *La familia  $\mathcal{F}$  verifica la propiedad de Helly.*

**Teorema 3.2 ([33]).** *Sea  $G$  un grafo clique-Helly, entonces  $K^2(G)$  es un subgrafo inducido de  $G$ .*

A continuación, revisamos una caracterización de los grafos arco-circular propios usando torneos locales (*local tournaments*) y orientaciones circular (*round orientations*).

Para ello, necesitamos introducir las definiciones correspondientes [25, 55, 56].

Un torneo (*tournament*) es una orientación de un grafo completo. Un torneo local es un grafo dirigido donde tanto el conjunto de entrada como el de salida de cada vértice induce un torneo.

Una enumeración circular (*round enumeration*) de un grafo dirigido  $D$  es un orden circular (*circular ordering*)  $S = (v_0, \dots, v_{n-1})$  de sus vértices tal que para cada  $i$  existen enteros no-negativos  $r_i$  y  $s_i$ , y el vértice  $v_i$  tiene conjunto de entrada  $N_{in}^S = \{v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_{i-r_i}\}$  y de salida  $N_{out}^S = \{v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+s_i}\}$  (sumas y restas deben entenderse módulo  $n$ ). Un grafo dirigido que admite una enumeración circular es llamado una ronda. Un grafo no dirigido se dice que tiene una orientación circular si admite una orientación que lo transforma en una ronda.

**Teorema 3.3** ([25, 92]). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un grafo conexo  $G$ :*

1.  $G$  es orientable como un torneo local.
2.  $G$  tiene una orientación circular.
3.  $G$  es arco-circular propio.

Ahora revisamos una caracterización de los grafos arco-circular Helly [38]. Una matriz tiene forma de 1's circular si los 1's en cada columna aparecen en un orden circular consecutivo. Una matriz tiene la propiedad de 1's circular si por una permutación de las filas puede ser transformada en una matriz con forma de 1's circular.

**Teorema 3.4** ([38]). *Un grafo  $G$  es arco-circular Helly si y sólo si  $A_G$  tiene la propiedad de 1's circular.*

## 3.2 Grafos clique de los grafos arco-circular Helly

En esta sección formularemos un teorema de caracterización de los grafos clique de los grafos arco-circular Helly. Sea  $G$  un grafo y  $S_G$  un orden circular de sus vértices. Definimos un subgrafo completo circular en el orden circular  $S_G$  como un conjunto de vértices consecutivos de  $S_G$ , el cual forma un subgrafo completo de  $G$ . Decimos que una familia de subgrafos de  $G$ ,  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$ , cubre  $G$  si cada vértice y arista de  $G$  está en algún  $F_i$ .

**Teorema 3.5.** *Un grafo  $H \in K(\mathbf{HCA})$  si y sólo si  $H$  admite un orden circular  $S_H$  tal que existe una familia de subgrafos completos circulares de  $S_H$ ,  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$ , la cual satisface:*

1. La familia  $\mathcal{F}$  cubre  $H$ .
2. La familia  $\mathcal{F}$  verifica la propiedad de Helly.

*Demostración:*

$\implies$ ) Sea  $H \in K(\mathbf{HCA})$ , un grafo conexo. Existe un grafo  $G \in \mathbf{HCA}$  tal que  $K(G) = H$ . Sea  $|V_G| = k$  y  $|V_H| = n$  (o sea, el número de cliques de  $G$  es  $n$ ). Llamamos  $R$  a una representación arco-circular Helly de  $G$  y  $A_1, \dots, A_k$  los arcos de  $R$  correspondientes a los vértices  $v_1, \dots, v_k$  de  $G$ . En  $R$ , los  $n$  cliques de  $G$  son representados por puntos de intersección  $p_i$  en el círculo (esto es siempre posible para cualquier representación arco-circular Helly, porque para cualquier subconjunto de arcos que se intersecan de a pares, estos arcos

comparten una intersección en común). El orden de estos puntos define un orden circular  $S_H$  de los vértices de  $H$ ,  $S_H = \{p_1, \dots, p_n\}$ . El conjunto de puntos de intersección que son cubiertos por un arco  $A_i$  de  $R$  representa un conjunto de vértices de  $H$  e induce un subgrafo completo de  $H$ . Denotamos este conjunto de puntos de intersección como  $C(A_i) = \{p_{i_1}, p_{i_1+1}, \dots, p_{i_1+i_2}\}$  y estos puntos son consecutivos en el orden circular  $S_H$ . Por lo tanto, el subgrafo completo inducido por  $C(A_i)$  en  $H$  es un subgrafo completo circular de  $S_H$  y  $A_i$  cubre todos los puntos de intersección de  $C(A_i)$  (lo denotamos como  $C(A_i) \subseteq A_i$ ). Sea  $\mathcal{F} = \{C(A_1), \dots, C(A_k)\}$ , la familia de subgrafos completos circulares de  $S_H$ . Tenemos que probar que  $\mathcal{F}$  verifica las propiedades 1 y 2.

Claramente,  $\mathcal{F}$  satisface la propiedad 1. Sea  $w_i$  el vértice de  $H$  que corresponde a  $p_i$  y  $A_j$  un arco que representa un vértice de  $G$  perteneciente al clique de  $G$  que corresponde a  $p_i$ , entonces  $p_i \in C(A_j)$ . Ahora sean  $w_i$  y  $w_j$ , dos vértices adyacentes de  $H$  que corresponden a  $p_i$  y  $p_j$ . Entonces existe un arco  $A_t$  que representa a un vértice de  $G$  contenido en los cliques correspondientes a  $p_i$  y  $p_j$ . Por lo tanto,  $p_i$  y  $p_j \in C(A_t)$

Falta verificar que  $\mathcal{F}$  satisface la propiedad de Helly. Sea  $\mathcal{F}'$  una subfamilia de  $\mathcal{F}$  tal que  $\forall C(A_i), C(A_j) \in \mathcal{F}'$ ,  $C(A_i) \cap C(A_j) \neq \emptyset$  y  $\mathcal{A} = \{A_m / C(A_m) \in \mathcal{F}'\}$ . Entonces,  $\forall A_i, A_j \in \mathcal{A}$ ,  $C(A_i) \cap C(A_j) \subseteq A_i \cap A_j \neq \emptyset$ . Por lo tanto, los arcos de  $\mathcal{A}$  forman un subgrafo completo en  $G$ . Este subgrafo completo está contenido en un clique de  $G$ , el clique corresponde, por ejemplo, al punto de intersección  $p_t$ . Entonces  $p_t \in A_m$ ,  $\forall A_m \in \mathcal{A}$ . En consecuencia,  $p_t \in \bigcap_{C(A_m) \in \mathcal{F}'} C(A_m)$  y  $\mathcal{F}$  verifica la propiedad de Helly.

Claramente,  $\mathcal{F}^* = \{C(A_i) \in \mathcal{F} / C(A_i) \not\subseteq C(A_j), \forall C(A_j) \in \mathcal{F}\}$ , una subfamilia de  $\mathcal{F}$ , también verifica las propiedades 1 y 2. Decimos que  $\mathcal{F}^*$  es una familia dominante.

$\Leftarrow$ ) Sea  $S_H = \{v_1, \dots, v_n\}$  un orden circular de los vértices de  $H$  y  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_r\}$  la familia de subgrafos completos circulares de  $S_H$  que verifica las propiedades 1 y 2. Construiremos una representación HCA  $R$  de algún grafo  $G$  tal que  $K(G) = H$ .

Primero, dibujamos  $\{v_1, \dots, v_n\}$  como un conjunto de puntos situados en las posiciones  $\{2\pi/n, 4\pi/n, \dots, 2\pi\}$  del círculo (el vértice  $v_j$  está situado en la posición  $2j\pi/n$ ).

Por cada  $F_i = \{v_{i_1}, v_{i_1+1}, \dots, v_{i_1+i_2}\}$ , dibujamos un arco  $A_i = [2i_1\pi/n, 2(i_1 + i_2)\pi/n]$  en el círculo. Por cada  $v_j$  dibujamos un arco  $B_j = [2j\pi/n, 2j\pi/n + \epsilon]$  en el círculo donde  $\epsilon$  es un número real positivo muy pequeño ( $\ll \pi/n$ ).

Primero, debemos verificar que esta representación arco-circular  $R$  de  $G$  es Helly.

Sea  $\mathcal{F}'$  una subfamilia de los arcos  $A_i$  tal que  $\forall A_i, A_j \in \mathcal{F}', A_i \cap A_j \neq \emptyset$  y  $\mathcal{F}'' = \{F_i \in \mathcal{F} / A_i \in \mathcal{F}'\}$ . Claramente,  $\forall F_i, F_j \in \mathcal{F}'', F_i \cap F_j \neq \emptyset$  porque  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ . Como  $\mathcal{F}$  verifica Helly (propiedad 2),  $\bigcap_{F_j \in \mathcal{F}''} F_j \neq \emptyset$ . Esto significa que existe algún  $v_t$  que está en cada  $F_j \in \mathcal{F}''$  y  $v_t (2t\pi/n)$  está contenido en cada  $A_j \in \mathcal{F}'$ . Entonces  $\bigcap_{A_j \in \mathcal{F}'} A_j \neq \emptyset$ . En consecuencia,  $\mathcal{F}'$  es Helly.

Ahora, sea  $\mathcal{F}^*$  una subfamilia de los arcos  $A_i$  y los arcos  $B_j$  tal que contiene al menos uno de los arco  $B_j$  y además para cualquier par de arcos de  $\mathcal{F}^*$ , tienen una intersección no vacía. Claramente en  $\mathcal{F}^*$  no puede haber 2 arcos distintos de los arcos  $B_j$  porque si los hubiera, no tendrían intersección en común. Llamamos ahora  $B_k$ , el único arco de los  $B_j$  de  $\mathcal{F}^*$ . Podemos afirmar que cualquier arco  $A_i$  de  $\mathcal{F}^*$  tiene intersección común con  $B_k$ . Entonces  $v_k (2k\pi/n)$  está en cada arco de  $\mathcal{F}^*$  y  $v_k (2k\pi/n)$  pertenece a la intersección de todos los arcos de  $\mathcal{F}^*$ , lo cual implica que  $\mathcal{F}^*$  es también Helly.

Ambos resultados implican que la representación arco-circular  $R$  de  $G$  satisface la propiedad de Helly.

Aún falta verificar que  $K(G) \cong H$ , donde  $G$  es el grafo con  $R$  como su representación HCA. Tenemos que probar que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  son los puntos de intersección correspondientes a los clique de  $G$ . Todos ellos son necesarios, porque cada arco  $B_j$  contiene solamente un vértice  $v_k$  (que es exactamente el vértice  $v_j$ ). Y no se necesita otro punto de intersección porque los extremos de cada arco  $A_i$  son vértices  $v_k$ . Si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $H$  entonces ellos pertenecen al mismo  $F_t$  (propiedad 1). Por construcción,  $v_i$  y  $v_j$  están ambos en  $A_t$ , por lo tanto, sus respectivas cliques en  $G$  tiene un vértice en común. Claramente la recíproca es cierta por el mismo argumento.  $\square$

#### Notas:

1. Esta caracterización es similar a la caracterización general de los grafos clique de Roberts y Spencer [91] que se presentó como el Teorema 3.1.
2. Después de escrita la primera versión de esta tesis, se nos observó [42] que la demostracion del Teorema 3.5, podría tambien ser vista como consecuencia de algunos nuevos resultados presentados en [41], tomando en cuenta que los grafos arco-circulares tambien pueden ser considerados como grafos de intersección de arcos de un orden circular sobre un conjunto finito.
3. El problema de reconocer si un grafo  $H$  con  $n$  vértices es grafo clique de algún grafo arco-circular Helly pertenece a NP [72]. Dado un orden circular  $S_H$  de los vértices de  $H$  y una familia  $\mathcal{F}$  de subgrafos completos circulares, es fácil ver que en  $\mathcal{F}$  hay a lo sumo  $n^2$  miembros distintos, ya que esa es la cantidad de subsecuencias posibles de  $S_H$ . Entonces

para verificar que  $\mathcal{F}$  es Helly y cubre  $H$  se puede realizar en tiempo polinomial. La validación de las entradas ( $S_H$  y  $\mathcal{F}$ ) también se puede hacer en tiempo polinomial.

Probamos el siguiente lema que identifica los cliques de  $H \in K(\text{HCA})$ . Sea  $G$  un grafo arco-circular Helly;  $A_1, \dots, A_k$  los arcos de una representación arco-circular Helly de  $G$  y  $H = K(G)$ . Sea  $\mathcal{F} = \{C(A_1), \dots, C(A_k)\}$  la familia de subgrafos completos circulares de  $S_H$  y  $\mathcal{F}^* = \{C(A_i) \in \mathcal{F} / C(A_i) \not\subseteq C(A_j), \forall C(A_j) \in \mathcal{F}\}$  una familia dominante de subgrafos completos circulares de  $S_H$  como definimos en el Teorema 3.5. Sea  $U = \{u_1, \dots, u_p\}$  el conjunto de vértices universales de  $H$ .

**Lema 3.1.** *Los conjuntos  $C'(A_i) = C(A_i) \cup U, \forall C(A_i) \in \mathcal{F}^*$ , inducen los únicos cliques de  $H$ .*

*Demostración:*

Sea  $C'(A_i) = C(A_i) \cup U, \forall C(A_i) \in \mathcal{F}^*$ . Sabemos que  $C'(A_i)$  es un subgrafo completo de  $H$ . Falta verificar que es maximal. Sea  $p_t \notin C'(A_i)$  un punto de intersección tal que  $p_t$  (como un vértice de  $H$ ) es adyacente a cada vértice de  $C'(A_i)$ . Entonces existen dos arcos  $A_j$  y  $A_k$  como en la figura 3.3 porque  $\mathcal{F}^*$  es una familia dominante y los arcos  $A_i, A_j$  y  $A_k$  deben verificar la propiedad de Helly. Resulta  $p_t$  un vértice universal de  $H$ , lo cual es una contradicción.

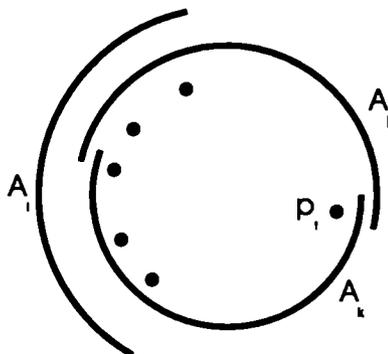


Figura 3.3

Entonces,  $C'(A_i) = C(A_i) \cup U, \forall C(A_i) \in \mathcal{F}^*$ , inducen cliques de  $H$ . Queremos probar que no existe otro clique en  $H$ . Supongamos que existe un clique  $C$  en  $H$ , tal que  $C' = C \setminus U$  y  $C' \not\subseteq C(A_i), \forall C(A_i) \in \mathcal{F}^*$ . Como  $C' \not\subseteq C(A_i)$ , los puntos de intersección de  $C'$  pueden ser dibujados como en la figura 3.4.

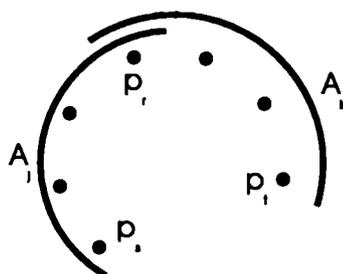


Figura 3.4

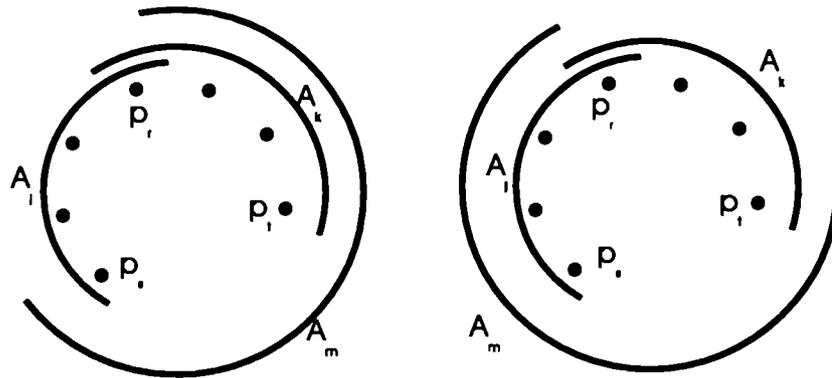


Figura 3.5

Si  $A_j$  y  $A_k$  cubren todo el círculo, entonces  $p_r$  es un vértice universal de  $H$ , lo cual es una contradicción. Sino, existe un arco  $A_m$  que une  $p_s$  con  $p_t$ . Entonces, o bien  $A_j$ ,  $A_k$  y  $A_m$  no verifican la propiedad de Helly, o bien tenemos una de las situaciones de la figura 3.5, que implica que  $p_s$  o  $p_t$  son vértices universales de  $H$ . Cualquiera de estos casos lleva nuevamente a una contradicción.  $\square$

**Corolario 3.1.** *Sea  $G$  un grafo arco-circular Helly. Entonces  $K(G)$  es un grafo arco-circular Helly, un grafo arco-circular clique-Helly y un grafo arco-circular propio.*

*Demostración:*

1.  $K(G)$  es un grafo arco-circular Helly.

Sea  $\mathcal{F}^* = \{C(A_i) \in \mathcal{F} / C(A_i) \not\subset C(A_j), \forall C(A_j) \in \mathcal{F}\}$  una familia dominante de subgrafos completos circulares de  $S_{K(G)}$  como definimos en el Teorema 3.5, y  $U$ , el conjunto de vértices universales de  $K(G)$ . Analizamos la matriz  $B$  con los miembros de  $\mathcal{F}^*$  en las filas (ordenado en forma consecutiva de acuerdo a la representación arco-circular Helly), y  $\{p_1, \dots, p_n\}$  los vértices de  $K(G)$  en las columnas. En cada fila, ponemos 1 si  $p_j$  pertenece al correspondiente  $C(A_i)$ , o 0, si no pertenece. Por construcción, la matriz  $B$  tiene forma de 1's circular. Como necesitamos los cliques de  $K(G)$  en las filas para contruir  $A_{K(G)}$  por el Lema 3.1 tenemos que agregar 1's en las columnas correspondientes a los vértices de  $U$ . Claramente,  $A_{K(G)}$  preserva la forma de 1's circular (es posible que 2 o más filas representen el mismo clique de  $K(G)$ ; en este caso tenemos que dejar una de ellas y eliminar las otras pero la propiedad de 1's circular sigue siendo válida para  $A_{K(G)}$ ). Entonces por el Teorema 3.4,  $K(G)$  es un grafo arco-circular Helly.

2.  $K(G)$  es un grafo arco-circular clique-Helly.

Sabemos que  $K(G)$  es un grafo arco-circular. Por lo tanto, tenemos que mostrar que es clique-Helly. Dividimos la prueba en dos casos.

- (a) Si el grafo  $G$  es clique-Helly, entonces  $K(G)$  es clique-Helly también [33].
- (b) Si el grafo  $G$  no es clique-Helly, sean  $M_1, \dots, M_k$  una familia de cliques de  $G$  minimalmente no Helly y  $p_1, \dots, p_k$  los puntos de intersección correspondientes. Como esta familia es minimalmente no Helly, por cada subconjunto de  $j$  puntos de intersección ( $j < k$ ) tenemos un arco en la representación arco-circular Helly de  $G$  que cubre todos los puntos de intersección de este subconjunto. Pero el grafo  $G$  está en HCA, entonces no podemos tener la situación de la figura 3.6.

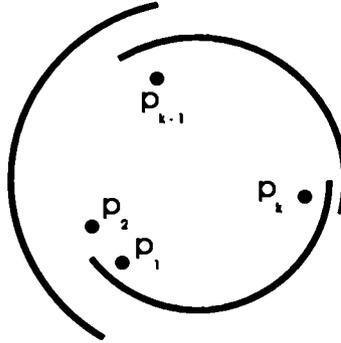


Figura 3.6

Por lo tanto, tenemos dos arcos que cubren todo el círculo y existe un clique  $M_t$  que interseca con cualquier otro clique en  $G$  (figura 3.7). Como resultado, el vértice  $w_t$  en  $K(G)$  (correspondiente al clique  $M_t$  en  $G$  y el punto  $p_t$  en la representación) es un vértice universal y sabemos que todo grafo con un nodo universal es un grafo clique-Helly.

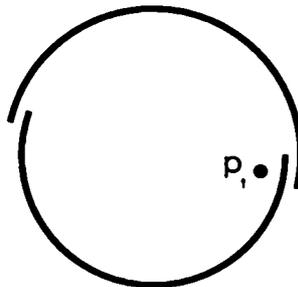


Figura 3.7

3.  $K(G)$  es un grafo arco-circular propio.  
 Sea  $\mathcal{F}^* = \{F_1, \dots, F_r\} = \{C(A_i) \in \mathcal{F} / C(A_i) \not\subset C(A_j), \forall C(A_j) \in \mathcal{F}\}$  una familia dominante de subgrafos completos circulares de  $S_{K(G)}$  como definimos en el Teorema 3.5. Sean  $p_1, \dots, p_k$  los vértices de  $S_{K(G)}$ . Definimos  $F^+(p_i)$  como la mayor subsecuencia  $\{p_i, p_{i+1}, \dots\}$  del orden

circular tal que existe solamente un  $F_j$  de  $\mathcal{F}^*$  que la contenga ( $\mathcal{F}^+$  está bien definida porque cubre  $K(G)$ ). Similarmente, definimos  $F^-(p_i)$  como la mayor subsecuencia  $\{\dots, p_{i-1}, p_i\}$  del orden circular tal que existe solamente un  $F_j$  de  $\mathcal{F}^*$  que lo contenga. Como  $\mathcal{F}^*$  cubre  $K(G)$ ,  $N_{K(G)}[p_i] = F^+(p_i) \cup F^-(p_i)$ . Por cada  $p_i$ , orientamos la arista  $p_i \rightarrow p_k$ , si  $p_k \in F^+(p_i) \setminus F^-(p_i)$  y  $p_k \rightarrow p_i$ , si  $p_k \in F^-(p_i) \setminus F^+(p_i)$ . Claramente, cada arista está orientada en sólo una dirección. Falta orientar las aristas  $(p_i, p_k)$ , cuando  $p_k \in F^+(p_i) \cap F^-(p_i)$ . Estas aristas pueden ser orientados en forma arbitraria. Claramente, el conjunto de entrada de cada  $p_i$  está contenido en  $F^-(p_i)$  y el conjunto de salida está contenido en  $F^+(p_i)$ . Por lo tanto, esta orientación transforma el grafo en un torneo local porque  $F^+(p_i)$  y  $F^-(p_i)$  son subgrafos completos de  $K(G)$ . Entonces,  $K(G)$  es un grafo arco-circular propio (Teorema 3.3).  $\square$

Como consecuencia de este resultado,  $K(\text{HCA}) \subset \text{HCA}$ , significa que  $\text{HCA}$  es una clase cerrada bajo el operador grafo clique  $K$ .

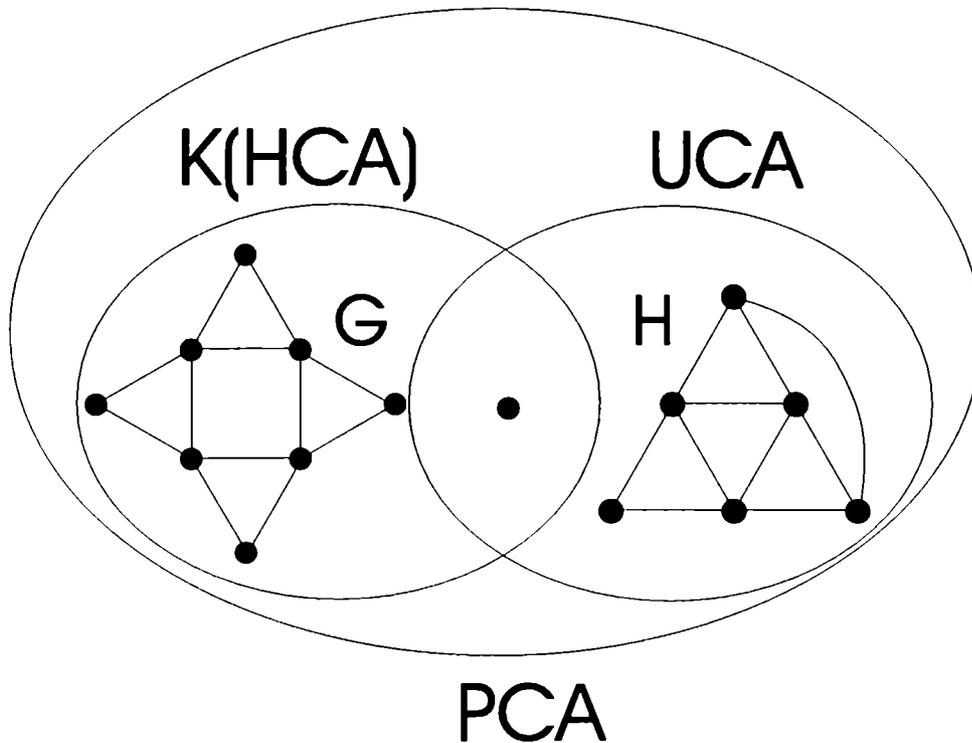


Figura 3.8

**Observación:** Es interesante analizar la relación entre  $K(\text{HCA})$  y  $\text{UCA}$  porque ambos son subclases de  $\text{PCA}$ . Mostramos en la figura 3.8 un grafo  $G$  en  $K(\text{HCA}) \setminus \text{UCA}$ , otro grafo  $H$  en  $\text{UCA} \setminus K(\text{HCA})$  y el grafo trivial (sólo un vértice), el cual está en  $K(\text{HCA}) \cap \text{UCA}$ . El grafo  $G \in K(\text{HCA})$  porque admite el siguiente orden circular (figura 3.9)  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$  y una familia de 4 subgrafos completos circulares ( $F_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ ,  $F_2 = \{v_3, v_4, v_5\}$ ,  $F_3 = \{v_5, v_6, v_7\}$  y  $F_4 = \{v_7, v_8, v_1\}$ ) que verifica la propiedad de

Helly y cubre el grafo  $G$  (Teorema 3.5). En [104], se probó que  $G$  no es un grafo UCA. En [29] (figura 3.2), se probó que el grafo  $H \in UCA \setminus CHCA$ , por lo tanto  $H \notin K(HCA)$  (Corolario 3.1).

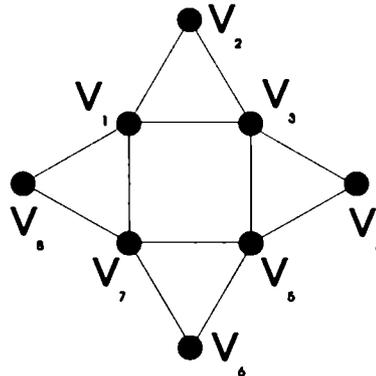


Figura 3.9: el grafo  $G$  con el orden circular

**Corolario 3.2.** Si  $G$  es un grafo arco-circular Helly, entonces o bien  $K^2(G)$  es un subgrafo inducido de  $G$ , o bien  $K^2(G)$  es un grafo completo.

*Demostración:*

Supongamos que  $K(G)$  tiene un vértice universal  $u$ . Entonces, cualquier clique de  $K(G)$  contiene a  $u$ , lo cual implica que  $K^2(G)$  es un grafo completo. Si este no es el caso,  $K(G)$  es un grafo sin vértices universales. Sea  $\mathcal{F}^* = \{C(A_i) \in \mathcal{F} / C(A_i) \not\subset C(A_j), \forall C(A_j) \in \mathcal{F}\}$  una familia dominante de subgrafos completos circulares de  $S_{K(G)}$  como definimos en el Teorema 3.5. Por el Lema 3.1,  $\{C(A_j)\}$ , los miembros de  $\mathcal{F}^*$ , son los únicos cliques de  $K(G)$ , por lo tanto, ellos representan los vértices de  $K^2(G)$ . Es claro que  $\forall C(A_i), C(A_j) \in \mathcal{F}^* (C(A_i) \neq C(A_j)), C(A_i) \cap C(A_j) \neq \emptyset$  si y sólo si  $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ , donde  $A_i$  y  $A_j$  son los arcos de la representación arco-circular Helly, correspondientes a los vértices  $v_i$  y  $v_j$  de  $G$ . Entonces  $K^2(G)$  es un subgrafo inducido de  $G$ .  $\square$

**Notas:**

1. Escalante [33] probó un resultado similar para los grafos clique-Helly. Mostró que si  $G$  es un grafo clique-Helly, entonces  $K^2(G)$  es un subgrafo inducido de  $G$  (Teorema 3.2).
2. De acuerdo a la demostración del Corolario 3.2,  $K^2(G)$  es subgrafo inducido de  $G$  si  $G$  no tiene vértice universal. Además si se tiene una representación arco-circular Helly de  $G$ , se puede determinar en tiempo polinomial los puntos de intersección que representan los cliques de  $G$  y hallar un conjunto de arcos dominantes (se refieren a los puntos de intersección). El grafo que tiene como representación arco-circular solamente a estos arcos es isomorfo a  $K^2(G)$ .

# Capítulo 4

## Grafos clique de grafos circular Helly

En este capítulo, primero definimos una clase de grafos llamada dualmente circular Helly y a continuación presentamos una caracterización de los grafos clique de los grafos circular Helly usando esta clase. También probamos que los grafos clique de los grafos dualmente circular Helly son circular Helly. Cabe destacar que esta simetría también se verifican en algunas clases de grafos clique que figuran en la tabla de la sección 1.4 que son **DE**, **DV** y **RDV**.

Los grafos circular fueron introducidos en [35], donde se muestra una aplicación para resolver un problema de reordenamiento de vagones de un tren propuesto por Knuth [62], usando pilas y colas. Se puede encontrar algoritmos de tiempo polinomial para reconocer los grafos de esta clase en [13, 36, 74, 94].

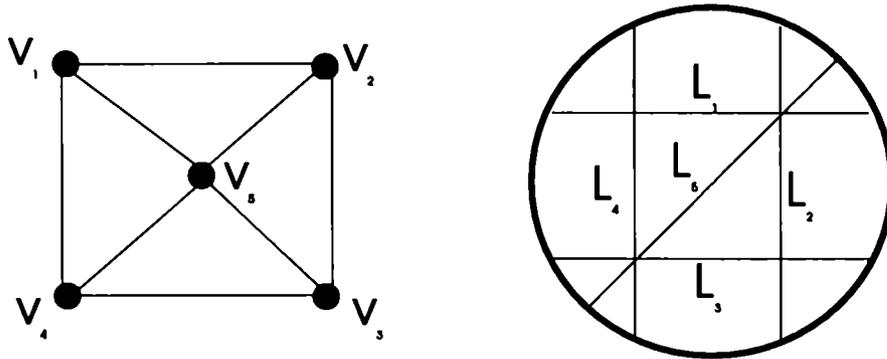


Figura 4.1: Ejemplo de un grafo circular y su modelo de cuerdas.

Un grafo  $G$  es circular si existe un conjunto de cuerdas  $L$  (que se llama modelo) dentro de un círculo y una correspondencia 1-1 entre vértices de  $G$  y cuerdas de  $L$  de manera que dos vértices distintos son adyacentes si y sólo si las cuerdas correspondientes se intersecan. Es decir, un grafo circular es el grafo intersección de cuerdas dentro de un círculo. Sin pérdida de

generalidad, podemos asumir que ningún par de cuerdas tiene un extremo común. La figura 4.1 muestra un grafo circular  $G$  y un modelo  $L$  para él.

A continuación se definen diferentes subclases de los grafos circular:

1. Helly: un grafo  $G$  es circular Helly (**HC**) si existe un modelo  $L$  de cuerdas para  $G$  de manera que el conjunto de cuerdas satisfaga la propiedad de Helly. No se conoce la complejidad de reconocer un grafo en esta subclase. En [28] se conjetura una caracterización que conduciría a un reconocimiento polinomial.
2. Clique-Helly: un grafo  $G$  es circular clique-Helly (**CHC**) si  $G$  es circular y clique-Helly. El algoritmo polinomial para reconocimiento de los grafos clique-Helly [98] sumado a un buen algoritmo para reconocer los grafos circular [13, 36, 74, 94], nos da un algoritmo eficiente para esta subclase.
3. Unitarios: un grafo  $G$  es circular unitario (**UC**) si existe un modelo  $L$  de cuerdas para  $G$  de manera que todas las cuerdas tengan la misma longitud. En [28] se probó que esta subclase es equivalente a la de los grafos arco-circular unitarios.
4. Arco-circular propios: se puede probar fácilmente que la representación en arcos de un grafo **PCA** puede ser transformada en el modelo de cuerdas de un grafo circular. Sólo hay que usar un teorema probado en [39] que dice que todo grafo **PCA** tiene una representación arco-circular propia donde no hay dos arcos que cubran todo el círculo. Hecha esta observación, el punto inicial y final de cada arco en una representación **PCA** pasa a ser el punto inicial y final de cada cuerda, con lo que obtenemos un modelo circular.

Todas las subclases mencionadas, salvo **CHC** son hereditarias. La clase general de los grafos circular también es hereditaria. En [28] (figura 4.2) se exhiben ejemplos minimales que pertenecen a las intersecciones de las subclases de los grafos circular aquí definidas.

En [28], también se probó que un grafo circular Helly no contiene, como subgrafo inducido, a un diamante (Teorema 4.1) y se conjeturó que un grafo circular sin diamantes es circular Helly.

Este capítulo está estructurado de la siguiente forma. En la Sección 1, se revisan algunos teoremas y se dan definiciones preliminares. En la Sección 2, presentamos un teorema que caracteriza los grafos clique de los grafos **HC** y otro que caracteriza los grafos clique de los grafos clique de los grafos **HC** que resultan ser **HC**.

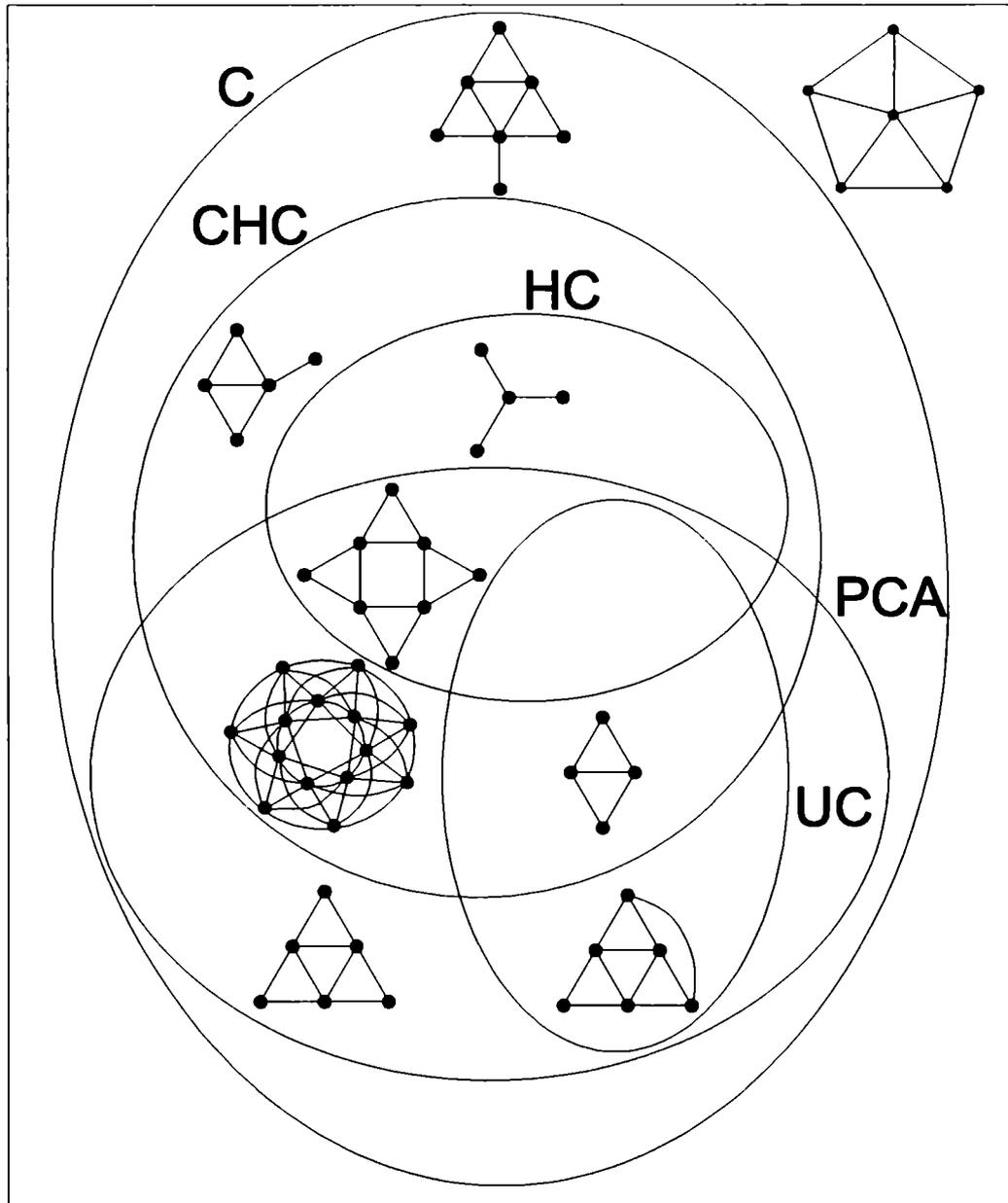


Figura 4.2: Cruce de subclases para los grafos circular

Los resultados de este capítulo serán presentados en [69].

## 4.1 Preliminares

Presentamos aquí dos proposiciones auxiliares que serán utilizadas en una nueva demostración de la Proposición 4.3 presentada por Escalante. Esta última es una extensión del Teorema 3.2 que permite elegir los vértices del grafo  $G$  que inducen un subgrafo isomorfo a  $K^2(G)$  sin usar explícitamente el operador  $K$ .

**Proposición 4.1.** *Sea  $G$  un grafo y  $u, v$  dos vértices de  $G$ .  $N_G[u] \subseteq N_G[v]$  si y sólo si  $C_G(u) \subseteq C_G(v)$ .*

*Demostración:*

$\implies$ ) Supongamos que  $C_G(u) \not\subseteq C_G(v)$ , lo cual quiere decir que existe  $C_i \in C_G(u) \setminus C_G(v)$ . Esto implica que  $\exists w \in C_i / w$  no es adyacente a  $v$ . Entonces  $w \notin N_G[v]$ , pero  $w \in N_G[u]$ . Por lo tanto,  $N_G[u] \not\subseteq N_G[v]$  contradiciendo la hipótesis.

$\impliedby$ ) Se puede ver trivialmente que  $\forall w \in G$ ,  $N_G[w] = \bigcup_{C_i \in C_G(w)} C_i$ . Entonces  $N_G[u] = \bigcup_{C_i \in C_G(u)} C_i$  y  $N_G[v] = \bigcup_{C_i \in C_G(v)} C_i$  y por hipótesis  $C_G(u) \subseteq C_G(v)$ . Vale que  $N_G[u] \subseteq N_G[v]$ .  $\square$

**Proposición 4.2.** *Sea  $G$  un grafo clique-Helly y  $Z$  un clique de  $K(G)$  entonces  $\exists v \in V_G$  tal que  $Z = C_G(v)$ .*

*Demostración:*

Sea  $Z = \{C_1, \dots, C_p\}$  donde  $C_1, \dots, C_p$  son algunos cliques de  $G$  y se intersecan de a pares. Como  $G$  es clique-Helly,  $\bigcap_{1 \leq i \leq p} C_i = T \neq \emptyset$ . Sea  $v \in T$ , entonces  $Z \subseteq C_G(v)$ . Es más,  $Z = C_G(v)$  porque  $Z$  es maximal.  $\square$

**Proposición 4.3 ([33]).** *Sea  $G$  un grafo clique-Helly. Se puede determinar un subconjunto de vértices  $X \subseteq V_G$  tal que el subgrafo inducido de  $G$  por  $X$  es isomorfo a  $K^2(G)$  de la siguiente manera:*

1. *Se particiona el conjunto de vértices en grupos de equivalencia,  $S_1, \dots, S_k / \forall v, w \in S_i, N_G[v] = N_G[w], 1 \leq i \leq k$ .*
2. *Para cada  $S_i$ , se elige un representante  $v_i$ , y el resto de los vértices de  $S_i$  se descartan.*
3. *Si  $N_G[u] \subset N_G[v]$ , se descarta  $u, \forall u, v \in V_G$ .*

*Demostración:*

Sean  $Z_1, \dots, Z_t$  los cliques de  $K(G)$ . Por la Proposición 4.2, para cada clique  $Z_i$  de  $K(G)$ ,  $\exists v_i \in V_G / Z_i = C_G(v_i)$ . Ahora  $Z_j \cap Z_k \neq \emptyset \Leftrightarrow C_G(v_j) \cap C_G(v_k) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists C$  clique de  $G / v_j, v_k \in C \Leftrightarrow v_j$  y  $v_k$  son adyacentes en  $G$  o  $j = k$ . Por lo tanto  $K^2(G)$  es isomorfo al subgrafo de  $G$  inducido por  $\{v_1, \dots, v_t\}$ .

Faltaría ver que el conjunto de vértices  $X$  generado por los pasos de la proposición puede corresponder 1 a 1 con  $Z_1, \dots, Z_t$ .

Sabemos que  $\forall v \in V_G, C_G(v)$  es el conjunto maximal de cliques de  $G$  que

contiene a  $v$ , por lo tanto  $C_G(v)$  es un subgrafo completo de  $K(G)$ . Muchas veces puede existir otro vértice  $w$  que representa el mismo subgrafo completo de  $K(G)$  porque  $C_G(v) = C_G(w)$ , por lo tanto en (1) agrupamos los vértices que son equivalentes, es decir, si  $C_G(v) = C_G(w)$  (como  $G$  es un grafo clique-Helly, entonces por la Proposición 4.1,  $N_G[v] = N_G[w]$ ) entonces  $v$  y  $w$  están en el mismo grupo de equivalencia.

Después, nos quedamos con un único representante de cada grupo de equivalencia (2).

Ahora si para un vértice representante  $v$ ,  $C_G(v)$  no es clique en  $K(G)$  significa que existe un clique  $Z_i = C_G(v_i)$  tal que  $C_G(v) \subset C_G(v_i)$  y por la Proposición 4.1,  $N_G[v] \subset N_G[v_i]$ . O sea, los vértices cuyo vecindario cerrado está contenido propiamente en el vecindario cerrado de otro vértice, no corresponden a cliques de  $K(G)$ , por lo tanto son descartados (3).

Después de estos 3 pasos, los cliques de  $K(G)$  son correspondidos unívocamente con los vértices sobrevivientes.  $\square$

**Teorema 4.1 ([28]).** *Sea  $G$  un grafo circular Helly, entonces  $G$  es circular y no contiene, como subgrafo inducido, a un diamante.*

**Definición 4.1.** *Un grafo  $G$  es dualmente circular Helly (DHC) si existen un conjunto de puntos  $P$  y un conjunto de cuerdas  $L$  dentro del círculo tal que las intersecciones de las cuerdas pertenecen a  $P$ , las cuerdas verifican la propiedad de Helly y existe una correspondencia entre los vértices de  $G$  y los puntos de  $P$  de manera tal que dos vértices de  $G$  son adyacentes si y sólo si hay una cuerda que pasa por los puntos correspondientes en  $P$ .*

En la figura 4.3 se muestra un ejemplo de esta clase de grafos.

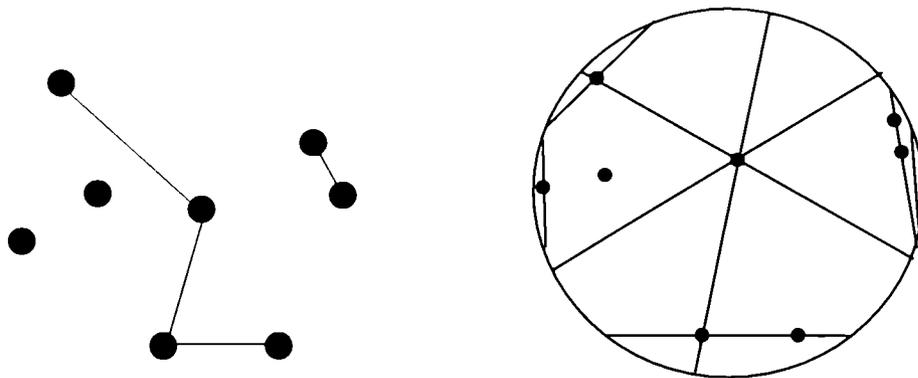


Figura 4.3: Ejemplo de grafo dualmente circular Helly y una representación con puntos y cuerdas.

## 4.2 Grafos clique de los grafos circular Helly

La siguiente proposición es requerida para la prueba del Teorema 4.2.

**Proposición 4.4.** *Si un grafo  $G \in \mathbf{DHC}$ , entonces existen un conjunto de puntos  $P$  y un conjunto de cuerdas  $L$  dentro del círculo con las propiedades descritas en la Definición 4.1 y se verifica además que cada cuerda de  $L$  contiene al menos un punto de  $P$ .*

*Demostración:*

Por la Definición 4.1, existen  $P$  y  $L$  que cumplan las propiedades del enunciado, salvo la última condición que exige que cada cuerda de  $L$  contenga al menos un punto de  $P$ . Si se verifica esta condición, listo. Si no, se eliminan aquellas cuerdas de  $L$  que no contienen ningún punto de  $P$ . El conjunto  $P$  y el conjunto de cuerdas resultante definen un grafo isomorfo a  $G$ .  $\square$

Presentamos aquí, el teorema que prueba  $K(\mathbf{HC}) = \mathbf{DHC}$ .

**Teorema 4.2.** *Un grafo  $H \in K(\mathbf{HC})$  si y sólo si  $H \in \mathbf{DHC}$ .*

*Demostración:*

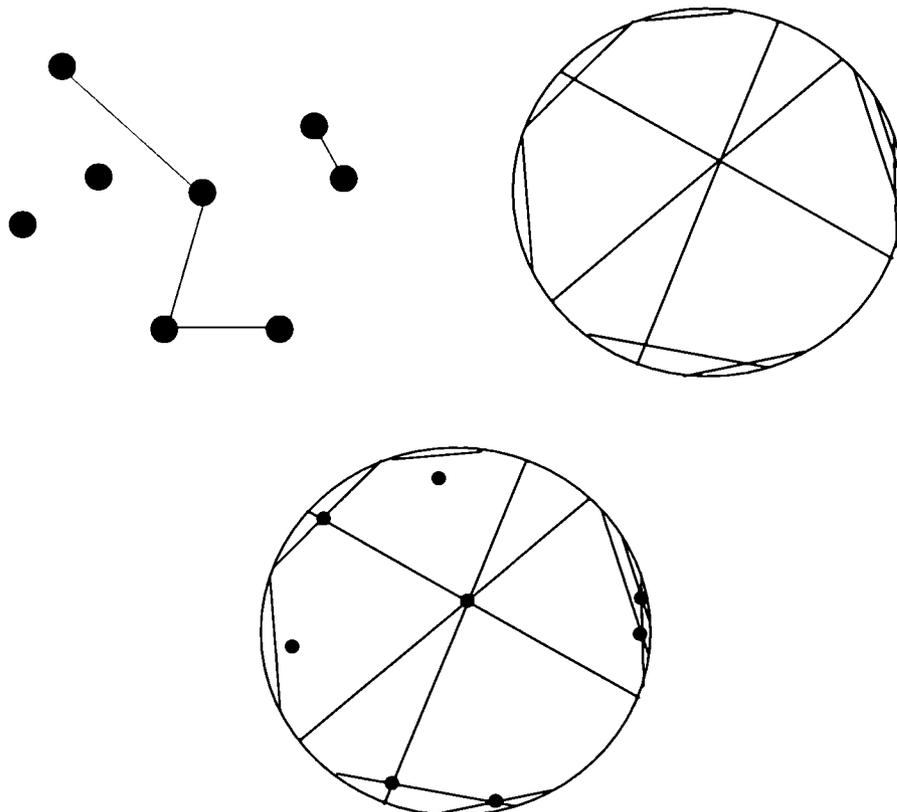


Figura 4.4: Ejemplo de como se construye  $P$  a partir de un modelo Helly  $L$ .

$\implies$ ) Si  $H \in K(\mathbf{HC})$ , entonces existe un grafo  $G \in \mathbf{HC}$  con un modelo Helly  $L$  y  $K(G) = H$ . Sea  $P$  el conjunto que contiene las intersecciones de las cuerdas de  $L$  y además contiene también otros puntos aislados dentro del círculo, tanto como la cantidad de vértices aislados que haya en  $G$ . Veamos que utilizando  $P$  y  $L$ , se puede probar que  $H \in \mathbf{DHC}$ .

Los vértices de  $H$  son cliques en  $G$ , al ser  $G$  circular Helly, sus cliques de tamaño  $\geq 2$  pueden identificarse con las intersecciones de  $L$  (modelo Helly) que forman parte de  $P$  y los clique  $K_1$  (vértices aislados) de  $G$  corresponden 1 a 1 con los otros puntos de  $P$  (observación: estos cliques de  $G$  son transformados en vértices aislados en  $H$ ). Ahora dos vértices de  $H$  son adyacentes, si y sólo sí, los cliques correspondientes en  $G$ , se intersecan. Esto ocurre si y sólo sí, los dos cliques corresponden a puntos de intersección de  $L$  y que exista una cuerda que pasa por ellos. Entonces,  $H \in \mathbf{DHC}$ .

$\Leftarrow$ ) Si  $H \in \mathbf{DHC}$ , entonces por la Proposición 4.4, existen un conjunto de puntos  $P$  y un conjunto de cuerdas  $L$  dentro del círculo tal que las intersecciones de las cuerdas pertenecen a  $P$ , las cuerdas verifican la propiedad de Helly y existe una correspondencia 1 a 1 entre los vértices de  $G$  y los puntos de  $P$  de manera tal que dos vértices de  $G$  son adyacentes si y sólo sí pasa una cuerda por los puntos correspondientes en  $P$ . Además cada cuerda de  $L$  contiene al menos un punto de  $P$ .

Claramente, si tomamos  $L$  como modelo de un grafo circular  $G$ ,  $G$  es circular Helly porque  $L$  es Helly. Ahora por cada punto de  $P$  que no es intersección de cuerdas de  $L$ , vamos a agregar una cuerda de acuerdo a los siguientes casos:

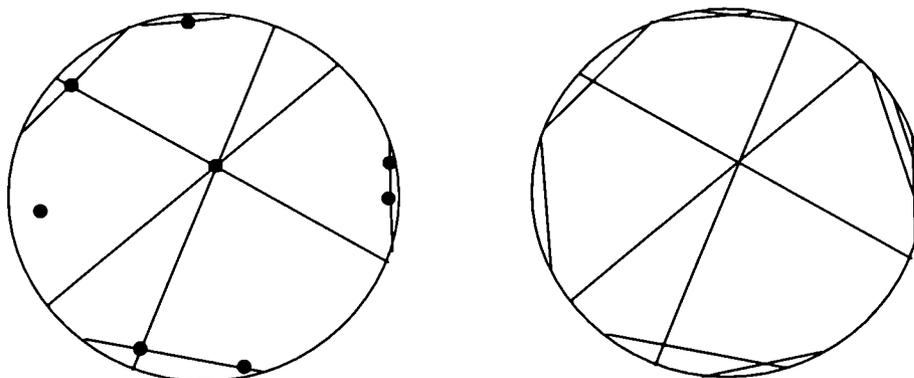


Figura 4.5: Ejemplo de como se construye  $L'$  a partir de  $P$  y  $L$ .

1. Si ninguna cuerda pasa por el punto en cuestión, o sea, este punto es aislado dentro del círculo, se agregará una cuerda  $l'$  que no toque a ninguna otra cuerda. Esto se puede hacer, porque siempre hay un segmento del círculo donde no pasa ninguna cuerda.
2. Si pasa exactamente una cuerda  $l$  por el punto en cuestión, se agregará una cuerda  $l''$  de manera tal que solamente se corta con la cuerda  $l$ .

Esto se puede hacer sin problema, porque siempre se puede trazar una cuerda nueva sobre otra alrededor de la terminación de esta última sin cortar más cuerdas.

Sea  $L'$  el nuevo conjunto de cuerdas con las cuerdas tipos  $l'$  y  $l''$  agregadas en 1 y 2, respectivamente. Tomamos  $L'$  como modelo de otro grafo  $G'$ . Al ser  $L'$  Helly (porque cada cuerda agregada se corta solamente con una cuerda o ninguna),  $G'$  es un grafo circular Helly.

Veamos que  $K(G') \cong H$ . Los vértices de  $H$  corresponden con los puntos de  $P$  y se los pueden clasificar de la siguiente manera:

- (a) Los puntos que son intersecciones de  $L$ : continúan siendo intersecciones en  $L'$ .
- (b) Los puntos a los cuales les pasa una sola cuerda  $l$  de  $L$ : son los puntos identificados en el caso 2. Por cada uno de ellos, se agregó una cuerda  $l''$  y se produjo una nueva intersección por el cruce de las cuerdas  $l$  y  $l''$  en  $L'$ .
- (c) Los puntos aislados: son los puntos identificados en el caso 1. Por cada punto, se agregó una cuerda  $l'$ . Todas estas cuerdas agregadas son aisladas en  $L'$ .

Los puntos de (a) y (b) corresponden a intersecciones de  $L'$  que a su vez representan a todos los cliques de tamaño  $\geq 2$  de  $G'$ . Los puntos de (c) corresponden a las cuerdas aisladas de  $L'$  (cabe destacar que en  $L'$  no quedaron cuerdas aisladas de  $L$ , ya que estas cuerdas contienen al menos un punto de  $P$ ) y representan a los cliques  $K_1$  de  $G'$ . A través de esta relación 1 a 1 entre los puntos de  $P$  y cliques de  $G'$ , vamos a probar el isomorfismo entre  $K(G')$  y  $H$ .

En  $G'$ , dos cliques se intersecan si y sólo si corresponden a intersecciones de  $L'$  y además existe una cuerda  $l$  que pasa por ellas (claramente,  $l \in L$  porque  $l \notin L' \setminus L$ , por construcción). Sabemos que las intersecciones de  $L'$  provienen de (a) y (b). La prueba estaría completa si probamos que una cuerda  $l \in L$  pasa por dos intersecciones de  $L'$  si y sólo si  $l$  también pasa por los dos puntos de  $P$  correspondientes a ellas. Es trivial ver que lo anterior es cierto, cuando ambas intersecciones son de tipo (a). Si una de ellas es de tipo (b), también es cierto, porque la intersección en cuestión es generada por un punto de  $P$  que está sobre una única cuerda  $l$  de  $L$  y esta cuerda  $l$  es la única cuerda de  $L$  que pasa por la intersección generada. Conclusión:  $K(G') \cong H$  y  $H \in K(\text{HC})$ .  $\square$

A continuación presentamos el Teorema 4.3 que prueba  $K(\text{DHC}) = \text{HC}$ .

**Teorema 4.3.** *Un grafo  $G \in K(\text{DHC})$  si y sólo si  $G \in \text{HC}$*

*Demostración:*

$\implies$ ) Si  $G \in K(\mathbf{DHC})$ , entonces existe  $H \in \mathbf{DHC}$  tal que  $K(H) = G$ . Ahora por el Teorema 4.2,  $H \in K(\mathbf{HC})$ , existe  $G' \in \mathbf{HC}$  tal que  $K(G') = H$  y llegamos a la conclusión que  $K^2(G') = K(K(G')) = K(H) = G$ . Por otro lado,  $G' \in \mathbf{HC}$  y por el Teorema 4.1,  $G'$  es un grafo sin diamantes. Sabemos que la clase de los grafos sin diamantes es una subclase de los grafos clique-Helly, entonces  $G'$  es clique-Helly. Por el Teorema 3.2,  $K^2(G') = G$  es un subgrafo inducido de  $G'$ , al ser  $\mathbf{HC}$  una subclase de los grafos hereditaria,  $G \in \mathbf{HC}$ .

$\impliedby$ ) La idea es construir un grafo  $G' \in \mathbf{HC}$  tal que  $K^2(G') = G$ . Entonces,  $K(G') \in K(\mathbf{HC})$ , por el Teorema 4.2,  $K(G') \in \mathbf{DHC}$  y por lo tanto  $K^2(G') = G = K(K(G')) \in K(\mathbf{DHC})$ .

$G'$  se construye a partir de  $G$  de la siguiente manera. Sean  $v_1, \dots, v_n$  los vértices de  $G$  ordenados por sus grados de mayor a menor. Supongamos que hay  $t$  vertices aislados en  $G$  ( $v_{n-t+1}, \dots, v_n$ ). Se agregan  $n - t$  vértices  $w_1, \dots, w_{n-t}$  y  $n - t$  aristas  $(v_1, w_1), \dots, (v_{n-t}, w_{n-t})$ .

Primero debemos mostrar que  $G' \in \mathbf{HC}$ . Para ello, se debe encontrar un modelo Helly  $L'$  para  $G'$ . Sabemos que  $G \in \mathbf{HC}$ , por lo tanto existe un modelo Helly  $L$  que lo representa. Sea  $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ . Las cuerdas  $l_1, \dots, l_n$  se corresponden 1 a 1 con los vértices  $v_1, \dots, v_n$ , entonces para extenderlo a un modelo  $L'$  de  $G'$ , debemos agregar  $n - t$  cuerdas  $l'_1, \dots, l'_{n-t}$  a  $L$  y cada  $l'_i$  se corta solamente con  $l_i$ . Esto es posible de hacer, por que siempre es posible trazar una nueva cuerda que cruce a otra alrededor de la terminación de esta última sin cortar más cuerdas. Además el modelo resultante sigue siendo Helly. Con esto probamos que  $G' \in \mathbf{HC}$ .

Ahora veamos que  $K^2(G') = G$ . Sabemos que  $G' \in \mathbf{HC}$ , entonces  $G'$  es clique-Helly. Por el Teorema 3.2,  $K^2(G')$  es subgrafo inducido de  $G'$  y se pueden obtener los vértices de  $K^2(G')$  aplicando a  $G'$  los pasos dados en la Proposición 4.3.

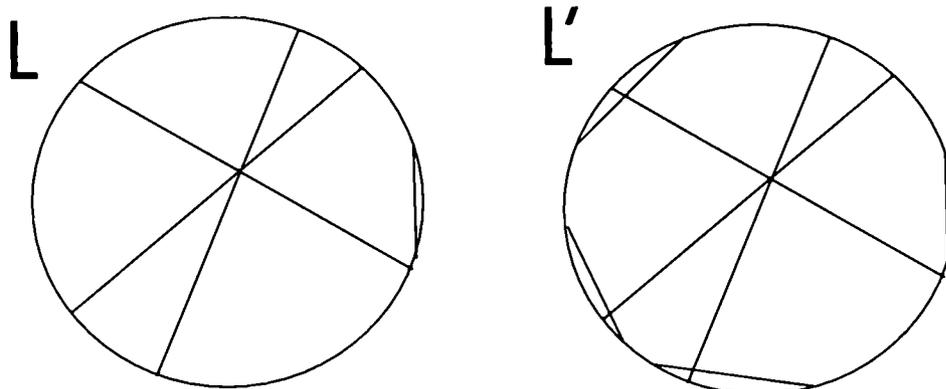


Figura 4.6: Ejemplo de como se construye  $L'$  a partir de  $L$ .

1. Se particiona el conjunto de vértices en grupos de equivalencia,  $S_1, \dots, S_k$  /  $\forall v, w \in S_i, N_G[v] = N_G[w], 1 \leq i \leq k$ .  
 → Los vecindarios cerrados de los vértices de  $G'$  son los siguientes:  $N_{G'}[w_i] = \{v_i, w_i\}, 1 \leq i \leq n-t; N_{G'}[v_i] = N_G(v_i) \cup \{v_i, w_i\} (N_G(v_i) \neq \emptyset), 1 \leq i \leq n-t; N_{G'}[v_i] = \{v_i\}, n-t+1 \leq i \leq n$ . En este caso, los vecindarios cerrados de cada vértice en  $G'$  son todos diferentes. Entonces  $k = 2n - t$  y cada  $S_i$  contiene un sólo vértice.
2. Para cada  $S_i$ , se elige un representante  $v_i$ , y el resto de los vértices de  $S_i$  se descartan.  
 → Como en cada  $S_i$  hay un sólo vértice, ese es el representante y no se descarta ningún vértice.
3. Si  $N_G[u] \subset N_G[v]$ , se descarta  $u, \forall u, v \in V_G$ .  
 → Los únicos casos que verifican la condición anterior son  $N_{G'}[w_i] \subset N_{G'}[v_i], 1 \leq i \leq n-t$ . Por lo tanto se eliminan los vértices  $w_1, \dots, w_{n-t}$ , quedando solamente  $v_1, \dots, v_n$ , los vértices originales de  $G$ .

Entonces  $K^2(G')$  es el subgrafo inducido de  $G'$  por  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Como las adyacencias entre los vértices originales de  $G$  no fueron modificadas en la construcción de  $G'$ ,  $K^2(G') = G$ . □

**Observaciones:**

1. **HC  $\not\subseteq$  DHC.**

Se muestra en la figura 4.7 que el grafo  $K_{3,3} \in \text{HC}$ .

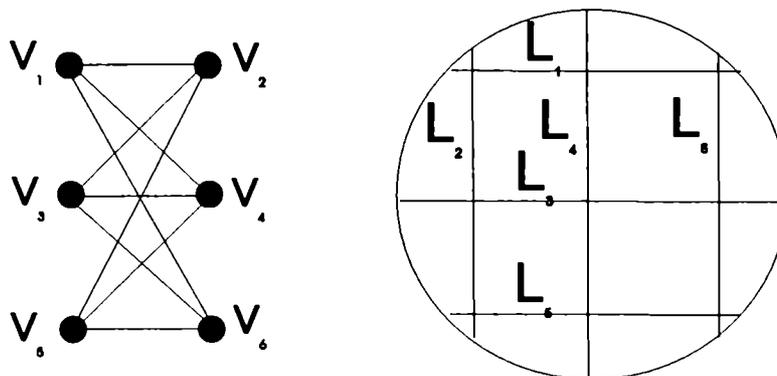


Figura 4.7: El grafo  $K_{3,3}$  y un modelo Helly de él.

Veamos que  $K_{3,3} \notin \text{DHC}$ . Supongamos que  $K_{3,3} \in \text{DHC}$ , entonces existen  $P = \{p_1, \dots, p_6\}$  y  $L$  que lo definen como grafo DHC. Asumimos que  $p_1, \dots, p_6$  corresponden 1 a 1 con  $v_1, \dots, v_6$ . Necesariamente en  $L$  existen seis cuerdas que unen  $v_1$  con  $v_2, v_2$  con  $v_3, v_3$  con  $v_4, v_4$  con  $v_5, v_5$  con  $v_6$  y  $v_6$  con  $v_1$ , respectivamente (una cuerda no puede pasar

por más de dos puntos de  $P$  porque  $K_{3,3}$  no contiene, como subgrafo inducido, a  $K_3$ ). Además, con estas 6 cuerdas  $(l_1, \dots, l_6)$  definimos donde están ubicados los seis puntos de  $P$  (figura 4.8).

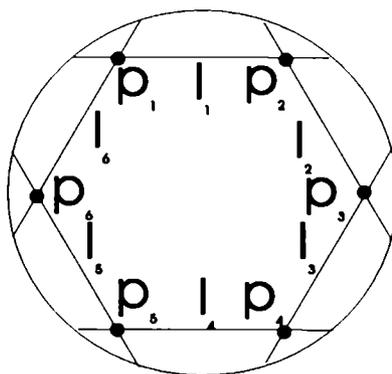


Figura 4.8

Ahora tenemos que trazar la cuerda  $l_7$  que une  $p_1$  con  $p_4$  (figura 4.9) porque  $v_1$  y  $v_4$  son adyacentes.

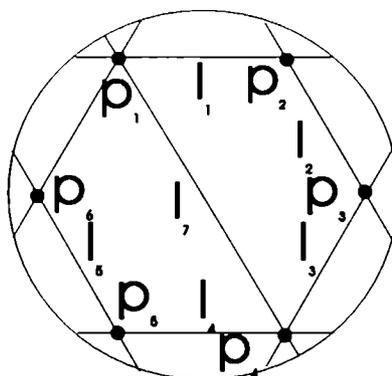


Figura 4.9

También hay que trazar la cuerda  $l_8$  que une  $p_2$  con  $p_5$  porque  $v_2$  y  $v_5$  son adyacentes. Esto es imposible de hacerse sin cruzar  $l_8$  con  $l_7$ . Si se intersecan  $l_7$  con  $l_8$ , dicha intersección debe pertenecer a  $P$ , pero  $P$  ya tiene sus seis puntos identificados y ubicados en el círculo. Lo cual sería absurdo. Consecuencia:  $K_{3,3} \notin \text{DHC}$  y  $\text{HC} \not\subseteq \text{DHC}$

2.  $\text{DHC} \not\subseteq \text{HC}$ .

Se muestra en la figura 4.10, un conjunto de cuerdas  $L = \{l_1, \dots, l_6\}$  y un conjunto de puntos  $P = \{p_1, \dots, p_9\}$  dentro de un círculo. Ellos definen un grafo  $G$ .

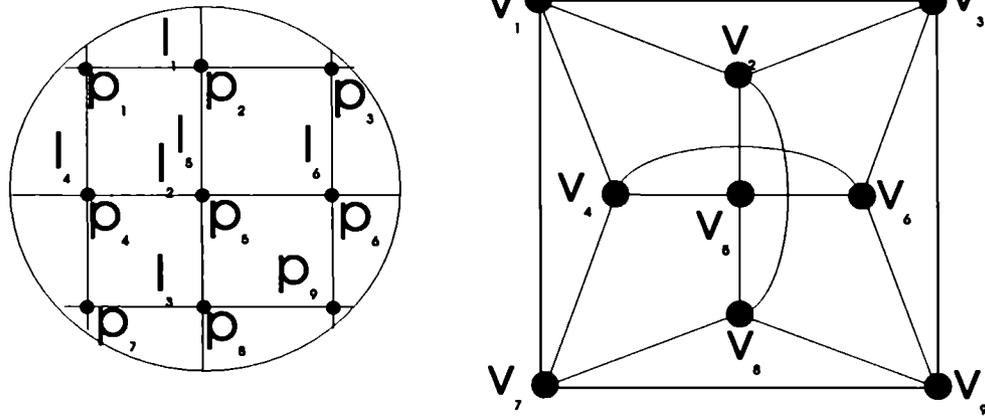


Figura 4.10:  $P$  y  $L$ , y el grafo  $G$ .

Veamos que  $G \notin \mathbf{HC}$ . Supongamos que  $G \in \mathbf{HC}$ , entonces existe un modelo Helly  $L'$  que representa a  $G$ . Como los vértices de  $G$  que corresponden a  $p_1, p_3, p_9$  y  $p_7$  inducen un ciclo en  $G$ . En  $L'$  debe existir 4 cuerdas ( $l_1, l_3, l_9$  y  $l_7$ ) que corresponden a ellos de la forma que está en la figura 4.11.

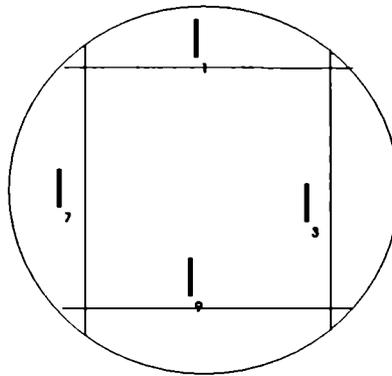


Figura 4.11

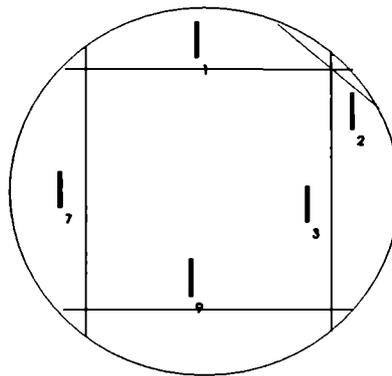


Figura 4.12

Ahora, como el vértice correspondiente a  $p_2$  es adyacente a los de  $p_1$  y  $p_3$  pero no a los de  $p_7$  y  $p_9$ . Entonces  $l_2$  debe ser agregado de la forma que está en la figura 4.12.

El vértice que corresponde a  $p_8$  es adyacente a los de  $p_7$ ,  $p_9$  y  $p_2$  pero no a los de  $p_1$  y  $p_3$ . Entonces  $l_8$  debe cortar solamente a  $l_7$ ,  $l_9$  y  $l_2$ . Esto es imposible, por lo tanto  $G \notin \mathbf{HC}$  (es más,  $G$  ni siquiera es un grafo circular) y  $\mathbf{DHC} \not\subseteq \mathbf{HC}$ .

# Capítulo 5

## Grafos altamente clique-imperfectos

Hasta ahora, hemos presentado resultados relacionados directamente con los grafos clique. En este capítulo vamos a mencionar otras definiciones que surgen también de los cliques de un grafo.

**Definición 5.1.** *Un conjunto independiente de cliques (clique-independent set) de un grafo  $G$  es un conjunto de cliques de  $G$  que son disjuntos entre sí.*

**Definición 5.2.** *Un conjunto transversal de los cliques (clique-transversal set) de un grafo  $G$  es un conjunto de vértices de  $G$  tal que cualquier clique de  $G$  contiene al menos un vértice de este conjunto. También decimos que este conjunto de vértices cubre a todos los cliques de  $G$ .*

**Definición 5.3.** *El número de clique-estabilidad  $\alpha_C(G)$  de un grafo  $G$  es el tamaño del conjunto independiente de cliques, máximo de  $G$ .*

**Definición 5.4.** *El número clique-transversal  $\tau_C(G)$  de un grafo  $G$  es el tamaño del conjunto transversal de los cliques, mínimo de  $G$ .*

Se puede relacionar estas nuevas definiciones con los grafos clique.

- Es fácil de verificar que  $\alpha_C(G) = \alpha(K(G)) = \omega(\overline{K(G)})$  para cualquier grafo  $G$ , donde  $\alpha$  es el número de estabilidad y  $\omega$  es el tamaño del clique máximo.
- Si  $G$  es un grafo clique-Helly, entonces también es cierto que  $\tau_C(G) = \theta(K(G)) = \chi(\overline{K(G)})$ , donde  $\theta$  es el menor número de cliques para cubrir el grafo y  $\chi$  es el número cromático. Se puede probar fácilmente esto usando el hecho de que los cliques de  $K(G)$  se corresponden a vértices no dominados (estrictamente) de  $G$  y los vértices de  $K(G)$  se corresponden a los cliques de  $G$ .

Además, podemos ver la relación entre estos 2 números  $\tau_C$  y  $\alpha_C$ . Claramente,  $\tau_C(G) \geq \alpha_C(G)$  para cualquier grafo  $G$ . En [40], fueron definidos los grafos clique-perfectos.

**Definición 5.5 ([40]).** *Un grafo  $G$  es clique-perfecto si  $\tau_C(H) = \alpha_C(H)$ , para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$ .*

Los grafos perfectos fueron definidos por Berge [6] de una manera similar, pero en lugar de  $\tau_C$  y  $\alpha_C$  se utilizan  $\chi$  y  $\omega$  (la desigualdad que se verifica para cualquier grafo  $G$  es " $\chi(G) \geq \omega(G)$ "). El estudio de los grafos perfectos es uno de los tópicos más interesantes en teoría de grafos y también uno de los más estudiados.

**Definición 5.6 ([6]).** *Un grafo  $G$  es perfecto si  $\chi(H) = \omega(H)$ , para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$ .*

Los grafos perfectos no son necesariamente grafos clique-perfectos, por ejemplo el grafo de Hajós de la figura 1.1. Por otro lado, los grafos clique-perfectos tampoco son necesariamente grafos perfectos (respondiendo a la pregunta formulada en [40]). Los grafos  $\overline{C}_{6j+3}$ , son clique-perfectos pero no perfectos, para cualquier  $j \geq 1$  [89].

El problema de determinar  $\tau_C(G)$  es NP-hard [32], también lo es el problema de encontrar  $\alpha_C(G)$  [16]. Ambos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial para los grafos fuertemente cordales [16], los grafos de comparabilidad [1] y los grafos arco-circular Helly [28, 40].

Una pregunta natural es "¿Será posible hallar una familia de grafos, donde la diferencia entre su número clique-transversal y su número de clique-estabilidad es arbitrariamente grande?" Vamos a dar una simple descripción de tal familia de grafos.

Denotamos  $F_t$ ,  $t \geq 1$ , el grafo *Split* obtenido de la siguiente construcción. Los vértices de  $F_t$  pueden ser particionados en un clique  $K_{2t+1}$  y un conjunto independiente  $I_j$  con  $j$  vértices, donde  $j = \binom{2t+1}{t+1}$ . Cada vértice de  $I_j$  es adyacentes precisamente a un subconjunto diferente de  $t+1$  vértices de  $K_{2t+1}$ .

**Teorema 5.1.** *Para cualquier  $t \geq 1$ ,  $\alpha_C(F_t) = 1$  y  $\tau_C(F_t) = t + 1$ .*

*Demostración:*

Existen  $j + 1$  cliques en  $F_t$ . Uno de ellos es  $K_{2t+1}$  y cada uno de los otros  $j$  cliques es formado por un vértice de  $I_j$  y un subconjunto diferente de  $t + 1$  vértices de  $K_{2t+1}$ . Claramente no es posible elegir 2 cliques disjuntos, por lo tanto  $\alpha_C(F_t) = 1$ . Por otro lado,  $\tau_C(F_t) \leq t + 1$ , porque cualquier conjunto de  $t + 1$  vértices de  $K_{2t+1}$  cubre el conjunto de cliques. Para ver que  $\tau_C(F_t) \geq t + 1$ , supongamos que existe un conjunto de  $t$  vértices que cubre todos los cliques de  $F_t$ . Sea  $t = t_1 + t_2$ , donde  $t_1$  es el número de vértices de este conjunto que están en  $K_{2t+1}$  y  $t_2$  es el número de vértices que están en

$I_j$ . Como  $2t + 1 - t_1 = t + 1 + t - t_1 = t + 1 + t_2$ , tenemos  $\binom{t+1+t_2}{t+1} > t_2$  cliques para ser cubiertos por  $t_2$  vértices de  $I_j$ , donde cada vértice de  $I_j$  puede cubrir a lo sumo un clique, una contradicción.  $\square$

El primer miembro de esta familia  $F_1$  es el grafo de Hajós de la figura 1.1.

**Notas:**

1. Esta familia es similar a la familia de grafos altamente imperfectos de Mycielski [73] donde la diferencia entre el número cromático y el tamaño del clique máximo es arbitrariamente grande.
2. Esta familia fue presentada en [31].

# Capítulo 6

## Conclusiones y problemas abiertos

Hemos presentado en esta tesis una serie de nuevos resultados relacionados con los grafos clique, en particular los grafos  $t$ -self-clique, los grafos clique de los grafos arco-circular Helly y los grafos clique de los grafos circular Helly. A su vez, presentamos una familia de grafos altamente clique-imperfectos.

En la sección 2.1, presentamos una condición suficiente con restricciones sobre el grado mínimo  $\delta(G) \geq 2$  y el *girth*  $g(G) \geq 6k + 1$  de un grafo  $G$ , para que  $G^{2k}$  sea self-clique. Este resultado es muy poderoso, en el sentido que, tomando un grafo  $G$  cualquiera con  $\delta(G) \geq 2$  y  $g(G) \geq 7$ , seguramente podemos encontrar uno o más grafos self-clique. Esto permite conseguir una cantidad importante de grafos self-clique computacionalmente. También en la misma sección, presentamos una caracterización para que un grafo clique-Helly  $G$  sea self-clique comprobando si tiene una matriz clique  $A_G$  quasi-simétrica. Además podemos asegurar que si un grafo tiene una matriz clique quasi-simétrica, entonces es clique-Helly. Sería interesante investigar bajo qué condiciones, una matriz clique es quasi-simetrizable (permutando filas y/o columnas) y si esto permite conducir a un algoritmo polinomial para reconocimiento de los grafos self-clique que son clique-Helly. Si lo anterior se pudiera concretar con éxito, entonces dado un grafo clique-Helly  $G$  cualquiera, podemos determinar en tiempo polinomial, si  $G$  es self-clique, si  $G$  es 2-self-clique o  $G$  no es  $t$ -self-clique para ningún  $t$ . Por otro lado, la cuestión central sigue abierta: es posible hallar una caracterización completa de grafos self-clique? También conjeturamos que se puede reemplazar “matriz clique quasi-simétrica” en la caracterización mencionada por “matriz clique simétrica” (Conjetura 2.1). Si esto pudiera confirmarse, sería una caracterización aún más elegante. Aunque no sabemos si esto hace más fácil resolver el problema de reconocimiento. Finalmente en la misma sección, presentamos una manera de construir grafos self-clique a partir de los grafos bipartitos cuyos vértices tienen grado al menos dos y que tengan una matriz de adyacencia reducida simétrica. En otras palabras, esta construcción permite encontrar un grafo self-clique a partir de una matriz binaria simétri-

ca cualquiera (cada fila debe tener al menos dos 1's). Lo cual significa que se puede fabricar ejemplos de grafos self-clique de una forma automática y rápida.

En la sección 2.2, presentamos dos familias de grafos clique-Helly que son 2-self-clique. La primera es dada a partir de una condición suficiente que exige un grafo  $G$  con  $\delta(G) \geq 2$  y la existencia de un subconjunto de vértices  $S$  que verifica algunas propiedades. Por cada  $S$  hallado, se construye un  $G'$  que es un grafo 2-self-clique. Este resultado también es apto para generar masivamente ejemplos de grafos 2-self-clique. La segunda familia es generada a través de otra condición suficiente que pide que un grafo  $G$  tenga aristas que se pueden particionar en dos subconjuntos  $E_1$  y  $E_2$ , donde los vértices de  $G$  con las aristas de  $E_1$  forman ciclos disjuntos de longitud al menos 4 ( $G_1$ ), los mismos vértices con las aristas de  $E_2$  forman un grafo clique-Helly ( $G_2$ ) y cada ciclo de  $G_1$  se interseca con una componente conexa de  $G_2$  en a lo sumo un vértice. En principio, esta condición no es útil para generar masivamente ejemplos de grafos 2-self-clique. Pero en la misma sección presentamos una construcción que usando cualquier grafo clique-Helly con al menos una arista, arma un grafo 2-self-clique que verifica esta condición suficiente.

Es importante resaltar que el Teorema 2.1 (Escalante) caracteriza los grafos clique-Helly que son self-clique o 2-self-clique y a su vez esta caracterización conduce a un algoritmo de reconocimiento de tiempo polinomial. Ahora sumando la caracterización de los grafos self-clique de los grafos clique-Helly propuesta en la sección 2.1, obtenemos una caracterización indirecta de los grafos 2-self-clique para los grafos clique-Helly. Si se pudiera encontrar un algoritmo polinomial de reconocimiento para los grafos self-clique de los grafos clique-Helly, entonces también se obtendría un algoritmo polinomial para el reconocimiento de los grafos 2-self-clique para los grafos clique-Helly.

El capítulo 3 se dedica exclusivamente a los grafos clique de los grafos arco-circular Helly. Allí presentamos una caracterización muy parecida a la caracterización general de los grafos clique de Robert y Spencer [91], salvo que en lugar de subgrafos completos, pedimos que sean subgrafos completos circulares. Esta caracterización en principio no conduce a un algoritmo polinomial de reconocimiento. Es una tarea pendiente verificar este punto. También concluimos que los grafos clique de los grafos arco-circular Helly son grafos arco-circular Helly, grafos arco-circular propios y grafos arco-circular clique-Helly. Además analizamos la relación entre los grafos clique de los grafos arco-circular Helly con los grafos arco-circular unitarios (figura 3.8). Por último en este capítulo, obtenemos un resultado similar al de Escalante [33] que dice que la segunda iteración de grafos clique de un grafo clique-Helly  $G$  es subgrafo inducido de  $G$ . En este caso, para un grafo arco-circular Helly  $G$ ,  $K^2(G)$  es subgrafo inducido de  $G$  o es un grafo completo.

En el capítulo 4, presentamos resultados sobre los grafos clique de los grafos circular Helly. Primero definimos qué son los grafos dualmente circular Helly y mostramos que ellos son los grafos clique de los grafos circular Helly. Y a su vez probamos que los grafos clique de los grafos dualmente

circular Helly son los grafos circular Helly. También vimos que estas dos clases de grafos son diferentes. Finalmente llegamos a la conclusión de que tanto para los grafos circular Helly como para los grafos dualmente circular Helly, todavía no se han podido encontrar caracterizaciones que conducen a algoritmos de reconocimiento de tiempo polinomial. En [28], se conjetura que los grafos circular Helly son equivalentes a los grafos circular sin diamantes. Si esto es cierto, se tendría una caracterización y un algoritmo polinomial de reconocimiento para los grafos circular Helly.

En el capítulo 5, presentamos una familia de grafos altamente clique-imperfectos donde cada  $F_t$  de esta familia verifica " $\tau_C(F_t) - \alpha_C(F_t) = t$ ", donde  $t$  es un entero positivo arbitrario. Sin embargo el tamaño de  $F_t$  crece exponencialmente con respecto a  $t$  (algo similar le pasa a la familia de grafos altamente imperfectos de Mycielski).

En resumen, en los grafos  $t$ -self-clique, se puede seguir trabajando sobre la Conjetura 2.1 que permite lograr una caracterización más elegante de los grafos self-clique de los grafos clique-Helly y paralelamente realizar una investigación sobre algoritmos de reconocimiento. Y como camino alternativo, se puede buscar otras caracterizaciones sobre los grafos self-clique o sobre los grafos 2-self-clique de los grafos clique-Helly que serían eventualmente equivalentes. En los grafos clique de los grafos arco-circular Helly, habría que investigar si se puede encontrar un algoritmo de reconocimiento a través de la caracterización presentada, o es necesario buscar otras caracterizaciones. Algo similar también se debe hacer para los grafos clique de los grafos circular Helly, con la salvedad de que no hay manera hasta el momento de verificar que un grafo sea circular Helly. Con referencia a la familia de grafos altamente clique-imperfectos, se puede intentar conseguir otra familia de grafos cuya diferencia entre el número clique-transversal y el número de clique-estabilidad puede crecer arbitrariamente pero el crecimiento del tamaño de sus miembros debe ser lineal o polinomial con respecto a esa diferencia.

Todavía quedan muchas subclases de grafos para las que no se ha podido caracterizar su grafo clique como: los grafos arco-circular, los grafos arco-circular propios, los grafos arco-circular unitarios, los grafos arco-circular clique-Helly, los grafos circular, los grafos circular clique-Helly, por mencionar algunos.

También es posible realizar a futuro otras líneas de investigación sobre los grafos clique-inversos y la convergencia.

# Bibliografía

- [1] V. Balachandhran, P. Nagavamsi and C. Pandu Ragan, Clique transversal and clique independence on comparability graphs, *Information Processing Letters* 58, (1996), 181–184.
- [2] R. Balakrishnan and P. Paulraja, Self-clique graphs and diameters of iterated clique graphs, *Utilitas Mathematica* 29, (1986), 263–268.
- [3] H. Bandelt and E. Prisner, Clique Graphs and Helly Graphs, *Journal of Combinatorial Theory, Serie B* 51, (1991), 34–45.
- [4] J. Bang-Jensen and P. Hell, A note on chordal proper circular-arc graphs, *Discrete Mathematic* 128, (1994), 395–398.
- [5] C. Berge, *Graphs*, North-Holland, (1985).
- [6] C. Berge, Les problemes de colorations en théorie des graphes, *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 9, (1960), 123–160.
- [7] N. Biggs, E. Keith Lloyd and R. Wilson, *Graph Theory 1736-1976*, Clarendon Press, (1978).
- [8] A. Bondy, G. A. Durán, M. C. Lin and J. L. Szwarcfiter, A Sufficient Condition for Self-Clique Graphs, presentado en *The Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics (GRACO 2001)*, Fortaleza, Brasil, (2001), aceptado para su publicación en *Electronic Notes in Discrete Mathematics*.
- [9] A. Bondy, G. A. Durán, M. C. Lin and J. L. Szwarcfiter, On self-Clique graphs and 2-self-clique graphs, en preparación para ser enviado a *Discrete Applied Mathematics*.
- [10] C. F. Bornstein and J. L. Szwarcfiter, On clique convergent graphs, *Graphs and Combinatorics*, 11, (1995), 213–220.
- [11] C. F. Bornstein and J. L. Szwarcfiter, Iterated clique graphs with increasing diameters, *Journal of Graph Theory*, 28, (1998), 147–154.

- [12] C. F. Bornstein and J. L. Szwarcfiter, A characterization of clique graphs of rooted path graphs. In Y. Alavi, D. R. Lick and A. Schwenck, editors, Proceedings of the 8th Quadriennial Conference on Graph Theory, Algorithms, Combinatorics and Applications, Western Michigan University, New Issues Press, (1999), 117–122.
- [13] A. Bouchet, Reducing prime graphs and recognizing circle graphs, *Combinatorica* 7, 3, (1987), 243–254.
- [14] A. Brandstadt, V. Chepoi, F. Dragan and V. Voloshin, Dually chordal graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 11, (1999), 437–455.
- [15] A. Brandstadt, V. Le and J. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, (1999).
- [16] G. Chang, M. Farber and Z. Tuza, Algorithmic aspects of neighbourhood numbers, *SIAM J. on Discrete Mathematics* 6, (1993), 24–29.
- [17] B. L. Chen and K. W. Lih, Diameters of iterated clique graphs of chordal graphs, *Journal of Graph Theory*, 14, (1990), 391–396.
- [18] G. L. Chia, On self-clique graphs with given clique sizes, *Discrete Mathematics* 212, (2000), 185–189.
- [19] L. Chong-Keang and P. Yee-Hock, On Graphs without Multicliqual Edges, *Journal of Graph Theory* 5, (1981), 443–451.
- [20] C. Colbourn, On testing isomorphism of permutation graphs, *Networks* 11, (1981), 13–21.
- [21] G. Confessore, P. Dell’Olmo and S. Giordani, An approximation result for a periodic allocation problem, *Discrete Applied Mathematics*, en prensa.
- [22] S. Cook, The complexity of theorem-proving procedures, *Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing Machinery*, New York, (1971), 151–158.
- [23] D. Corneil, H. Lerchs and L. Stewart Burlingham, Complement reducible graphs, *Discrete Applied Mathematics* 3, (1981), 27–45.
- [24] C. L. Deng and C. K. Lim, A class of clique-closed graphs, *Discrete Mathematics* 127, (1994), 131–137.
- [25] X. Deng, P. Hell and J. Huang, Linear time representation algorithms for proper circular-arc graphs and proper interval graphs, *SIAM Journal of Computing*, 25, (1996), 390–403.
- [26] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, (1997).

- [27] M. C. Dourado, F. Protti and J. L. Szwarcfiter, The complexity of recognizing graphs with Helly defect one, en preparación.
- [28] G. A. Durán, Sobre grafos intersección de arcos y cuerdas en un círculo, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires, (2000).
- [29] G. A. Durán and M. C. Lin, On some subclasses of circular-arc graphs, presentado en la 31th. SE International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Florida Atlantic University, (2000), y aceptado para su publicación en *Congressus Numerantium*.
- [30] G. A. Durán and M. C. Lin, Clique graphs of Helly circular-arc graphs, *Ars Combinatoria*, en prensa.
- [31] G. A. Durán, M. C. Lin and J. L. Szwarcfiter, On clique-transversal and clique-independent sets, enviado para su publicación en *Annals of Operations Research*.
- [32] P. Erdős, T. Gallai and Z. Tuza, Covering the cliques of a graph with vertices, *Discrete Mathematics* 108, (1992), 279–289.
- [33] F. Escalante, Über iterierte Clique-Graphen, *Abhandlungender Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 39, (1973), 59–68.
- [34] F. Escalante and B. Toft, On clique-critical graphs, *Journal of Combinatorial Theory B*, 17, (1974), 170–182.
- [35] S. Even and A. Itai, Queues, stacks and graphs, in *Theory of Machines and Computations*, Academic Press, New York, (1971), 71–86.
- [36] C. Gabor, K. Supowit and W. Hsu, Recognizing circle graphs in polynomial time, *Journal of the ACM*, Vol. 36, 3, (1989), 435–473.
- [37] M. Garey and D. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman and Company, San Francisco, (1979).
- [38] F. Gavril, Algorithms on circular-arc graphs, *Networks* 4, (1974), 357–369.
- [39] M. Golumbic, *Algorithm Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, (1980).
- [40] V. Guruswami and C. Pandu Rangan, Algorithmics aspects of clique-transversal and clique-independent sets, *Discrete Applied Mathematics* 100, (2000), 183–202.
- [41] M. Gutierrez, *Intersection Graphs and Clique Operator*, *Graphs and Combinatorics*, en prensa (aparecerá en 2001).

- [42] M. Gutierrez, Comunicación personal, (2001).
- [43] M. Gutierrez, Tree-clique graphs, In J. Szwarcfiter, editor, Workshop Internacional de Combinatória, Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, (1996), 7–26.
- [44] M. Gutierrez and J. Meidanis, Algebraic Theory for the Clique Operator, texto preparado para los cursos dictados durante la visita al Departamento de Matemática de la UNLP del profesor Meidanis en 1998 y 1999.
- [45] M. Gutierrez and J. Meidanis, Recognizing clique graph of directed edge path graphs, Manuscrito.
- [46] M. Gutierrez and J. Meidanis, On the clique operator, Lecture Notes in Computer Science, 1380, Proceedings of the 3rd Latin American Conference on Theoretical Informatics, (1998), 261–272.
- [47] M. Gutierrez and L. Obiña, Minimum proper interval graphs, Discrete Mathematics, 142, (1995), 77–85.
- [48] M. Gutierrez and R. Zucchello, Grafos ACI: Una generalización de los grafos de intervalos propios, Manuscrito.
- [49] H. Hadwiger, Debrunner and V. Klee, Combinatorial Geometry in the Plane, New York: Holt Rinehardt and Winston, (1964), 54.
- [50] R. Hamelink, A partial characterization of clique graphs, Journal of Combinatorial Theory B 5, (1968) 192–197.
- [51] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, (1969).
- [52] S. Hedetniemi and P. Slater, Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, (1972), 139–147.
- [53] B. Hedman, Clique graphs of time graphs, Journal of Combinatorial Theory Ser. B 37, (1984), 270–278.
- [54] B. Hedman, A polynomial algorithm for constructing the clique graph of a line graph, Discrete Applied Mathematics, 15, (1986), 61–66.
- [55] P. Hell, J. Bang-Jensen and J. Huang, Local tournaments and proper circular-arc graphs, Algorithms, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 450, Springer-Verlag, (1990), 101–109.
- [56] P. Hell and J. Huang, Lexicographic orientation and representation algorithms for comparability graphs, proper circular-arc graphs and proper interval graphs, Journal of Graph Theory 20, (1995), 361–374.

- [57] W. Hsu,  $O(m.n)$  algorithms for the recognition and isomorphism problems on circular-arc graphs, *SIAM J. Comput.* 24, (1995), 411–439.
- [58] L. Hubert, Some applications of graph theory and related non-metric techniques to problems of approximate seriation: the case of symmetry proximity measures, *British J. Math. Statist Psychology* 27, (1974), 133–153.
- [59] R. Karp, Reducibility among combinatorial problems, en R. Miller y J. Thatcher (eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York (1972), 85–103.
- [60] V. Klee, What are the intersection graphs of arcs in a circle ?, *Amer. Math. Monthly*, 76, N.7, (1969), 810–813.
- [61] M. Knor, L. Niepel and L. Soltes, Centers in line graphs, *Math. Slovaca*, 43, (1993), 11–20.
- [62] D. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 1, Addison-Wesley, (1969).
- [63] F. Larrión and V. Neumann-Lara, On clique divergent graphs with linear growth, *Manuscrito*.
- [64] F. Larrión and V. Neumann-Lara, A family of clique divergent graphs with linear growth, *Graphs and Combinatorics*, 13, (1997), 263–266.
- [65] F. Larrión and V. Neumann-Lara, Clique divergent graphs with unbounded sequence of diameters. *Discrete Mathematics*, (1999), 491–501.
- [66] F. Larrión and V. Neumann-Lara, Locally  $C_6$  graphs are clique divergent, *Discrete Mathematics*, 215, (2000) 159-170.
- [67] F. Larrión, V. Neumann-Lara and M. A. Pizaña, Whitney triangulations, local girth and iterated clique graphs, *Manuscrito*.
- [68] F. Larrión, V. Neumann-Lara and M. A. Pizaña, Clique divergent clockwork graphs and partial orders (extended abstract), *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, (2001), en prensa.
- [69] M. C. Lin and J. L. Szwarcfiter, Clique graphs of Helly circular graphs, en preparación.
- [70] C. L. Lucchesi, C. P. Mello and J. L. Szwarcfiter, On clique-complete graphs, *Discrete Mathematics*, 183, (1998), 247–254.
- [71] T. McKee and F. McMorris, *Topics in Intersection Graph Theory*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, (1999).

- [72] C. P. Mello, Comunicación personal, (2001).
- [73] J. Mycielski, Sur le coloriage des graphes, *Colloq. Math.* 3, (1955), 161–162.
- [74] W. Naji, Reconnaissance des graphes de cordes, *Discrete Math.* 54, (1985), 329–337.
- [75] V. Neumann-Lara, On clique-divergent graphs, In *Problèmes Combinatoires C.N.R.S.* 260.
- [76] V. Neumann-Lara, Clique divergence in graphs, In *Algebraic Methods in Graph Theory*, volume 25, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, Szeged, Hungary, (1981), 563–569.
- [77] V. Neumann-Lara, Clique divergence in graphs - some variations, Technical report, Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, (1991).
- [78] L. Niepel, M. Knor and L. Soltes, Distances in iterated line graphs, *Ars Combinatoria*, 43, (1996), 193–202.
- [79] M. A. Pizaña, The icosahedron is clique-divergent, Manuscrito.
- [80] E. Prisner, Convergence of iterated clique graphs, *Discrete Mathematics*, 103, (1992), 199–207.
- [81] E. Prisner, *Graphs Dynamics*, Pitman Research Notes in Mathematics, Series 338, Longman, (1995).
- [82] E. Prisner, Graphs with few cliques, In Y. Alavi and A. Schwenk (eds.), *Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proceedings of the 7th. Quadrennial International Conference on the Theory and Applications*, John Wiley and Sons, (1995), 945–956.
- [83] E. Prisner, Hereditary clique-Helly graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 14, (1993), 216–220.
- [84] E. Prisner and J. L. Szwarcfiter, Recognizing clique graphs of directed and root path graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 94, (1999), 321–328.
- [85] F. Protti, *Classes de Grafos Clique-inversos*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1998).
- [86] F. Protti and J. L. Szwarcfiter, Clique-inverse graphs of  $K_3$ -free and  $K_4$ -free graphs, *Journal of Graph Theory*, 35, (2000), 257–272.
- [87] F. Protti and J. L. Szwarcfiter, On clique graph of linear size, *Congressus Numerantium*, (2000), en prensa.

- [88] F. Protti and J. L. Szwarcfiter, Clique-inverse graphs of bipartite graphs, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial computing*, (2001), en prensa.
- [89] B. Reed, Comunicación personal, (2000).
- [90] D. Robak, Comunicación personal, (2001).
- [91] F. Roberts and J. Spencer, A characterization of clique graphs, *Journal of combinatorial Theory, Series B* 10, (1971), 102–108.
- [92] D. Skrien, A relationship between triangulated graphs, comparability graphs, proper interval graphs, proper circular-arc graphs and nested interval graphs, *Journal of Graph Theory* 6, (1982), 309–316.
- [93] J. Spinrad, Circular-arc graphs with clique cover number two, *Journal of Comb. Theory B* 44, (1988), 300–306.
- [94] J. Spinrad, Recognition of circle graphs, *Journal of Algorithms*, 16 (2), (1994), 264–282.
- [95] J. Spinrad, Recognition of graphs, Libro manuscrito, (1997).
- [96] F. Stahl, Circular genetic maps, *J. Cell Physiol.* 70, Suppl. 1, (1967), 1–12.
- [97] K. Stouffers, Scheduling of traffic lights - A new approach, *Transportation Res.* 2, (1968), 199–234.
- [98] J. L. Szwarcfiter, Recognizing clique-Helly graphs, *Ars Combinatoria* 45, (1997), 29–32.
- [99] J. L. Szwarcfiter and C. F. Bornstein, Clique graphs of chordal and path graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, Vol 7 N. 2, (1994), 331–336.
- [100] S. Tsukiyama, M. Idle, H. Ariyoshi and Y. Shirakawa, A new algorithm for generating all the maximal independent sets, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 6. N. 3, (1977), 505–517.
- [101] A. Tucker, Two characterizations of proper circular-arc graphs, Doctoral dissertation, Stanford Operations Research Department, (1969).
- [102] A. Tucker, Characterizing circular-arc graphs, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76, (1970), 1257–1260.
- [103] A. Tucker, Matrix characterizations of circular-arc graphs, *Pacific J. Math.* 38, (1971), 535–545.
- [104] A. Tucker, Structure theorems for some circular-arc graphs, *Discrete Mathematics* 7, (1974), 167–195.

- [105] A.Tucker, Coloring a family of circular-arc graphs, SIAM J. Appl. Math. 29, (1975), 493-502.
- [106] A. Tucker, An efficient test for circular-arc graphs, SIAM J. Comput. 9, (1980), 1-24.